2013 február 22. **Az analízis megalapozása** 1. csoport

4. feladatsor

1. Egy táncmulatságon lányok és fiúk táncoltak. Jelölje $T(L, F)$ azt az állítást, hogy az L lány az este folyamán táncolt az F fiúval. Fordítsuk le emberi nyelvre az összes alábbi állítást! Minden egy sorban lévő állításpárnál döntsük el, hogy van-e különbség a két állítás között, következik-e valamelyikből a másik, ekvivalensek-e?

   a) (i) $(\forall L)(\exists F)\ T(L, F)$ (ii) $(\exists F)(\forall L)\ T(L, F)$

   b) (i) $(\exists L)(\exists F)\ T(L, F)$ (ii) $(\exists F)(\exists L)\ T(L, F)$

   c) (HF) (i) $(\forall L)(\forall F)\ T(L, F)$ (ii) $(\forall F)(\forall L)\ T(L, F)$

2. Bizonyítsuk be, hogy van olyan n_0, amelyre $n > n_0$ esetén $3^n > 5n^2$ teljesül!

3. Mutassuk meg, hogy a Bernoulli-egyenlőtlenségben az $a \geq -1$ feltétel nem hagyható el, mert ha elhagynánk, hamis állítást kapnánk!

4. a) Egy futó 20 kört fut, a köröket rendre $v_1, \ldots, v_{20}$ sebességgel futja. A teljes távon vett átlagsebessége milyen közepe a $v_1, \ldots, v_{20}$ sebességeknek?

   b) Egy másik futó 20 percig fut, a sebességét percenként változtatja, a k-adik percben v_k sebességgel fut ($k = 1, 2, \ldots, 20$). Az ő teljes távon vett átlagsebessége milyen közepe a $v_1, \ldots, v_{20}$ sebességeknek?

   c) Melyik futónak nagyobb az átlagsebessége?

5. "Tétel: Minden ló egyszínű.

   Bizonyítás: Teljes indukcióval belátjuk, hogy bármely n ló egyszínű. $n = 1$-re az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy igaz n-re, és ebből fogjuk $n + 1$-re belátni: adott $n + 1$ ló közül az indukciós feltevés miatt az $1., 2., \ldots, n$-edik is egyszínű és a $2., \ldots, n$-edik, $(n + 1)$-edik is egyszínű, tehát mind az $n + 1$ egyszínű."

   Jó ez? Ha nem, akkor hol a hiba?

6. (HF) Tagadjuk az alábbi állításokat!

   a) Van, akit nem várnak, csak érkezik.

   b) Mindenki másképp csinálja.

   c) Londonban sej, van számos utca, és minden utcán van sarok.

7. (HF) Mi ez a halmaz?

   a) $\{x \in \mathbb{Z} \ :\ x^2 \leq 5\}$

   b) $\{x \in \mathbb{Z} \ :\ x^2 \leq 5 \wedge (x = 3 \vee x = -4)\}$

   c) $\{x \in \mathbb{R} \ :\ (\forall y \in \mathbb{R})\ y > x \Longrightarrow y^2 > 4\}$

   d) $\{x \in \mathbb{R} \ :\ (\forall y \in \mathbb{R})\ y < x \Longrightarrow y^2 < 4\}$

8. (HF) Bizonyítsuk be a mértani és harmonikus közép közötti egyenlőtlenséget a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségből!

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a `www.cs.elte.hu/anal/keleti` oldalról is.