Többszörösen metsző halmazrendszerek

Diplomamunka

Írta: Balaton Attila

Alkalmazott matematikus szak

Témavezető:

Katona Gyula, egyetemi tanár
Számítógéptudományi Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2008.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Az extremális halmazrendszerek elméletében egy érdekes kérdés az, amikor a halmazokról nemcsak azt mondjuk, hogy legyenek metszők, hanem azt is előírjuk, hogy hány elemű legyen ez a metszet. Természetes az az általánosítás is, hogy kettőnél több halmaz metszetéről beszéljünk, és a metszeteket alulról és felülről is korlátozzuk. Arra az esetre, amikor csak alsó korlátok vannak, a szakirodalomban számos eredmény található. Ugyanez elmondható, ha csak a felső korlátokat tekintjük. A kétirányú korlátozás egy kézenfekvő általánosítás, de viszonylag újkeletű. Ezek alapján az általános esetben az alábbi problémát vizsgáljuk.

Legyen $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ az n elemű alaphalmaz, és jelöljük a $2^{[n]}$-nel $[n]$ összes részhalmazát. Tekintsünk egy $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ halmazrendszert. $\mathcal{F}$ legyen r-szeresen legalább s-metsző és l-szeresen legfeljebb t-metsző rendszer, vagyis tetszőleges r részhalmaz metszete legalább s elemű, és tetszőleges l **különböző** részhalmaz metszete legfeljebb t elemű. Egy ilyen tulajdonságú $\mathcal{F}$ halmazrendszer maximális méretét jelöljük $f(n, I(r, \geq s), I(l, \leq t))$-vel.

A paraméterek széleskörű variálhatósága számos részproblémát eredményez, a dolgozatban az következőkkel foglalkozunk.

A 2. fejezetben azt az esetet vizsgáljuk, amikor csak alsó korlátok vannak a metszetekre, vagyis az r-szeresen legalább s-metsző rendszereket. A legegyszerűbb feladat, ha $r = 2$ és $s = 1$, ekkor beszélünk metsző halmazrendszerről, és az extrémum értéke 2^{n-1}. Az általános esetben Frankl tételével [2] foglalkozunk, ami az egyik legnagyobb eredménye a területnek. A tétel szerint $f(n, I(r, \geq s)) = 2^{n-s} \Leftrightarrow n < r + s$ vagy $s \leq 2^r - r - 1$, kivéve ha $r = 3$ és $s = 4$.

A következő eset az, ha csak felső korlátok vannak, ezzel foglalkozunk a 3. fejezetben. Először megnézzük az $(l, t) = (2, 1)$ esetet, majd ezt általánosítjuk tetszőleges t-re. Végül az általános esetben (mind l, mind t tetszőleges) $|\mathcal{F}|$-re adunk egy felső becslést és megnézzük, hogy ez mikor érhető el. A feladat a blokkrendszerekre, illetve ezek általánosításaira, a pakolásokra vezet.

Ha alsó és felső korlátokat is felteszünk, akkor a legegyszerűbb probléma, ha a korlátok megegyeznek, és ugyanannyi halmaz metszetére vonatkoznak. Ekkor l-szeresen pontosan t-metsző halmazokról beszélünk. Ezzel foglalkozunk a 4. fejezetben. Az Erdős-de Bruijn tétel megoldást biztosít, ha $(l, t) = (2, 1)$. A Fisher-egyenlőtlenség segítségével tudunk adni egy becslést tetszőleges l esetén. Az általános probélma megoldását megnézzük triviálisan metsző, és nem triviálisan metsző esetben is. A konstrukciókhoz algebrai módszereket és véges geometriát használunk.

Az 5. fejezetben a legáltalánosabb feladatot tárgyaljuk, vagyis az r-szeresen legalább s-metsző és l-szeresen legfeljebb t-metsző rendszereket. A fő eredmény Füredi Zoltán, és Katona Zsolt tétele [6], amely $t \geq 2s \geq 2, r \geq 2, l \geq 2$ esetben oldja meg a problémát. Ez előtt megnézünk az olyan feladatok közül néhányat, melyre nem teljesülnek ezek a feltételek. Végül a fejezet és a dolgozat zárásaként egy olyan problémára adunk egy becslést, amelyre eddig nem ismert pontos eredmény.

2. fejezet

Alsó korlát a metszetekre

2.1. Erdős-Ko-Rado tétel

Az alábbi egyszerű tétel metsző halmazrendszerek maximális méretéről szól.

2.1.1. Tétel. *(Erdős-Ko-Rado [9]) Legyen $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ egy metsző halmazrendszer. $\mathcal{F}$ maximális mérete 2^{n-1}.*

Biz. Legyen $A \subseteq [n]$. A és $\overline{A}$ közül csak az egyik lehet benne a halmazrendszerben, mert $A \cap \overline{A} = \emptyset$. Így legfeljebb az összes részhalmaz felét, vagyis 2^{n-1} halmazt tartalmazhat a halmazrendszer. $\square$

A konstrukcióhoz vegyük $[n]$ egy adott elemét tartalmazó összes részhalmazt. Ez nyilván metsző, és a mérete 2^{n-1}. Az ilyen halmazrendszereket, melyekben minden halmaz tartalmaz akár több, azonos elemet, *triviálisan metszőnek* nevezzük.

Az extrémum eléréséhez létezik azonban másik konstrukció is, páratlan n esetén az összes legalább $\frac{n+1}{2}$ méretű halmazt, páros n esetén az összes $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ méretű és egy adott elemet tartalmazó összes $\frac{n}{2}$ méretű halmazt tartalmazó halmazrendszer. Könnyen ellenőrizhető, hogy ezek metszők, és a méretük pont 2^{n-1}.

Az Erdős-Ko-Rado tétel az $r = 2$ és $s = 1$ esetben oldja meg a problémát, és láttuk, hogy az extémum pont a triviális család mérete. Tetszőleges r és s esetén a triviális, vagyis adott s elemet tartalmazó összes részhalmaz s-metsző lesz, és mérete 2^{n-s}. Így a 2^{n-s} méretű halmazrendszer minden esetben elérhető, kérdés, hogy csinálható-e ennél jobb konstrukció. A választ Frankl tétele adja meg, mely szerint bizonyos esetekben igen.

2.2. Frankl tétele

Ebben a szakaszban tetszőleges r és s esetén vizsgáljuk az r-szeresen legalább s-metsző rendszereket. Megnézzük, mely esetekben mondható, hogy a triviálisan metsző rendszernél nem lehet nagyobb elemszámú halmazrendszert konstruálni.

2.2.1. Tétel. *(Frankl [2]) Legyen $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ egy r-szeresen legalább s-metsző rendszer. Ekkor a következőt mondhatjuk $\mathcal{F}$ maximális méretére:*

$$f(n, I(r, \geq s)) = 2^{n-s} \iff n < r + s \text{ vagy } s \leq 2^r - r - 1, \text{ kivéve ha } (r, s) = (3, 4).$$

Biz. (részletek) A bizonyítás kulcslépése a következő halmazrendszerek definiálása: $\forall i$-re, melyre $0 \leq i \leq (n-s)/r$ definiáljuk a következő családokat:

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_i(n, r, s) = \{A \subset [n] : |A \cap [s + ri]| \geq s + (r-1)i\}.$$

Ezek a rendszerek r-szeresen legalább s-metszők, ugyanis ha $A_1, A_2, \ldots, A_r \in \mathcal{A}_i$, akkor bármelyik legfeljebb i elemet nem tartlamaz $[s + ri]$-ből, azaz összesen legfeljebb ri-t nem, tehát a metszetük legalább $s + ri - ri = s$ elemű.

Az $\mathcal{A}_0$ halmazrendszer éppen a triviálisan metsző, így $|\mathcal{A}_0| = 2^{n-s}$. Egy nagyon fontos nyitott probléma, hogy vajon ezek közül kerül-e ki minden esetben a maximális méretű rendszer:

2.2.2. Sejtés (Frankl [2]):

$$f(n, I(r, \geq s)) = max\{|\mathcal{A}_i| : 0 \leq i \leq (n-s)/r\}.$$

Ezt Frankl bebizonyította a $s \leq \frac{2^r r}{150}$ esetben, az általános eset még megoldatlan.

Visszatérve a tétel bizonyításához, először is vegyük észre, hogy egy maximális méretű r-szeresen legalább s-metsző rendszer *filter*, vagyis ha $F \in \mathcal{F}$ és $F \subset G$, akkor $G \in \mathcal{F}$. Ugyanis ha nem lenne filter, akkor létezne $F \in \mathcal{F}$, melyhez létezne $G \supset F$, hogy $G \notin \mathcal{F}$. Ekkor viszont $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cup \{G\}$ is r-szeresen legalább s-metsző, és $|\mathcal{F}'| > |\mathcal{F}|$, ami ellentmond $|\mathcal{F}|$ maximalitásának.

A feltételek elégségességének, és az $n < r + s$ feltétel szükségességének a belátása elég hosszadalmas, és sok számolást igényel, megtalálható Frankl egy cikkében [2]. A $s \leq 2^r - r - 1$ feltétel szükségessége viszont könnyen bebizonyítható.

Ehhez a fent definiált $\mathcal{A}_i$ családokból az $\mathcal{A}_1$-re lesz szükség. Megmutatjuk, hogy megfelelő r és s esetén n-től függetlenül $|\mathcal{A}_1| > |\mathcal{A}_0|$, így mivel minden $\mathcal{A}_i$ r-szeresen legalább s-metsző, így ebben az esetben nem $\mathcal{A}_0$ (vagyis a triviális rendszer) lesz a maximális méretű.

Nyilván $|\mathcal{A}_0| = 2^{n-s}$, nézzük $\mathcal{A}_1$ méretét. A definíció alapján:

$$\mathcal{A}_1 = \{A \subset [n] : |A \cap [s+r]| \geq s+r-1\}$$

Így $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_{1,0} \cup \mathcal{A}_{1,1} \cup \mathcal{A}_{1,2} \cup \ldots \cup \mathcal{A}_{1,s+r}$, ahol

$$\mathcal{A}_{1,0} = \{A \subset [n] : [s+r] \subseteq A\}$$

$$\mathcal{A}_{1,i} = \{A \subset [n] : ([s+r] - \{i\}) \subseteq A \wedge i \notin A\}$$

Ebből pedig már meghatározható $\mathcal{A}_1$ mérete:

$$|\mathcal{A}_1| = |\mathcal{A}_{1,0}|+|\mathcal{A}_{1,1}|+|\mathcal{A}_{1,2}|+\ldots+|\mathcal{A}_{1,s+r}| = 2^{n-s-r}+2^{n-s-r}(s+r) = 2^{n-s-r}(s+r+1)$$

Hogy ne a triviális rendszer legyen az optimális, kell hogy $|\mathcal{A}_1| > |\mathcal{A}_0|$:

$$2^{n-s} < 2^{n-s-r}(s+r+1),$$

amiből átrendezéssel:

$$2^r - r - 1 < s$$

Ezzel meg is kaptuk a feltétel szükségességét. Vegyük azonban észre, hogy csak annyit mondhatunk, hogy ebben az esetben $|\mathcal{A}_1| > |\mathcal{A}_0|$, így nem a triviális rendszer a maximális méretű. Viszont arról, hogy ekkor mi az optimum, nem állítunk semmit, ez a kérdés egy megoldatlan probléma.

Az $(r,s) = (3,4)$ esetben az $s \leq 2^r - r - 1$ feltétel egyenlőséggel teljesül, ekkor tehát $|\mathcal{A}_1| = |\mathcal{A}_0|$, viszont érdekes módon, ekkor egy harmadik rendszer az optimális. Az itt nem részletezett elégségesség bizonyítása indukcióval történt, ami csak $r = 5$-től működött, a többi eset közül ($r \leq 4$ és $s \leq 2^r - r - 1$) egyedül az $(r,s) = (3,4)$ esetben található olyan rendszer, aminek a mérete nagyobb $|\mathcal{A}_0|$-nál. $\square$

3. fejezet

Felső korlát a metszetekre

3.1. Legfeljebb t-metsző rendszerek

Ha a metszeteket felülről akarjuk korlátozni, akkor a legegyszerűbb eset, ha bármely két halmaz metszete legfeljebb egy elemű. Ebben az esetben a kérdés könnyen megválaszolható.

3.1.1. Tétel. *Legyen $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$. Bármely különböző $F_i, F_j \in \mathcal{F}$ esetén $|F_i \cap F_j| \leq 1$. Ekkor $|\mathcal{F}| \leq \frac{n(n+1)}{2}+1$, és ez a korlát el is érhető, vagyis $f(n, I(2, \leq 1)) = \frac{n(n+1)}{2}+1$.*

Biz. Legyen $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\leq 1) \cup \mathcal{F}(\geq 2)$, ahol $\mathcal{F}(\leq 1)$ a legfeljebb 1 elemű, $\mathcal{F}(\geq 2)$ a legalább 2 elemű halmazokat tartalmazza. Nyilván $|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}(\leq 1)| + |\mathcal{F}(\geq 2)|$.

$|\mathcal{F}(\leq 1)| \leq n+1$, és ha $\mathcal{F}$ maximális méretű, 2-szeresen legfeljebb 1-metsző rendszer, akkor $|\mathcal{F}(\leq 1)| = n+1$, ugyanis a legfeljebb 1 elemű halmazok miatt nem sérülhet a metszési feltétel.

Legyen $n_i, n_j \in [n]$ az alaphalmaz két különböző eleme. Ezt az elempárt legfeljebb egy $\mathcal{F}(\geq 2)$-beli halmaz tartalmazhatja, ugyanis ha pl. $n_i, n_j \in F_1$ és $n_i, n_j \in F_2$, akkor $|F_1 \cap F_2| \geq 2$, ami ellentmond a feltételnek. Elempárokból összesen $\binom{n}{2}$ van, így $|\mathcal{F}(\geq 2)| \leq \binom{n}{2}$.

Összefoglalva

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}(\leq 1)| + |\mathcal{F}(\geq 2)| \leq n + 1 + \binom{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Ez a korlát el is érhető, véve az összes legfeljebb 2 elemű részhalmazt. $\square$

A bizonyítási módszer alkalmazható abban az esetben is, amikor a metszetek legfeljebb t eleműek, ekkor az összes legfeljebb $(t+1)$ elemű részhalmazt tartalmazó halmazrendszer lesz a maximális méretű.

3.1.2. Tétel. $f(n, I(2, \leq t)) = \sum\limits_{k=0}^{t+1} \binom{n}{k}$.

Biz. Az előző bizonyításhoz hasonlóan, legyen $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\leq t) \cup \mathcal{F}(\geq t+1)$, és $|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}(\leq t)| + |\mathcal{F}(\geq t+1)|$.

$|\mathcal{F}(\leq t)| \leq \sum_{k=0}^{t} \binom{n}{k}$, és ha $\mathcal{F}$ maximális méretű, t-szeresen legfeljebb 1-metsző rendszer, akkor $|\mathcal{F}(\leq t)| = \sum_{k=0}^{t} \binom{n}{k}$, ugyanis a legfeljebb t elemű halmazok nem sértik a metszési feltételt.

Adott $(t+1)$ különböző elemet legfeljebb egy $\mathcal{F}(\geq t+1)$-beli halmaz tartalmazhat, különben lenne két halmaz, melyek metszete legalább $(t+1)$ elemű lenne. Ilyen elem $(t+1)$-esből összesen $\binom{n}{t+1}$ van, így $|\mathcal{F}(\geq t+1)| \leq \binom{n}{t+1}$.

Összefoglalva

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}(\leq t)| + |\mathcal{F}(\geq t+1)| \leq \sum_{k=0}^{t} \binom{n}{k} + \binom{n}{t+1} = \sum_{k=0}^{t+1} \binom{n}{k}.$$

A konstrukcióhoz pedig vegyük az összes legfeljebb $(t+1)$ elemű részhalmazt. □

3.2. l-szeresen legfeljebb t-metsző rendszerek

Vajon lehet-e ezt a technikát alkalmazni az általános esetben? Ekkor bármely $(t+1)$ elemű részhalmazt $\mathcal{F}$-nek legfeljebb $l-1$ eleme tartalmazhatja. Így legfeljebb $(l-1)\binom{n}{t+1}$ legalább $(t+1)$ elemű halmazt tartalmazhatna $\mathcal{F}$. Azonban egy halmaz legfeljebb egyszer szerepelhet, ezért ez a korlát nem érhető el, mivel a legalább $(t+2)$ méretű halmazoknak több $(t+1)$ méretű részhalmazuk is van. Ezzel finomítható a becslés $\mathcal{F}$ maximális méretére.

3.2.1. Tétel.

$$f(n, I(l, \leq t)) \leq \sum_{k=0}^{t+1} \binom{n}{k} + \frac{l-2}{t+2} \binom{n}{t+1}$$

Biz. A bizonyítás során megint két részre bontjuk $\mathcal{F}$-et, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\leq t) \cup \mathcal{F}(\geq t+1)$.

Az összes legfeljebb t elemű részhalmazt természetesen most is tartalmazhatja $\mathcal{F}(\leq t)$, ugyanis ezek közül tetszőlegesen soknak a metszete legfeljebb t elemű. Így $\mathcal{F}(\leq t) = \sum\limits_{k=0}^{t} \binom{n}{k}$, ha $\mathcal{F}$ maximális méretű.

Nézzük most $|\mathcal{F}(\geq t+1)|$ becslését. Egy $(t+1)$ elemű részhalmazt legfeljebb $(l-1)$ halmaz tartalmazhat, különben lenne l, melyeknek a metszete legalább $(t+1)$ elemű. Vegyünk egy $F \in \mathcal{F}(\geq t+1)$ halmazt, melyre $|F| = v \geq t+1$. F-nek $\binom{v}{t+1}$ darab

$(t+1)$ méretű részhalmaza van. A fenti megállapítás miatt minden $(t+1)$ elemű részhalmazt legfeljebb $(l-1)$ halmaz tartalmazhat, így

$$\sum_{F_i \in \mathcal{F}(\geq t+1)} \binom{|F_i|}{t+1} \leq (l-1)\binom{n}{t+1},$$

ugyanis $\binom{n}{t+1}$ darab $(t+1)$ méretű részhalmaz van.

Tegyük fel, hogy $\mathcal{F}$ maximális méretű, és nem tartalmazza az összes $(t+1)$ elemű halmazt, legyen pl. $G \subset [n]$, $|G| = t+1$, és $G \notin \mathcal{F}$. Ekkor, ha nincs olyan $\mathcal{F}$-beli halmaz, ami tartalmazza G-t, akkor az $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cup \{G\}$ nagyobb méretű, és nem sérti a metszési feltételeket, ami ellentmondás. Vagyis létezik olyan H halmaz, amire $G \subset H \in \mathcal{F}$. Ekkor H-t G-re cserélve a fenti szumma csökken, és nem sérülnek a metszési feltételek. Tehát véges sok csere után $\mathcal{F}$ tartalmazza az összes ilyen G-t.

Ezek után feltehetjük, hogy $\mathcal{F}$ tartalmazza az összes $(t+1)$ elemű halmazt. A legalább $(t+2)$ elemű halmazokra $\binom{|F_i|}{t+1} \geq t+2$, vagyis

$$|\mathcal{F}(\geq t+2)|(t+2) \leq \sum_{F_i \in \mathcal{F}(\geq t+2)} \binom{|F_i|}{t+1} \leq (l-1)\binom{n}{t+1} - \binom{n}{t+1} \leq (l-2)\binom{n}{t+1},$$

használva, hogy $(t+1)$ méretű halmazokból $\binom{n}{t+1}$ van. Átrendezve

$$|\mathcal{F}(\geq t+2)| \leq \frac{l-2}{t-2}\binom{n}{t+1}$$

adódik. Így kész a becslés, ugyanis

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}(\leq t)| + |\mathcal{F}(t+1)| + |\mathcal{F}(\geq t+2)| \leq \sum_{k=0}^{t}\binom{n}{k} + \binom{n}{t+1} + \frac{l-2}{t-2}\binom{n}{t+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{t+1}\binom{n}{k} + \frac{l-2}{t-2}\binom{n}{t+1}. \quad \square$$

Vegyük észre, hogy egyenlőség csak akkor érhető el, ha $l \leq t+4$, különben $\mathcal{F}$ tartalmazna legalább $(t+3)$ elemű halmazt, ennek pedig több $(t+1)$ elemű részhalmaza van, mint amit a becslésben használtunk, így szigorú lenne az egyenlőtlenség. Az egyenlőséghez persze még az is kell, hogy a $(t+2)$ eleműeknek legyen olyan családja, amely minden $(t+1)$-est legfeljebb $(l-2)$-ször tartalmaz.

Nézzünk egy példát, amikor egyenlőség van. Egy 7 elemű alaphalmazon vegyünk egy 3-szorosan legfeljebb 1-metsző rendszert. A becslésből $\mathcal{F} \leq 36$ adódik, és ez úgy érhető el, ha vesszük az összes legfeljebb 2 elemű részhalmazt, illetve hármasoknak egy olyan rendszerét, amely minden kettest legfeljebb egyszer tartalmaz. Az optimális halmazrendszert *incidencia-táblázata* segítségével ábrázoltuk, ahol a sorok a halmazoknak, az oszlopok az alaphalmaz elemeinek felelnek meg. Egy ◯ jel van az i. sor j. oszlopában, ha $j \in F_i$. (A nulladik oszlopban felsoroljuk a halmazokat.)

F_0							
F_1	○						
F_2		○					
F_3			○				
F_4				○			
F_5					○		
F_6						○	
F_7							○
F_8	○	○					
F_9	○		○				
F_{10}	○			○			
F_{11}	○				○		
F_{12}	○					○	
F_{13}	○						○
F_{14}		○	○				
F_{15}		○		○			
F_{16}		○			○		
F_{17}		○				○	
F_{18}		○					○
F_{19}			○	○			
F_{20}			○		○		
F_{21}			○			○	
F_{22}			○				○
F_{23}				○	○		
F_{24}				○		○	
F_{25}				○			○
F_{26}					○	○	
F_{27}					○		○
F_{28}						○	○
F_{29}	○	○		○			
F_{30}	○		○			○	
F_{31}	○				○		○
F_{32}		○	○		○		
F_{33}		○				○	○
F_{34}			○	○			○
F_{35}				○	○	○	

3.3. Blokkrendszerek

Az előbb bemutatott példában az $F_{29}, F_{30}, \dots, F_{35}$ halmazokból álló rendszer az ún. *Fano-sík*, melyben az alaphalmaz elemei a pontok, a halmazok az egyenesek, és minden pontpárt pontosan egy egyenes tartalmaz. Láttuk, hogy az $l \leq t+4$ esetben az ilyen rendszerek - olyan $(t+2)$ elemű halmazokból álló rendszer, amelyben minden $(t+1)$-est pontosan $(l-2)$ darab halmaz tartalmaz - létezése szükséges az extrémum eléréséhez. Ilyenekkel a *blokkrendszerek* elméletében találkozhatunk.

3.3.1. Definíció. *Az $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_b\}$ halmazrendszert* $s-(n,k,\lambda)$ blokkrendszernek *nevezzük, ha minden i-re $F_i \in [n]$ k-uniform (azaz $|F_i| = k$ minden i-re), és $[n]$ bármely s különböző eleme pontosan λ $\mathcal{F}$-beli halmazban (blokkban) van benne.*

3.3.2. Megjegyzés. *A Fano-sík egy $2-(7,3,1)$ blokkrendszer.*

Az alaphalmaz elemeit *pontoknak*, a halmazrendszer elemeit *blokkoknak* nevezzük. A következő tétel alapján a blokkrendszerek regulárisak.

3.3.3. Tétel. *Egy $s-(n,k,\lambda)$ rendszerben minden pont foka r, ahol r a következőképpen határozható meg:*

$$r = \lambda \binom{n-1}{s-1} / \binom{k-1}{s-1}$$

Biz. Rögzítsünk egy p pontot. Számoljuk meg kétféleképpen az (S,B) párokat, ahol B egy blokk, $|S| = s-1$, $p \in B$ és $S \subset B$. Mivel p-t r blokk tartalmazza, ez egyrészt $r\binom{k-1}{s-1}$, másrészt minden pont s-est pontosan λ halmaz tartalmazza, ezért $\lambda\binom{n-1}{s-1}$. Mivel ugyanazt számoltuk le kétféleképpen, ezért ez a két szám megegyezik. Átrendezve adódik a tétel. □

A 3.2.1. Tételben használt $l \leq t+4$ feltétel mellett az optimális konstrukció egy blokkrendszer - mégpedig egy $(t+1)-(n, t+2, l-2)$ rendszer - illetve az összes legfeljebb $(t+1)$ elemű halmazt tartalmazó halmazrendszer uniója.

A blokkrendszerek elméletében csak kevés esetben tisztázott, hogy létezik-e az adott paraméterű blokkrendszer. Mi most a $t = 1$ esettel foglalkozunk, ami az l-szeresen legfeljebb 1-metsző halmazrendszerekre fog konstrukciókat szolgáltatni. Legyen $m = l-2$, így $2-(n,3,m)$ blokkrendszereket kell keresnünk. Az alábbi oszthatósági feltétel szükséges, de sajnos nem elégséges minden n-re.

3.3.4. Állítás. $2-(n,k,\lambda)$ *blokkrendszerek létezéséhez szükséges, hogy*

(i) $\lambda(n-1) \equiv 0$ *(mod (k-1))*

(ii) $\lambda n(n-1) \equiv 0$ *(mod k(k-1))*

Biz. A 3.3.3. Tétel bizonyításánál alkalmazott kettős leszámlálásból (i) rögtön, (ii) pedig a $bk = nr$ egyenlőség felhasználásával adódik. $\square$

Wilson eredménye alapján a fenti feltételek elégségesek is elég nagy n-re:

3.3.5. Tétel. *(Wilson) Adott* λ *és* k *mellett, ha* $n > n_0(\lambda, k)$, *akkor a 3.3.4. állításban adott feltételek elégségesek a* $2-(n,k,\lambda)$ *blokkrendszerek létezéséhez.*

Vizsgáljuk az $m = 1$ esetet, vagyis $2-(n,3,1)$ rendszereket keresünk. Ezeket *Steiner hármasrendszereknek* nevezzük. Az oszthatósági feltételünkből adódik, hogy $n-1$ páros, és $6|n(n-1)$, vagyis $n \equiv 1$ vagy 3 (mod 6). Ennek alapján érdemes megfogalmazni a 3.2.1. tétel következményét:

3.3.6. Következmény. *Ha az* $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ *halmazrendszer 3-szorosan legfeljebb 1-metsző, akkor* $|\mathcal{F}| \leq \frac{2}{3}n^2 + \frac{1}{3}n + 1$. *Egyenlőség az* $n \equiv 1$ *vagy* 3 *(mod* 6*) esetben áll fenn.*

A Fano-sík egy megoldás az n=7 esetre, mellesleg 7-re ez az egyetlen konstrukció van. A Wilson-tétel alapján az oszthatósági feltételek elég nagy n-re elégségesek. Kérdés, hogy a $k = 3$ speciális esetben elhagyható-e az "elég nagy n" feltétel? A válasz igenlő, több konstrukció is ismert tetszőleges $(6k+1)$ és $(6k+3)$ alakú n esetén Steiner hármasrendszerekre (Kirkman, Skolem [10]). Elég meglepő, hogy n növelésével egyre több nem-izomorf ilyen rendszer van, míg $n = 7$ és 9 esetben a konstrució egyértelmű, addig már az $n = 15$ esetben is 80 nem-izomorf Steiner hármasrendszer létezik.

4. fejezet

Pontosan t-metsző rendszerek

Ebben a fejezetben azzal az esettel foglalkozunk, amikor az alsó és felső korlátok egybeesnek, és a metszést l halmazra követeljük meg. Az ilyen rendszerek maximális méretét n elemen $f(n, l, t)$-vel fogjuk jelölni, vagyis

$$f(n, l, t) = f(n, I(l, \geq t), I(l, \leq t)) =$$

$$= \max_{\mathcal{F} \subset 2^{[n]}} \{|\mathcal{F}| \big| \forall F_{i1}, F_{i2}, \ldots, F_{il} \in \mathcal{F} : |F_{i1} \cap F_{i2} \cap \cdots \cap F_{il}| = t\}$$

A legegyszerűbb az $(l, t) = (2, 1)$ eset, vagyis mikor bármely két halmaznak pontosan egy közös eleme van. Ezt oldja meg Erdős és de Bruijn egyik közös tétele.

4.1. Erdős - de Bruijn tétel

Érdekesség, hogy két különböző ilyen nevű tétel vált ismertté a szakirodalomban, az egyik végtelen gráfok k-színezhetőségéről szól. Mi a másikat fogjuk használni, melynek a kimondásához szükség lesz az alábbi definícióra:

4.1.1. Definíció. *Az $\mathcal{L} = (V, E)$ hipergráf lineáris tér, ha*

1. *bármely két különböző csúcsot pontosan egy él tartalmaz,*
2. *minden él legalább két csúcsot tartalmaz,*
3. *legalább két él van.*

A hipergráf csúcsait szokás **`pontoknak`**, *éleit pedig* **`egyeneseknek`** *nevezni.*

Két speciális lineáris térről lesz szó a tételben:

4.1.2. Definíció. *Az $\mathcal{L} = (V, E)$ lináris tér* **degenerált**, *ha létezik egy $w \in V$ pontja, hogy az egyenesek pontosan a következők:*

1. $V \backslash \{w\}$
2. $\{w, x\}$, *minden* $x \in V \backslash \{w\}$

4.1.3. Definíció. *Az $\mathcal{L} = (V, E)$ lináris tér* **projektív sík**, *ha kielégíti az alábbi axiómákat:*

1. *bármely két különböző egyeneshez pontosan egy pont létezik, melyet mindkettő tartalmazza,*
2. *létezik négy olyan pont, amelyek közül semelyik hármat nem tartalmazza egy egyenes.*

Most már kimondható a tétel, melyet 1948-ban publikálták [1]. Azóta számos frappáns bizonyítás született rá. Lényegében kétféle megközelítés van, az egyik lineáris algebrai módszereket, a másik leszámlálást használ. Mi az utóbbiak közül mutatunk be egyet, amely Conwaytől származik.

4.1.4. Tétel. *(Erdős-de Bruijn) Lineáris térben az élek száma legalább annyi, mint a pontok száma. Egyenlőség esetén a lineáris tér vagy degenerált, vagy projektív sík.*

Biz. Legyen tehát $\mathcal{L} = (V, E)$ lineáris tér, melyben $|V| = v$ és $|E| = b$. Feltesszük, hogy $b \leq v$, és belátjuk, hogy itt egyenlőség kell hogy legyen. Szükségünk lesz a következő megállapításra:

4.1.5. Lemma. *Legyen $\mathcal{L} = (V, E)$ lineáris tér, $p \in V$ egy pont, $L \in E$ egy egyenes, és $p \notin L$. Ekkor $deg(p) \geq |L|$, és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha minden p-n átmenő egyenes metszi L-et.*

Biz. A p-t össze tudjuk kötni L minden pontjával, az így kapott $|L|$ egyenes páronként különböző lesz. □

Mivel $b \leq v$ és a lemma alapján $deg(p) \geq |L|$ minden nem-illeszkedő (p, L) pont egyenes párra, így

$$\frac{deg(p)}{b - deg(p)} \geq \frac{|L|}{v - |L|} \,,$$

szintén minden nem-illeszkedő (p, L) párra. Adjuk össze ezeket az egyenlőtlenségeket az összes ilyen párra. Ha a bal oldalakat adjuk össze pontról pontra, a következőt kapjuk:

$$\sum_{p \notin L} \frac{deg(p)}{b - deg(p)} = \sum_{p \in V} \sum_{L: p \notin L} \frac{deg(p)}{b - deg(p)} = \sum_{p \in P} deg(p),$$

mivel minden p ponthoz pontosan $b - deg(p)$ olyan egyenes található, amely őt nem tartalmazza. Hasonlóan, ha a jobb oldalakat egyenesről egyenesre adjuk össze, akkor azt kapjuk, hogy

$$\sum_{p \notin L} \frac{|L|}{v - |L|} = \sum_{L \in E} |L|.$$

Így az első egyenlőtlenség miatt

$$\sum_{p \in P} deg(p) \geq \sum_{L \in E} |L|,$$

itt viszont csak egyenlőség állhat fenn, mivel a bal oldal a hipergráf összes fokszámának az összege, a jobb oldal pedig az élek méretének az összege, melyek nyilván egyenlőek. Ez viszont csak úgy lehet, ha $b = v$ és valamennyi nem-illeszkedő pont-egyenes párra $deg(p) = |L|$. Ezzel az egyenlőtlenség fennállását beláttuk.

Ha egyenlőség van, az két esetben fordulhat elő. Ha van olyan egyenes, ami két pontból áll, akkor a lineáris tér degenerált. Ha minden egyenes legalább három pontból áll, akkor a struktúra kielégíti a projektív sík axiómáit. □

Könnyen látszik, hogy a tételből meghatározható $f(n, 2, 1)$. Legyenek az $[n]$ elemei az egyenesek, $[n]$ részhalmazai pedig a pontok. Ha a halmazrendszer 2-szeresen pontosan 1-metsző, akkor teljesülnek a lineáris tér definíciói, így a $b \geq v$ egyenlőtlenség is teljesül az Erdős-de Bruijn tétel miatt.

4.1.6. Következmény. *$f(n, 2, 1) = n$. A konstrucióhoz vegyük az egy adott elemet tartalmazó összes két elemű részhalmazt, és az őt nem tartalmazó $(n - 1)$ elemű részhalmazt (a degenarált lineáris tér megfelelője).*

A következő lépés $f(n, 2, t)$ meghatározása tetszőleges t esetén.

4.2. Fisher-egyenlőtlenség

A Fisher-egyenlőtlenség $2 - (n, k, l)$ blokkrendszerekkel kapcsolatban állítja azt, amit az Erdős-de Bruijn a lineáris terekről.

4.2.1. Tétel. *(Fisher-egyenlőtlenség) Ha egy blokkrendszerben $k < v$, akkor $b \geq v$.*

Biz. Korábban bizonyítuttuk, hogy a blokkrendszerek regulárisak, minden pont foka r. Legyen az M $(v \times b)$-es mátrix a blokkrendszer incidencia-mátrixa, és tekintsük az $A = MM^T$ mátrixot. Ennek a főátlójában csupa r, azon kívül csupa λ szerepel, így A reguláris. Indirekt, ha $b < v$ teljesülne, akkor M rangja legfeljebb b lehetne. Ekkor M sorai összefüggőek lennének, ami miatt A sorai is. Ez pedig ellentmondásban van A regularitásával. $\square$

A Fisher-egyenlőtlenséget használva egy jó felső becslés adható $f(n, 2, t)$-re azzal a módszerrel, ahogy az előző szakaszban az Erdős-de Bruijn tételből $f(n, 2, 1)$-t kiszámoltuk.

4.2.2. Következmény. $f(n, 2, t) \leq n$

4.3. A tetszőleges l esete

Most következik az általános eset vizsgálata, vagyis, hogy mit mondhatunk $f(n, l, t)$-ről tetszőleges l és t esetén. Ebben a szakaszban megint foglalkozunk a nem triviálisan metsző rendszerek esetével, erre vezessünk be egy új jelölést.

4.3.1. Definíció. *Az $\mathcal{F}$ halmazrendszert l-szeresen nem triviálisan t-metszőnek nevezzük, ha l-szeresen t-metsző, és $|\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F| < t$. Az ilyen halmazrendszerek maximális méretét n elemen $g(n, l, t)$-vel jelöljük.*

Természetes észrevétel, hogy $g(n, l, t) \leq f(n, l, t)$, és egyenlőség akkor van, mikor az optimális rendszerek közt van nem triviálisan t-metsző. Az első eredmény $g(n, l, t)$-re vonatkozik, és Katona Zsolt nevéhez fűződik. Ad egy felső és egy alsó becslést is a nem-triviálisan metsző rendszerek méretére.

4.3.2. Tétel. *(Katona Zs. [7])*

$$\frac{1}{t} n^{\frac{1}{l}} (1 + o(1)) \leq g(n, l, t) \leq n^{\frac{t+1}{l+t-1}} (1 + o(1)).$$

Biz. Először a felső becslést bizonyítjuk l szerinti indukcióval. $l = 2$ esetben a Fisher-egyenlőtlenséget kapjuk vissza.

Tegyük fel tehát, hogy $l \geq 3$, és $(l-1)$-re igaz az állítás. Vegyünk egy nem triviálisan l-szeresen t-metsző rendszert n elemen. Jelöljük ennek a legkisebb elemszámú halmazát X-szel (ha több ilyen van, válasszunk egyet tetszőlegesen), és legyen $|X| = k$. Képezzük a következő halmazrendszert:

$$\mathcal{F}' = \{X \cap F : F \in \mathcal{F}\}$$

Ekkor $\mathcal{F}' \subseteq [k]$ és $(l-1)$-szeresen nem triviálisan t-metsző. Így az indukciós feltevés értelmében

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}'| \leq k^{\frac{t+1}{l+t-2}},$$

tehát ha $k \leq n^{\frac{l+t-2}{l+t-1}}$, akkor kész vagyunk, ezt a becslést beleírva az előző eredménybe. Tegyük fel tehát, hogy ez nincs így. Definiáljuk d_A-t minden $\mathcal{F}$-beli t-esre a következőképp: $d_A = |\{F \in \mathcal{F} : A \subseteq F\}|$, vagyis hogy egy adott $A \in \binom{[n]}{t}$ halmazt hány $\mathcal{F}$-beli halmaz tartalmazza. Mivel $\mathcal{F}$ l-szeresen pontosan t-metsző, így bármely l halmazhoz van egy A t-es, amely az ő metszetük. Egy $A \in \binom{[n]}{t}$ halmaz $\binom{d_A}{l}$-szor fordul elő metszetként, ha d_A legalább l. Ebből következik, az

$$\frac{\binom{|\mathcal{F}|}{l}}{\binom{n}{t}} = \frac{\sum_{A \in \binom{[n]}{t}} d_A}{\binom{n}{t}}$$

egyenlőség. Terjesszük ki az $\binom{x}{l}$-et a valós számokra, $f(x) = \binom{x}{l} = \frac{x(x-1)\ldots(x-l+1)}{l!}$, ha $x \geq l-1$, és 0 egyébként. Ez a függvény monoton növő és konvex, így alkalmazható a Jensen-egyenlőtlenség:

$$\frac{\sum_{A \in \binom{[n]}{t}} d_A}{\binom{n}{t}} \geq \binom{\frac{\sum_A d_A}{\binom{n}{t}}}{l} = \binom{\frac{\sum_{F \in \mathcal{F}} \binom{|\mathcal{F}|}{t}}{\binom{n}{t}}}{l} \geq \binom{|\mathcal{F}|\frac{\binom{k}{t}}{\binom{n}{t}}}{l}$$

Az egyenlőség a t méretű halmazok különböző leszámlálásából adódik, végül az utolsó egyenlőtlenséget úgy kaptuk, hogy minden $\mathcal{F}$-beli halmaz méretét alulról becsültük k-val. Könnyen látható, hogy $\binom{n}{k}$-t felülről $n^k/k!$-ral, alulról $(n-k+1)^k/k!$-ral lehet triviálisan becsülni. Ezt használva az eddig elért eredményeken:

$$\frac{1}{\binom{n}{t} l!}|\mathcal{F}|^l \geq \frac{\binom{|\mathcal{F}|}{l}}{\binom{n}{t}} \geq \binom{|\mathcal{F}|\frac{\binom{k}{t}}{\binom{n}{t}}}{l} \geq \frac{1}{l!}(|\mathcal{F}|\frac{\binom{k}{t}}{\binom{n}{t}} - l + 1)^l \geq \frac{1-\epsilon}{l!}(|\mathcal{F}|\frac{\binom{k}{t}}{\binom{n}{t}})^l,$$

Feltehetjük továbbá, hogy $|\mathcal{F}| > n^{(t+1)/(l+t-1)}$, különben kész lennénk. Mivel $k > n^{(l+t-2)/(l+t-1)}$, így $|\mathcal{F}|\frac{\binom{k}{t}}{\binom{n}{t}}$ végtelenhez tart n növelésével, így elég nagy n-re igaz az utolsó egyenlőtlenség is. Tehát az eddigiekből

$$\frac{1}{\binom{n}{t} l!}|\mathcal{F}|^l \geq \frac{1-\epsilon}{l!}(|\mathcal{F}|\frac{\binom{k}{t}}{\binom{n}{t}})^l$$

adódik, amiből egyszerűsítve

$$(1+o(1))\binom{n}{t}^{l-1} \geq \binom{k}{t}^{l},$$

amiből következik $k \leq (1+o(1))n^{(l-1)/l} \leq (1+o(1))n^{(l+t-2)/(l+t-1)}$, így kész vagyunk a felső becsléssel.

Az alsó becsléshez adunk egy kontrukciót projektív terek segítségével. Először nézzük az $(l,t) = (3,1)$ esetét. Ekkor kell, hogy $g(n,3,1) \geq n^{1/3}(1+o(1))$. Ebben az esetben erősebb állítást is be tudunk látni, nevezetesen, hogy $g(n,3,1) \geq n^{2/3}(1+o(1))$. Tekintsük $PG(3,q)$-t, és legyen $n = q^3+q^2+q+1$, ahol q egy prímhatvány. Ismert, hogy egy ovális maximális mérete q^2+1, azaz legfeljebb ennyi pont adható meg úgy, hogy minden egyenesen legfeljebb 2 legyen. Vegyünk egy oválist, és a duális síkjaiból (ezekből is q^2+1 van) álljon $\mathcal{F}$. Ezek közt nincs három, amely egy közös egyenest tartalmaz, így három ilyen metszete egy pont, vagyis $\mathcal{F}$ 3-szorosan pontosan 1-metsző, és nem triviálisan metsző. Ezzel kész vagyunk, ha n előáll q^3+q^2+q+1 alakban. Ha nincs ilyen q prímhatvány, akkor vegyük a legnagyobb olyan m-et, melyre $m \leq n$ és $m = q^3+q^2+q+1$. Ez pont elég, mert n és $(1-\epsilon)n$ közt van prímhatvány, ha n elég nagy.

Most nézzük a tetszőleges l esetét, ekkor kell, hogy $g(n,l,1) \geq n^{1/l}(1+o(1))$. Vegyük tehát $PG(l,q)$-t és $n = q^l+\dots+q+1$. Annyi ismert, hogy van $q+2\sqrt{q}$ olyan pont, hogy legfeljebb $(l-1)$ van minden 2-kodemenziós altérben. Ezek duális hipersíkjai alkotják $\mathcal{F}$-et, amely így l-szeresen pontosan 1-metsző lesz. Tehát $g(n,l,1) \geq n^{1/l}(1+o(1))$ is kijött.

Végül $g(n,l,t) \geq (1/t)n^{1/l}(1+o(1))$-hez az alaphalmaz minden elemét cseréljük t másikra. □

Vegyük észre, hogy $g(n,3,1)$-re azért tudtunk jobb alsó becslést adni, mert az oválisok duális síkjaira jobb becslés ismert. Ráadásul ebben az esetben az alsó és felső becslések is teljesen megegyeznek.

4.3.3. Következmény. $g(n,3,1) = n^{2/3}(1+o(1))$.

Sajnos a többi esetben nem tudunk ilyet állítani, még nagyságrendben sem, ugyanis kellene, hogy

$$\frac{1}{l} = \frac{t+1}{l+t-1},$$

amiből átrendezéssel $t(1-l) = 1$ adódik, amit nyilván nem elegít ki semmilyen l és t pozitív egész szám.

Ezek után nézzük, hogy mit tudunk mondani $f(n,l,t)$-ről. Mivel az előző tétellel kaptunk egy becslést a nem triviális esetre, már gyakorlatilag csak a triviálisan metsző rendszereket kell vizsgálni.

4.3.4. Tétel. *[7] Legyen $l \geq 3$ és $n \geq \frac{l(t+2)}{l-2}$, akkor $f(n,l,t) = \lfloor \frac{l}{2}(n-t) \rfloor + 1$.*

Biz. Először azt fogjuk megmutatni, hogy elég a triviálisan metsző rendszerekkel foglalkozni.

4.3.5. Lemma. *$|\mathcal{F}| \leq n + l - 1$, ha $\mathcal{F}$ l-szeresen nem triviálisan t-metsző halmazrendszer.*

Biz. A lemma állítása következik Füredi egy korábbi [5] eredményéből. □

Az $n \geq \frac{l(t+2)}{l-2}$ feltétel miatt, $\lfloor \frac{l}{2}(n-t) \rfloor + 1 \geq n+l-1$, ezért elég a triviálisan metsző rendszerekkel foglalkozni. Először megmutatjuk, hogy $f(n,l,t) \leq \lfloor \frac{l}{2}(n-t) \rfloor + 1$, majd egy konstrukcióval igazoljuk az egyenlőséget.

Vegyünk tehát n elemen egy l-szeresen triviálisan t-metsző rendszert, legyen $\bigcap \mathcal{F} = \{n, n-1, \ldots, n-t+1\}$, és definiáljuk az $\mathcal{F}' = \{F \setminus \{n, n-1, \ldots, n-t+1\} | F \in \mathcal{F}\}$ családot. nyilván $|\mathcal{F}'| = |\mathcal{F}|$. Minden $F' \in \mathcal{F}'$ halmaz minden eleméhez rendeljünk egy $\frac{1}{|F'|}$ nagyságú súlyt, kivéve az üres halmazt. Mivel $\{1, 2, \ldots, n-t\}$ minden eleme legfeljebb $(l-1)$ halmazban van benne, így minden elemen legfeljebb $(l-1)$ súly van. Egy adott elemen a két legnagyobb nem lehet 1, hiszen a halmazok különbözőek, nem eshet egybe két egyelemű halmaz. A második legnagyobb súly tehát legfeljebb $\frac{1}{2}$, így minden elemen legfeljebb $1 + \frac{l-2}{2} = \frac{l}{2}$ súly van. Összegezve a súlyokat az összes halmazra, ez egyrészt legfeljebb $(n-t)\frac{l}{2}$, másrészt egyenlő $|\mathcal{F}'|$-vel vagy $|\mathcal{F}'| - 1$-gyel az üres halmaztól függően, így

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}'| \leq \frac{l}{2}(n-t) + 1,$$

amivel kész a felső becslés.

A konstrukció $n \geq l+t$ esetén könnyen megcsinálható. Elég $\mathcal{F}'$-t megkonstruálni. Páros l esetén $\mathcal{F}' = \emptyset \cup \{1\} \cup \cdots \cup \{n-t\} \cup \mathcal{F}'_1 \cup \mathcal{F}'_2 \cup \cdots \cup \mathcal{F}'_{\frac{l-2}{2}}$, ahol $\mathcal{F}'_i = \{1, i+1\} \cup \{2, i+2\} \cup \cdots \cup \{n-t, n-t+i\}$ az elemeket értsük mod $(n-t)$. Páratlan l esetén pedig $\mathcal{F}' = \emptyset \cup \{1\} \cup \cdots \cup \{n-t\} \cup \mathcal{F}'_1 \cup \mathcal{F}'_2 \cup \cdots \cup \mathcal{F}'_{\frac{l-2}{2}} \cup \{1, \lfloor \frac{n-t}{2} \rfloor + 1\} \cup \{2, \lfloor \frac{n-t}{2} \rfloor + 2\} \cup \cdots \cup \{\lfloor \frac{n-t}{2} \rfloor, 2\lfloor \frac{n-t}{2} \rfloor\}$. □

5. fejezet

Alsó és felső korlátok

A dolgozatnak ebben a fejezetében a témakör legnehezebb kérdésével foglalkozunk, vagyis az r-szeresen legalább s-metsző és l-szeresen legfeljebb t-metsző halmazrendszerekkel. Vegyük észre, hogy most lehetnek olyanok a paraméterek, amikor nincs olyan halmazrendszer, amely mindkét feltételt kielégíti (ilyen pl. ha $r > l$ és $s > t$). Ekkor legyen $f(n, I(r, \geq s), I(l, \leq t)) = 0$.

Mivel itt a metszetek alulról és felülről is korlátozva vannak, így több feltételt kell kielégítenie az adott rendszernek, ezért a maximális elemszám kevesebb lesz, mintha csak egy feltétel lenne. Precízen ez a következőket jelenti:

5.0.6. Tétel. *Tetszőleges $r, l \geq 2$,$s, t \geq 1$ egész esetén teljesül, hogy*

$$f(n, I(r, \geq s), I(l, \leq t)) \leq f(n, I(r, \geq s)),$$

és ha $t < n$ is teljesül, akkor szigorú egyenlőtlenség áll fenn.

Biz. Ha a halmazrendszer r-szeresen legalább s-metsző és l-szeresen legfeljebb t-metsző, akkor r-szeresen legalább s-metsző is, így teljesül az egyenlőtlenség.

A szigorú egyenlőtlenség következik abból a 2.2. szakaszban tett megállapításból, hogy egy maximális méretű r-szeresen legalább s-metsző halmazrendszer filter. Ez pedig csak akkor teljesülhet a felülről korlátos esetben is, ha $t \geq n$, vagyis a felső korlátok nem adnak új feltételt. □

5.0.7. Tétel. *Tetszőleges $r, l \geq 2$,$s, t \geq 1$ egész esetén teljesül, hogy*

$$f(n, I(r, \geq s), I(l, \leq t)) \leq f(n, I(l, \leq t)),$$

Biz. Hasonlóan az előző tételéhez. □

5.1. Metsző, de l-szeresen nem metsző rendszerek

Talán a legegyszerűbb eset, amikor azt kérdezzük, hogy mekkora egy halmazrendszer maximális mérete n elemen, ha az metsző, de bármely három halmazának nincs közös eleme. A jelöléseinkkel ez pont $f(n, I(2, \geq 1), I(3, \leq 0))$ kiszámítását jelenti.

5.1.1. Tétel. *Ha k a legnagyobb olyan egész szám, amelyre $\binom{k}{2} \leq n$, akkor*

$$f(n, I(2, \geq 1), I(3, \leq 0)) = k$$

Biz. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F}$ halmazrendszer a fenti tulajdonságú, vagyis metsző, de bármely három halmazának nincs közös eleme. Legyen $|\mathcal{F}| = k$, és tudjuk, hogy $|F_i \cap F_j| \geq 1$ bármely (i, j) párra. Mivel bármely három $\mathcal{F}$-beli halmaz metszete üres, így $(F_{i1} \cap F_{j1}) \cap (F_{i1} \cap F_{j2}) = \emptyset$, különben lenne három halmaz, melyek metszete nem üres. Így minden két halmaz metszeteként előálló halmaz diszjunkt, és ha $|\mathcal{F}| = k$, akkor $\binom{k}{2}$ halmazpár van $\mathcal{F}$-ben, és ezek metszete legalább 1 elemű és diszjunkt, tehát $\binom{k}{2} \leq n$, amivel kész a felső becslés.

Az egyenlőség belátásához tekintsük az alábbi konstrukciót: legyen bármely két $\mathcal{F}$-beli halmaz metszete pont egy elemű, és tudjuk, hogy bármely két metszet különböző. Ezért, ha $|\mathcal{F}| = k$, akkor minden halmaz $(k-1)$ elemű, vagyis ha $F_i \in \mathcal{F}$ és $F_i \cap F_j = n_{ij}$, akkor $F_i = \{n_{ij} | 1 \leq j \leq k, i \neq j\}$. Példa egy ilyen rendszerre, $n = 6$ esetben, ekkor $k = 4$ lesz a maximális méretű halmazrendszer. □

F_1	○	○	○			
F_2	○			○	○	
F_3		○		○		○
F_4			○		○	○

Ha létezik olyan k, hogy $n = \binom{k}{2}$ teljesül, akkor adódik az alábbi egyszerű következmény:

5.1.2. Következmény. $f(n, I(2, \geq 1), I(3, \leq 0) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 8n})$, *ha létezik k, amire $n = \binom{k}{2}$.*

Az imént használt bizonyítási módszert lehet alkalmazni általánosabb esetben is. A kulcslépés ott volt, hogy minden metszetnek különbözőnek kell lennie, különben nem teljesülne a felső korlát. Ha bármely r halmaz metsző, akkor legfeljebb $r+1$-ről tehetjük fel, hogy nem metsző, ahhoz, hogy működjön az előbbi gondolatmenet.

Ugyanis, ha $l \geq r+2$, akkor például az $F_1, F_2, \dots, F_r$ halmazok metszete és az $F_2, F_3, \dots F_{r+1}$ halmazok metszete nem kell, hogy feltétlenül diszjunkt legyen, mivel ez csak $(r+1)$ különböző halmaz.

5.1.3. Tétel. *Ha k a legnagyobb olyan egész szám, amelyre $\binom{k}{r} \leq n$, akkor*

$$f(n, I(r, \geq 1), I(r, \leq 0)) = k,$$

ami tetszőleges n esetén $f(n, I(r, \geq 1), I(r, \leq 0)) = o(n^{1/r})$-t jelent.

Biz. Hasonlóan az előző bizonyításhoz, vegyünk egy ilyen tulajdonságú rendszert egy n elemű alaphalmazon. Legyen $F_{i1}, F_{i2}, \dots F_{ir} \in \mathcal{F}$ és $F_{j1}, F_{j2}, \dots F_{jr} \in \mathcal{F}$ egy-egy halmaz r-es úgy, hogy legyen köztük legalább egy különböző halmaz. Ekkor $|F_{i1} \cup \dots \cup F_{ir} \cup F_{j1} \cup \dots \cup F_{jr}| \geq r+1$, vagyis bármely r-es metszete különböző, és mivel $\mathcal{F}$ r-szeresen metsző, ezért legalább egy eleműek. Vagyis $[n]$ minden eleme csak egyszer forulhat elő metszetként, és összesen $\binom{k}{r}$ r-es van, így adódik a felső becslés.

Az egyenlőséghez az előzőhez hasonlóan készítsük a konstrukciót, az $[n]$ elemeit írjuk elő metszetként, minden halmaz $\binom{k-1}{r-1}$ elemű lesz, ugyanis egy adott halmazhoz ennyiféleképpen tudunk választani másik $(r-1)$-et, és a metszeteknek különbözőknek kell lenni. $\square$

Egy lehetséges konstrukció $n = 10$ és $r = 3$ esetén:

F_1	○	○	○	○	○	○				
F_2	○	○	○				○	○	○	
F_3	○			○	○		○	○		○
F_4		○		○		○	○		○	○
F_5			○		○	○		○	○	○

A gondolatmenet tovább általánosíható, segítségével felsőbecslést tudunk adni $f(n, I(2, \geq 1), I(l, = 0))$-ra is. Azt kell észrevenni, hogy a metszetként előálló részhalmazokat tartalmazó halmazok száma felülről korlátozható az l-szeresen nem metsző feltétellel.

5.1.4. Tétel.

$$f(n, I(2, \geq 1), I(l, \leq 0)) \leq lo(n^{1/2})$$

Biz. Az előző bizonyításon csak annyit kell változtatni, hogy vegyük észre, hogy egy metszetként előálló részhalmazt legfeljebb $l-1$ halmaz tartalmazhatja. Így egy halmaz legfeljebb $\binom{l-1}{2}$ féleképp állhat elő metszetként, amiből következik a

$$\binom{k}{2} \leq \binom{l-1}{2} n$$

feltétel, ebből átrendezéssel kaphatjuk a kimondott alakot.

Az, hogy mikor lehet egyenlőség, a blokkrendszerek elméletére vezethető vissza, ugyanis ahhoz, hogy ez teljesüljön, olyan rendszerre van szükségünk, hogy bármely 1 elemű halmazt pontosan $(l-1)$ halmaz (blokk) tartalmazza. □

Egyenlőség teljesül például az $n=7$, $l=4$ esetben is egy lehetséges megoldás az alábbi halmazrendszer, amely ráadásul még 3-uniform is:

F_1	○	○	○				
F_2	○			○	○		
F_3	○					○	○
F_4		○		○		○	
F_5		○			○		○
F_6			○	○			○
F_7			○		○	○	

Végül térjünk rá a szakasz legáltalánosabb kérdésére, vagyis legfeljebb hány elemű halmazrendszer adható meg egy n elemű alaphalmazon, ha bármely r metszi egymást, de bármely l viszont már nem (természetesen $r<l$)? Az eddigiekben használt módszer itt is alkalmazható arra, hogy adjunk egy felső becslést a maximális elemszámra.

5.1.5. Tétel. *Ha $r<l$ teljesül, akkor*

$$f(n, I(r, \geq 1), I(l, \leq 0)) \leq lo(n^{1/r})$$

Biz. Használva az 5.1.3. és az 5.1.4. tétel bizonyításánál alkalmazott módszereket, kapjuk, hogy bármely r halmaz metszeteként előálló részhalmazt legfeljebb $(l-1)$ halmaz tartalmazhatja, így minden részhalmaz legfeljebb $\binom{l-1}{r}$-szer fordulhat elő metszetként, ami adja a

$$\binom{k}{r} \leq \binom{l-1}{r} n$$

egyenlőtlenséget, amit átrendezve kapjuk a tételt. Az egyenlőséghez ebben az esetben is a megfelelő blokkrendszerek létezésére van szükség. □

Nézzük, milyen következtetések vonhatóak le az eredményekből. Az általános eset vizsgálatából kiderült, hogy a felső becslés nagyságrendje csak r-től függött, vagyis attól, hogy hányszorosan legyen metsző a rendszer. Rögzített r esetén l növelésével $f(n, I(r, \geq 1), I(l, \leq 0))$ monoton nő, ami nyilvánvaló, hiszen egyre több halmaz metszetének kell üresnek lennie. Ami viszont érdekes, hogy az előbbi megállapítás alapján l növelése nem jelent nagyságrendbeli növekedést.

5.2. Metsző, de l-szeresen legfeljebb 1-metsző rendszerek

Az előző szakaszban beláttuk, hogy ha egy halmazrendszer r-szeresen metsző, és l-szeresen nem metsző, akkor a maximális mérete n elemen $n^{1/r}$ nagyságrendű. Most egy olyan esettel fogunk foglalkozni, amikor a 2-szeresen metszést, és az l-szeresen ($l \geq 2$) legfeljebb 1-metszést tesszük fel. Ekkor a maximális méretre egy cn-es felső becslést kapunk, ahol c-t szintén l határozza meg, mint az előző szakaszban.

5.2.1. Tétel. *(Füredi [5]) Legyen $l \geq 2$, ekkor*

$$f(n, I(2, \geq 1), I(l, \leq 1)) \leq (l-1)n.$$

Biz. A bizonyításhoz használjuk Motzkin következő lemmáját. Ő eredetileg $c = 1$-re bizonyította [8], ennek egy könnyű általánosítása az alábbi:

5.2.2. Lemma. *Legyen $G = G(A, B, E)$ páros nem üres gráf, és legyen $c > 0$ valós szám. Tegyük fel, hogy A-ban nincs olyan csúcs, amely szomszédos B összes csúcsával, és $a \in A$, $b \in B$, $(a, b) \notin E$ esetén $deg(a) \leq cdeg(b)$. Ekkor $c|A| \geq |B|$.*

A lemma segítségével fogjuk belátni Füredi tételét. Legyen $\mathcal{F}$ a tétel feltételeinek megfelelő halmazrendszer, és definiáljunk egy páros gráfot, melyben az egyik csúcsosztály az alaphalmaz elemeinek, másik $\mathcal{F}$ elemeinek felel meg, és két csúcsot összekötünk, ha a megfelelő halmaz tartalmazza a megfelelő elemet. Vagyis legyen $G(A, B, E)$ páros gráf, $A = [n]$, $B = \mathcal{F}$, és $x \in [n]$, $F \in \mathcal{F}$ esetén $(x, F) \in E \Leftrightarrow x \in F$.

A Motzkin lemmát szeretnénk használni, ezért először nézzük azokat az eseteket, amikor nem teljesülnek a lemma feltételei.

Ha a gráfnak nincs éle, akkor semelyik halmaznak nincs eleme, így nem lehetnek metszők, vagyis ez az eset nem állhat fenn.

Ha egy A-beli elem össze van kötve az összes B-belivel, akkor van $[n]$-nek olyan eleme, melyet az összes $\mathcal{F}$-beli halmaz tartalmazza, vagyis $\mathcal{F}$ triviálisan metsző. Viszont mivel l-szeresen legfeljebb 1-metsző lehet, ezért minden más $x \in [n]$-et elemet legfeljebb $l-1$ $\mathcal{F}$-beli tartalmazhatja, amiből,

$$\mathcal{F} \leq 1 + (n-1)(l-1) \leq n(l-1)$$

adódik, vagyis ebben az esetben kész vagyunk.

Tehát feltehetjük, hogy teljesülnek a lemma feltételei. Vegyünk egy $x \in A$ és $F \in B$ nem szomszédos csúcspárt, vagyis $x \notin F$. Vegyük az összes x-et tartalmazó halmazt $\mathcal{F}$-ből: $\mathcal{F}[x] = \{H \in \mathcal{F} : x \in H\}$, így nyilván $|\mathcal{F}[x]| = deg(x)$. Mivel $\mathcal{F}$ metsző, így $\mathcal{F}[x] = \cup_{y \in F} \mathcal{F}[x,y]$, ahol $\mathcal{F}[x,y] = \{H \in \mathcal{F} : x, y \in H\}$. Tudjuk, hogy $\mathcal{F}$ l-szeresen legfeljebb 1-metsző, ezért $|\mathcal{F}[x,y]| \leq l-1$, ezt használva $|\mathcal{F}[x]|$, tehát teljesülnek a lemma feltételei $c = l-1$-re, ami miatt

$$(l-1)n = (l-1)|A| \geq |B| = |\mathcal{F}|,$$

és pont ezt akartuk belátni. □

Most mutatunk egy konstrukciót egy metsző, de l-szeresen legfeljebb 1-metsző halmazrendszerre, amely $(l-1)n + o(n)$ halmazt tartalmaz, így az előző tétellel együtt kapjuk, hogy

$$f(n, I(2, \geq 1), I(l, \leq 1)) = (l-1)n + o(n).$$

A konstrukció projektív síkok segítségével megy. Vegyük $PG(2,q)$-t, ahol q a legnagyobb prímhatvány, amire $q^2 + l(q+1) \leq n$. Legyenek a pontok $a_1, a_2, \ldots, a_{q^2+q+1}$, az egyenesek pedig $L_1, L_2, \ldots, L_{q^2+q+1}$. Színezzük meg az egyeneseket $(q+1)$ színnel úgy, hogy nincs 3 egyszínű, amely átmegy egy ponton. Ez megcsinálható Füredi és Csima egy korábbi munkája alapján [4]. Legyen az i. egyenes színe $c(i)$. Vegyünk továbbá $(l-2)(q+1)$ extra pontot (minden színből $l-2$-t), jelöljük őket $e_{1,1}, e_{2,1}, \ldots, e_{q+1}1, e_{1,2}, \ldots, e_{q+1,l-2}$-vel, ahol az első index határozza meg a pont színét.

Legyen a halmazrendszer alaphalmaza az eredeti és az új pontok uniója, vagyis $\{a_1, \ldots, a_{q^2+q+1}, e_{1,1}, \ldots e_{q+1,l-2}\}$, a halmazok pedig a következőek:

$$\mathcal{F} = \{F_{i,j} : F_{i,j} = L_i \cup \{e_{c(i),j}\}, haj \leq l-2, sF_{i,l-1} = L_i\}.$$

A rendszer metsző, ugyanis $L_i \subseteq F_{i,j}$ és $L_e \subseteq F_{e,f}$ és minden egyenes metszi egymást.

Kell még, hogy l-szeresen legfeljebb 1-metsző legyen $\mathcal{F}$. Vegyünk l különböző halmazt $\mathcal{F}$-ből. Mivel a halmazok második indexe $(l-1)$-féle lehet, ezért ezen l halmazból biztosan van kettő, melyeknek nem egyezik meg az első indexe, legyenek ezek $F_{a,b}$ és $F_{e,f}$. Ha $b \neq f$, akkor $|F_{a,b} \cap F_{e,f}| = |L_a \cap L_e| = 1$, mivel L_a és L_e $PG(2,q)$ egyenesei. Így az l halmaz legfeljebb egy pontban metszi egymást.

Ha $b = f$, akkor vegyünk egy harmadik halmazt: $F_{g,h}$. Ha $h \neq b$, akkor $g \neq a$ vagy $q \neq e$ biztosan igaz, ugyanis $a \neq e$, legyen pl. $g \neq a$, így $|F_{a,b} \cap F_{g,h}| = |L_a \cap L_g| = 1$, mint az előbb.

Ha $h = b(= f)$, akkor $c(a) = c(e) = c(g)$ esetén $F_{a,b} \cap F_{e,f} \cap F_{g,h} = \{e_{c(a),b}\}$, hiszen a színezés miatt nincs három egyszínű egyenes, amely átmegy egy ponton, azaz $L_a \cap L_e \cap L_g = \emptyset$.

Végül, ha $h = b(= f)$, és $c(a), c(e), c(g)$ nem mind egyformák, akkor $|F_{a,b} \cap F_{e,f} \cap F_{g,h}| = |L_a \cap L_e \cap L_g| = 1$, tehát ekkor is kész vagyunk.

Kijött tehát, hogy egy $q^2+q+1+(l-1)(q+1) = q^2+l(q+1)$ elemű alaphalmazon megadtunk egy $(l-1)(q^2+q+1)$ elemű metsző, de l-szeresen legfeljebb 1-metsző halmazrendszert, ami aszimptotikusan azt adja, hogy $|\mathcal{F}| = (l-1)n + o(n)$.

Ezt összevetve a felső becsléssel adódik az eredmény:

5.2.3. Tétel. *$l \geq 2$ esetén,*

$$f(n, I(2, \geq 1), I(l, \leq 1)) = (l-1)n + o(n).$$

5.3. Az általános probléma $t \geq 2s \geq 2$ esetén

Jelen szakaszban a kérdéskör legáltalánosabb problémájával fogunk foglalkozni, az r-szeresen legalább s-metsző és l-szeresen legfeljebb t-metsző halmazrendszerek maximális méretével n elemen. A paraméterekre vonatkozó megkötés mindössze annyi, hogy $t \geq 2s \geq 2$. Katona Zsolt és Füredi Zoltán eredménye [6] visszavezeti a problémát egy korábbi feladatra, ezt fogjuk itt bemutatni.

Vegyük észre, hogy a 4. fejezetben, és az 5. fejezet korábbi szakaszaiban vizsgált esetekre nem teljesült a $t \geq 2s \geq 2$ feltétel így azokkal külön kellett foglalkozni.

Szükségünk lesz egy új struktúra definiálására, a *pakolásokra*, melyek a 3. fejezetben bemutatott blokkrendszerek általánosításai. A blokkrendszereknél azt mondtuk, hogy a halmazok legyenek k eleműek, és az alaphalmaz bármely s különböző elemét pontosan λ halmaz tartalmazza. A pakolásoknál a halmazok méretét alulról korlátozzuk, és egy s méretű részhalmazt legfeljebb λ halmaz tartalmazhatja.

5.3.1. Definíció. *Az [n] alaphalmazon vett $\mathcal{F}$ halmazrendszert $(n, k^+, s, \leq \lambda)$ - pakolásnak nevezzük, ha $|F| \geq k$, minden $F \in \mathcal{F}$-re, és [n] minden s elemű részhalmazát legfeljebb λ $\mathcal{F}$-beli halmaz tartalmazza. Egy ilyen pakolás maximális méretét $P(n, k^+, s, \leq \lambda)$ jelöli.*

5.3.2. Megjegyzés. *$(n, k, s, \leq \lambda)$-pakolásokról is szokás beszélni, illetve az $(n, k, s, = \lambda)$-pakolások a blokkrendszerek.*

Az alábbi egyszerű eredmény pakolások maximális méretéről szól, a fő tétel bizonyításához lesz szükséges.

5.3.3. Tétel.
$$\frac{\lambda}{k}\frac{n-k}{n}\binom{n}{k-1} \leq P(n, k^+, k-1, \leq \lambda) \leq \frac{\lambda}{k}\binom{n}{k-1}.$$

Vegyük észre, hogy ha felső korlátokat írunk elő a halmazrendszerek méretére, akkor az megfogalmazható a pakolások nyelvén is. Vegyünk egy l-szeresen legfeljebb t-metsző rendszert. Ekkor minden $(t+1)$ méretű részhalmazt legfeljebb $(l-1)$ $\mathcal{F}$-beli halmaz tartalmazhat, különben sérülne a feltétel. Így ez egy $(n, 1^+, t+1, \leq l-1)$-pakolás.

A fő eredmény bizonyításához szükségünk lesz a 2. fejezetben már bemutatott Erdős-Ko-Rado tétel k-uniform megfelelőjére. Ez azt mondja ki, hogy ha a halmazrendszer 2-szeresen legalább s-metsző, és k-uniform, akkor a maximális méretű család a triviálisan metsző.

5.3.4. Tétel. *(Erdős-Ko-Rado [9]) Legyen $\mathcal{F}$ egy 2-szeresen legalább s-metsző k-uniform $(k \geq s)$ rendszer az [n] alaphalmazon. Ekkor, $n > n(k, s)$ esetén*
$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-s}{k-s}.$$

Ezek után rátérhetünk a szakasz fő eredményére, ami megoldja a problémát a $t \geq 2s \geq 2$ esetben. Konstruálunk egy rendszert, és azt mutatjuk meg, hogy egy r-szeresen legalább s-metsző, és l-szeresen legfeljebb t-metsző család legfeljebb ekkora méretű lehet.

5.3.5. Tétel. *(Füredi Z. - Katona Zs. [6]) Legyen $t \geq 2s \geq 2$, $r \geq 2$, $l \geq 2$ és $n \geq n_0(r, s, l, t)$. Ekkor, ha $r \geq 3$, akkor*
$$f(n, I(r, \geq s), I(l, \leq t)) = f(n-s, I(l, \leq t-s)).$$
Ha pedig r=2, akkor
$$f(n, I(2, \geq s), I(l, \leq t)) \leq f(n-s, I(l, \leq t-s)) + l - 2.$$

A tétel tehát azt mondja, hogy a feltételek teljesülése esetén, a probléma visszavezethető arra az esetre, amikor csak felső korlátok vannak a metszetekre. Nézzük a bizonyítást.

Biz. Definiáljuk Σ-t a következőképpen:

$$\Sigma = \sum_{i=0}^{t+1-s} \binom{n-s}{i} + P(n-s, (t+2-s)^+, t+1-s, \leq l-2).$$

Ekkora méretű halmazrendszer könnyen adható, amely r-szeresen legalább s-metsző, és l-szeresen legfeljebb t-metsző. A rendszer triviálisan metsző lesz, vegyük bele az összes $[s]$-et tartalmazó legfeljebb $(t+1)$ méretű részhalmazát $[n]$-nek, illetve ha $\mathcal{P}'$ egy $P(n-s, (t+2-s)^+, t+1-s, \leq l-2)$ méretű pakolás az $[n] \setminus [s]$ alaphalmazon, akkor $\mathcal{P} = \{P \cup [s] : P \in \mathcal{P}'\}$ elemeit. Jelöljük ezt a rendszert $\mathcal{F}_0$-lal, vagyis $\mathcal{F}_0 = \{F \subset [n] : |F| \leq t+1, [s] \subset F\} \cup \mathcal{P}$. $|\mathcal{F}_0| = \Sigma$, vagyis kijött, hogy

$$f(n, I(r, \geq s), I(l, \leq t)) \geq \Sigma.$$

Meg fogjuk mutatni, hogy $r \geq 3$ esetén a fordított irányú egyenlőtlenség is igaz, vagyis ekkor $f(n, I(r, \geq s), I(l, \leq t)) \geq \Sigma$.

Ha $r = 2$, akkor adható egy nagyobb méretű rendszer is. Tegyük fel, hogy van egy $P(n-s, (t+2-s)^+, t+1-s, \leq l-2)$ méretű pakolás, amely csak $(t+2-s)$ elemű halmazokból áll, vagyis $P(n-s, (t+2-s)^+, t+1-s, \leq l-2) = P(n-s, (t+2-s), t+1-s, \leq l-2)$. Távolítsuk el $[s]$-et $\mathcal{F}_0$-ból, és vegyünk hozzá $min\{s, l-1\}$ $[n] \setminus \{i\}$ alakú halmazt, ahol i legfeljebb s. Ez a rendszer is megfelelő, és mérete $(l-2)$-vel nagyobb. Az $r = 2$ esetben azt fogjuk belátni, hogy $|\mathcal{F}| \leq \Sigma + l - 2$.

Vegyünk tehát egy tetszőleges $\mathcal{F}$ halmazrendszert, amely teljesíti a metszési feltételeket. Nézzük először azt az esetet, amikor $\mathcal{F}$ triviálisan r-szeresen legalább s-metsző, vagyis $|\bigcap \mathcal{F}| \geq s$. Legyen pl. $[s] \subset F$ minden $\mathcal{F}$-beli halmazra. Tekintsük az $\mathcal{F}' = \{F \setminus [s] : F \in \mathcal{F}\}$ rendszert, ez l-szeresen legfeljebb $(t-s)$-metsző, így a 3.2.1. tétel miatt $|\mathcal{F}'| = |\mathcal{F}| \leq \Sigma$, vagyis kész vagyunk.

Következik az az eset, ha a rendszer nem triviálisan metsző, vagyis ha $|\bigcap \mathcal{F}| < s$. Legyen $\mathcal{F}(i) = \{F \in \mathcal{F} : |F| = i\}$, vagyis $\mathcal{F}$ i méretű halmazait tartalmazó halmaz. $\mathcal{F}$ j-nél nagyobb méretű halmazainak összességére is vezessünk be egy jelölést: $\mathcal{F}(\geq j) = \mathcal{F}(j) \cup \mathcal{F}(j+1) \cup \ldots$, azaz $\mathcal{F} = \mathcal{F}(1) \cup \mathcal{F}(2) \cup \ldots$. $\mathcal{F}(i)$ egy i-unifrom rendszer $[n]$-en, és legalább s-metsző, használható az Erdős-Ko-Rado tétel:

$$|\mathcal{F}(i)| \leq \binom{n-s}{i-s} \quad ha \quad n > n(i,s),\ i \geq s$$

az $i < s$ esetben pedig nyilván $\mathcal{F}(i) = \emptyset$.

Az 5.3.3. tétel és az $f(n, I(r, \geq s), I(l, \leq t)) \geq \Sigma$ megállapítás alapján feltehetjük, hogy

$$|\mathcal{F}| \geq \sum_{i=0}^{t-s} \binom{n-s}{i} + \left(1 + \frac{l-2}{t+2-s}\frac{n-t-2}{n-s}\right)\binom{n-s}{t+1-s}.$$

Az Erdős-Ko-Rado tételből következő becslést használva a legfeljebb t méretű halmazokra következik az alábbi megállapítás az előző feltevésből:

$$|\mathcal{F}(\geq t+1)| \geq \left(1 + \frac{l-2}{t+2-s}\frac{n-t-2}{n-s}\right)\binom{n-s}{t+1-s}.$$

A következő lemmával a nagy halmazok méretét becsüljük.

5.3.6. Lemma. *Ha $|A \cap F| \geq s$ minden F-re, akkor,*

$$|\mathcal{F}(\geq k)| \leq \frac{\binom{|A|}{s}}{\binom{k-s}{t+1-s}}\binom{n-s}{t+1-s}(l-1).$$

Biz. Legyen $\mathcal{A} = \{X \in \binom{[n]}{t+1} : |A \cap X| \geq s\}$, ekkor nyilván $|\mathcal{A}| \leq \binom{|A|}{s}\binom{n-s}{t+1-s}$. A metszési feltételek miatt bármely $(t+1)$ elem legfeljebb $(l-1)$ $\mathcal{F}$-beli halmazban van benne, és minden $F \in \mathcal{F}(\geq k)$ legalább $\binom{k-s}{t+1-s}$ tagját tartalmazza $\mathcal{A}$-nak. Tehát

$$F \in \mathcal{F}(\geq k)\binom{k-s}{t+1-s} \leq |\mathcal{A}|(l-1) \leq \binom{|A|}{s}\binom{n-s}{t+1-s}(l-1),$$

ami átrendezve adja a lemmát. □

A $t \geq 2s \geq 2$ feltételt most használjuk, ugyanis emiatt elég nagy k-ra a $\binom{k}{s}/\binom{k-s}{t+1-s}$ tört tetszőlegesen kicsi. Például, ha $k > k_0(t,s) = 4s^2 + 6t^2$, akkor

$$\frac{\binom{k}{s}}{\binom{k-s}{t+1-s}} < \frac{2t}{k} < \frac{1}{3t}.$$

Legyen $\mathcal{F}(\geq t+1) = \mathcal{G} \cup \mathcal{F}(\geq k_0)$, ahol értelemszerűen $\mathcal{G} = \mathcal{F}(t+1) \cup \cdots \cup \mathcal{F}(k_0 - 1)$. Az előbbi lemmánk segítségével könnyen tudjuk felülről becsülni $\mathcal{F}(\geq k_0)$ méretét, egy minimális méretű F_0 halmazt választva a lemmabeli A-nak. Ha $|F_0| = f_0$, akkor alkalmazva a lemmát:

$$|\mathcal{F}(\geq k_0| = |\mathcal{F}(\geq f_0)| \leq \frac{\binom{f_0}{s}}{\binom{f_0-s}{t+1-s}}\binom{n-s}{t+1-s}(l-1) < \frac{l-1}{3t}\binom{n-s}{t+1-s}.$$

Innen $\mathcal{G}$ mérete is megbecsülhető

$$|\mathcal{G}| = |\mathcal{F}(\geq t+1)| - |\mathcal{F}(\geq f_0)| \geq$$

$$\geq \left(1 + \frac{l-2}{t+2-s}\frac{n-t-2}{n-s} - \frac{l-1}{3t}\right)\binom{n-s}{t+1-s} \geq \frac{l-1}{3t}\binom{n-s}{t+1-s}.$$

Vegyük észre, hogy $|\bigcap_{G\in\mathcal{G}} G| = s$, feltehetjük, hogy $[s] \subset G$ minden $G \in \mathcal{G}$-re. $\mathcal{F}(\geq t+1)$-et bontsuk két részre aszerint, hogy mely halmazai tartalmazzák $[s]$-t ($\mathcal{S}$), és melyek nem ($\mathcal{H}$). Legyen $\mathcal{S}' = \{F \setminus [s] : F \in S\}$, ez nyilván l-szeresen legfeljebb $(t-s)$-metsző $(n-s)$ elemen. $\mathcal{S}'$ minden tagja legalább $(t+1-s)$ elemű, így alkalmazva a 3.2.1. tételt:

$$|S| \leq \binom{n-s}{t+1-s} + P(n-s, (t+2-s)^+, (t+1-s), \leq l-2).$$

Ha $\mathcal{H} = \emptyset$, akkor csak $\mathcal{S}$ méretét kell figyelembe venni, és kész vagyunk, mivel a becslés és az Erdős-Ko-Rado tétel miatt $\mathcal{F} \leq \Sigma$.

Tehát legyen $\mathcal{H}$ nem üres, a legkisebb halmaz $\mathcal{H}$-ban legyen H_1, és $|H_1| = h$. Mivel ebben az esetben $|\mathcal{F}(\geq t+1)| = |\mathcal{S}| + |\mathcal{H}|$, ahol $|\mathcal{H}| \neq 0$, így meg kell becsülnünk $|\mathcal{S}|$-et és $\mathcal{H}$-t is. Kezdjük $\mathcal{S}$ méretének becslésével, ehhez tekintsük a $\mathcal{C} = \{C \subset [n] : C \supset [s], |C| = t+1\}$ családot. Nyilván $\mathcal{F}(t+1) \subset \mathcal{C}$. Ezen kívül egyrészt $\mathcal{S}$ minden legalább $(t+2)$ méretű tagja tartalmazza $\mathcal{C}$-nek legalább $(t+2-s)$ tagját. Másrészt, $\mathcal{C}$ minden tagja $\mathcal{F}$-nek legfeljebb $(l-1)$ tagjában van benne, tehát adódik az alábbi becslés:

$$(t+2-s)(|\mathcal{S}| - |\mathcal{F}(t+1)|) + |\mathcal{F}(t+1)| \leq (l-1)|\mathcal{C}| = (l-1)\binom{n-2}{t+1-s},$$

amit átrendezve kapjuk, hogy

$$|\mathcal{S}| \leq \left(1 + \frac{l-2}{t+2-s}\right)\binom{n-s}{t+1-s} - \frac{t+1-s}{t+2-s}\left(|\mathcal{C}| - |\mathcal{F}(t+1)|\right).$$

Ezt tovább alakítva, mivel $F \in \mathcal{F}(t+1)$, így $F \setminus [s]$ nem lehet benne $[n] \setminus H_1$-ben, ezért $|\mathcal{C}| - |\mathcal{F}(t+1)|$ legalább $\binom{n-s-h}{t+1-s}$.

$$|\mathcal{S}| \leq \left(1 + \frac{l-2}{t+2-s}\right)\binom{n-s}{t+1-s} - \frac{2}{3}\binom{n-s-h}{t+1-s},$$

ugyanis $\frac{t+1-s}{t+2-s} \geq \frac{2}{3}$.

Most következik $|\mathcal{H}|$ becslése, ehhez az 5.3.6. lemmát használjuk tetszőleges $A \in \mathcal{G}$ halmazzal. Mivel $|A| \leq k_0$, és minden $H \in \mathcal{H}$-ra $|H| \geq h$, így

$$|\mathcal{H}| \leq \frac{\binom{k_0}{s}}{\binom{h-s}{t+1-s}} \binom{n-s}{t+1-s}(l-1) < \frac{2t}{h} \binom{n-s}{t+1-s}(l-1).$$

Így kaptunk felső korlátokat $|\mathcal{S}|$-re és $|\mathcal{H}|$-ra is, ezeket összeadva van egy felső korlát $\mathcal{F}(\geq t+1)$ méretére is. Ezt összehasonlítva a korábbi alsó korláttal átrendezés után kapjuk, hogy

$$\frac{2}{3(l-1)} \binom{n-h-s}{t+1-s} \leq \frac{2t}{h} \binom{n-s}{t+1-s} + \frac{1}{n-s}$$

Az $\mathcal{S}$ méretére adott becslésből, és az Erdős-Ko-Rado tételből következik, hogy $|\mathcal{F}| \leq \Sigma + |\mathcal{H}|$. Az előző becslésből elég nagy n-re és k_0-ra $h > \frac{l-1}{l}(n+t)$, és mivel $\mathcal{H}$ l-szeresen legfeljebb t-metsző, adódik, hogy $|\mathcal{H}| \leq l-1$. Így már tudjuk, hogy $|\mathcal{F}| \leq \Sigma + l - 1$.

Ha $r = 2$, akkor $\mathcal{H} \neq \emptyset$ miatt $\mathcal{F}$ nem tartalmazhatja $[s]$-t, így $|\mathcal{F}| \leq \Sigma - 1 + l - 1$, vagyis ebben az esetben kész vagyunk.

Tekintsük az $r \geq 3$ esetet. Mivel $|\mathcal{F}| \leq \Sigma + |\mathcal{H}|$, és $|\mathcal{F}| \geq \Sigma$, ezért az Erdős-Ko-Rado miatt

$$|\mathcal{F}(s+1)| \geq \binom{n-s}{1} - |\mathcal{H}| \geq (n-s) - (l-1) > s+2$$

elég nagy n-re. $\mathcal{F}(s+1)$ páronként s elemben metszik egymást, így vagy $|\bigcup_{F\in\mathcal{F}(s+1)} F| \leq q+2$ vagy $|\bigcap_{F\in\mathcal{F}(s+1)} F| = s$. Előbbi nem lehet, mert akkor $|\mathcal{F}(s+1)| \leq \binom{s+2}{s+1} = s+2$, ami ellentmondásban van az előző egyenlőtlenséggel. Így legyen $S_0 = \bigcap_{F\in\mathcal{F}(s+1)} F$, ahol $|S_0| = s$. Az r-szeresen legalább s-metszésből adódik, hogy $S_0 \subset \bigcap_{G\in\mathcal{G}} G$, és hogy S_0 benne van $\mathcal{F}(i)$ minden tagjában, ha $i \leq t$. Mivel $|\cap_{G\in\mathcal{G}} G| = s$, így $S_0 = [s]$. Vegyünk egy tetszőleges $H \in \mathcal{H}$ elemet. Ekkor

$$|H \cap [s]| = s - 1 \text{ és } H \supset (\textstyle\bigcup_{F\in\mathcal{F}(s+1)}(F \setminus [s])).$$

Vegyük most $\mathcal{F}$ három különböző halmazát, kettőt $\mathcal{F}(s+1)$-ből (F_1, F_2), egyet $\mathcal{H}$-ból (H_1), és nézzük ezek metszetét. Az előző megállapítás miatt $|F_1 \cap F_2 \cap H_1| \leq s-1$, ami ellentmondás, ugyanis $r \geq 3$, így $\mathcal{F}$ sérti az r-szeresen legalább s-metsző feltételt. Vagyis $|\mathcal{F}| \leq \Sigma$, így kész vagyunk ebben az esetben is. $\square$

A tétel segítségével tehát sikerült a problémát visszavezetni arra az esetre, amikor csak felső korlátok vannak, így a 3. fejezet megfelelő eredményei alkalmazhatóak ebben az esetben.

5.4. További problémák

Az előző szakaszban szereplő tétel megoldja az r-szeresen legalább s-metsző és l-szeresen legfeljebb t-metsző halmazrendszerek esetén a problémát a $t \geq 2s \geq 2$ esetben, pontosabban visszavezeti arra az esetre, amikor csak felső korlátok vannak.

A fejezet korábbi részeiben olyan problémákkal foglalkoztunk, amikre nem teljesül a $t \geq 2s \geq 2$ feltétel. Azonban így is számos nyitott probléma marad még. Nézzünk most ezek közül egyet, az $(r, s, l, t) = (2, 2, 3, 3)$ esetet. Sajnos ebben az esetben konkrétan nem lesz meg $f(n, I(2, \geq 2), I(3, \leq 3))$ értéke, csak egy alsó és felső becslést tudunk rá adni.

5.4.1. Tétel.

$$f(n, I(2, \geq 2), I(3, \leq 3)) \leq \sum_{k=0}^{3} \binom{n}{k} + \frac{6}{5}\binom{n}{4},$$

illetve ha $n \equiv 1$ *vagy* 3 *(mod* 6*), akkor a*

$$\frac{2}{3}n^2 - \frac{7}{3}n + 3 \leq f(n, I(2, \geq 2), I(3, \leq 3))$$

becslés is teljesül.

Biz. A felső becslés egyszerű alkalmazása a 3.2.1. és 5.0.7. tételnek, vagyis ha a rendszerre csak a második metszési feltételt nézzük, és arra alkalmazzuk korábbi eredményünket.

Az alsó becsléshez pedig adunk egy triviálisan metsző konstrukciót. Legyen tehát $\mathcal{F}$ a következő: minden $F \in \mathcal{F}$-re $[1, 2] \subset F$ $|F| \leq 3$ és az $\mathcal{F}' = \{F \setminus [1, 2] : F \in \mathcal{F}, |F| = 3\}$ család egy Steiner hármasrendszer. A 3.3.5. következmény alapján $\mathcal{F}$ mérete pont megfelelő. □

Irodalomjegyzék

[1] de Bruijn N. G.; Erdős P. On a combinatorial problem. *Indag. Math.*, 10:421–423, 1948.

[2] P. Frankl. Multiply-intersecting families. *J. Combin. Theory, Ser. B*, 53:195–234, 1991.

[3] P. Frankl. Extremal set systems. *Handbook of Combinatorics*, 1,2:1293–1329, 1995.

[4] J. Csima; Z. Füredi. Colouring finite incidence structures. *Graphs and Combinatorics*, 4:339–346, 1986.

[5] Z. Füredi. On a problem of deza and frankl. *Ars Combinatortia*, 13:221–222, 1982.

[6] Z. Füredi; Zs. Katona. Multiply intersecting families of sets. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 106(2):315–326, 2004.

[7] Zs. Katona. 3-wise exactly 1-intersecting families of sets. *Graphs and Combinatorics*, 21:71–76, 2005.

[8] Th. Motzkin. The lines and planes connecting the points of a finite set. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 70:451–464, 1951.

[9] P. Erdős; Chao Ko; R. Rado. Intersection theorems for systems of finite sets. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 12:313–320, 1961.

[10] Szőnyi Tamás. *Szimmetrikus struktúrák.* egyetemi jegyzet, 1998.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani Katona Gyulának, aki nemcsak felkeltette érdeklődésem a téma iránt, hanem széleskörű szakmai tanácsaival, motiválással segítette a munkámat. Továbbá szeretném megköszönni a Rényi Intézet extremális halmazrendszerek szeminárium résztvevőinek, hogy az előadásaikból sok ötletet meríthettem.