2013 február 18. **Az analízis megalapozása** 1. csoport

3. feladatsor

1. Jelentse $P(x)$ az „x páros”, $H(x)$ pedig az „x hattal osztható” állítást. Állapítsuk meg, hogy mit jelentenek a következő formulák, és hogy igazak-e!

$$a)\ P(4) \wedge H(12) \qquad b)\ \forall x\ P(x) \Rightarrow H(x) \qquad c)\ \exists x\ P(x) \wedge \overline{H(x)}$$

$$(HF) \qquad d)\ \exists x\ P(x) \wedge H(x+1) \qquad e)\ \forall x\ H(x) \Rightarrow P(x) \qquad f)\ \forall x\ \overline{H(x)} \Rightarrow \overline{P(x)}$$

2. Írjuk fel logikai jelekkel (de a tagadás jele nélkül) az alábbi állításokat!

   a) Az a_n sorozat konvergens.

   b) Az a_n sorozat divergens.

   (HF) c) Az $f(x)$ függvény folytonos az a pontban.

   (HF) d) Az $f(x)$ függvény nem folytonos az a pontban.

3. Igaz-e, hogy

$$a)\ (A \Longrightarrow B)\ =\ (B \Longrightarrow A)\ ? \qquad b)\ (A \Longrightarrow B)\ =\ (\overline{B} \Longrightarrow \overline{A})\ ?$$

$$(HF)\ c)\ (A \Longrightarrow B)\ =\ (\overline{A} \Longrightarrow \overline{B})\ ?$$

4. Adjunk meg olyan pozitív egész K számot, amelyre igaz, hogy ha $n > K$ pozitív egész, akkor $\dfrac{1}{\sqrt{n}} < \dfrac{1}{1000}$. Hány megoldása van a feladatnak?

5. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n esetén $(1 + \frac{1}{n})^n \geq 2$!

6. “Állítás: Az 1 a legnagyobb szám.
   Bizonyítás: Indirekt módon. Tegyük fel, hogy nem az 1 a legnagyobb szám, hanem A. Ekkor $A > 1 > 0$, továbbá $A > A^2$. Az utolsó egyenlőtlenség mindkét oldalát a pozitív A-val osztva azt kapjuk, hogy $1 > A$, ami ellentmond az indirekt feltevésnek, tehát mégis az 1 a legnagyobb szám.”

   Jó ez? Ha nem, akkor hol a hiba?

7. (HF) Tudjuk, hogy b és c olyan számok, melyekre $b \mid 2520 \Longrightarrow c \mid 2520$. Mire következtethetünk abból, hogy

$$a)\ b \nmid 2520; \qquad b)\ c \nmid 2520\ ?$$

8. (HF) Tagadjuk az alábbi állításokat!

   a) Minden egér szereti a sajtot.

   b) Aki másnak vermet ás, maga esik bele.

   c) Minden asszony életében jön egy pillanat, mikor olyat akar tenni, amit nem szabad.

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a `www.cs.elte.hu/anal/keleti` oldalról is.