Kalkulus1, második vizsga 2. feladat megoldása

2.(a) (5 pont) Határozza meg a $\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$ függvény baloldali határértékét 0-ban, jobboldali határértékét 0-ban és a határértékét 0-ban!

MEGOLDÁS:
Baloldali határérték:
1. megoldás:
Mivel a számláló és a nevező is 0-hoz tart, hat ha $x \to 0$ balról, ezért próbálkozzunk a L'Hospital-szabállyal: $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\cos x}{\sin x} = -\infty$, mert a számlálóban lévő függvény határértéke 0-ban balról 1, és a nevezőben lévő függvény határértéke 0-ban balról 0, továbbá a nevező negatív. Így a L'Hospital-szabály miatt $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x}{1-\cos x} = -\infty$.

2. megoldás:
$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x}{1-\cos x}\cdot\dfrac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x(1+\cos x)}{\sin^2 x} =$
$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1+\cos x}{\sin x} = -\infty$, mert a számlálóban lévő függvény határértéke 0-ban balról 2, és a nevezőben lévő függvény határértéke 0-ban balról 0, továbbá a nevező negatív.

Jobboldali határérték:
1. megoldás:
A deriváltak hányadosának határértéke: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos x}{\sin x} = \infty$, mert a számlálóban lévő függvény határértéke 0-ban jobbról 1, és a nevezőben lévő függvény határértéke 0-ban jobbról 0, továbbá a nevező pozitív. Így a L'Hospital-szabály miatt $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{1-\cos x} = \infty$.

2. megoldás:
$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1+\cos x}{\sin x} = \infty$, mert a számlálóban lévő függvény határértéke 0-ban balról 2, és a nevezőben lévő függvény határértéke 0-ban balról 0, továbbá a nevező pozitív.

Határérték: Mivel a függvény baloldali és jobboldali határértéke 0-ban nem egyezik meg, a függvénynek 0-ban nincs határértéke.

2.(b) (15 pont) Végezze el a $\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

MEGOLDÁS:
Értelmezési tartomány: $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi\}$, ahol k egész szám.
Zérushely: $x = (2k+1)\pi$, ahol k egész szám.
Mivel $f(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{1-\cos(-x)} = \dfrac{-\sin x}{1-\cos x} = -f(x)$, a függvény páratlan.
Mivel $f(x+2\pi) = \dfrac{\sin(x+2\pi)}{1-\cos(x+2\pi)} = \dfrac{\sin x}{1-\cos x} = f(x)$, ezért a függvény periodikus, 2π pedig periódus.

Határértékek:
Az (a) részében bizonyítottak és a periodikusság miatt
$\lim\limits_{x\to 2k\pi^-} \dfrac{\sin x}{1-\cos x} = -\infty$ és $\lim\limits_{x\to 2k\pi^+} \dfrac{\sin x}{1-\cos x} = \infty$, ahol k egész szám.

A függvény periodikus és nem konstans, ezért végtelenben és mínusz végtelenben nincs határértéke.
Függőleges aszimptoták: $x = 2k\pi$, ahol k egész szám.
A függvény az értelmezési tartományának minden pontjában folytonos, mert folytonos függvényekből van összerakva.
A függvény menete:

$$f'(x) = \frac{\cos x(1-\cos x) - \sin^2 x}{(1-\cos x)^2} = \frac{\cos x - 1}{(1-\cos x)^2} = \frac{-1}{1-\cos x} < 0, \text{ mert a nevező mindig pozitív.}$$

A függvény egy periódusa, ahol k egész szám:

	$2k\pi$	$(2k\pi, (2k+2)\pi)$
f'	nincs értelmezve	$-$
f	nincs értelmezve	szig. mon. csökken

A függvénynek nincs lokális szélsőértéke.

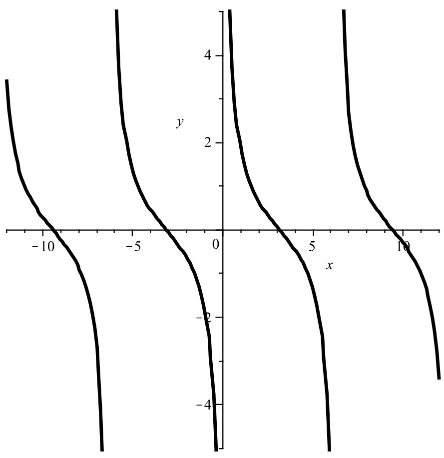
A függvény alakja:

$$f''(x) = \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}$$

Mivel a nevező minden x-re pozitív, $f''(x)$ előjele csak $\sin x$ előjelétől függ.
A függvény egy periódusa, ahol k egész szám:

	$2k\pi$	$(2k\pi, (2k+1)\pi)$	$(2k+1)\pi$	$((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$
f'	nincs ért.	$+$	0	$-$
f	nincs ért.	konvex	infl. pont	konkáv

A függvény grafikonja:



A függvénynek nincs abszolút minimuma, és nincs abszolút maximuma.
A függvény értékkészlete: $\mathbb{R}$.