Exponenciális és logaritmus függvények deriválása

Első célunk az a^x függvény deriválása rögzített $a > 0$ esetén. Definíció szerint

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

Mivel $\lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{0+h}-a^0}{h}$ definíció szerint épp az a^x függvény 0-beli deriváltja (ha létezik és véges), ezért a fenti számolásból az a tanulság, hogy elég lenne 0-ban meghatározni az a^x függvény deriváltját.

Heurisztika: Ha a kicsit nagyobb mint 1, akkor a^x meredeksége 0-ban kis pozitív szám, ha a-t növeljük, akkor ez a meredekség nő, nagy a-ra pedig nagyon nagy lesz. Ezek alapján azt várhatjuk, hogy van pontosan egy olyan a érték, amelyre ez a meredekség pont 1, azaz a 0-beli derivált pont 1, azaz $\lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = 1$. Ez a következő tétel szerint valóban így is van.

Tétel. Van pontosan egy olyan a pozitív valós szám, amelyre $\lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = 1$.

Bizonyítás helyett egyelőre meg kell elégednünk a fenti heurisztikával.

Definíció. A fenti tétel által adott számot szokás e-vel jelölni, azaz e az egyetlen olyan pozitív valós szám, amelyre

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Megjegyzések:

1. Nagyon-nagyon fontos ez a szám.
2. Rengeteg féleképpen lehet definiálni.
3. Az e szám irracionális, értéke $e = 2,71828.....$

Definíció. Az e alapú logaritmust *természetes alapú logaritmusnak* nevezzük és ln-nel vagy log-gal jelöljük.

Tétel. Az e^x függvény mindenütt differenciálható és

$$(e^x)' = e^x.$$

Bizonyítás: A derivált definícióját felírva, majd e^x-et kiemelve, végül e definícióját használva kapjuk, hogy

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

Tétel. Bármely $a > 0$-ra az a^x függvény mindenütt differenciálható és

$$(a^x)' = \ln a \cdot a^x.$$

Bizonyítás: Definíciók szerint $a = e^{\log_e a} = e^{\ln a}$. Ezt x-edik hatványra emelve és az egyik hatványozás azonosságot használva kapjuk, hogy

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \cdot \ln a}.$$

A fentieket, e^x deriváltját és a láncszabályt használva kapjuk, hogy

$$(a^x)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x.$$

Tétel. Az $\ln x$ függvény a teljes értelmezési tartományán mindenütt differenciálható és

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (x > 0).$$

Bizonyítás: Rögzítsünk egy $a > 0$ számot. Meg fogjuk mutatni, hogy az $\ln x$ függvény deriváljta a-ban $1/a$. Mivel a derivált az adott pontbeli érintő meredekségével egyezik meg, ezért ehhez azt kell belátnunk, hogy az $\ln x$ függvény grafikonjának van érintője az $(a, \ln a)$ ponton át, és ennek az érintő egyenesnek a meredeksége $1/a$.

Az az ötlet, hogy az $\ln x$ inverzfüggvényének, vagyis e^x-nek az érintőjéből fogjuk meghatározni $\ln x$ érintőjét tükrözés segítségével. Tekintsük tehát az e^x függvény grafikonját és a grafikont $(\ln a, a)$-ban érintő egyenest. (Mivel $e^{\ln a} = a$, ezért ez a pont tényleg rajta van a grafikonon.) Mivel $(e^x)' = e^x$ és $e^{\ln a} = a$, ezért az e^x függvény grafikonját $(\ln a, a)$-ban érintő egyenes meredeksége a.

Most tükrözzünk mindent az $y = x$ egyenesre! Ekkor az $(\ln a, a)$ pont az $(a, \ln a)$ pontba megy, e^x grafikonja $\ln x$ grafikonjába (hiszen egymás inverzei), ezért ezért az e^x függvény grafikonját $(\ln a, a)$-ban érintő egyenes az $\ln x$ függvény grafikonját $(a, \ln a)$-ban érintő egyenesbe megy. Mivel az eredeti egyenes meredeksége a, az $y = x$ egyenesre tükrözés egyenes meredekséget a reciprokára változtatja, ezért pont azt kaptuk, hogy az $\ln x$ függvény grafikonját $(a, \ln a)$-ban érintő egyenes meredeksége $1/a$.

Tehát az $\ln x$ függvény deriváljta a-ban $1/a$. Mivel a tetszőleges pozitív szám volt, ezért ez azt jelenti, hogy minden pozitív x-re $(\ln x)' = 1/x$.

Tétel. Bármely 1-től különböző pozitív a-ra a $\log_a x$ függvény a teljes értelmezési tartományán mindenütt differenciálható és

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \qquad (x > 0).$$

Bizonyítás: Mivel az ismert logaritmus azonosság szerint $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, ezért $\log_a x$ deriváltját vissza tudjuk vezetni $\ln x$ deriváljtára:

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1/x}{\ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$