

Kalkulus 2. zh megoldása

1. Deriváljuk a következő függvényeket!

a) $\frac{3x^2 - x + 1}{5} + 7x \sin^2(3x + 1)$

MEGOLDÁS:

$$f(x) = \frac{1}{5}(3x^2 - x + 1) + 7x \sin^2(3x + 1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{5}(6x - 1) + 7 \sin^2(3x + 1) + 7x \cdot 3 \cdot \cos(3x + 1) \cdot 2 \sin(3x + 1)$$

b) $g(x) = \frac{x \operatorname{tg}(-x)}{\sqrt[3]{x} - \cos x} + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

MEGOLDÁS:

$$g'(x) = \frac{\left(\operatorname{tg}(-x) - \frac{x}{\cos^2(-x)}\right) (\sqrt[3]{x} - \cos x) - x \operatorname{tg}(-x) \left(\frac{1}{3}x^{-2/3} + \sin x\right)}{(\sqrt[3]{x} - \cos x)^2} + 0$$

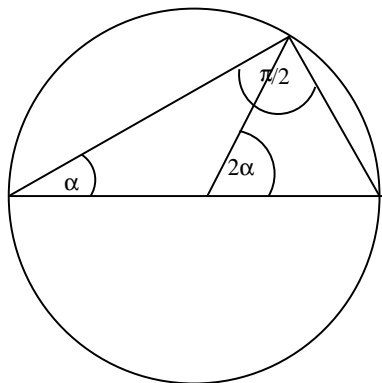
2. Pisti egy 100m sugarú kör alakú tó partján áll és át akar jutni az átellenes pontra. Úszik egy húr mentén, majd onnan gyalog megy. Hogyan ér át a leghamarabb, ha 1m/s sebességgel úszik és 2 m/s sebességgel gyalogol?

MEGOLDÁS:

Ha az átmérővel α szöget bezáró húr mentén úszik, akkor akkor $200 \cos \alpha$ m utat kell leúsznia, hiszen a húr egy 200 m átfogójú derékszög (Tálész tétel!) α szöge melletti befogó. Utána egy $100 \cdot 2\alpha$ m hosszú íven fog sétálni. (L. ábra) Tehát az α szöghöz

$$f(\alpha) = \frac{200 \cos \alpha}{1} + \frac{100 \cdot 2\alpha}{2} = 200 \cos \alpha + 100\alpha$$

másodperc idő tartozik. A feladat $\alpha \in [0, \pi/2]$ -re értelmes. Mivel $f'(\alpha) = 100 - 200 \sin \alpha$ ezért $\sin \alpha = 1/2$ -nél, azaz $\alpha = \pi/6$ -nál lehet f -nek lokális szélsőértéke. Vagyis ki kell számolnunk f -et a végpontokban és $\pi/6$ -ban: $f(0) = 200$, $f(\pi/6) = 100(\sqrt{3} + \pi/6)$, $f(\pi/2) = 100(\pi/2)$. Mivel $2 > \sqrt{3} > \pi/2$, ezért $\alpha = \pi/2$ -nél van a minimum, Pistike akkor ér a túloldalra a leggyorsabban, ha végig a parton sétál.



3. A Boszorkánykonyha piackutatói szerint ha x petákért árulják a varázspor 1 grammját, akkor $\frac{20}{x^2}$ kg fogy belőle egy évben. Milyen ár esetén lesz a legnagyobb a Boszorkánykonyha haszna (haszon = összes bevétel - összes költség), ha 1 gramm varázspor előállítási költsége 5 peták, és mennyi lesz ekkor az éves hasznuk?

MEGOLDÁS:

Számoljunk mindent grammban. Egy gramm varázsporon $x - 5$ peták a haszon tehát az összhaszon

$$f(x) = \frac{20000}{x^2}(x - 5)$$

lesz. Mivel $x < 5$ petákra negatív a haszon ezért a feladat $x \in [5, \infty)$ -re értelmes. Mivel

$$f'(x) = 20000 \cdot \frac{x^2 - 2x(x - 5)}{x^4},$$

ezért lokális szélsőérték ott lehet, ahol $x^2 - 2x(x - 5) = 10x - x^2 = x(10 - x)$ -nek gyöke van, vagyis $x = 0$ vagy $x = 10$. Csak az $x = 10$ van benne $[5, \infty)$ -ben, tehát elég észrevennünk, hogy $f'(x)$ nevezője mindig pozitív, a számláló meg $5 \leq x < 10$ -re pozitív és $x > 10$ -re negatív, tehát $f(x)$ szigorúan monoton nő $5 \leq x \leq 10$ -re és szigorúan monoton csökken $x \geq 10$ -re. Vagyis $x = 10$ -nél $f(x)$ -nek abszolút maximuma van. Az éves haszon ekkor:

$$f(10) = \frac{20000}{100} \cdot 5 = 1000$$

peták.

4. (2 pont) Végezzük el az $f(x) = \frac{x^3}{x - 1}$ teljes függvényvizsgálatát!

MEGOLDÁS:

Értelmezési tartomány: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Zérushely: $x = 0$.

Mivel $f(-x) = \frac{-x^3}{-x - 1} \neq f(x)$ és $f(-x) \neq -f(x)$, a függvény se nem páros, se nem páratlan.

A függvény nem periodikus.

Határértékek:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{1 - 1/x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1 - 1/x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{x - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{x - 1} = \infty$$

Függőleges aszimptota: $x = 1$.

A függvény az értelmezési tartományának minden pontjában folytonos.

A függvény menete:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x - 1) - x^3}{(x - 1)^2} = \frac{x^2}{(x - 1)^2}(2x - 3)$$

$f'(x)$ előjele megegyezik $2x - 3$ előjével. Így

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 3/2)$	3/2	$(3/2, \infty)$
f'	-	0	-	nincs ért.	-	0	+
f	szig. mon. csökken		szig. mon. csökken	nincs ért.	szig. mon. csökken	lok. min. hely	szig. mon. nő

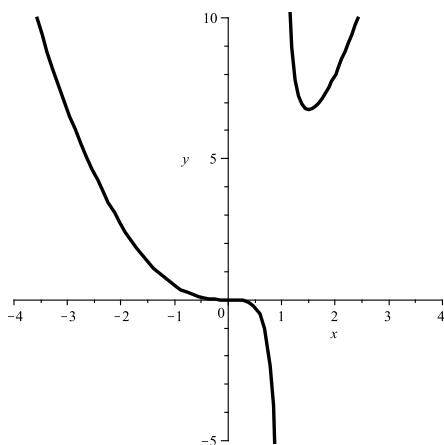
Lokális minimum érték: $f(3/2) = 6,75$.

A függvény alakja:

$$f''(x) = \frac{(6x^2 - 6x)(x - 1)^2 - (2x^3 - 3x^2)(2x - 2)}{(x - 1)^4} = \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x}{(x - 1)^3} = \frac{2x}{(x - 1)^3}(x^2 - 3x + 3).$$

Mivel $(x^2 - 3x + 3)$ minden x -re pozitív, $f''(x)$ előjele csak $\frac{2x}{(x - 1)^3}$ -től függ. Továbbá, ha $x < 0$, akkor $x - 1 < 0$ is teljesül.

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
f''	+	0	-	nincs ért.	+
f	konvex	infl. pont	konkáv	nincs ért.	konvex



A függvénynek nincs abszolút minimuma, és nincs abszolút maximuma.

A függvény értékkészlete: \mathbb{R} .

5.

a) Van-e olyan differenciálható függvény, amely szigorúan konvex a számegeyenesen, és van lokális maximuma?

MEGOLDÁS:

Egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre akkor mondtuk, hogy szig. konvex az egész számegeyenesen, ha mindenhol differenciálható, és az f' derivált függvény szig. monoton nő az egész \mathbb{R} -en. Előadáson láttuk, hogy ha egy differenciálható függvénynek egy x_0 pontban lokális szélsőértéke van, akkor $f'(x_0) = 0$. Mivel f' szigorúan monoton nő és $f'(x_0) = 0$, ezért x_0 előtt f' negatív, x_0 után pedig pozitív, így $(-\infty, x_0]$ -n f szig. monoton csökken, míg $[x_0, \infty)$ -n szig. monoton nő. Vagyis az x_0 pontban nem lehet lokális maximuma. (Sőt, biztosan tudjuk, hogy itt abszolút minimuma van.)

b) Van-e olyan differenciálható függvény, amely szigorúan konvex $[1, \infty)$ -en, és nincs abszolút minimuma $[1, \infty)$ -en?

MEGOLDÁS:

Van ilyen függvény, például az $f(x) = 1/x$. Egyrészt $f''(x) = 2/x^3 > 0$ az $[1, \infty)$ intervallumon, így f ott szig. konvex. Másrészt, $1/x$ szig. monoton csökken $[1, \infty)$ -n, így természetesen nincs abszolút minimuma.

6. Határozzuk meg az alábbi határértékeket!

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{x} - 1}$

1. MEGOLDÁS:

Mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, ha $x \rightarrow 1$; megpróbálhatjuk alkalmazni a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x - 2)'}{(\sqrt{x} - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{3}{1/2} = 6$$

Mivel ez a határérték létezik, ezért a L'Hospital-szabály értelmében az eredeti határérték is létezik és egyenlő 6-tal.

2. MEGOLDÁS:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+2)}{\sqrt{x} - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1)(x+2) = 6 \end{aligned}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3} \right)$

MEGOLDÁS:

Közös nevezőre hozással fölírjuk a különbséget hányadosként, hogy a L'Hospital-szabállyal próbálkozhassunk:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

Mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, ha $x \rightarrow 0$; L'Hospitalással próbálkozunk:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$$

Ez továbbra is kritikus alak.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x}$$

Még mindig.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

Mivel ez az utolsó határérték létezik, ezért a korábbiak is léteznek, és mind egyenlők 1/6-dal.