2008 május 5. II. elemző analízis 2007-2008/II. félév

Kiegészítés és feladatsor vonalintegrálhoz és Fourier sorokhoz

Az alábbi igen jól használható tételt Fourier sorok konvergenciájáról (legalábbis az alábbi világos formában) sajnálatos módon nem említettem az előadáson. Kérem, írják be az előadásjegyzetükbe, tanulják meg, az alábbi feladatorban pedig bátran használják!

Tétel. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény 2π szerint periodikus és integrálható $[0, 2\pi]$-n. Ha f egy (a, b) intervallumon monoton és folytonos, akkor itt a Fourier sora konvergens és előállítja a függvényt (azaz (a, b)-n a Fourier sor összege megegyezik a függvény értékével).

1. a) Adjunk meg egy $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ görbét, amely az origó középpontú R sugarú körvonalat pozitív körüljárással egyszer járja körbe!

   b) Integráljuk ezen a görbén az
   $$F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$
   függvényt!

   c) Teljesül, hogy $D_2F_1 = D_1F_2$?

   d) Van F-nek potenciálfüggvénye?

2. Legyen
   $$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \left[\frac{x}{\pi}\right] \text{ páros} \\ 0, & \text{ha } \left[\frac{x}{\pi}\right] \text{ páratlan,} \end{cases}$$
   ahol $[a]$ az a szám egész részét jelöli.

   a) Ábrázoljuk f-et és ellenőrizzük, hogy periodikus 2π szerint!

   b) Határozzuk meg f Fourier sorát!

   c) Előállítja-e f-et 0-ban a Fourier sora?

   d) Határozzuk meg, hogy pontosan mely pontokban állítja elő f-et a Fourier sora!

   e) Határozzuk meg a Fourier sor összegfüggvényét és ábrázoljuk!

   f) A kapott összefüggést $x = \pi/2$-re fölírva határozzuk meg az $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \dots$ sor összegét!

3. Bizonyítsuk be, hogy egy páros függvény Fourier sorában nincs (nem 0 együtthatós) szinuszos tag, egy páratlan függvény Fourier sorában pedig csak szinuszos tagok vannak!

4. (HF) Határozzuk meg az $F(x, y, z) = (xyz, x - y, y + z)$ függvény vonalintegrálját a $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ $(t \in [2, 4])$ görbén!

5. (HF) Legyen $f(x)$ az a 2π szerint periodikus függvény, amelyre

   a) $f(x) = x$ ha $x \in [0, 2\pi)$.

   b) $f(x) = |x|$ ha $x \in [-\pi, \pi]$.

   Csináljuk végig ezekre a függvényekre is a 2/b,c,d,e feladatokat!

6. (HF) Döntsük el az alábbi függvényekről, hogy van-e potenciálfüggvényük! (Segítség: legegyszerűbb úgy bizonyítani, hogy van, hogy találunk egyet, azt pedig hogy nincs, leggyakrabban a Young tétel segítségével láthatjuk be.)

   a) $(xy, x + y)$ b) $(2xy, x^2)$ c) $(xyz, x - y, y + z)$

   d) $(x/(x^2 + y^2), y/(x^2 + y^2))$ e) $(-y/(x^2 + y^2), x/(x^2 + y^2))$ f) $(yz + 1, xz + 1, xy + 1)$

7. (HF) Határozzuk meg az $F(x, y) = (x/(x^2 + y^2), y/(x^2 + y^2))$ függvény vonalintegrálját a $\gamma(t) = (e^t, \cos t)$ $(t \in [\pi, 3\pi])$ görbén!

   (Segítség: Használjuk a vonalintegrálokra vonatkozó Newton-Leibniz szabályt!)

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a `www.cs.elte.hu/anal/keleti` oldalról is.