2013 május 3. **Az analízis megalapozása** 1. csoport

20. feladatsor

1. Bizonyítsuk be, hogy ha az f függvény szigorúan monoton, akkor az inverze is szigorúan monoton.

2. Bizonyítsuk be a Cauchy-kritérium segítségével, hogy a következő függvényeknek nincs határértékük a megadott helyen!

   a) $\sin x$ ∞-ben (HF) b) $\sin \frac{1}{x}$ 0-ban c) $\operatorname{tg} x$ $\frac{\pi}{2}$-ben

3. Bizonyítsuk be, hogy ha az f függvény differenciálható 0-ban és $f(0) = 0$, akkor $f'(0) = \lim_{n\to\infty} n \cdot f(1/n)$.

4. Egy f függvényt Lipschitz-függvénynek hívunk, ha van olyan L konstans, amelyre $|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$ teljesül az értelmezési tartomány bármely x, y pontpárjára.

   Bizonyítsuk be, hogy ha f Lipchitz-függvény az (a, b) intervallumon, akkor létezik a $\lim_{x\to a+} f(x)$ határérték!

5. Milyen halmaz lehet $f([a, b))$, ha f folytonos függvény?

6. (HF) Adjunk minél több bizonyítást arra az állításra, hogy az $[x]$ (x egész része) függvény nem folytonos 0-ban!

7. (HF) Igaz-e hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény és $\lim_{n\to\infty} f(1/n) = f(0)$, akkor

   a) f folytonos 0-ban?

   b) f-nek van határértéke 0-ban?

   c) f-nek nem lehet $f(0)$-tól különböző határértéke 0-ban?

8. (HF) a) Igaz-e, hogy az a_{2n} és a_{2n+1} részsorozatok konvergensek, akkor az a_n sorozat is konvergens?

   a) Igaz-e, hogy az a_{2n}, a_{2n+1} és a_{3n} részsorozatok konvergensek, akkor az a_n sorozat is konvergens?

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a `www.cs.elte.hu/anal/keleti` oldalról is.