A 2. analízis megalapozása zh megoldásai

2011 május 19.

1. Határozzuk meg a sorozatok határértékét, ha vannak!

$$a)\ 0,99^n n! \qquad\qquad b)\ \frac{(-10)^n - n^{200}}{n^{10} + 200^n}$$

Megoldás.

a) $a_n := 0,99^n n! = \frac{n!}{\left(\frac{1}{0,99}\right)^n}$. Előadáson volt, hogy $n!$ nagyságrendje nagyobb mint q^n-é tetszőleges $q > 1$-re, tehát $a_n \to \infty$.

b) Egyszerűsítünk 200^n-nel:

$$b_n := \frac{(-10)^n - n^{200}}{n^{10} + 200^n} = \frac{\left(\frac{-1}{20}\right)^n - \frac{n^{200}}{200^n}}{\frac{n^{10}}{200^n} + 1}.$$

$\left(\frac{-1}{20}\right)^n \to 0$ hiszen az alap abszolútértéke kisebb mint 1. $\frac{n^{200}}{200^n} \to 0$ és $\frac{n^{10}}{200^n} \to 0$ hiszen a^n nagyságrendje nagyobb mint n^k-é tetszőleges $a > 1$, $k > 0 - ra$. Tehát $b_n \to 0$.

2. Határozzuk meg a sorozatok határértékét, ha vannak!

$$a)\ \sqrt[n]{3^n + n} \qquad\qquad b)\ \sqrt[n]{3^n - n}$$

Megoldás. Rendőrelvet alkalmazunk mindkét limesznél, ezért alulról és felülről becslünk:

a) $3 = \sqrt[n]{3^n} < \sqrt[n]{3^n + n} < \sqrt[n]{3^n + 3^n} = \sqrt[n]{2} \cdot 3$

minden elég nagy n-re hiszen 3^n nagyságrendje nagyobb mint n-é. $\sqrt[n]{2} \to 1$, tehát $\sqrt[n]{3^n + n} \to 3$.

b) $\sqrt[n]{1/2} \cdot 3 = \sqrt[n]{3^n - 1/2 \cdot 3^n} < \sqrt[n]{3^n - n} < \sqrt[n]{3^n} = 3$

minden elég nagy n-re hisz $\frac{1}{2}3^n$ nagyságrendje nagyobb mint n-é. $\sqrt[n]{1/2} \to 1$, tehát $\sqrt[n]{3^n - n} \to 3$.

3. Mi a következő állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} a_n = 5 \qquad\qquad (ii)\ \lim_{n\to\infty} a_n^2 = 25$$

Megoldás. Az $(i) \Longrightarrow (ii)$ következtetés igaz, a $(ii) \Longrightarrow (i)$ viszont hamis.

Az $(i) \Longrightarrow (ii)$ állítás bizonyítása: Tanultuk, hogy ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, akkor $a_n b_n \to AB$. Ezt $a_n = b_n, A = B = 5$-re alkalmazva kapjuk, hogy $a_n \to 5$ esetén $a_n \cdot a_n \to 5 \cdot 5$, tehát (i)-ből következik (ii). (Másik lehetőség, hogy a folytonosságra vonatkozó átviteli elvet alkalmazzuk az $f(x) = x^2$ függvényre az 5 pontban.)

Ellenpélda a $(ii) \Longrightarrow (i)$ irányra: Legyen $a_n = (-1)^n \cdot 5$. Ekkor $a_n^2 = 25 \to 25$, de $a_n \not\to 5$, hiszen végtelen sok tag van például az $(5-1, 5+1)$ intervallumon kívül. (Még egyszerűbb ellenpélda az $a_n = -5$ konstans sorozat.)

4. Vannak-e olyan (a_n) és (b_n) sorozatok, amelyekre $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ és

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = 2\ ?$$

Megoldás. Igen.

I. példa: Legyen $a_n = \sqrt[n]{2}$ és $b_n = n$. Ekkor $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$, $\lim_{n\to\infty} n = \infty$ és $a_n^{b_n} = 2$ minden n-re, tehát $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = 2$.

II. példa: Legyen $a_n = 1+\dfrac{1}{n}$, $b_n = n \cdot \ln 2$. Ekkor nyilván teljesül, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Másrészt, felhasználva, hogy

$$a_n^{b_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot\ln 2} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\ln 2}$$

és $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$, a folytonos függvényekre vonatkozó átviteli elvet az e pontban használva azt kapjuk, hogy $a_n^{b_n} \to e^{\ln 2} = 2$.

5. Bizonyítsuk be, hogy nem létezik a $\lim_{x\to\infty} \sin(x)$ függvényhatárérték!

I. Bizonyítás (Átviteli elvvel): Indirekt bizonyítunk, tegyük fel, hogy van határérték, azaz valamilyen $\beta \in \mathbb{R}$ vagy $\beta = \pm\infty$-re $\lim_{x\to\infty} \sin(x) = \beta$. A végtelenben vett határértékre vonatkozó átviteli elv egyik iránya szerint, ha $\lim_{x\to\infty} f(x) = \beta$, akkor minden $a_n \to \infty$ sorozatra $f(a_n) \to \beta$. Ezt az $f(x) = \sin(x)$ függvényre és az $a_n = n\pi + \frac{\pi}{2}$ sorozatra alkalmazva azt kapjuk, hogy $\sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) \to \beta$, ami ellentmondás, hiszen $\sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^n$, aminek nincs határértéke.

II. Bizonyítás (Cauchy kritériummal): Indirekt bizonyítva megint tegyük fel, hogy van határérték. Mivel $\sin(x)$ korlátos, ezért $\pm\infty$-hez nem tarthat, tehát ekkor $\sin(x)$-nek véges határértéke van ∞-ben. A végtelenben vett határértékre vonatkozó Cauchy kritérium szerint, ha $f(x)$-nek van véges határértéke ∞-ben, akkor minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan L, amelyre $x, y \geq L$ esetén $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Ezt alkalmazva az $f(x) = \sin x$ függvényre azt kapjuk, hogy $\varepsilon = 1$-hoz van olyan L, amelyre $x, y \geq L$ esetén $|\sin(x) - \sin(y)| < 1$. De ez nem lehet, mert bármely L-hez választhatunk L-nél nagyobb $x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ és $y = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$ számokat, és ezekre $|\sin(x) - \sin(y)| = |1 - (-1)| = 2$, tehát ellentmondást kaptunk.

III. Bizonyítás (definícióból): Megint tegyük föl, hogy van határérték. A korlátosság miatt ez megint csak véges lehet, jelöljük B-vel. A végtelenben vett függvényhatárérték definíciója szerint ekkor $\varepsilon = 1$-hez van olyan L, amelyre $x > L$ esetén $|\sin(x) - B| < 1$. Válasszuk n-et úgy, hogy $L < 2n\pi - \frac{\pi}{2} < 2n\pi + \frac{\pi}{2}$. Ekkor tehát egyrészt $1 > |\sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) - B| = |1 - B|$, ezért $B > 0$, másrészt $1 > |\sin(2n\pi - \frac{\pi}{2}) - B| = |-1 - B| = |B + 1|$, ezért $B < 0$, ami ellentmondás.

6. Írjuk fel a $\operatorname{tg} x$ függvény 0 körüli harmadfokú Taylor-polinomját!

Megoldás.

$$\operatorname{tg}'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2}, \qquad \operatorname{tg}''(x) = \frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)},$$

$$\operatorname{tg}'''(x) = [2\sin(x)\cos^{-3}(x)]' = 2\cos^{-2}(x) + 2\sin(x)\cdot(-3)\cdot\cos^{-4}(x)\cdot(-\sin(x)),$$

tehát $\operatorname{tg}(0) = 0$, $\operatorname{tg}'(0) = 1$, $\operatorname{tg}''(0) = 0$, $\operatorname{tg}'''(0) = 2$, és a harmadfokú Taylor-polinom:

$$0 + 1\cdot x + 0 + \frac{2}{3!}x^3 = x + \frac{x^3}{3}.$$

7. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög szögei α, β és γ, akkor

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Bizonyítás. Tanultuk, hogy konkáv függvények esetén fordított egyenlőtlenséggel igaz a Jensen-egyenlőtlenség, vagyis ha f konkáv az I intervallumon, $t_1, \ldots, t_n > 0, t_1 + \ldots + t_n = 1$ és $a_1, \ldots, a_n \in I$, akkor $f(t_1 a_1 + \ldots + t_n a_n) \geq t_1 f(a_1) + \ldots t_n f(a_n)$. Felírva ezt a $[0, \pi]$-n konkáv $\sin(x)$ függvényre $n = 3, t_1 = t_2 = t_3 = \frac{1}{3}$ súlyokkal az $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]$ szögekre, azt kapjuk hogy

$$\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) \geq \frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3}.$$

Mivel a háromszög szögeinek összege $180°$, azaz $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, ezért a bal oldalon álló kifejezés $\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, tehát ezt beírva a fenti egyenlőtlenségbe és 3-mal átszorozva épp a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.