Döntési módszerek

Diplomamunka

Írta: Kiss Csaba

Alkalmazott matematikus szak

Témavezető:

Dr. Fullér Róbert, egyetemi docens

Operációkutatási Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2008

Tartalomjegyzék

1. Beveztés

A mindennapi ember - legyen az bankár vagy építészmérnök vagy újságos - nap mint nap döntésre kényszerül kisebb vagy nagyobb horderejű kérdésekben. A dolgozat célja, hogy a döntések területén használatos alapfogalmakról, módszertani megközelítésekről adjon rövid áttekintést. A szerző úgy próbálta a témaköröket kiválogatni, hogy azok érintsék mind a klasszikus mind az új részeit a döntéselméletnek. Természetesen ezek a módszerek nem mentesítik a problémában érdekelt személyt (szakembert) a modellalkotás nehézségei alól (de segítséget nyújthatnak). A probléma megoldása nem nélkülözheti a szakember tapasztalatát és személyes véleményét.
A dolgozat definíciók és tételek mellett számos példával szemlélteti az aktuális témát.
A második fejezetben először is döntéselmélethez kapcsolodó fogalmakat és megállapodásokat tisztázzuk.
A harmadik fejezetben megpróbáljuk felvázolni, hogy hogyan lehet pontosan megfogalmazni egy döntési problémát úgy, hogy az szerkezetében és kapcsolataiban egyaránt világoan tükrözze a valóságos helyzetet. Megmuatatjuk, hogyan lehet a nem egyező döntési tényezőket kvantifikálni, illetve olyan módszereket mutatunk be, amelyek függetlenek a mértékegységektől. Ezután bemutatunk olyan módszereket, amelyek szűrik a lehetséges lehetőségeket, továbbá néhány döntési elvet ismertetünk.
A negyedik és ötödik fejezetben olyan döntési problémákkal foglalkozunk, ahol a bizonytalanság játsza a fő szerepet. Leginkább pénzügyi vonatkozásokban használatos módszerek szerepelnek.
A hatodik fejezet egy viszonylag új módszert mutat be. Ennek lényege, hogy bizonyos kriériumok mellett egy rangsort állítsunk fel a lehetséges altarnatívák között. A módszer neve Promethee. Európában és Kanadában igen elterjedt módszer. Bemutatjuk a módszert, de rávilágítunk egy-két hátulütőjére is.
A hetedik fejezet egy tulajdonképpen társadalmi kérdéssel foglalkozik. Hogy hogyan lehet bizonyos rangsorokból egy összesítő, csoport rangsort felállítani. Ezek a szavazási eljárások. Bebizonyítjuk Kenneth Arrow, Nobel-díjas közgazdász, híres tételét, továbbá néhány módszert is megemlítünk. Némely itt szereplő módszer nem egy országban ma is használatos.
Az utolsó fejezet tulajdonképpen összefoglaló jellegű. De fogalmazhatunk úgy is, hogy társadalmi és pszichológiai szempontból foglaljuk össze az eddigieket. Ez a fejezet mellőzi a matematikát, de mégis érdekes hozzájárulása a témakörhöz.

2. Alapfogalmak

Alternatívák

Tegyük fel, hogy egy döntési szituációba kerültünk. Ezt szeretnénk valamely módon megoldani. A megoldásokra több lehetőségünk is akad. Ezeket nevezzük alternatíváknak. Az alternatívák rendelkeznek az alábbi két tulajdonsággal:

- *Kölcsönkapcsolatok*: a lehetőségeink lehetnek függetlenek, lehet hogy csak egy laza kapcsolat vélhető fel közöttük, de az is előfordulhat, hogy bonyolult kapcsolatban állnak egymással

- *Bizonytalanság*: ekkor a számításba jövő alternatívák lehetnek olyan események is, amely nagyban függnek a véletlentől

Célok és értékelési tényezők

Célnak azokat az irányokat tekintjük, amerre a rendszer állapotát vinni szeretnénk. A célok nem feltétlenül számszerűsíthetőek illetve elérhetőek.
Az értékelési tényezők számszerűsíthetőek, és azt mérik, hogy az adott cél milyen mértékben érhető el. Az értékelési tényezők az alábbi tulajdonságokkal rendelkeznek:

- *Teljesség*: minden fontos jellemző megtalálható

- *Operacionalizálhatóság*: a tényezőket megtudjuk vizsgálni

- *Felbonthatóság*: az alternatívákat az adott tényező szerint külöm-külön is megtudjuk vizsgálni

- *Redundancia kiszűrése*: ne legyen halmozódó szempont

- *Minimalitás*: ne létezzen egy másik, kisebb tényezőhalmaz, amely hasonlóan jól írja le a problémát

Döntéshozó

A döntéshozó a döntési probléma birtokosa. Lehet egy vagy több szenély, aki a döntési szituációban az alternatívák generálásáért, a kiértékelésért és a megoldásért felelős.
Általában feltesszük, hogy a döntéshozó optimalizáló szemléletű, vagyis olyan személy, aki a lehető legjobb alternatívát akarja választani. (Viselkedéstudósok megmuatták azonban, hogy az emberek nem feltétlen viselkednek mindig így. A döntéshozó lehet kielégítő szemléletű: megelékszik egy számára megfelelő, lehetséges megoldással)

Döntési folyamat szakaszai

1. létrejön a döntési szituáció
2. megfogalmazódik a döntési probléma
3. a probléma formalizálása
4. kiválasztjuk a módszert
5. megoldás meghatározása
6. értékelés és elemzés fázisa

A döntés típusai

Az információk mennyisége, minősége, és a véletlen szerepe alapján:

- Biztos döntések
- Bizonytalan körülmények között hozott döntések

Döntéshozatal során alkalmazott módszer szerint:

- Hagyományos módszerrel, pl. matematikai programozás, hálótervezés.
- Nem hagyományos módszerrel, pl. szimuláció, szakértői rendszerek.

3. Elemi döntési módszerek

Tekintsük a következő példát, amelyet [9]-ből idézünk és amelyre még sokszor utalunk majd:
Tegyük fel, hogy magyar hadsereg fejleszteni szeretné a hazai légvédelmet. Négy országtól kaptunk ajánlatokat harci repülőgép terén. A gépeket az ítélőbizottság a következő szempontok alapján értékelte:

X_1: maximális sebesség (mph/sec)
X_2: rakfelület (m^2)
X_3: maximális terhelhetőség (font)
X_4: ár (millió dollár)
X_5: megbízhatóság
X_6: irányíthatóság

Az utóbbi kettőre a következő skála érvényes:

nagyon alacsony,alacsony, átlagos, jó, kiváló

A kérdés az, hogy melyik ország ajánlatát fogadjuk el? Mielött azonban erre választ kapnánk, nézzük meg milyen gondokkal kellett szembenézniük:
Észrevehetjük, hogy nem azonosak a mértékegységek, sőt ellenkező irányú célokat tartalmaz a feladat. Mely kritériumok a legfontosabbak és melyek kevésbé? A következő pontokban ezeket próbáljuk feloldani.

3.1. A szempontok számszerűsítése

Az utolsó két kritérium számszerűsítésére az alábbi skálát fogjuk alkalmazni:

nagyon alacsony: 1; alacsony: 3; átlagos: 5; jó: 7; nagyon jó: 9;

Így a következő táblázatot kapjuk:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
A_1	2.0	1500	20000	5.5	5	9
A_2	2.5	2700	18000	6.5	3	5
A_3	1.8	2000	21000	4.5	7	7
A_4	2.2	1800	20000	5.0	5	5

1. táblázat

3.2. Mértékegységtől független adatok előállítása

Az előző pontban sikerült számszerűsíteni az adatokat. De még van két probléma. Nevezetesen, hogy a mértékegységek nem egyeznek, másrészt bizonyos szempontokban a nagyobb érték, máshol a kisebb érték a jobb.
Jelöljük x_{ij}-vel az eredeti adatokat, a leendő transzformált adatokat r_{ij}-vel. A leggyakoribb módszerek a következőek:

$$r_{ij}=\begin{cases} x_{ij}/x_j^{max} & \text{ha az ismérv maximalizálandó} \\ \\ x_j^{min}/x_{ij} & \text{ha az ismérv minimalizálandó} \end{cases}$$

$$r_{ij}=\begin{cases} \frac{x_{ij}-x_j^{min}}{x_j^{max}-x_j^{min}} & \text{ha az ismérvél a nagyobb érték a kedvező} \\ \\ \frac{x_jmax-x_{ij}}{x_j^{max}-x_j^{min}} & \text{ha az ismérvnél a kisebb érték a kedvezőbb} \end{cases}$$

Az első módszert alkalmazva, a transzformált táblázatunk a következő lesz:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
A_1	0.80	0.56	0.95	0.82	0.71	1
A_2	1	1	0.86	0.69	0.43	0.56
A_3	0.72	0.74	1	1	1	0.78
A_4	0.88	0.67	0.95	0.90	0.71	0.56

2. táblázat

3.3. A lexikografikus módszer

Ennek a módszernek az a lényege, hogy a szempontokat fontossági sorrendbe tesszük. Ha a legfontosabb szempont szerint egy alternatíva van, akkor azt választjuk. Ha nem , akkor a következő legfontosabb szempont szerint haladunk tovább. És így folytatjuk tovább. Természetesen sok előnye van ennek a szabálynak. Ilyen például, hogy nagyszámú alternatíva kiértékelésére alkalmas, skálafüggetlen és egyszerűen átlátható. Azonban nagy hátránya, hogy az információk nagy részét nem használja fel, és így például hogy a hátrányok más szempontoknál jelentkező előnyökkel kiegyenlíthetőek.

3.4. Maximin módszer

Ez és a következő módszer már a transzformált táblázatot használja. Ez a módszer pesszimista hozzáállást feltételez a döntéshozóról. Ez a következőt jelenti:
minden alternatíva esetén a legrosszabb értéket tekinti és úgy határozza meg a döntését, hogy ezek közül a legmagasabb értékhez tartozó alternatívát választja. Tehát megkeresi az m_i=min{ x_{ij} : j=1,...,m} értéket i=1,...,n esetén, majd kiválasztja a max{ m_i : i=1,...,n} értékű alternatívát.

3.5. Maximax módszer

Az előzővel ellentétben, ez a módszer optimista viselkedést feltételez a döntéshozóról. Úgy tekinti, hogy az alternatívát a legjobb értéke képviseli, és azok közül is a legjobbat választja.
Tehát megkeresi az M_i=max{ x_{ij} : j=1,...,m} értéket i=1,...,n esetén, majd kiválasztja a max{ M_i : i=1,...,n} értékű alternatívát.

4. Döntések bizonytalanság esetén

Döntési problémák megfogalmazásakor a bizonytalanság fogalmát értelmezhetjük szűkebb és tágabb értelemben is. Szűkebb értelemben vett bizonytalanságról akkor beszélünk, ha a döntéshozó semmit sem tud a lehetséges események bekövetkezéséről. Tehát nemcsak azt nem tudja, hogy melyik esemény fog bekövetkezni, de az ezekhez tartozó valószínűségeket sem.
Tágabb értelemeben vett bizonytalanságról akkor beszélünk, ha a döntéshozó ugyan nem tudja biztosan, hogy melyik lehetséges esemény következik be a valóságban, de rendelkezésére állnak bizonyos információk és ismeretek erre vonatkozóan.
Ha a döntés bizonytalanság körülményei között jön létre, akkor a döntéshozó sem tudja pontosan, hogy döntése milyen következményekel jár. Feltesszük, hogy mindig a maximális nyereseég az elérési cél. Persze lehet más is, de most tekintsük ezt. Ilyen körülmények között a döntéshozónak választania kell valamilyen lehetséges cselekvést abban a reményben, hogy cselekvése révén maximális nyereséghez jut. Persze közben tisztában van azzal, hogy bizonyos események ha bekövetkeznek (lehet egy új találmámy, piaci helyzet romlása), akkor ezt nem éri el.

4.1. Döntési kritériumok bizonytalanság esetén

Először is kezdjük két példával, mert a módszereket majd ezeken teszteljük. Két igen népszerű példát említünk, amelyekre még sokszot utalunk majd.
Vegyünk egy újságárust, aki mindenféle lapot árul, többek között a Fülest is. Az újságos, aki most a döntéshozó, 3 Ft-ért veszi és 5 Ft-ért adja el példányonként. Ha Vasárnap éjfélig nem ad el egy Fülest, akkor az utána értékét veszti. (tehát az veszteséget okoz) Mivel az újságos gondos ember, ezért pontos kimutatást vezet a forgalomról. Ez a következőképpen alakult:
soha nem adott el 16-nél kevesebb Fülest, de 24-nél többet sem. Ezek között minden számból adott el. Hogy hány darab olyan hét van, ahol rendre ezeket a példányeladásokat produkálta a következő: 5, 10, 12, 16, 10, 20, 16, 6, 5

A másik példa egy Internet szolgáltatóról szól. Ez a cég terjeszkedni szeretne. Háromféle lehetőségben gondolkodnak:

a_1=új tornyokat állítnak fel a közeli falvakban
a_2=új szolgáltatás bevezetése
a_3=újfajta technikát alkalmaznak

A cégnek van előrejelzése a lehetséges nyereségekre:

s_1 : nagyon jó, ennek valószínűsége 40%
s_2 : jó, ennek valószínűsége 30%
s_3 : közepes, ennek valószínűsége 20%
s_4 : gyenge, ennek valószínűsége 10%

Ahol (és a továbbiakban is) a egy lehetséges cselekvést jelöl. Továbbá s jelöli a lehetséges eseményeket. Jelöljük továbbá $v(a,s)$-sel a következményfüggvényt. Jelen példáinkban ez a nyereséget jelenti.
A második példához tartozó nyereségtáblázat a következő (millió Ft):

	a_1	a_2	a_3
s_1	20	26	10
s_2	12	10	8
s_3	8	4	7
s_4	4	-4	5

3. táblázat

Az újságárus példánál meghatározhatjuk a nyereségmátrixot mi magunk. Ehhez csak a nyereségfüggvényt kell meghatározni, amely ebben az esetben a következő:

$$v(a,s)=\begin{cases} 5s-3a, & \text{ha s<a} \\ 5a-3a, & \text{ha s}\geq\text{a} \end{cases}$$

Így a táblázat:

	a=16	a=17	a=18	a=19	a=20	a=21	a=22	a=23	a=24
s=16	32	29	26	23	20	17	14	11	8
s=17	32	34	31	28	25	22	19	16	13
s=18	32	34	36	33	30	27	24	21	18
s=19	32	34	36	38	35	32	29	26	23
s=20	32	34	36	38	40	37	34	31	28
s=21	32	34	36	38	40	42	39	36	33
s=22	32	34	36	38	40	42	44	41	38
s=23	32	34	36	38	40	42	44	46	43
s=24	32	34	36	38	40	42	44	46	48

4. táblázat

4.2. Hurwicz-kritérium

Természetesen a fenti példákra alkalmazhatjuk a maximin és maximax kritériumokat. De észrevehetjük, hogy ezek a kritériumok túlságosan egyoldalúak.
Tartsuk meg az ott használt jelölésket, azaz az a_j cselekvéshez tartozó legnagyobb nyereség M_j, a legkisebbet m_j jelöli.

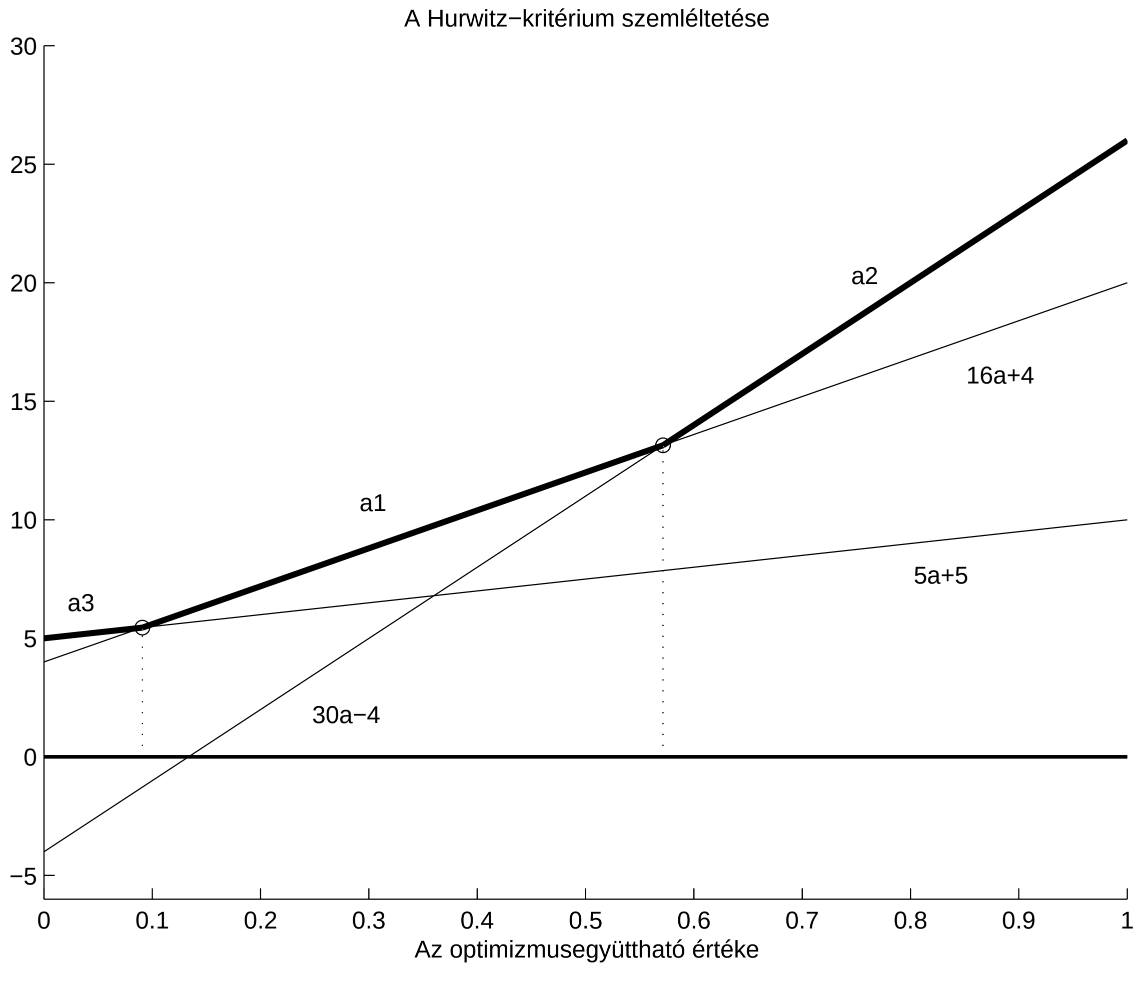
Hurwicz azt javasolta, hogy vezessünk be egy $0 \leq \alpha \leq 1$ optimizmusegyütthatót, amely a legnagyobb és a legkisebb nyereségadatok súlyozott átlagát állítja elő minden cselekvési lehetőségre.
Azaz legyen

$$H_j = \alpha \mathrm{M}_j + (1-\alpha)\mathrm{m}_j$$

A kritérium optimálisnak tekinti azt az a_j cselekvést, amelyhez a legnagyobb Hurwicz-átlag tartozik, vagyis adott α esetén

$$\mathrm{H}(a^0) = \max_j \{H_j\}$$

Ezt a kritériumot szokás grafikusan is ábrázolni, hogy kiderüljön milyen α milyen döntést eredméynezhet. Az internetes példát vizsgálva, az alábbit kapjuk:



1. ábra

A Hurwicz-kritérium értelmében adott α esetén az az optimális cselekvés, amelynek egyenese "legfelül" van. A metszéspontokat kiszámítva az alábbi módon kategorizálhatunk:

- ha $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{11}$, akkor a döntéshozó az a_3 lehetőséget választja
- ha $\frac{1}{11} \leq \alpha \leq \frac{4}{7}$, akkor a döntéshozó az a_1 lehetőséget választja
- ha $\frac{4}{7} \leq \alpha \leq 1$, akkor a döntéshozó az a_2 lehetőséget választja

Most olyan kritériumokkal fogunk foglalkozni, amelyek elsősorban a lehetséges események bekövetkezésének valószínűségeit veszik figyelembe.

4.3. A valószínűség mint döntési kritérium

A már jól ismert újságeladó esetét tekintsük. Tudjuk, hogy ő pontos adatokkal rendelkezik az elmúlt 100 napra visszamenőleg eladás tekintetében. Ezekből az adatokból kiszámítjuk az egyes lehetséges eseményekhez tartozó relatív gyakoriságokat. Ezeket az újságíró elfogadja az események valószínűségeként. Esetünkben ez a következőt jelenti:

Kereslet(s)	Hetek száma	Relatív gyakoriság P(s)
16	5	0,05
17	10	0,10
18	12	0,12
19	16	0,16
20	10	0,10
21	20	0,20
22	16	0,16
23	6	0,06
24	5	0,05
Összesen	100	1.00

5. táblázat

Általában adott $P(s_i)$ valószínűségek mellett (amelyek lehetnek relatív gyakoriságok, ha más valószínűséget nem ismer) a döntéshozó a következőképpen alkalmazza a legnagyobb valószínűség kritériumát:

1) kiválasztja a valószínűségek maximumát: $P_{max}=\max\limits_{i} \{P(s_i)\}$

2) ha ez a k-adik sorban van, akkor a k-adik sor nyereségadatai közül megkeresi a legnagyobbat, G_k-t

3) optimális az a cselekvés, amelyik oszlopában a G_k-t található.

Példáinkban:

Újságos: 0.2 a legnagyobb valószínűség. Ez az előző táblázatból látható, hogy s=21-nél vétetik fel. Az ő sorában (az eredeti táblázatban) 42 a legnagyobb érték, amely a=21-nél található.

Internetes cég: 0.4 a legnagyobb valószínűség, amelyet s_1-nél vesz fel. Az utóbbi sorában 26 a legnagyobb érték, amely a_2-nél vétetik fel.

4.4. VP kritérium

Ez a kritérium felhasználja az összes rendelkezésre álló adatot (pénzérték és valószínűség), és ezáltal nyilvánvalóan alaposabb kritériumnak számít, mint az előzőek. A módszer a következő:

Diszkrét változó esetén:

1) kiszámítja minden cselekvési lehetőség VP-jét:

$$VP(a_j)=E\{v(a_j,\, s_i)\}=\sum_i v(a_j,\, s_i)P(s_i) \text{ minden j-re}$$

2) azt a cselekvést választja, amelyhez a legnagyobb VP tartozik:

$$VP\{a_0\}=\max_j \{VP(a_j)\}$$

Folytonos változó esetén:

1) $VP(a)=E\{v(a,s)\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty} v(a,s)f(s)ds$ 2) $VP\{a_0\}=\max\limits_{a} \{VP(a)\}$

4.5. VEP kritérium

A VP-hez hasonlóan ez is minden rendelkezésre álló adatot felhasznál, de ez a lehetséges veszteségekkel operál. A következőket kell alkalmazni:

Diszkrét változó esete:

1) kiszámítja minden cselekvési lehetőség VEP-jét:

VEP(a_j)=E{l(a_j, s_i)}=$\sum_i$ $l(a_j$, $s_i)$P(s_i) minden j-re, ahol $l(a_j$, $s_i)$=l_{ij}=G_i-v_{ij} és G_k=$\max_j\{v_{ij}\}$

2) azt a cselekvést választja, amelyhez a legnagyobb VP tartozik:

$$\mathrm{VEP}\{a_0\}=\min_j \{\mathrm{VEP}(a_j)\}$$

Folytonos változó esetén:

1)VEP(a)=E{$l(a,s)$}=$\int_{-\infty}^{\infty} l(a,s)f(s)\mathrm{d}s$ 2) VEP{a_0}=$\min_a$ {VEP(a)}

Ezeket az eljárásokat nézzük most meg az újságíró esetére:

Kritérium	a=16	a=17	a=18	a=19	a=20	a=21	a=22	a=23	a=24
VP	32.00	33.75	35.00	35.65	**35.50**	34.85	33.20	30.75	28.00
VEP	8.00	6.25	5.00	4.35	**4.50**	5.15	6.80	9.25	12.00
VP+VEP	40	40	40	40	40	40	40	40	40

6. táblázat

Az utolsó sort nem véletlenül tüntettük fel. Látható, hogy állandó az értéke. Ez általában is igaz lesz:

Tétel *Egy adott döntési problémában bármelyik lehetséges cselekvésre:*

$$\mathrm{VP}(a_j)+\mathrm{VEP}(a_j)=\mathrm{konstans}$$

Bizonyítás Tudjuk, hogy VP(a_j)+VEP(a_j)=$\sum_i v_{ij}\mathrm{P}(s_i) + \sum_j l_{ij}\mathrm{P}(s_i)$.

l_{ij}=G_i-v_{ij} behelyettesítve és összevonva kapjuk, hogy VP(a_j)+VEP(a_j)=$\sum_i G_i\mathrm{P}(s_i)$.

Ez pedi j-től független érték.

■

Következmény *A VP és VEP módszerek azonos optimumot szolgáltat. Ugyanis, mivel összegük állandó bármelyik cselekvésre, ezért az optimum cselekvésre is.*

4.6. Kritikus érték kritériuma

Az előző két kritérium nagyon hasznos lehet, de van vele rögtön egy probléma. Gyakran a készletetzési, vagy azzal rokon feladatokban a lehetséges események száma hatalmas lehet. Így a cselekvési lehetőségek száma is nagy. Ez néhol számítástechnikai gondhoz vezethet.
Most tekintsük ennek kikerülésére azt az esetet, amikor v(a,s) és l(a,s) lineáris függvénye s-nek. Tehát amikor a nyereség (veszteség) adatok arányosak a kereslettel. Vagyis *l(a,s)* a következő alakú:

$$l(a,s)=\begin{cases} k_0(a-s), & \text{ha a} \geq \text{s;} \\ k_u(s-a), & \text{ha a} < \text{s.} \end{cases}$$

Ahol az egységnyi túlkészletezési veszteséget k_0-val, az egységnyi alulkészletezési veszteséget k_u-val jelöljük.

Definíció *kritikus értékmennyiség alatt a következő mennyiséget értjük:* $\frac{k_u}{k_0+k_u}$

Ekkor a kritérium szerint optimális az a legnagyobb a érték, amelyre még fennáll:

$$P(s<a) \leq k$$

Tétel *A kritikus érték kritériuma nem más, mint a VEP kritérium lineáris veszteségfüggvény esetén.*

Bizonyítás Diszkrét valószínűségi változó esetén a készletezési problémában a döntési változó is diszkrét. Így az optimális cselekvési lehetőség úgy is fogalmazhatjuk, hogy a=a_0 akkor, ha az a-adik egységet még érdemes megrendelni, mert

$$\text{VEP(a)}<\text{VEP(a-1), azaz VEP(a)-VEP(a-1)}<0$$

Az utóbbi egyenlőtlenséget részletezve:

$$\text{VEP(a)=E\{l(a,s)\}}=\sum_{s\leq a} k_0(a-s)P(s)+\sum_{s>a} k_u(s-a)P(s)$$

Ekkor képezve VEP(a)-VEP(a-1) különbséget, továbbá k_0 és k_u szerint rendezve, kapjuk:

$$\text{VEP(a)-VEP(a-1)} = k_0\Big\{\sum_{s=0}^{a}(a-s)P(s)-\sum_{s=0}^{a-1}(a-s)P(s)+\sum_{s=0}^{a-1}P(s)\Big\}+$$
$$+k_u\Big\{\sum_{s=a+1}^{\infty}(s-a)P(s)-\sum_{s=a}^{\infty}(s-a)P(s)-\sum_{s=a}^{\infty}P(s)\Big\}$$

Mindkét zárójelben az első két tag különbsége 0, mert s=a esetén s-a és a-s is 0.
Tehát azt kapjuk, hogy:

$$\text{VEP(a)-VEP(a-1)}=k_0\sum_{s=0}^{a-1}P(s)-k_u\sum_{s=a}^{\infty}P(s)$$

Mivel a jobb oldalon egymást kizáró események valószínűséeinek összege szerepel, átalakítva a kifejezést, a különbség így írható:

$$k_0 P(s<a) - k_u[1-P(s<a)] = k_0 P(s<a) - k_u + k_u P(s<a)$$

Tehát

$$\text{VEP(a)-VEP(a-1)}=(k_0+k_u)P(s<a)-k_u$$

Mivel k_0 és k_u konstans, ezért VEP(a)-VEP(a-1) különbség a-nak monoton növekedő függvénye. Ezek szerint az a legnagyobb a érték az optimum, amelyre

$$(k_0+k_u)P(s<a)-k_u \leq 0$$

azaz

$$P(s<a) \leq \frac{k_u}{k_0+k_u}$$

Folytonos változó esete:

$$\text{VEP(a)=E[l(a,s)]}=\int_a^a k_a(a-s)f(s)d(s) + \int_a^{+\infty} k_u(s-a)f(s)d(s)$$

és keressük a VEP(a) minimumát a szerint:

$$\frac{dVEP(a)}{da} = \frac{d}{da}\left\{k_0 \int_0^a (a-s)f(s)ds + k_u \int_a^{+\infty}(s-a)f(s)ds\right\}$$

Írjuk fel az ilyen típusú függvények deriválási szabályát:

$$\frac{d}{dv}\left\{\int_{g(v)}^{h(v)} m(u,v)du\right\} = m[h(v),v]\frac{dh(v)}{dv} - m[g(v),v]\frac{dg(v)}{dv} + \int_{g(v)}^{h(v)} \frac{\partial m(u,v)}{\partial v}du$$

Nálunk *u=s*, *v=a*, *m(u,v)=(a-s)f(s)*, illetve a második tagban *m(u,v)=(s-a)f(s)*, az első tagban *g(v)*=0 és *h(v)=a*, a második tagban *g(v)=a* és *h(v)*=$+\infty$. Megoldjuk a $\frac{dVEP(a)}{da} = 0$ egyenletet.
A fentieket alkalmazva kapjuk, hogy az $(k_0+k_u)P(s<a)-k_u$=0 egyenletből

$$P(s<a) \leq \frac{k_u}{k_0+k_u}$$

■

5. Extenzív analízis

Mint említettük, a döntési problémák többségében a VP vagy a VEP kritérium jobbnak mondható a többi kritériumnál, mert csak a VP-VEP kritérium veszi egyszerre figyelembe mind a pénzügyi következményeket, mind a lehetséges események bekövetkezésének valószínűségeit. De továbbra is igaz, hogy a döntéshoző még ezen kritériumok alkalmazása esetében sem tudhatja biztosan, hogy melyik esemény kövezkezik be ténylegesen. Ezért van a döntéshozó bizonytalanságban. Éppen ezért megpróbál többlet információhoz jutni, amely segíthet neki a biztosabb döntésben. Nyílván ezt nem ingyen kapja, így kéréds az, hogy mennyit érdemes erre az új információra pénzt szánni. További kérdés, hogy ez az új információ hogyan befolyásolja a későbi cselekvéseit. Ebben a részben ezzel a kérédskörrel foglalkozunk, amit az irdoalom extenzív analízisnek nevez.

Ebben a részben végig feltesszük, hogy diszkrét változókról van szó. Ez a rész tuljadonképpen a valószínűségszámításból ismert Bayes-tételen alapul.

Tétel (Bayes) *Legyen A egy esemény,* $B_1, B_2, \ldots$ *teljes eseményrendszer,* $P(A) > 0, P(B_i) > 0 \;\; i = 1, 2, \ldots$. *Ekkor teljesül, hogy*

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)} = \frac{P(A \cap B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(A \cap B_j)}$$

5.1. A VP kiszámítása nem teljes információ esetén

A teljes információ az volna, ha volna egy jósunk vagy egy mentalistánk aki biztosan tudná, hogy a jövőben melyik esemény fog bekövetkezni. Ilyen személy nem nagyon van. De vannak előrejelző cégek, akiknek igénybe vehetjük a segítségüket. Ők már nem tökéletesen biztosra mondanak előrejelzést, de a véleményük segíthet. Tehát a nem teljes információ az, amelyet a döntéshozó a valóságban megszerezhet. Szeretnénk kiszámolni a VP értékét ezen nem teljes információ birtokában. Jelöljük ezt VP(NTI)-vel.
Először vezessünk be néhány jelölést:

a_j	j=1,...,n a lehetséges cselekvések
s_i	i=1,...,m a lehetséges események
z_k	k=1,...,r az információ lehetséges kimenetelei
$v(a_j, s_i)$	a kifizetési táblázat adatai
$P(s_i)$	az a priori valószínűségek
$P(z_k\|s_i)$	az információ megbízhatósági adatai
$P(s_i\|z_k)$	az a posteriori valószínűségek

Az utolsó elötti sor jelöli a plussz információt. Az utolsó elötti valószínűségek a felkért előrejelző cégre jellemző adatok. Azt mutatja, hogy a cégnek eddigi működése során milyen mértékben találta el a jövőbeni eseményeket. Tehát milyen pontosak az előrejelzései. Például a cégnek hosszú évekre visszamenőleg vannak kimutatásai arról, hogy előrejelzései mennyire pontosak. Ezek alapján állapíthatjuk meg ezen feltételes valószínűségeket
Így felhasználva Bayes-tételét, az a posteriori valószínűségek meghatározhatóak.

A VP(NTI) meghatározása:

$$\text{VP(NTI)}=\sum_{k=1}^{r}\left\{\max_{1\le j\le n}\left\{\sum_{i=1}^{m}v(a_j,s_i)P(s_i|z_k)\right\}\right\}P(z_k)$$

Definíció: *A VP(NTI)-VP(a^0) értéket a nem teljes információ várható értékének nevezzük és NVTI-vel jelöljük.*

Ez tulajdonképpen azt fejezi ki, hogy mennyi az az összeg amennyit legfeljebb érdemes a beszerezhető információra költeni.
Miét is van szükség erre az értékre?
Általában, ha a döntéshozó úgy gondolja, hogy igénybe vesz egy bizonyos nem teljes információt, akkor az esetleges cselekvései közül csak azután fog választani, hogy megkapta az információt. A realitás talaján maradva, ezt persze akkor kapja meg, ha az információszolgáltatóval megállapodik egy bizonyos ellenértékben, és ki is fizeti azt. Az NTIV segítségével a döntéshozó meg tudja ítélni, hogy neki mennyit ér az információ, függetlenül attól, hogy mennyit kérnek érte. El kell döntenie, hogy a meglévő információ alapján dönt (jelöljük ezt a cselekvést e_0-al), vagy igénybe veszi a nem teljes információt. (legyen ez e_1) Az információ költségét C-vel jelölve, ha

$$\begin{cases} C \le NTIV & \text{akkor igénybe veszi az információt} \\ \\ C > NTIV & \text{akkor nem veszi igénybe az információt} \end{cases}$$

5.2. A VEP alkalmazása

Látható, hogy az a posteriori valószínűségekre nincs befolyással a kritérium megválasztása. Így alkalmazhatjuk a VEP kritériumot is a nem teljes információ esetén is. Jelöljük ezt VEP(NTI)-vel. Az előző fejezetekben alkalmazott jelöléseket használva ennek kiszámítási módja a következő:

$$\text{VEP(NTI)}=\sum_{k=1}^{r}\left\{\min_{1\le j\le n}\left\{\sum_{i=1}^{m}l(a_j,s_i)P(s_i|z_k)\right\}\right\}P(z_k)$$

Most szeretnénk értelmezni NTIV értékét a veszteség adatokkal.

Definíció $NTIV_l$=*VEP*(a^0)-*VEP*(*NTI*)

Ez szemléletesen azt jelenti, hogy mennyivel kevesebb a várható veszteség a nem teljes információ birtokában, mint a rendelkezésre álló információ birtokában.

Tétel $NTIV_l$=*NTIV*

Bizonyítás Írjuk fel a különbségüket:

$$\text{NTIV}_l\text{-NTIV=VEP(a}_0\text{)-}\sum_k VEP(a^0|z_k)P(z_k) - \sum_k VP(a^0|z_k)P(z_k) + VP(a^0) =$$

$$= VEP(a^0) + VP(a^0) - \sum_k \Big\{VEP(a^0|z_k) + VP(a^0|z_k)\Big\}P(z_k) =$$

$$= \sum_i G_iP(s_i) - \sum_k \sum_i G_iP(s_i|z_k)P(z_k) =$$

$$= \sum_i G_iP(s_i) - \sum_k \sum_i G_iP(s_i \cap z_k) =$$

$$= \sum_i G_iP(s_i) - \sum_k \sum_i G_iP(z_k|s_i)P(s_i) =$$

$$= \sum_i G_iP(s_i) - \sum_i \sum_k G_iP(z_k|s_i)P(s_i) =$$

$$= \sum_i G_iP(s_i) - \sum_i G_iP(s_i)\underbrace{\sum_k P(z_k|s_i)}_{1} = 0$$

■

Megjegyezzük, hogy a nem teljes információ igénybevétele esetén a számítások már nem foglalhatóak egyszerűen táblázatokba. Sok lehetőség esetén ez szinte áttekinthetetlen volna. Ezért az ilyen problémákra jó áttekintést nyújthat a *döntési diagram* vagy *döntési fa*.

6. A Promethee módszer

Mielött ezt a módszert ismertetnénk, egy kicsit tekintsük át, hogy eddig mit is néztünk a döntési probléma köréből. Az előző két fejezetben olyan döntési problémákról volt szó, ahol a bizonytalanság játszotta a fő szerepet. Tehát ott valószínűségekre alapoztuk (és persze a várható nyereségre) a módszereket. Azonban mi a helyzet a repülős példával. Ott egyszerűen a kritériumok alapján kellene dönteni. Láttunk egyszerű módszereket, de megmuattuk, hogy azok igen sok hátránnyal rendelkeznek. Olyan eljárás kellene, amely valahogy minden kritériumot figyelembe vesz. Látható, hogy a probléma gyökere például ott van, hogy melyik kritérium milyen fontos a számunkra. Hiszen minden döntéshozónak egyedi az ízlése, mindenkinek más a fontos. De minden kritérium számításba kell hogy jöjjön valamilyen módon.
Például ha valaki autót szeretne vásárolni, akkor olyan kritériumok fontosak, mint az ár, kényelem, márka, biztonság stb. De minden ember másképp tekint a problémára. Valakinek a kényelem fontosabb, mint a sebesség, mert mondjuk két kisgyereke van és nem akar kétszázzal száguldozni. Látható, hogy a probléma így már elég összetett, és elég nehéz megfogni mint matematikailag, mint közgazdaságilag.
Erre ad egy lehetséges megoldást a Brans által kidolgozott rendszer, a Promethee. Nagyon frissnek mondható a módszer, alig 30 éves múltal rendelkezik. A modell igen népszerű gazdasági, mérnöki és szociális körökben. Olvashatunk olyan esetről is, ahol például egy Hotrod műhely szeretett volna autófelniket terjeszteni. Ennek egy módja, hogy először újságban hírdetik magukat. Az volt a döntéprobléma tárgya, hogy melyik híres autómagazin legyen az. Tehát valóban széleskörben alkalmazott módszer.

Mint említettük, a szempontok között eltérés van. A szempontok fontosságát tükröző értékeket, súlyokat a döntéshozó maga adja meg. Itt fontos szerepe van a döntéshozó szakértelmének és persze szubjektív véleményének. Ezeket a súlyokat tetszőleges értékekkel megadhatjuk, a módszer ezt 1-re normálja. Azaz a súlyok a következő alakúak:

$$w_i = \frac{w_i^*}{\sum\limits_{k=1}^{m} w_k^*} \qquad\qquad i = 1, \ldots m$$

6.1. Preferenciarelációk

Vegyünk egy összehasonlításra váró elemekből álló $\mathcal{A}$ halmazt. Ez a halmaz lehet véges (autók), de lehet végtelen számosságú is (fogyasztási szintek). Tudjuk, hogy ezt a halmazt alternatívahalmaznak hívjuk. Vegyünk belőle két elemet $\mathcal{A}_1$-et és $\mathcal{A}_2$-t. Bevezetjük a következő fogalmat:

az $\mathcal{A}_1$ *legalább olyan jó, mint* $\mathcal{A}_2$

Ezt $\mathcal{A}_1 \succeq \mathcal{A}_2$ jelöljük. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}_1$ *preferált* $\mathcal{A}_2$-höz képest.

Ha minden lehetséges ($\mathcal{A}_k$,$\mathcal{A}_l$) $\in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$, *(k, l)*$\in I \times I$, elempárt tekintjük, ahol $\mathcal{I}$ egy indexhalmaz, akkor azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A}$ halmazon bináris relációt értelmeztünk. Két elemről azt mondjuk, hogy *indifferens*ek, ha nem tudjuk őket megkülönböztetni.

Az $\mathcal{A}$ halmazon értelmezett bináris reláció

reflexív, ha $\mathcal{A} \succeq \mathcal{A} \quad \forall \mathcal{A} \in \mathcal{A}$

tranzitív, ha $\mathcal{A}_1 \succeq \mathcal{A}_2$ és $\mathcal{A}_2 \succeq \mathcal{A}_3 \Longrightarrow \mathcal{A}_1 \succeq \mathcal{A}_3 \quad \forall \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3 \in \mathcal{A}$

teljes, ha $\mathcal{A}_1 \succeq \mathcal{A}_2$ és $\mathcal{A}_2 \succeq \mathcal{A}_1 \quad \forall \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \mathcal{A}$

Ha az előző három tulajdonság teljesül a bináris relációra, akkor *gyenge preferenciáról* beszélünk.
Bármely bináris relációt *rendezésnek* hívunk, ha teljesíti a tranzitivitást.
Megköveteljük a racionális döntéshozótól, hogy preferenciastruktúrája mindig teljes és tranzítív legyen.

6.2. Szempont függvények

A cikkhez kötődvén, mi is f_j-vel jelöljük az egyes kritériumokat. És $f_j(a)$-val pedig az a alternatíva értékét az f_j kritérium szerint.
A módszer lényege az, hogy minden egyes kritériumra felépítünk egy preferencia-függvényt, amelyik a preferencia intenzitást méri. Az f_j kritériumra vonatkozó preferencia-függvény általános alakja a következő:

$$F_j(a,b)=\begin{cases} 0 & f_j(a) \leq f_j(b) \\ \\ F_j\{f_j(a), f_j(b)\} & f_j(a) \leq f_j(b) \end{cases}$$

Ahol a és b két altenatíva. A gyakorlatban az F_j függvény $f(a)-f(b)$ különbségeként értelmezhető, azaz

$$F\{f(a), f(b)\} = F\{f(a) - f(b)\}$$

Az F_j függvényekre az alábbi 6 tipikus függvényt szokták alkalmazni. Ennek leginkább közgazdasági okai vannak. (Most következőkben elhagyjuk a j indexet)

1. *Egyszerű szempont függvény*

$$F(a,b)=\begin{cases} 1 & \text{ha } f(a)-f(b)>0 \\ \\ 0 & \text{ha } f(a)-f(b)\leq 0 \end{cases}$$

2. *U-alakú szempont függvény*

$$F(a,b)=\begin{cases} 1 & \text{ha } f(a)-f(b)>l \\ \\ 0 & \text{ha } f(a)-f(b)\leq l \end{cases}$$

Vagyis a és b indifferens ameddig $f(a)-f(b)$ el nem ér egy l szintet.

3. *V-alakú szempont függvény*

$$F(a,b)=\begin{cases} 1 & \text{ha } f(a)-f(b)>h \\ \\ \frac{f(a)-f(b)}{h} & \text{ha } f(a)-f(b)\leq h \end{cases}$$

Tehát a és b közötti intenzitás lineárisan nő a h szintig.

4. *Lépcsős szempont függvény*

$$F(a,b)=\begin{cases} 1 & \text{ha } f(a)-f(b)>q+p \\ \\ 1/2 & \text{ha } q<f(a)-f(b)\leq q+p \\ \\ 0 & \text{ha } f(a)-f(b)<q \end{cases}$$

5. *Trapéz alakú szempont függvény*

$$F(a,b)=\begin{cases} 1 & \text{ha } f(a)-f(b)>s+r \\ \\ \frac{\{f(a)-f(b)\}-s}{r} & \text{ha } s<f(a)-f(b)\leq s+r \\ \\ 0 & \text{ha } f(a)-f(b)\leq s \end{cases}$$

6. *Gauss szempont függvény*

$$F(a,b)=\begin{cases} 1-e^{-\frac{\{f(a)-f(b)\}^2}{2\sigma^2}} & \text{ha } f(a)-f(b)\geq 0 \\ \\ 0 & \text{ha } f(a)-f(b)<0 \end{cases}$$

Ahol természetesen a felmerülő paramétereket a döntéshozó kalibrálja be.

6.3. Az eljárás menete

Az elöbbieket felhasználva, a következő az eljárás:

1. *Minden alternatívapárra (páros összehasonlítás) kiszámítjuk a preferenciaindexet:*

$$\Psi(\mathcal{A}_i,\mathcal{A}_j)=\sum_{k=1}^{m}\omega_k F_k(\mathcal{A}_i,\mathcal{A}_j) \qquad \forall(\mathcal{A}_i,\mathcal{A}_j)\in\mathcal{A}\times\mathcal{A} \qquad \sum_{i=1}^{m}\omega_i=1$$

(És feltesszük, hogy minél nagyobb az elöbbi érték annál preferáltabb $\mathcal{A}_i$ alternatíva az $\mathcal{A}_j$ alternatívával szemben.)
Az igaz, hogy így összehasonlítottuk az összes altenatívát, mégpedig a szempontok és azok súlyaik segítségével. Látható, hogy két alternatívát kétféleképpen hasonlítottunk össze. E két adat különbsége ad információt a két alternatíva egymáshoz viszonyított preferenciájáról és a különbség mértékéről. Ezt nevezzük *outranking reláció*nak.
Azonban így egyáltalán nem biztos, hogy teljes rangsort kapunk. Ezért vezették be az *outranking folyam* fogalmát, amelyeket a második lépésben határozunk meg és számítunk ki. Innen jött a későbbi *Outranking eljárás* elnevezés.

2. *Meghatározzuk a* ***leaving flow****(pozitív döntési folyam), az* ***entering flow*** *(negatív döntési folyam) és a* ***net flow*** *(netto döntési folyam) értékeket:*

$$\Phi^{+}(\mathcal{A}_j)=\sum_{l\neq j}\Psi(\mathcal{A}_j,\mathcal{A}_l) \text{ minden j-re}$$

Ez arra utal, hogy az $\mathcal{A}_j$ alternatíva mennyire dominálja a többi alternatívát.

$$\Phi^{-}(\mathcal{A}_j)=\sum_{l\neq j}\Psi(\mathcal{A}_j,\mathcal{A}_l) \text{ minden j-re}$$

Ez arra utal,hogy az $\mathcal{A}_j$ alternatíva milyen mértékben dominált.

$$\Phi(\mathcal{A}_j)=\Phi^{+}(\mathcal{A}_j)-\Phi^{-}(\mathcal{A}_j) \text{ minden j-re}$$

3. *Ezekeből összerakjuk a végső következtetést:*

$$\mathcal{A}_j R \mathcal{A}_i \iff \Phi(\mathcal{A}_j) > \Phi(\mathcal{A}_i)$$

$$\mathcal{A}_j I \mathcal{A}_i \iff \Phi(\mathcal{A}_j) = \Phi(\mathcal{A}_i)$$

Ahol R a preferenciát, I pedig az indifferenciát jelenti.

Néhány megjegyzést eszközöljünk a módszerrel kapcsolatban. Említettük a súlyozás kérdését. Ez továbbra is nagyon fontos szempont. Kissé megváltoztatva súlyokat más eredményre juthatunk. Persze nehéz behatárolni a súlyainkat. Ezért a mostani programcsomagok '*The Walking Weigths*' programkiegészítővel segítenek a döntéshozónak, másrészt erre a problémakörrel foglalkozik az ún. *sensitivity* analízis.
Másrészről nemcsak ez az egyetlen ilyen eljárás(család). Nagyon hasonló elven működik az Electre. Ez azt jelenti, hogy a döntéshozónak több módszert kell kipróbálnia. Sokszor azonban a két vagy több módszer eredménye nem egyezik. Így kell valahogy végső döntést hoznia, ami nem könnyű. De mindenképpen fontos, hogy több módszert is kipróbáljunk, így talán több információt gyűjtünk.
Mostanság a HIPRE és FPS eljárások a legkedveltebbek.

7. Szavazási eljárások

Ebben a fejezetben a szavazási eljárásokról esik szó. Az előző fejezetben arról volt szó, hogy hogyan lehet egy rangsort felállítani a rendelkezésre álló adatokból. Most az a kérdés, hogy ha nekünk adva van néhány rangsor, akkor abból hogyan lehet egy csoportsorrendet felállítani.

Minden most bemutatásra kerülő tétel, eredmény és eljárás a következő alapszituáción alapul:

adott a lehetséges választások X halmaza, amelyet egységesen napirendenk nevezünk. Adott továbbá n≥2 szavazó, akik az X-beli lehetőségekkel kapcsolatban kívánnak megegyezésre jutni. A szavazók számát N-nel jelöljük. Az i-edik szavazó véleményét a Φ_i struktúra (pl. halmaz) írja le, az összes egyén véleményét pedig az $\Phi = \langle\Phi_1, ..., \Phi_n\rangle$ véleményprofil tartalmazza. A most következő modellekben feltesszük, hogy az összes individuum preferenciája ismert, és ezek ismeretében szeretnénk kollektív döntést hozni. Az egyéni vélemények ismeretében a szavazás végeredményét megadó függvényt F-jelöli. Fontos megjegyezni, hogy semmi olyat nem mondtunk, hogy például a legtöbb szavazatot kapott egyén nyeri a szavazást. Másféle elbírálási szempont is lehet.

7.1. May-tétel

Ebben a részben feltesszük, hogy csak két alternatíva közül lehet választani, azaz |X|=2.

A modellben feltesszük továbbá, hogy minden egyén egyetlen elemét választja ki X-nek, így a szavazat-összegző függvény $F : D_F \longrightarrow$X alakú, ahol $D_F \subseteq X^n$. Az F-től megkövetelt "igazságossági feltételek" a következők:

Univerzalitás: A szavazat-összegző függvénynek az összes lehetséges bemenetre tudnia kell eredményt adni, azaz az értelmezési tartománya $D_F = X^n$

Anonimitás: minden egyén szavazata egyenlő súllyal kerül elbírálásra, tehát a szavazat-összegzés invariáns a szavazók sorrendjének felcserélésére. Formálisan, ha $\sigma : N \longrightarrow N$ az egyének egy permutációja, akkor $\Phi_i \in X$ jelöli az i-edik individuum szavazatát, akkor minden Φ-re teljesülnie kell, hogy

$$F(\langle\Phi_1, ..., \Phi_n\rangle) = F(\langle\Phi_{\sigma(1)}, ..., \Phi_{\sigma(n)}\rangle)$$

Semlegesség: Ha az összes egyén szavazatát megcseréljük, akkor a szavazat-összegzés kimeneteként kapott eredmény is felcserélődik. Tehát a szavazás összesítéséhez használt függvény semleges a lehetőségeket illetően. Formálisan megfogalmazva:

Legyen $X = x, y$ és jelölje " $\sim$ " a másik alternatívát. Ekkor teljesülnie kell minden Φ-re, hogy

$$F(\langle\sim\Phi_1, ..., \sim\Phi_n\rangle) = \sim F(\langle\Phi_1, ..., \Phi_n\rangle)$$

Monotonitás: Tegyük fel, hogy a szavazat-összegzés eredménye $x \in X$. Ekkor akárhány y szavazatot is cserélünk ki még x-re, az eredmény nem fog megváltozni.

Definíció: E*gy szavazat-összegző függvény akkor többségi szavazás típusú, ha a következő alakú:*

$$F(\langle \Phi_1, ..., \Phi_n \rangle) = \begin{cases} x, & \text{ha } \sum_{i=1}^{n} \chi_{\Phi_i = x} > n/2 \\ \\ y, & \text{különben} \end{cases}$$

Tétel (May): *Az egyéni véleményekből a kollektív döntést előállító F szavazat-összegző függvény akkor és csak akkor tudja kielégíteni az univerzális, anonimitási, semlegességi és monotomitási feltételt, ha többségi szavazás típusú.*

7.2. Arrow-féle lehetetlenségi tétel

Sokakban felmerülhet a kéréds, jogosan, hogy mi a helyzet akkor ha X több, mint kételemű, és az egyének nem csak egy jelöltet választanak, hanem megadják a preferenciáikat a választási lehetőséeikkel kapcsolatban.
Az Arrow-tétel alapkérdése az, hogy bizonyos intuitív igazságossági feltételek mellett milyen preferenciaösszesítő-függvény szolgáltat minden lehetséges bemenetre matematikai értelemben helyes rendezést. Az ilyen F függvényeket Arrow "*társadalmi jóléti függvényeknek*" nevezi.

Az összesítő függvénytől megkövetelt tuladonságok:

Univerzális értelmezési tartomány: A preferencia-összesítő függvénynek az összes lehetséges bemenetre tudnia kell eredményt szolgáltatni: értelmezési tartománya az összes rendezett n-es, amelynek tagjai az alternatívákon értelmezett rendezések.

Gyenge Pareto elv (P): Ez a feltétel azt mondja ki, hogy ha minden választó egyhangúan jobban preferálja y-t mint x-et, akkor az összesített véleményben is az y előnyben részesül x-el szemben.

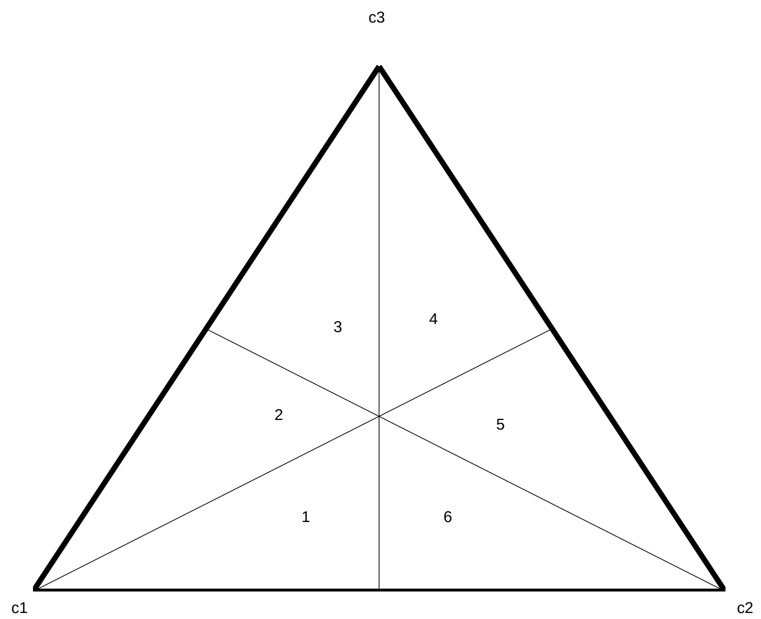
Bináris függetlenség (BI): Ez a feltétel azt fejezi ki, hogy az x,y alternatíva-páros rendezése a kollektív rendezés szerint csak az egyének x-re és y-ra vonatkozó preferenciáitól függ

Diktátor-mentesség: Ez a kitétel azt a meggyőződésünket formalizálja, hogy az igazságos döntések nem diktatórikusak, azaz nem létezik egy olyan személy, hogy a preferencia-összegzés mindig az ő véleményét adja eredményül, tekintet nélkül a többiek preferenciáira. (Ez gyengébb feltétel, mint az anonimitás)

Tétel (Arrow) *Tegyük fel, hogy |X|>2. Ekkor nem létezik olyan társadalmi jóléti függvény (F), hogy az teljesítse a fenti négy feltételt és minden lehetséges preferencia-profilhoz olyan relációt rendel, amely rendezés.*

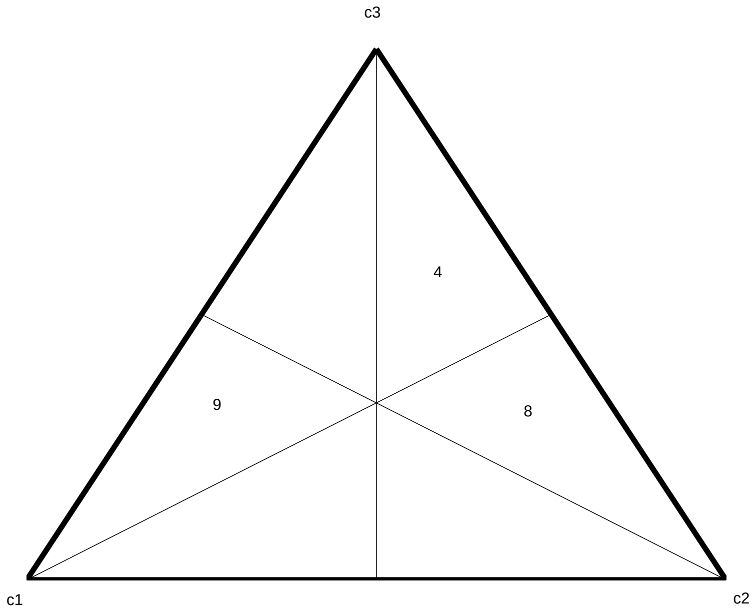
Tehát a tétel azt mondja ki, hogy a közvetlen demokráciában nem létezik egyértelmű döntés.
Láthatjuk, hogy ez a tétel negatív jellegű, de ennek ellenére nagy hatású: a társadalmi választásokkal, szavazásokkal és döntésekkel foglalkozó kutatók felhagytak egy olyan módszer keresésével, amely minden feltételt kielégít és figyelmüket az egyes feltételek jól értelmezhető lazításásval kapott eljárások kidolgozására fordították.

Bizonyítás: Egy geometriai szemléletű bizonyítást mutatunk be. Tekintsünk egy szabályos háromszöget. A csúcsai legyenek a jelöltek. Húzzuk be minden csúcsból a felezőmerőlegeseket. Ez hat részre osztja a háromszöget. A háromszögben egy p pont meghatároz egy sorrendet a csúcsok között, aszerint hogy a p melyik kis háromszögben van. Tekintsük az alább iábrát:



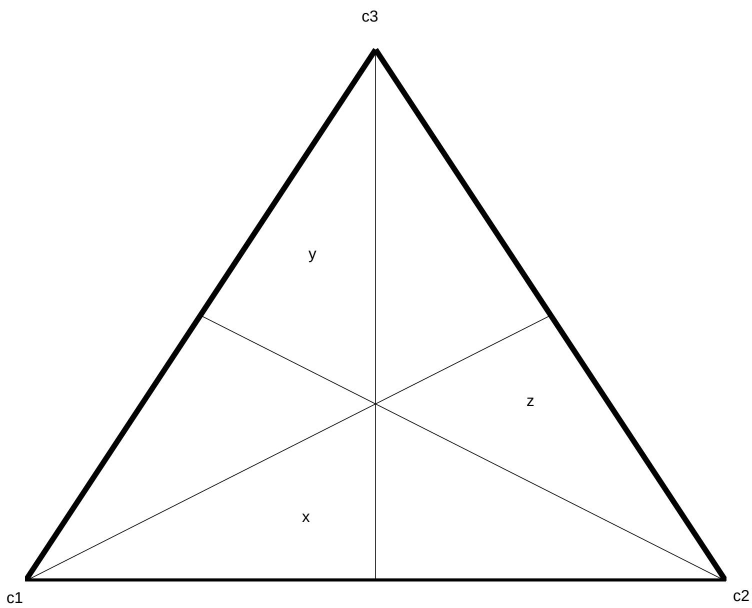
2. ábra

Tehát például az 1-es terület megfelel a $c_1>c_2>c_3$ sorrendnek. A 3-as és 4-es terület közötti vonal megfelel a $c_3>c_1=c_2$-nek.
A következő ábra egy olyan profilt ábrázol, amelyben kilenc szavazat a $c_1>c_2>c_3$ sorrendre esett, négy szavazat a $c_3>c_2>c_1$ sorrendre, továbbá nyolc szavazat esett a $c_2>c_3>c_1$-re.



3. ábra

Legyen a szavazók száma n≥2. Tegyük fel, hogy minden szavazó az 1-es, a 3-as vagy az 5-ös területben van. A szűkítő preferenciákat ezen a módon a következő ábrán mutatjuk be, ahol x+y+z=n.



4. ábra

Legyen C a profilok gyűjteménye, amely megfelel az x+y+z egyenletnek. Legyen S azon C-beli elemek összessége, amelyek a $c_1>c_2>c_3$ szociális rangsort generálják. Ha most x=n lenne, akkor a (P) tulajdonság miatt a rangsor $c_1>c_2>c_3$. Továbbá az sem fordulhat elő, hogy S bármely eleme megfeleljen az y+z=n egyenletnek. Ugyanis ha így lenne, akkor (P) miatt $c_3>c_1$, amely ellentmond annak, hogy ez a profil az S-be tartozik.
Most S elemei közül tekintsük azt, amelyben a legkevesebb 1-es típusú szavazó van. Legyen ez a profil p. Tehát $F(p)=c_1>c_2>c_3$. Most vegyünk egy 1-es típusú szavazót p-ben. Változtassuk meg a preferenciáit, de úgy hogy a minden más szavazó preferenciája marad. Belátjuk, hogy a most vett szavazó egy diktátor.
Kezdjük azzal az esettel, amikor a szavazónk 3-as típusú lesz. Így keletkezik egy új profil, amelyet p_3-mal jelölünk. Ha $F(p_3)=c_1>c_2>c_3$ lenne, akkor bizony ellentmondásra jutnánk a kezdeti feltevéssel. A (BI) feltétel miatt $F(p_3)=c_3>c_1>c_2$ vagy $F(p_3)=c_1>c_3>c_2$. Nézzük az utóbbit.
Az előző jelöléseket megtartva nézzük a p_5 profilt. Ez a mozgatás a szavazót a c_2,c_3 közömbösségi vonaltól jobbra tartja (ismét (BI) miatt), ezért c_2,c_3 szociális rangsora egyezik p-ével. Vagyis $c_2>c_3$. $F(p_3)$ és (BI) miatt c_1,c_3 szociális rangsora p_5-nél és p_3-nál azonos. Na de $F(p_5)$ sem lehet $c_1>c_2>c_3$. Ezért ő csak $c_2>c_1>c_3$ lehet. Ugyanilyen érvelésekkel, ha p_4 profilt tekintjük, akkor ő csak $c_2>c_1>c_3$ lehet. (BI) miatt $\{c_2,c_3\}$ szociális rangsora egyezik p_3-nál és p_4-nél. Ez ellentmondás.

Tehát ismerjük F(p)-t és $F(p_3)$-at.
Azaz azt kaptuk, hogy $F(p)=c_1>c_2>c_3$ és $F(p_3)=c_3>c_1>c_2$.Innen egyszerűen adódik, hogy a többi $F(p_i)$ azonos a mi szavazó rangsorunkkal. (azaz azokkal amit az egyes kis háromszögek meghatároznak)
Meg kell jegyezni azonban, hogy egyenlőre csak ezen 1-es típusú szavazó preferenciáit változtattuk, a többiekét nem. Most figyeljük meg, hogy mi történik akkor, amikor egy szavazó az óramutatóval egyezően lépked az egyes területekre. Az történik, hogy a páros preferenciái közül csak egy változik meg, a többi marad. Nézzük mondjuk az 1-es típusú személyt. Ha ő 6-ra mozdul, akkor csak a $\{c_1,c_2\}$ sorrendje változik, a $\{c_2,c_3\}$ és a $\{c_1,c_3\}$ sorrendje nem.
A választott 1-es típusú személyünket ezentúl kvázi-diktátornak fogjuk hívni. Jelöljük $p_j\{1\longrightarrow 6\}$-tal azt, hogy a p profil az 1-es típusú szavazó változtatása után és néhány másik szavazó 1-es típusuból 6-os típusu lesz. Ekkor így keletkezik a p_j profil. Ismét a (BI) feltételt alkalmazva azt kapjuk hogy $F(p_j\{1\longrightarrow 6\})=c_1>c_3>c_2$. Innen hasonlóan okoskodva megkpajuk az összes $F(p_j\{1\longrightarrow 6\})$-ot. Azt kapjuk, hogy ezen j=1,3,4,6-ra a szociális rangsor egyezik a kvázidiktátoréval.
És azt láthatjuk ebből, hogy az új szavazó megint megváltoztathatja a preferenciáit, mondjuk az 5-ös típusra. Az hogy a kvázi diktátor egyben diktátor is az kell csak észrebenni, hogy hagyjuk a maradék szavazókat változtatni. Így p-ről bármely más profilra mozdulhatunk.

■

7.3. Eljárások

Itt tehát azt az esetet nézzük, ahol az egyének egy választási eljárásba úgy lépnek be, hogy preferenciáik egyértelműen meghatározott sorrendre vezettek, azaz már mindenki megoldotta a saját rangsorolási problémáját, s most ezekből a sorrendekből kell egy csoportsorrendet képezni.

Először ismerkedjünk meg a *Condorcet eljárás*sal. Ez a következőképpen működik. Az egyéni rangsorokból emeljük ki az alternatíva-párokat, s nézzük meg, hogy a páros összehasonlításokban melyik alternatíva jobb.

Definíció Ezeket a páros összehasonlításból származó győzelmeket összegezzük. Az az alternatíva, amely az összes többit legyőzi, legyen a köz által megszavazott győztes, akit a továbbiakban *Condorcet-győztes*ként nevezünk.

Tulajdonképpen ez közel áll a hétköznapi szemlélethez, hiszen úgy tartjuk, hogy azt érdemes győztesnek megszavazni, aki egyesével minden ellenfelét legyőzi.
Az eljárás szemléltetésére tekintsük az alább példát. Legyen 10 választónk és 3 alternatívánk (A, B, C). Hatan támogassák az $A \succ B \succ C$, hárman a $B \succ C \succ A$ és egy választó a $C \succ A \succ B$ sorrendet, ahol $A \succ B \succ C$ azt jelenti, hogy a jobbnak ítéltetett B-nél, és B jobbnak C-nél. Ekkor a rangsorok felbontása:

$$\begin{aligned}6\ A \succ B \succ C &\Longrightarrow 6\ A \succ B,\ 6\ A \succ C \text{ és } 6\ B \succ C\\ 3\ B \succ C \succ A &\Longrightarrow 3\ B \succ A,\ 3\ C \succ A \text{ és } 3\ B \succ C\\ 6\ C \succ A \succ B &\Longrightarrow 1\ A \succ B,\ 1\ C \succ A \text{ és } 1\ C \succ B\end{aligned}$$

Így az alább ieredményt kapjuk: A jobb B-nél 7:3 arányban, A jobb C-nél 6:4 arányban és B jobb C-nél 9:1 arányban. Azaz van Condorect-győztes, mégpedig A, hiszen mindenkit legyőzött.

Az eljárás nagyon egyszerű és könnyen kivitelezhető nagyobb számosságra is, de súlyos hibával rendelkezik. Mégpedig az, hogy gyakran nincs végeredmény, ugyanis jelentkezik a körbeverés jelensége. Emiatt olyan eljárást kerestek a kutatók, amely az előzőt próbálják javítani. Mi ezek közül sorolunk fel néhányat, amelyek manapság nagyon elterjedt módszernek számítanak.

7.3.1. Copeland módszer

Az eljárás alapgondolata az, hogy minden alternatíva kap egy indexszámot , amely azt jelzi, hogy hány alternatívánál bizonyult jobbnak csökkentve azzal a számmal, amely azt jelzi, hogy hány alternatívánál bizonyult rosszabbnak. Az így kapott Copeland indexek közül válasszük ki a legnagyobb értékhez tartozó alternatívát. Tekintsük a következő példát:

preferencia sorrend	szavazatok száma
$A \succ B \succ C \succ E \succ D \succ F$	33
$B \succ C \succ E \succ D \succ F \succ A$	33
$C \succ D \succ E \succ F \succ A \succ B$	33
$D \succ E \succ F \succ A \succ B \succ C$	33
$E \succ F \succ A \succ B \succ C \succ D$	33
$F \succ A \succ B \succ C \succ E \succ D$	33

7. táblázat

A páros összehasonlítások eredményei:

Párok	Arány
A:B	165:33
A:C	132:66
A:D	99:99
A:E	66:132
A:F	33:165
B:C	165:35
B:D	132:66
B:E	99:99
B:F	66:132
C:D	165:33
C:E	132:66
C:F	99:99
D:E	66:132
D:F	132:66
E:F	165:33

8. táblázat

Egyszerűen megállapítható, hogy nincsen Condorcet győztes. Nézzük Copeland módszerét:

A jobb B-nél és C-nél, viszont rosszabb F-nél és E-nél. Így a Copeland indexe 1+1-1-1=0; hasonlóan nézzük meg a többi alternatívát, azt kapjuk, hogy:
B, C és F indexe 0, D indexe -2 és E indexe 2. Így ő a Copeland győztes.

7.3.2. Dodgson módszer

Ez is egy indexet rendel minden egyes alternatívához, méghozzá a következőképpen: vizsgáljuk meg, hogy egy altenatívára mennyi páros cserét kellene végrehajtani a preferencia-sorrendekben ahhoz, hogy Condorcet győztes lehessen a szóbanforgó alternatíva. Ezen indexértékek alapján nyílvánítsuk azt az alternatívát győztesnek, amelyre ez a szám a legkisebb. A következő példával szemléltetjük az eljárást:
Négy alternatíva (A, B, C, D) van és harmincan szavaztak. A következő alakult ki:

Szavazatok	Rangsor
10	$A \succ B \succ C \succ D$
7	$C \succ D \succ B \succ A$
3	$A \succ D \succ C \succ B$
3	$D \succ C \succ A \succ B$
7	$B \succ D \succ A \succ C$

9. táblázat

Egyszerűen látható, hogy nincsen Condorcet győztes. Alkalmazzuk Dodgson módszerét.

Páros összehasonlítás	Arány
$A \succ B$	16:14
$B \succ C$	17:13
$C \succ D$	17:13
$D \succ A$	17:13
$A \succ C$	20:10
$B \succ D$	17:13

10. táblázat

Alternatíva	Vesztett preferencia	Dodgson index	Összesen
A	$D \succ A$	3	3
B	$A \succ B$	2	2
C	$B \succ C$	3	
	$A \succ C$	6	9
D	$C \succ D$	3	
	$B \succ D$	3	6

11. táblázat

Tehát B a Dodgson győztes. Ratcliff cikkében egy érdekes példát láthatunk arra, hogy a Dodgson módszer milyen érzékeny egyetlen alternatíva pár megcserélésére. Ezt tulajdonképpen a változók függetlensége axióma viselkedését próbálja megcélozni.

7.3.3. Borda módszer

Ez a leginkább elterjedt pontozásos eljárás. Az egyéni ransorokban elfoglat helynek megfelelően az alternatívák pontokat kapnak: az utolsó 0 pontot, akövetkező 1 pontot srb. Az így kapott pontszámokat a szavazatok számával súlyozva összegzik, és a legtöbb pontot kapott alternatíva lesz a győztes. Az eljárásnak ismertek olyan változatai, amelyekben a rangsorban elfoglalt helyet súlyozva veszik figyelembe.
Az előző példánál maradva:

Jelölt	Első	Második	Harmadik	Negyedik	Borda szám
A	13	0	10	7	49
B	7	10	7	6	48
C	7	3	13	7	40
D	3	17	0	10	43

12. táblázat

Tehát ezen esetben C a Borda győztes.
Látható, hogy ez sem nevezhető bonyolult eljárásnak, de vigyázni kell vele. Gyakran nem a Condorcet győztest hooza ki nyertesnek.

7.3.4. Hare módszer

Ez a a módszer azon alapul, hogy aki a szavazatok több, mint a felét megkapta, azt meg kell választani. Megjegyezzük, hogy Hare ezt az eljárást eredetileg olyan esetekre konstruálta, amikor végeredményként több alternatívát kell választani.
A választók leírják preferenciáikat. Ha van olyan alternatíva, melyet a választók több, mint fele első helyre rangsorolt, akkor az a győztes. Ha ilyen nincs, akkor azokat az alternatívákat, amelyek a legkevesebb első helyet kapták, kihúzzák, majd újra összeszámolják az első helyeket. Ha most már van többségi győztes, akkor vége az eljárásnak. Ha nincs, akkor az eljárást mindaddig ismétlik, míg ilyen nem lesz.
Vegyük a következő példát:

preferencia sorrend	szavazatok száma
$A \succ B \succ C \succ D \succ E \succ F$	76
$B \succ C \succ D \succ E \succ F \succ A$	70
$C \succ B \succ D \succ E \succ F \succ A$	15
$D \succ B \succ C \succ E \succ F \succ A$	14
$E \succ B \succ C \succ D \succ F \succ A$	13
$F \succ B \succ C \succ D \succ E \succ A$	12

13. táblázat

Az első körben F első helyeinek a száma a legkevesebb, ezért kiesik. Ekkor a fenti táblázat második eleméből $B \succ C \succ D \succ E \succ A$ lesz, míg a táblázat utolsó eleméből $B \succ C \succ D \succ E \succ A$ sorrendet kapunk. De ez egyezik az utolsó sorral így őket összevonjuk. Az új táblázat a következő:

preferencia sorrend	szavazatok száma
$A \succ B \succ C \succ D \succ E$	76
$B \succ C \succ D \succ E \succ A$	82
$C \succ B \succ D \succ E \succ A$	15
$D \succ B \succ C \succ E \succ A$	14
$E \succ B \succ C \succ D \succ A$	13

14. táblázat

A második körben E első helyeinek száma a legkevesebb, ezért másodszorra E-t elimináljuk. Az újabb összevonás utáni táblázatunk ekkor:

preferencia sorrend	szavazatok száma
$A \succ B \succ C \succ D$	76
$B \succ C \succ D \succ A$	95
$C \succ B \succ D \succ A$	15
$D \succ B \succ C \succ A$	14

15. táblázat

A harmadik körben D első helyeinek száma a legkevesebb, ezért D-t elimináljuk. Kapjuk:

preferencia sorrend	szavazatok száma
$A \succ B \succ C$	76
$B \succ C \succ A$	109
$C \succ B \succ A$	15

16. táblázat

A negyedik körben már készen is vagyunk, hiszen B első helyeinek száma meghaladja az ötven százalék plusz egy szavazatot.
Így a Hare eljárás győztese B.

8. Stratégiai döntések

8.1. A startégiai döntések jellemzői

Ebben a fejezetben egy másik szempontból tekintünk a döntési problémára. A döntések pszichológiájáról és hátteréről lesz szó.

A stratégai döntések az ember, a szervezet vagy egy intézmény életében a legfontosabb döntések. Rendszerint visszafordíthatlan vagy csak nagyon nehezen és költségesen módosítható folyamatokat indítanak el. Már maguknak a döntéseknek az előkészítése is elég időigénye sőt drága lehet. Mindazonáltal a döntés következményeivel hosszú időn át együtt kell élni. Van mikor a döntés évtizedek múlva értékelhető.

Paradox módon ezeknek a legnagyobb fontosságú döntéseknek a módszertani megalapozása a leggyengébb. Mint láttuk az előző fejezetekben, egyszerűbb, kisebb jelentőségű döntéseinket számításokkal, elemzésekkel jobban alá tudjuk támasztani. Minél inkább fontosabb a döntés, annál bizonytalanabbak vagyunk, így inkább intuíciónkra vagyunk utalva. Vajon ennek mi a magyarázata?

Lehet például az információ hiánya. Minél előrébb tekintünk a jövőbe, annál kevesebb információ áll rendelkezésünkre. Sokszor azt is nehéz megjósolni, hogy mi lesz holnap, nemhogy néhány hónap múlva. Az információ mértéke még egy éven belül is nehezen becsülhető, nemhogy évekre előre. Azonkívűl ott vannak a műszaki fejlődések és egyéb tényezők, amik az egészet még befolyásolják. Tehát tipikusnak mondható, hogy fontos döntésekben teljes információ nem igen áll rendelkezésünkre.

Boulding-tól származik az a mondás, hogy az emberekkel nem az a baj, hogy valamit nem tudnak, hanem az, hogy amiről azt hiszik hogy úgy van, az nem igaz. Felületesen tájékozódünk, sok eleve hamis hír. A vállalati adatbázisok, újságok és kimutatások tele vannak hamis adatokkal. Tehát ez igen megnehezíti a leendő döntésünket.

Az azonban mindenképpen igaz, hogy bőven el vagyunk látva olyan döntési modellekkel, amelyek egy adott cél szempontjából segítenek kiválasztani a legjobb alternatívát. Ha most eltekintünk attól, hogy ezen modellek zöme rövidtávra szól, akkor további nehézséget okoz az, hogy a modellek többsége csak egy cél szerint képes optimális megoldást adni. Ehhez hozzáadódik az, hogy az elöbbi okokból következően kevés a pontos adatunk. Márpedig a startégiai döntések zömére az a jellemző, hogy az optimális megoldásnak több célnak is meg kell felelnie. Ha például egy étteremlánc terjeszkedni szeretne, és mondjuk egy új éttermet szeretne nyitni, akkor bizony igen sok tényező közrejátszik abban, hogy a lehetséges helyek közül melyiket válassza.

8.2. Gazdaságon kívüli célok

Hogy mégjobban megnehezítsüka döntéshozó dolgát, nem szabad figyelmen kívül hagyni, hogy jelen vannak bizonyos gazdaságon kívüli célok. Például egy új vasúti vonal megépítése, vagy egy autópálya vonal megépítése sokszor ott dőlt el, hogy gazdaságilag kifizetődő-e vagy sem. Ehhez a szakemberek nagyszerű modelleket fejleszettek ki. Azonban a mai világban ezeket keresztűlhúzhatják gazdaságon kívüli erők. Például természetvédelem vagy politika. Tehát így a döntéshozónak már tényleg nehéz dolga van, és kevésbé számíthat döntéstámogató modellekre.

8.3. Több szereplő esete

Eddig egy személy döntéséről volt szó. De mi a helyzet csoportos döntésekkel? Bonyolódik a helyzet, mert itt minden egyes embernek, akinek beleszólása van a döntésbe, egyéni célrendszere van, saját kriériumai vannak, és természetesen mindegyik a saját elképzelését akarná érvényre juttatni. Gondoljunk a szavazási eljárásokra. És itt máris konfliktushelyzethez jutottunk, hiszen az egészet tetézi az is, hogy a személyek véleménye sokszor különböző súllyal vesznek részt. Például egy vállalatnál az igazgatóság véleménye nagyobb súlyú.

8.4. Hogyan születik a döntés?

De akkor vajon, ilyen esetekben egyáltalán hogyan születik döntés? Azt mondhatjuk, hogy a döntéshozók gyakran zsonglőrhöz hasonló körülmények között kénytelenek meghozni a sorsdöntő döntéseiket. A napi problémák nyomása alatt a döntéshozó idejének nagyobb részét kénytelen operatív ügyek intézésével tölteni. Alapos felkészülésre, elemzésre, módszerek tesztelésére nincs idő, és így halogatják a döntést.
Viszont amikor a döntés már nem halasztható tovább, akkor megérzéseire támaszkodik. Ez súlyos döntéseknél igen nagy rizikót jelent. Egy rossz döntés évekre is kihathat.

A technológiai változások, a rohamosan átalakuló társadalmi és gazdasági környezet és egyéb hatások miatt a döntéshozónak hatalmas méretű információtömeget kellene feldolgoznia. Ez persze szinte lehetetlen. Ezért fontos a rugalmasság, az információ helyes kezelésének képessége, a jó döntés.
Sokat köszönhetünk ilyen téren Tverskynek és Kahnemannak, akik ezen a téren érdekes eredméyneket találtak. Vizsgálták például, hogy a szubjektív valószínűségek becslése mögött milyen gondolkodás lelhető fel. Ez számunkra nagyon fontos, hiszen a negyedik és ötödik fejezetben pont ezekre a valószínűségekre volt szükségünk.

8.5. A stratégiai döntési folyamat

És végül essék néhány szó a döntési folyamatról. Tudjuk, hogy a döntéseinkre hatással vannak külső tényezők is, amelyek nagyban befolyásolhatják a végső döntést. Azonkívűl nehéz a külső forrásokból származó információkat kombinálni. Bizonyos információknak nagyobb súlyt adunk. Gyakran emiatt döntési hibához juthatunk. Láttuk, hogy az előző modellek némelyike egyértelmű választ ad a maga módján, de valamelyik nem. Vagy két hasonló módszer két különböző eredméynt ad. Döntenünk mégis kell. A döntéshozó ilyenkor gondolkodási heurisztikák alapján oldja meg a problémát. Ezeket a szabályokat érdemes megismerni, tudatosítani a bennük rejlő kockázatot és megkeresni azokat a módszereket, amelyek csökkentik a negatív hatásokat.

Hivatkozások

[1] Thomas C. Ratliff, A comparison of Dodgson's method and the Borda count, *Economic Theory* 20 (2002): 357-372.

[2] John Geanakoplos, Three Brief Proofs of Arrow's impossibility theorem, *Yale University* 2001.

[3] Fuad Aleskerov, Multicriterial Ranking Approach, *International Journal of information Technology and Decision Making* (2004): 321-335.

[4] Prakash P. Shenoy, Game trees for Decision Analysis, *Theory and Decision* 44 (1998) 149-171.

[5] Jean-Pierre Brans and Bertrand Mareschal, How to decide with Promethee, *VUP Brussels University.*

[6] Jaap Spronk and Constantine Zopounidis, Multicriteria Decision Aid, *European Journal of Operational Research* 1999.

[7] Annika Kangas, Jyrki Kangas and Jouni Pykalainen, Outranking Methods in Strategic Natural Resources Planning, *Silva Fennica* 35 (2001) 215-227

[8] R. Schlaifer, Analysis of Decision Under Uncertainty, *McGraw Hill, New York* 1969.

[9] Temesi József, A döntéselmélet alapjai, *Aula* 2002.

[10] J.P. Brans and P Vincke, A preference ranking organization method, *Managment Science* 31 (1985) 647-656.

[11] Kenneth J. Arrow, Social Choice and Multicriterion Decision-Making, *The Mit Press*, 1986.

[12] Tversky A. - Kahneman D., The framig of decision and the psychology of choice, *Science Vol. 211. No. 30.* , (1981) 453-460.