2013 február 25. Az analízis megalapozása 1. csoport

5. feladatsor

1. Van-e olyan A halmaz, amelyre $\mathbb{Z} \subset A$ és $\mathbb{Z} \in A$ is teljesül?

2. Igaz-e, hogy

   a) $(A \subset B) \wedge (B \in C) \Longrightarrow A \subset C$?

   b) $(A \in B) \wedge (B \subset C) \Longrightarrow A \in C$?

   (HF) c) $(A \subset B) \wedge (B \in C) \Longrightarrow A \in C$?

   (HF) d) $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Longrightarrow A \subset C$?

   (HF) e) $(A \in B) \wedge (B \in C) \Longrightarrow A \in C$?

3. Igaz-e tetszőleges A és B halmazokra, hogy

   $a)\ A \setminus B = A \cap \overline{B}$? $\qquad b)\ (A \cup B) \setminus B = A$? $\qquad (HF)\ c)\ (A \setminus B) \cup B = A$?

   Amelyik nem igaz, ott döntsük el, hogy igaz-e valamelyik tartalmazás, azaz hogy igaz állítást kapunk-e (minden A, B halmazpárra), ha $=$ helyett $\subset$-t vagy $\supset$-t írunk!

4. Legyen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ állítások egy sorozata. Mely állításokról tudjuk biztosan, hogy igazak, illetve mely állításokról tudjuk biztosan, hogy hamisak, ha

   a) A_1 igaz, és ha A_n igaz, akkor A_{n+1} igaz.

   b) A_1 igaz, és ha A_n igaz, akkor A_{n-1} igaz.

   c) A_{10} hamis, és ha A_n igaz, akkor A_{n-1} igaz.

   d) A_1 igaz, és ha A_n igaz, akkor A_{2n} igaz.

   (HF) e) A_1 igaz, és ha A_n hamis, akkor A_{n+1} hamis.

   f) A_1 igaz, és ha A_n hamis, akkor A_{n-1} hamis.

   g) Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén A_{2^n} hamis, és ha A_n igaz, akkor A_{n+1} igaz.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b, c > 0$ és $n \in \mathbb{N}^+$, akkor fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek!

   $$a)\ n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \qquad (HF)\ b)\ a + \frac{1}{a} \ge 2 \qquad c)\ \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \ge 3$$

6. Van-e olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre

   a) $1,001^n > 999$

   b) $\sqrt[n]{999} < 1,001$?

7. Írjuk fel formulákkal (szöveg nélkül) azt, hogy a H halmaz pontosan 1 elemű!

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a `www.cs.elte.hu/anal/keleti` oldalról is.