# Hozammenedzsment

## Diplomamunka

Írta: Dimény Imre

Alkalmazott matematikus szak

Témavezető:

Dr. Fullér Róbert, egyetemi docens

Operációkutatási Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2009

# Tartalomjegyzék:

# 1 Hozammenedzsment rendszerek alapjai

Hozammenedzsment rendszerek (*RMS - Revenues Managment Systems*) célja a vállalatok azon eszközeiből kihozni a maximális profitot, amelyek értéke csak adott periódusra, időtartamra pozitív, a perióduson kívül pedig értéktelen. Az ilyen eszközök az úgynevezett **Perishable asset**, értékvesztő eszközök.

Ilyen egy repülőgépjárat bármely ülőhelye, egy hotelszoba adott estére, vagy egy reklámhely. Az eszköz, szolgáltatási kapacitás, az idő egy meghatározott pillanatában, az értékesítési periódus befejeztével azonnal nullára csökken a bevétel termelési képessége.

Példák:

- Hotel szoba. Az adott éjszakára ki nem adott hotel szoba nem termel bevételt (aznap) Az így elvesztett bevétel örökre elvesz.
- Repülőgép, vonat, busz vagy akár hajó és általában tömegközlekedési eszközökön az ülőhelyek. Az adott járatra el nem adott jegyek értéke az utazás megkezdésének pillanatában nullára csökken. Normális esetben nincs senki aki tegnapi Budapest-London járatra szeretne jegyet váltani.
- Adott időszakra bérbe nem adott reklámfelület értéke szintén nulla.
- Hasonlóan az autókölcsönzőben ki nem adott járművek sem termelnek aznap bevételt.

Mivel a hozammenedzsment rendszerek tárgya nagyon gyakran ilyen eszközök, sokszor PARM (*Perishable Asset Revenue Management*) megnevezést is használják.

## 1.1 Hozammenedzsment rendszerek

Hozammenedzsment rendszerek olyan dinamikus módszerek összessége, amelyek előrejelzik a várható igényeket, az idővel értékét vesztő eszközt kiosztják a különböző értékesített osztályok között, meghatározzák, hogy mikor és mekkora túlfoglalást engedünk meg, valamint meghatározzák, hogy adott árkategóriában milyen áron legyen értékesítés. A vállalatok profitmaximalizálási céljuk során arra törekednek, hogy egyrészt termékük et (*legyen az egy autó, vagy egy szolgáltatás, mint pl. egy szállodai szoba egy éjszakára*) megkülönböztessék a piac többi szereplőinek hasonló termékeitől. Minél sikeresebb ez a megkülönböztetés a vállalat annál nagyobb monopolisztikus erőre tesz szert, és annál könnyebben tud élni árdiszkriminációval. Ennek során értékesítési osztályokat hoz létre. Például egy szálloda esetében, egy osztályon a fizikai szoba, a foglalás feltételei, valamint a nyújtott szolgáltatások egyedi kombinációját kell érteni. A cél a vásárlókat úgy csoportokba sorolni, szeparálni, hogy minél jobban ki tudjuk használni, a vásárlók fizetőképességét, illetve vásárlói szokásaikat. Ezután a létrehozott csoportokhoz árakat kell rendelni.

A két legfontosabb kérdés, amelyre választ keresünk, hogy hány egység legyen elérhető kezdetben különböző árakon, valamint, hogy ez az elérhetőség az idő múlásával miként változzon. Ezen kívül számos más döntés is felmerülhet. A különböző csatornákon értékesített termékek ára azonos legyen-e vagy, hogy készlet hiány esetén, mely csoportokat részesítsünk előnyben.

A hozammenedzsment rendszerek használata nem csak a bevétel növekedés szempontjából bizonyult hasznosnak, hanem az átláthatóság szempontjából, a szolgáltatás minőségének folyamatos javítása céljából is.

### 1.1.1 Mikor hasznos az RMS?

Ha a terméknek vagy szolgáltatásnak van egy időpontja, amikor elérhetővé válik, és van egy időpontja, amikor elavul, vagy már nem lesz elérhető, vagy ha a termék vagy szolgáltatás nem raktározható, vagy csak jelentős többletköltséggel, minőség csökkenéssel, értékvesztéssel. Ilyenek a helyek egy színházi előadásra, sporteseményre, közlekedési eszközön, étteremben, szállodában, elektromos szolgáltatás, autójavító-műhely, televízió hirdetési idő

Ha a termékből illetve szolgáltatásból rendelkezésre álló egységek száma fix, illetve ez a szám ugyan növelhető, de nem azonnal, és/vagy csak nagy költséggel. Ezzel gyakran együtt jár az, hogy a fix költséghez tartozó változó költség relatív kicsi, és ez lehetővé teszi, hogy a termék illetve szolgáltatás árának intervalluma, amin jobban megéri a terméket illetve szolgáltatást értékesíteni, mintsem bevétel termelő képességét elveszni hagyni, elég tág. A fix kapacitás pedig gyakran nagyon változó igény számmal párosul. A kapacitás nem feltétlenül kell, hogy fix legyen ahhoz, hogy a módszer alkalmazható legyen. Egy szálloda vagy autókölcsönző kapacitása sem teljesen fix, mert ugyan adott időtartamra kölcsönzik ki az autót, vagy foglalják le a szobát, az nem feltétlenül jelenti azt, hogy a megjelölt időpontban hozzák vissza az autót, illetve hagyják el a szállodát.

Ha a fogyasztók különböző osztályokba sorolhatók az alapján, hogy mennyire érzékenyek az ár változására (növekedésére). A fogyasztókat elriasztja a vásárlástól, illetve a szolgáltatás igénybevételétől, ha ugyanaz a termék, különböző időpontokban különböző áron érhető el számukra. Ezért az osztályok létrehozása során alkalmazott módszer jellemzőinek minden osztály számára egy teljesen eltérő terméket illetve szolgáltatást kell létrehoznia. Az osztályok létrehozására leggyakrabban használt módszer, a termék illetve szolgáltatás vásárlásának, időpontjának alapján történő megkülönböztetése. Általában az ár érzékeny fogyasztó hajlandó lesz becserélni a rugalmasságot alacsonyabb árra, míg azon fogyasztók, akik kevésbé ár érzékenyek, az utolsó pillanatig fognak várni a foglalással, vásárlással. Ezzel a módszerrel a termék rugalmassága különbözni fog osztályonként. A kevésbé rugalmas termék kevesebb értéket hordoz magában.

### 1.1.2 Célok:

Az RMS rendszerek számára megfogalmazott cél, leggyakrabban a profit hozzájárulás maximalizálása, de ettől eltérő célok is elképzelhetőek:

- Profit hozzájárulás maximalizálása, profit maximalizálása.
- Kapacitás kihasználtság maximalizálása
- Fogyasztónkénti átlagos bevétel maximalizálása
- Elvesztett fogyasztók számának minimalizálása

Ezen célok megvalósításainak korlátai vannak: működési korlátok, stratégiai, valamint marketing korlátok. A működési korlátokat a tevékenység környezete szolgáltatja, például a szobák száma egy szállodában, ülőhelyek száma egy repülőgépen. A marketing korlátok a marketing célokból származnak, ilyen a minimálisan elfogadható vendégek száma, utasok száma. A stratégiai korlátok a cég hosszú távú elképzeléseiből erednek

Az RMS kétféle költséggel számol. A szolgáltatás, illetve termék előállításának, szolgáltatásának költségével, valamint a szolgáltatás megtagadásának költségével. Ez utóbbi a vásárlói elégedettség érdekében szükséges. Például egy szállodában elutasított bejelentkezésért cserében egy másik szállodában történő elhelyezés, valamint egyéb a vásárló elégedettségét növelő szolgáltatások árával kell számolni.

A hozammenedzsment körébe tartozó problémák osztályozása során az eszköz természetét, a kapacitás típusát, az árazás figyelembe vételének módja, akciós ár osztályok, lépcsők száma, foglalás igények, a diszkont foglalások teljesülési aránya, a teljes árú foglalások teljesítési aránya, csoportos foglalások, túlfoglalásokat, hálózat figyelembe vétele

Az RMS rendszerek elsődleges célja a bevételek maximalizálása rövidtávon, hiszen új beruházások eszközölése, a meglévők átépítése, átstrukturálása elsősorban időigényes folyamat, amely rövidtávon nem megvalósítható.

### 1.1.3 Hozammenedzsment rendszerek típusai:

**Stratégiai RMS menedzsment:** Stratégiai szempontból az RMS célja olyan kategóriák meghatározása, amely arra készteti a fogyasztókat, ügyfeleket, hogy szolgáltatást válasszanak. Az RMS arra ösztönzi például az üzleti célból utazókat, akik hajlandóak magasabb árat is kifizetni egy repülőjegyért, hogy ne vegyenek az olcsó jegyekből annak megszorításai és korlátozásai miatt.

T**aktikai RMS menedzsment:** Taktikai eszköz a szobák elérhetőségi időintervallumának, árának, foglalások hosszának meghatározása, a bevételek maximalizálásának érdekében. Például magas beérkező igényszámú periódusokban az alacsonyabb kategóriák foglalásának bezárása mellett a magasabb kategóriájú osztályok nyitva tartása.

**Strukturális döntés:** Milyen formában történjen az értékesítés: meghatározott áron, tárgyaláson, alkun, illetve aukció keretén belül

**Mennyiségi döntés.** Kapacitás allokációja a különböző piaci szegmensek között. Mikor kezdjük el egy termék árusítását és meddig

Hogy mely szempontot tarja fontosnak egy cég, az gyakran még iparágon belül is változik. Jó példa erre a repülőgép társaságok. Míg a legtöbbjük az árak fixen tartása mellet a kapacitás elosztásával próbálja bevételét maximalizálni, addig a diszkont vagy fapados társaságok a kapacitást fixen tartva az ár meghatározása révén.

A hozammenedzsment rendszerek által használt technikákat alapvetően két osztályba lehet sorolni. Az egyik a kapacitás allokáción alapuló hozammenedzsment, a másik pedig az árazáson alapuló hozammenedzsment.

## 1.2 Az RMS feladatai

Az RMS feladatai négy csoportba sorolhatók:

**Előrejelzés (*estimation, forecasting*):** Előrejelzés során figyelembe kell venni az igények szezonalítását, periodikus ingadozását, egyedi, ünnepekhez, eseményekhez kapcsolódó kiugróan magas igényeket, trendet.

**Árazás (*pricing*):** Az alapvető kérdés, hogy milyen módon határozzuk meg az árat

BPM (*Bid Price Method*): A BPM célja megbecsülni, hogy milyen jövőbeli bevételtől (*oportunity cost*) esünk el azáltal, hogy kiveszünk egy eszközt a leltárból néhány éjszakára.

PSM (*Price Setting Method*): Az árak meghatározása bizonyos periódusok kezdetekor történik, és be van fagyasztva az adott periódusban.

**Kapacitás elosztás (*allocation*):** a kapacitás elosztás a gyakorlatban általában egy matematikai program. A kapacitás elosztás során foglalási korlátokat helyezünk el az egyes foglalási osztály, nap párokra vagy megbecsüljük annak a lehetőségköltségét (opportunity cost), hogy egy egységet kiveszünk a leltárból, adott időszakra, azaz hogy elfoglaljuk az eszközt. Ez utóbbi esetben egy eszköz nem lesz addig kiadva, amíg az így keletkező bevétel nem haladja meg annak a lehetőségnek az értékét, hogy azt egy későbbi időpontban magasabb áron tudjuk eladni (*bid price approch*)

Nem minden vásárló, fogyasztó hajlandó magasabb kategóriájú terméket szolgáltatást igényelni, ha az alacsonyabb osztályú nem áll rendelkezésre. Tehát ha úgy döntünk, hogy az alacsonyabb osztály eladását - annak érdekében, hogy nagyobb bevételre tegyünk szert- korlátozzuk lehetséges, hogy elvesztjük ezeket a vásárlókat.

**Túlfoglalás (*overbooking*):** Túlfoglalások engedélyezése mögött az a tapasztalat áll, hogy az előre megkötött foglalások nem mindig teljesülnek. A lemondások, meg nem jelenések, visszamondások kezelésére több lehetőség áll rendelkezésre. Gyakran foglalási díjat kell fizetni, mely lemondáskor elvesz, vagy csak részben térül vissza. Ezzel a módszerrel azonban csak a veszteséget lehet csökkenteni, a szoba továbbra is üresen áll, és a töredékét képes megtermelni annak a bevételnek, amelyet elvárnak tőle. Másik lehetőség, a túlfoglalások engedélyezése, figyelembe véve a korábbi lemondásokra vonatkozó statisztikákat. Abban az esetben, ha túlfoglalás történik, és legalább annyi vendég mondja le foglalását, mint amennyi a túlfoglalás volt, akkor minden igény, foglalást ki tud elégíteni a szálloda. Azonban ha mégsem történik, meg a várt lemondás a szálloda nem tud minden igényt teljesíteni a foglalásnak megfelelően. Ekkor különböző lehetőségek állnak rendelkezésre a vendég kárpótlására: a vendég pénzbeli kártérítése, konkurens szállodánál történő elhelyezése stb. Ezek mind költséggel járnak a szálloda részére, azonban összességében jóval kevesebbe, mint az üres szoba fenntartása, megfelelően jól meghatározott túlfoglalási arány mellett.

## 1.3 Hozammenedzsment rendszerek eredete

Az RM technológiák a repülőgép társaságokhoz vezethető vissza. 1978-tól kezdve az Egyesült Államokban működő utas szállításra szakosodott repülőgép-társaságok szabadon határozhatták meg az áraikat, útvonalaikat, szolgáltatásaikat.

Az 1981-ben alakult People Express volt az első, amely az utasok árérzékenységére alapozott. Kiderült, hogy az utasok hajlandók feladni az utazás rugalmasságát, ha cserében olcsóbban utazhatnak

A People Express térnyerésére válaszul a nagy társaságok intenzív fejlesztési tervekbe kezdtek a hozammenedzsment terén.

Az American Airlines válasza, a felesleges ülőhelyek olcsó árusítása. Egy út, döntő része fix költség, az üzemanyag, a személyzet bére stb.. A várható felesleg meghatározásához meg kell becsülni, hogy várhatóan a normál értékesítés befejezte után, hány hely maradna meg üresen. Ez után gondoskodni kellett arról, hogy a diszkont áron értékesített hely ne csökkentse a magas árat fizető üzleti utas helyét, valamint meg kellett előzni, hogy ezek az utasok olcsó helyet foglaljanak. Vagyis a két vásárló osztályt megkülönböztető korlátozások bevezetésére volt szükség. A diszkont jegyeket 30 nappal indulás előtt kellett megvásárolni, minimum 7 nap kellett elteljen az oda és a visszaút között, a kifizetett ár nem volt visszaigényelhető, valamint csak korlátozott számban álltak rendelkezésre ezek a helyek. Az első nagyméretű hozammenedzsment rendszert is az American Airlines hozta létre. Ez volt a DINAMO(*Dynamic Inventory Allocation and Maintenance Optimizer* system). A rendszer bevezetésének köszönhetően lehetőség nyílt egy új árazási mód bevezetésére. A hozammenedzsment gyökerei tehát a repülőgép társaságok harcához köthető, olyannyira, hogy manapság nem is nagyon létezhet társaság nélküle.

## 1.4 A hozammenedzsment rendszerek felépítése

A piac jelei, amelyek a hozammenedzsment irányába terelhetnek egy vállalatot:

Ha a termék különböző csoportoknak különböző értéket képvisel. Minél változékonyabb az igény, minél nagyobb a bizonytalanság, annál nehezebb jó döntéseket hozni, és annál nagyobb szükség van egy komplex döntés előkészítő, elemző eszközre.

Ha termelés szolgáltatás nehezen vagy nagyon nagy költségek árán tud alkalmazkodni a változó igényszámhoz.

Ha az ár egyben a minőségnek a jele is, vagy a termék egy státusz jelkép, vagyis az ár tartalmazza a termék egyediségének árát is, a hozammenedzsment rendszereknek alkalmazásának nem előnyös helyzetei.

Fontos, hogy a vállalatnak már legyen egy adatbázisa korábbi igényekről, tranzakciókról, figyelemmel követhetők legyenek a folyamatok.

Hozammenedzsment rendszerek felépítése általában:

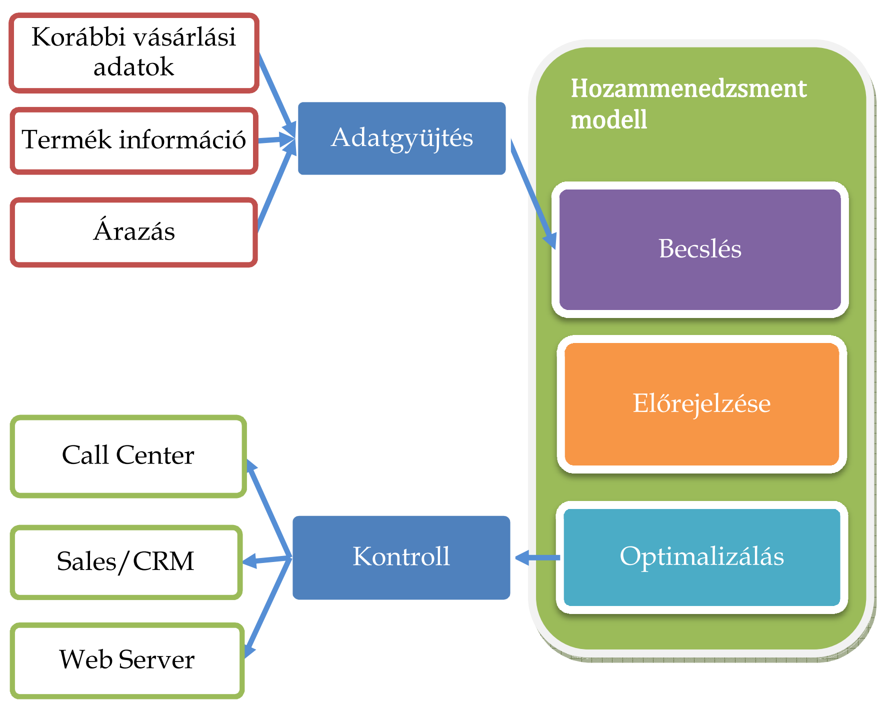
1. Adatbázis, adattárolás. A fontos adatok időrendi tárolása, árak, igények, okozati összefüggésekkel

2. Becslés és előrejelzés: Az igények paramétereinek becslése, és ezek alapján későbbi igények becslése, valamint lemondások, meg nem valósult foglalások arányának becslése

3. Optimalizálás. Az optimális kontrol szabályok (allokáció, árak, akciók, túlfoglalási limit) meghatározása, amelyek a következő optimalizálásig lesznek érvényben.

4. Ellenőrzés, felügyelet. A készlet értékesítésének felügyelete az előzőekben meghatározottak alapján.

A hozammenedzsment rendszer ezen lépéseken megy végig bizonyos időközönként. Hogy milyen időközönként az a környezettől, iparágtól, üzleti környezet változásának sebességétől, és nagyon sok más faktortól függ. Az azonban elmondható, hogy minden egyes alkalmazáshoz egyedileg kell ezt meghatározni, nincsen egységes recept.



# 2 Becslés és előrejelzés

A Hozammenedzsment rendszerek működéséhez szükség van bizonyos kulcs információk előrejelzésére, becslésére. Az ezen becslésekhez szükséges nyers adatok általában a vállalat vállalatirányítási rendszeréből (ERP) érhetők el. A vállalatok itt tárolják a korábbi várakozásaikat, tényadatokat valamint nyomon követhetők olyan egyedi események hatásai is, amelyek az adatokra hatással voltak, mint például a termék értékesítésére gyakorolt hatása egy promóciós kampánynak.

## 2.1 Előrejelzési módszerek

Hozammenedzsment rendszerek esetében legtöbbször a jövőbeli igények, ezeknek bizony szintű aggregátumainak előrejelzésére van szükség. Szükség lehet még bizonyos mennyiségek előrejelzésére, mint a piaci ár, szállók esetében a várható ott tartózkodás ideje, lemondási arány, meg nem jelenési arány stb.

Hozammenedzsment rendszerek esetében fontos, hogy az előrejelzésre használt módszer robusztus legyen, gyorsan megbízható eredményt szolgáltasson, ugyanis gyakran nagy mennyiségű adatot kell feldolgozni, és a rendelkezésre álló idő korlátos. Éppen ezért az egyszerű, gyors módszerek a kedveltek a hozammenedzsment rendszerekben a pontosabb, megbízhatóbb, de lassabb módszerekkel szemben.

A szállodaiparban például ezeket az előrejelzéseket általában este végzik, ami után az optimalizáló modulhoz kerülnek át az adatok. Tehát a rendelkezésre álló időablak általában 6-8 óra!

### 2.1.1 Egyszerű heurisztikák.

Egyszerű heurisztikák léteznek, amelyek az idősor komponensekre történő felbontásán alapulnak. Ezek a komponensek:

- szint, átlag, jellemző érték
- trend
- szezonalitás

Legnagyobb előnyük az egyszerűség, értelmezhetőség, megvalósíthatóság.

### 2.1.2 Mozgóátlagok

Ha a $t$ időpillanatban, periódusban, a $t+k$ időpillanatra (periódusra) szeretnénk előre jelezni az igények számát $k$ periódusú előrejelzésről beszélünk. Jelölése: $\hat{Z}_{t+k}$

$z_1, . . , z_t$ az igények száma a korábbi periódusokban

$\hat{Z}_{t+1}, \dots, \hat{Z}_{t+K}$ előrejelzések a $t+1, \dots, K$ periódusokra

$$\hat{Z}_{t+1} = \frac{z_t + z_{t-1} + \cdots + z_{t-M+1}}{M} = \hat{Z}_t + \frac{z_t - z_{t-M}}{M} \tag{2.1}$$

esetén $M$ periódusú mozgóátlag előrejelzésről beszélünk. Ekkor a $k$ periódusú előrejelzés:

$$\hat{Z}_{t+k} = \hat{Z}_{t+1}, \qquad k = 2, \dots, K$$

$t < M$ esetén a $M = t$ használható

### 2.1.3 Exponenciális simítás

Ezek egyszerű, könnyen gyakorlatba ültethető módszerek, amelyek RM rendszerekben elterjedtek. Általános stratégia az adatok finomításán alapul. A cél a zajok kiszűrése azáltal, hogy hosszabb időintervallumot veszünk figyelembe.

$A_t$ – átlag vagy szint becslése a $t$ periód

$T_t$ – trend becslése a $t$ periódusra

$S_t$ – szezonalitás becslése a $t$ periódusra

A legegyszerűbb esetben nem vesszünk figyelembe sem trendet sem szezonalitást.

$0 < \alpha < 1$ simítási együttható

$$\hat{Z}_{t+1} = A_t = \alpha z_t + (1 - \alpha)\,\hat{Z}_t$$

az előrejelzés a $t + 1$-edik periódusra az előrejelzés

$$\hat{Z}_{t+k} = \hat{Z}_{t+1}, \qquad k = 2, \dots, K$$

α megválasztása stratégiai, tervezési döntés. Kisebb α értékek esetén az előrejelzés simább, kevesebb ingadozást tartalmazó lesz, míg magasabb α értékek esetén gyorsabban reagál az előrejelzés a változásokra, ugyanakkor jobban kitett az adatokban zajosságának.

$$\begin{aligned}
\hat{Z}_{t+1} &= \alpha z_t + (1 - \alpha)\,\hat{Z}_t \\
&= \alpha z_t + (1 - \alpha)\big(\alpha z_{t-1} + (1 - \alpha)\,\hat{Z}_{t-1}\big) \\
&= \alpha z_t + \alpha(1 - \alpha) z_{t-1} + (1 - \alpha)^2 \hat{Z}_{t-1} \\
&= \vdots \\
&= \alpha \sum_{j=0}^{\infty} (1 - \alpha)^j\, z_{t-j}
\end{aligned}$$

Tehát a $t + 1$ –ik periódus előrejezlzése a korábbi periódusok adatainak súlyozott összege, ahol a súlyok az $(1 - \alpha)$ hatványai.

### 2.1.4 Lineáris trend

$0 < \alpha < 1$ szint simításának együttható

$0 < \beta < 1$ trend simításának együttható

$$\begin{aligned}
\hat{Z}_{t+1} &= A_t + T_t \\
A_t &= \alpha z_t + (1 - \alpha)\big(\hat{Z}_t + T_t\big) \\
T_t &= \beta\big(\hat{Z}_t - \hat{Z}_{t-1}\big) + (1 - \beta)\, T_{t-1}
\end{aligned}$$

$k$ periódusra előre

$$\hat{Z}_{t+k} = A_t + kT_t, \qquad k = 1, \dots, K$$

### 2.1.5 Additív Holt-Winters módszer

A Holt-Winter módszer szintén exponenciális simításra épül, figyelembe véve trendet és szezonalitást is.

$0 < \alpha < 1$ szint simításának együttható

$0 < \beta < 1$ trend simításának együttható

$0 < \gamma < 1$ szezonalitás simításának együttható

$L$ - a szezonalitás egy periódusának hossza

Ekkor:

$$\begin{aligned}
\hat{Z}_{t+k} &= A_t + kT_t + S_{t+k-L}, \qquad k = 1, \dots, K \\
A_t &= \alpha(z_t - S_{t-L}) + (1-\alpha)\big(\hat{Z}_t + T_t\big) \\
T_t &= \beta\big(\hat{Z}_t - \hat{Z}_{t-1}\big) + (1-\beta)\, T_{t-1} \\
S_t &= \gamma(z_t - A_t) + (1-\gamma)\, S_{t-L}
\end{aligned}$$

### 2.1.6 Multiplikatív Holt-Winters módszer

Multiplikatív Holt-Winters előrejelzés esetén:

$$\begin{aligned}
\hat{Z}_{t+k} &= (A_t + kT_t)S_{t+k-L}, \qquad k = 1, \dots, K \\
A_t &= \alpha\left(\frac{z_t}{S_{t-L}}\right) + (1-\alpha)\big(\hat{Z}_t + T_t\big) \\
T_t &= \beta\big(\hat{Z}_t - \hat{Z}_{t-1}\big) + (1-\beta)\, T_{t-1} \\
S_t &= \gamma\left(\frac{z_t}{S_t}\right) + (1-\gamma)\, S_{t-L}
\end{aligned}$$

### 2.1.7 Összetettebb előrejelzés

Az igény előrejelzése egy hosszú távú valamint egy rövidtávú előrejelzés alapján készül el, a végső előrejelzés e két előrejelzés súlyozott kombinációja.

A hosszú távú előrejelzést, $\hat{Z}_T^{LTF}$ az előbb megismert multiplikatív Holt-Winters módszerrel, míg a rövidtávú előrejelzést $\hat{Z}_T^{STF}$ az aktuális foglalás állomány alapján figyelembe véve a korábbi ismereteket, valamint a visszamondási arányt illetve a meg nem jelenéseket a szolgáltatás $T$ időpontjára.

Legyen $\varepsilon_{LTF}$ és $\varepsilon_{STF}$ a hosszú távú illetve a rövidtávú előrejelzés négyzetes hibája.

Legyen

$$\overline{wt}_p = \eta\overline{wt}_p + (1-\eta)wt_p$$

ahol

$$wt_p = \frac{\varepsilon_{STF}}{\varepsilon_{STF} + \varepsilon_{LTF}}$$

a hosszú távú előrejelzés súlya. $0 < \eta < 1$ paraméter segítségével szabályozható az új súlyok stratégiai, tervezési fontossága.

A végső előrejelzés pedig

$$\hat{Z}_T = \overline{wt}_p \hat{Z}_T^{LTF} + (1 - \overline{wt}_p)\, \hat{Z}_T^{STF}$$

A rövidtávú előrejelzés

$$\hat{Z}_T^{STF} = \frac{y(1-q)+\lambda}{z}$$

ahol

- $y$ az aktív foglalások száma
- $(1-q),\ 0 < q < 1$ , a visszamondási arány
- $\lambda$ a visszautasított igények becslése
- $z,\ 0 < z < 1$ korábbi adatok alapján az előrejelzés pillanatáig jelentkezett igények valamint a szolgáltatási idejéig beérkező igények aránya.

# 3 Dinamikus árazás

A dinamikus árazás a hozammenedzsment másik fontos eszköze a kapacitásmenedzsment mellett. Itt olyan esetekkel foglalkozunk, amikor a modell elsődleges változója az ár, és nem a kapacitás. A két módszer közötti eltérés nem mindig látványos. Egy diszkont osztály eladásainak lezárása egyenértékűnek tekinthető a termék, szolgáltatás árának növelésével.

Ugyanakkor a felhasznált technikák elkülönülnek az eddigiektől, abban, hogy az árakat tekintjük változónak. A mennyiség alapú illetve ár alapú hozammenedzsment rendszerek között a választás aszerint történik a legtöbbször, hogy mely módon tud gyorsabban reagálni a cég a piaci körülmények változására.

Az üzleti gyakorlatban az egyik legelterjedtebb módszer a bevételek maximalizálására a dinamikus árazás. Ennek megvalósítása számos módon történhet: egyedi árazással, promóciókkal, kuponokkal, akciókkal, kiárusítással, áralkuval.

A légi utas szállításban, főleg régebben a mennyiség alapú hozammenedzsment rendszereket használtak. Az utasszállítók az árakat előre rögzíteni szerették, marketing, reklám szempontjából. Az utóbbi időben egyre jobban elterjedt diszkont társaságok viszont már szakítottak ezzel a módszerrel, és inkább a dinamikus árazás mellett döntenek. Nem elhanyagolható az Internet elterjedtének hatása sem. Ma már nem kell hónapokra előre kihirdetni az árakat, hogy mindenki értesüljön róla, hiszen az Internet segítségével bárki, bármikor utánanézhet. Hasonlóképpen a társaságok árai is könnyen összehasonlíthatók.

A dinamikus árazásnak számos módja van.

## 3.1 Divatáruk leárazása

Divat és szezonális árukat forgalmazó cégek általában a szezon végi leárazásokat használják. A szezon végéhez közeledve csökken a valószínűsége, hogy a terméken túl tudnak adni, a következő szezon kezdetéig pedig nagymértékben, vagy teljesen értékét veszti. Egy másik magyarázat, amely talán még inkább helytálló, hogy a cégek nem tudják meghatározni előre, hogy mely termékek fognak jobban fogyni, mely termékeket fogják többre értékelni a vásárlók, és melyek azok, amelyeket kevésbé. A népszerű termékek már a magas kezdeti áron is fogynak, míg a kevésbé népszerűek leárazásra kerülnek.

Egy másik magyarázat a leárazások alkalmazására, hogy azok a vásárlók, akik a termék megjelenése utáni első időszakban vásárolnak, többet hajlandók kifizetni a termékért, azért, hogy az elsők közt legyenek, akiknek tulajdonában van az adott termék, vagy, mert ha a szezon elején vásárolnak, akkor hosszabb ideig tudják használni abban a szezonban.

## 3.2 Diszkont légitársaságok árazása

Nem minden dinamikus árazási módszer épül árcsökkentésekre. Jó példa erre a diszkont légitársaságok árazási módja. Az ő esetükben az árak az idő múlásával nem csökkennek, hanem nőnek, a még el nem adott helyek, valamint a járat indulásának napjáig hátralévő idő függvényében. Mint azt a légitársaságok is elismerik, céljuk előre jelezni, hogy mennyire lesz népszerű egy-egy járat. Egyetlen jegytípust különböző árakon értékesítenek.

## 3.3 Csomagolt fogyasztói áruk, promóciók

Az előzőektől eltérően a promóciók rövid ideig tartó, időleges árcsökkentési módszerek. A promóciók az általános fogyasztási cikkek körében elterjedt, amelyeket minden nap fogyasztunk. Éppen azért, mert a vásárlók mindennap fogyasztanak ilyen termékeket, tisztában vannak az adott termék árának múltbeli alakulásával, mondhatnánk, ismerik az árgörbéjét, a gyakori promóció hosszú távon a termék értékcsökkenéséhez vezethet, a túl nagymértékű akciók pedig ideiglenesen növelik meg a keresletet, készletezésre ösztönzik a vásárlókat, ami a következő időszakban a kereslet visszaeséséhez vezet. Az ilyen típusú promóciókat meg kell különböztetni, az alapján, hogy a gyártó, vagy az értékesítő, kereskedő részéről történik. Ha a gyártó él a promóció lehetőségével, az árcsökkentés nem feltétlenül jut el a vásárlókig. De előfordulnak olyan akciók, promóciók, amikor a gyártó egyenesen a vásárlóknak ad árkedvezményt. Ilyenek a termékkel adok kuponok, levélben visszaigényelhető pénzösszegek, ez utóbbi Magyarországon nagyon ritka. A gyártó és a kereskedő érdekei különbözőek, míg a gyártó a termékének értékesítéséből származó nyereséget szeretné maximalizálni, addig a kereskedő általában az összes készleten lévő termék együttes nyereségét szeretné maximalizálni. Ebbe belefér az is, hogy időközönként bizonyos termékeket nulla nyereséggel árusítson, annak érdekében, hogy az együttes értékesítésen többet nyerjen.

## 3.4 Korlátolt információs értékesítés

Egy másik lehetséges módszer dinamikus árazásra, amely elterjedéséhez természetesen az Internetes kereskedelem, értékesítés utóbbi időben tapasztalható térnyerése is hozzájárul. A megszokott értékesítési csatornákra általában jellemző, hogy a vevő, a vásárlás pillanatában minden lényeges információt ismer a termékről. Ilyenkor nyílt értékesítésről beszélhetünk. Korlátolt értékesítés (*opaque selling*) esetén a vevőnek a termékről korlátolt információi vannak és a részletek csak a vásárlás után lesznek elérhetők. Például repülőút esetén előre ismert az induló illetve érkező állomás és az ár, viszont csak a foglalás véglegesítése után derül ki, hogy melyik társaság, melyik járatán, hányszor kell átszállni, hogy milyen egyéb szolgáltatásokat tartalmaz az ár. Ilyen típusú értékesítést végez pl. a *hotwire.com* vagy a *cheaptickets.com* de számos más vállalat is. Korábban (Jerath, Netessine, & Veeraraghavan, 2007.) vizsgálták a korlátolt információjú értékesítés hatékonyságát a *last-minute* értékesítéssel szemben. Ez alapján a vállalatok magas igény esetén jobban járnak a korlátolt információjú csatornákon történő értékesítéssel. Olyan esetekben, amikor az igények számában kevés bizonytalanság van a termékek Last-Minute értékesítése, a termék fokozatos elértéktelenedéséhez vezet, míg a Korlátolt Információs csatornákon történő értékesítés megkíméli a terméket ettől, és nem torzítja el a valós ár megítélését a vásárlók részéről. Last-minute értékesítés viszont olyankor célravezetőbb, amikor a versenyző vállalatok termékei között csekély differenciálódás tapasztalható, viszont a vállalat termékeinek vásárlói értékelése magas.

# 4 Kapacitáselosztás

## 4.1 Egyszerű kapacitáselosztás

Probléma tekinthető úgy mint a meglévő kapacitás elosztása egymással versengő megrendelések között. A beérkező igényeket (megrendeléseket, foglalásokat) amelyek valamely osztályra szolnak, vagy elfogadjuk, vagy nem. Egy alacsonyabb hozamot termelő osztályra érkező megrendelést visszautasítható egy későbbi, lehetséges, magasabb hozamot termelő osztályra irányuló megrendelés reményében. A megrendelés, foglalás elutasításának számos negatív hozadéka van, amelyeket mind figyelembe kell venni. Ilyenek például a gyár, szálloda megítélése, vevő, vendég elégedettsége, amely későbbi megrendelések, foglalások esetén fontos. Elképzelhetőek olyan rendszeres megrendelések, foglalások alacsonyabb osztályokra, amelyek akkor sem utasíthatók vissza, ha egy konkrét időpontban magasabb osztályú megrendelésünk, foglalásunk is érkezik, hiszen a hosszú távon megbízhatóan hozamot, jövedelmet termelő megrendelést, foglalást nem éri meg megszakítani.

**Feladat:** optimálisan kiosztani a kapacitást az igények különböző osztályai között, ha minden igény egyetlen erőforrás elem szükségletű (egy utat foglal le, egy szobát egy éjszakára, stb.). A másik lehetőség, hogy egy igény teljesítéséhez több kapacitás egységre is szükség lesz (pl. átszállásos repülő út, több éjszaka foglalása stb.)

A terméket $n$ különböző formában, különböző osztályoknak árusítjuk, ugyanazon kapacitást, érőforrást felhasználva. Így ezek az osztályok ugyanazt azt erőforrást foglalják le. A repülőgép társaságok esetében ezek különböző diszkont osztályokat jelentenek, amelyek különböző korlátokkal rendelkeznek.

A vásárlók szegmentáltsága alapján két esetet különböztetünk meg. Egyik esetben azt feltételezzük, hogy minden vásárlónak megfelel egy dedikált osztály, az osztályok között nincsen átfedés, azaz egy vásárló, ha vásárol, akkor csakis egy osztályból vásárolhat. A vásárlók teljesen szegmentáltak, szétválaszthatók. A másik esetben az osztályok nem különülnek el ennyire, nem teljes a szegmentáltság.

A rendelkezésre álló eszközök a következők:

### 4.1.1 Foglalási határok, korlátok.

Minden értékesítési osztályhoz meghatározható, hogy maximálisan mekkora kapacitás rendelhető az adott osztály igényeinek teljesítésére, adott időben.

A foglalási határokat kétféleképpen lehet meghatározni.

**Partícionált foglalási osztály határok (*particioned booking limits*):** a particionált határok a kapacitást oly módon osztják kapacitás osztályokra, hogy minden egyes foglalási osztálynak egy kapacitás osztály feleljen meg.

**Egymásba illesztett foglalási osztály határok (*nested booking limits*):** ebben az esetben az egyes foglalási osztályok számára elérhető kapacitás fedi egymást, nem úgy mint az előző esetben. Azaz minden osztály számára elérhető az alacsonyabb osztályok kapacitása is. Tehát ebben az esetben azt határozzuk meg, hogy az összes kapacitásból mennyi legyen elérhető egy adott osztály, valamint a nála magasabb osztályok számára együttesen. Az egyes osztályok valamilyen szempont alapján tehát rangsorolva vannak, általában az alapján, hogy melyiknek mekkora a profithozama. Ezek a korlátok, a legmagasabb osztályból kiindulóan, nem csökkenőek. Az egymásba illesztett foglalási korlátok megakadályozzák annak a nem kívánt esetnek az előfordulását, amikor már nincsen elérhető kapacitás egy magasabb osztályra, míg egy nála alacsonyabbra igen. Éppen ennek következtében ez a módszer sokkal gyakrabban használt

### 4.1.2 Védett kapacitások

Meghatározható egy kapacitás mennyiség, amely az adott osztály, vagy osztályok számára védett. Ennek módja ugyancsak partícionált, vagy egymásba illesztett lehet. A partícionált védett kapacitás ugyanazt a korlátot jelenti, mint a partícionált foglalási határ.

Általános esetben egy beérkező igényt akkor elfogadható, ha van rá kapacitás, és nem értük el az osztályának kapacitás határát. Ha elfogadjuk, ez a kapacitás határ eggyel csökken. Ugyanakkor ismert egy másik módszer is amikor nem csak a foglalásnak megfelelő osztály kapacitása csökken, hanem minden nála alacsonyabban rangsorolt osztályé is.

### 4.1.3 Árajánlat módszer

Az árajánlat módszer egy küszöb árat határoz meg, amely függhet a még fel nem használt kapacitás mennyiségétől, vagy az időtől. Egy beérkező foglalás akkor elfogadható, ha a hozama nagyobb, mint az előzőleg meghatározott küszöb érték, és vissza kell utasítani, ha a küszöb alatt van. Ugyan ennek a módszernek a megvalósítása a legkönnyebb, egyetlen érték tárolására van szükség, de minden egyes értékesítés után frissíteni kell a küszöb értéket.

### 4.1.4 Kiosztás költsége (Foglalás költsége, *displacement cost*)

Egy beérkező igényhez akkor rendeljük hozzá a szükséges kapacitást, ha a foglalás hozama nagyobb, mint a kiosztandó kapacitás értéke. A kiosztandó kapacitás értéke egyenlő azzal a veszteséggel, ami abból ered, hogy a kapacitást most használjuk fel, mintsem egy későbbi időpontbeli használatra tartanánk.

Tehát a kiosztás költségének meghatározására egy $V(x)$ függvényt használunk, amely az optimális esetben várható hozam, a még megmaradt kapacitás függvényében. A kiosztási költség ebben az esetben $V(x) - V(x-1)$.

### 4.1.5 Statikus modell

A statikus modell a következőket feltételezi

- a különböző osztályokra érkező igények időintervallumai egymást nem fedik. Azaz amíg egy adott osztály árusítása folyik, addig más osztályra nem érkezik be új igény. Ez sokszor nem fedi teljesen a valóságot, azonban például a repülőgépjáratok esetében nagyon jól közelíti a valóságot, ugyanis általában addig nincs igény magasabb árú helyre, amíg a diszkont jegyek értékesítése folyik

- az egyes osztályok iránti igények páronként független valószínűségi változók

- egy adott osztály iránti igény nem függ a kapacitásszabályozásoktól, azaz, hogy más osztályok elérhetőek-e.

- egy összesített igényről kell eldönteni, hogy annak mekkora részét fogadjuk el, és mekkorát utasítsunk vissza, miközben a valóságban az igények szakaszosan érkeznek be.

- csoportos foglalásokat vagy nem enged meg, vagy megenged, de azt is megengedi, hogy esetleg csak a csoport egy része legyen kiszolgálva, miközben másik része visszautasításra kerül.

- kockázat semlegesség.

### 4.1.6 Littlewood két osztályos modellje.

A két osztály: $C_1, C_2$ , értékük (áruk): $p_1, p_2, p_{1>}p_2$. $C_2$ osztály iránti igények érkeznek előbb. Összesen $C$ kapacitás áll rendelkezésre. Ismert, hogy a $C_1$ iránti igény $D_1$, eloszlása $F_1$.

A feladatunk eldönteni, hogy mennyi 2. osztályú megrendelést fogadjunk el, mielőtt a $C_2$ osztály értékesítését bezárjuk. Ennek eldöntéséhez a 2. osztály iránti igények száma, eloszlása lényegtelen.

Adott időpontban, amikor még $x$ kapacitásunk van felhasználatlanul, beérkezik egy $C_2$-es igény. Az igény elfogadásából $p_2$ bevételünk származik. Ha nem fogadjuk el, azaz ha ebben a pillanatban bezárjuk a $C_2$ osztályt, akkor abban az esetben fogunk az $x$.-ik kapacitás egységért $p_1$ bevételt realizálni, ha $D_1 \geq x$. Azaz az $x$. kapacitás egység várható bevétele $p_1 P(D_1 \geq x)$.

Tehát addig fogadunk el $C_2$-es igényeket, amíg $p_2 \geq p_1 P(D_1 \geq x)$

A jobb oldal $x$-ben csökkenő, azaz minél nagyobb az $x$, annál kisebb a valószínűsége, hogy $D_1 \geq x$.

Ezért $\exists y^*$, úgy hogy $C_2$ igényt akkor fogadunk el csak ha

$$x \geq y^*, \qquad p_2 < p_1 P(D_1 \geq y^*) \ \textit{és} \ p_2 \geq p_1 P(D_1 \geq y^* + 1)$$

Ha $F_1(x)$ folytonos akkor $p_2 = p_1 P(D_1 > y^*) \ \Leftrightarrow \ y^* = F_1^{-1}\left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right)$

Ez utóbbi Littlewood szabályként is ismert.

Hasonló módon meghatározható a $b^* = C - y^*$ foglalási korlát a $C_2$ osztályra.

Ez alapján a következő ár-ajánlat szabály (*bid-price control*) állítható fel:

$$\pi(x) = p_1 P(D_1 \geq x)$$

### 4.1.7 Több osztályos modell

Osztályaink: $C_1, C_2, \dots, C_n$

Osztályok ára: $p_1, p_2, \dots, p_n, \ \ p_1 > p_2 > \cdots > p_n$

$C_n$ osztály iránti igények érkeznek előbb, a teljes kapacitásunk pedig $C$

$C_{\mathrm{i}}$ iránti igények $D_{\mathrm{i}}$, eloszlása $F_{\mathrm{i}}$. Ebben az esetben az $n$. osztály iránti igények eloszlása lényegtelen. Az igények legelőbb a $C_n$ (a legalacsonyabb bevételt termelő) osztály iránt érkeznek, majd a $C_{n-1}$ stb. Ez alapján meghatározhatunk $n$ szakaszt. A $j$. Szakaszban a $C_j$ osztály az aktív, ilyen típusú igényeket fogadunk.

Minden $j$ szakasz kezdetén a $D_j, D_{j-1}, \dots, D_1$ még nem következett be.

$V_j(x)$ –el jelöljük a $j$. szakasz kezdetén $x$ hátralévő kapacitásegység esetén az optimális esetben várható hozamot. Az $u$ foglalási korlátot a $j$. szakaszban úgy kell meghatározni, hogy az a $j$. Szakasz bevételét + a megmaradó kapacitás értékét maximalizálja, azaz

$$p_j u + V_{j-1}(x-u)$$

$$0 \le u \le \min\{D_j, x\}$$

mivel $u$-nak kisebbnek kell lennie mint a $D_j$, azaz a $C_j$ osztály iránti igények száma.

***Bellmann egyenlet:***

$$V_j(x) = \mathrm{E}\left[\max_{0\le u\le \min\{D_j,x\}}\{p_j u + V_{j-1}(x-u)\}\right] \tag{4.1}$$

$$V_0(x) = 0, \qquad x = 0,1,\dots,C$$

peremfeltételekkel

***Diszkrét igények esetén***

$$\Delta V_j(x) = V_j(x) - V_{j-1}(x)$$

$\Delta V_j(x)$ – a várható határhozama a $j$. szakaszban, az $x$-edik kapacitásegységnek.

Tétel:

$$\Delta V_j(x+1) \le \Delta V_j(x)$$

$$\Delta V_{j+1}(x) \ge \Delta V_j(x)$$

Azaz egy adott $j$ szakaszban a határbevétel csökken a kapacitás növekedésével, valamint egy adott $x$ kapacitásszint mellett a határbevétel nagyobb ha több szakasz van még hátra.

$\Delta V_j(x)$ definíciója, valamint (4.1) alapján

$$V_{j+1}(x) = V_j(x) + \mathrm{E}\left[\max_{0\le u\le \min\{D_j,x\}}\left\{\sum_{z=1}^{u} p_{j+1} - \Delta V_j(x+1-z)\right\}\right]$$

Mivel $\Delta V_j(x)$ csökkenő$x$-ben, $p_{j+1} - \Delta V_j(x+1-z)$ csökkenő $z$ -ben, így optimális addig hozzáadni új tagokat, amíg $p_{j+1} - \Delta V_j(x+1-z)$ negatívvá nem válik, vagy a $\min\{D_j, x\}$-et nem érjük el.

Az optimális foglalási korlátok $y_j^*$-ra

$$y_j^* \equiv max\{x: p_{j+1} < \Delta V_j(x)\}$$

valamint

$$y_n^* = C$$

$u^*$ optimális kontroll a $j+1$-edik szakaszban $u^*$u*(j+1,x,D$_{j+1}$)=min{(x-y$_j$*)$^+$,D$_{j+1}$}

$$u^*(j+1, x, D_{j+1}) = min\left\{\left(x - y_j^*\right)^+, D_{j+1}\right\}$$

hasonlóan használhatunk foglalási korlátokat is $b_j = C - y_{j-1}^*$

*Folytonos igények esetén*

A lényeges eltérés a folytonos és a diszkrét modell között, hogy míg a diszkrét esetben $\Delta V_j(x)$, addig a folytonos esetben $V_j(x)$, $x$ szerinti deriváltjával kell számolni. De ez továbbra is a kapacitás határhozadékaként értelmezhető (*marginal expected revenue*).

Továbbra is igaz, hogy a határhozadék $x$-ben csökken, így a $j+1$-edik szakaszban optimális kontrol az $u$ növelése, azaz újabb igények elfogadása addig amíg

$$p_{j+1} \geq \frac{\partial}{\partial x} V_j(x-u)$$

És visszautasítjuk az igényeket ha ezt a korlátot, vagy a $D_{j+1}$ elérjük.

Ez alapján az optimális foglalási korlátok a következő képlettel fejezhetők ki:

$$y_j^* \equiv \max\left\{x: p_{j+1} \geq \frac{\partial}{\partial x} V_j(x-u)\right\}, \qquad j = 1, \dots, n-1$$

Egy tetszőleges $\boldsymbol{y}^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)$ foglalási korlát vektorhoz, valamint $\boldsymbol{D} = (D_1, D_2, \dots, D_n)$ igény vektorhoz értelmezzük a

$$B_j(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{D}) \equiv \{D_1 > y_1, D_1 + D_2 > y_2, \dots, D_1 + \cdots D_j > y_j\}, \qquad j = 1, \dots, n-1$$

eseményeket.

$B_j(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{D})$ tehát az az esemény, hogy az $1, \dots, j$ szakaszokban érkező igények túlhaladják a foglalási korlátjukat

Ezért $\boldsymbol{y}^*$ optimalitásához szükséges és elégséges feltétel, hogy teljesítse a következő $n-1$ egyenlőséget

$$P\left(B_j(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{D})\right) = \frac{p_{j+1}}{p_1}, \qquad j = 1,2, \dots, n-1$$

Ez $n = 2$ esetén Littlewood 2-osztályra vonatkoztatott szabálya pontosan.

$$B_j(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{D}) = B_{j-1}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{D}) \cap \{D_1 + \cdots D_j > y_j\}$$

miatt, ha $B_j(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{D})$ esemény bekövetkeztekor $B_{j-1}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{D})$ esemény is bekövetkezik, valamint ha $y_j = y_{j-1}$ akkor $B_j(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{D}) = B_{j-1}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{D})$.

Tehát ha $p_j < p_{j-1}$ akkor $y_j^* > y_{j-1}^*$

Azaz az optimális foglalási korlátok nőnek $j$-ben ha a bevételek csökkennek $j$-ben.

Az egzakt megoldás kiszámítására két alapvető módszer ismert.

### 4.1.8 Egzakt megoldás kiszámítása dinamikus programozással.

A $V_j(x)$ értéke a következő rekurzió segítségével számítható ki a $V_{j-1}(x)$-ből valamint $y_{j-1}^*$ optimális foglalási korlát segítségével

$$V_j(x) = E\left[p_j min\left\{D_j, \left(x - y_{j-1}^*\right)^+\right\} + V_{j-1}\left(x - min\left\{D_j, \left(x - y_{j-1}^*\right)^+\right\}\right)\right]$$

ahol $y_0^* = 0$

### 4.1.9 Monte Carlo integrációs módszer

Leginkább a folytonos igények esetén hasznos módszer. Egy $K$ elegendően nagy számú $d^k = (d_1^k, d_2^k, \ldots, d_j^k)$ megrendelés vektort szimulálunk. $k = 1, \ldots, K$, az igények eloszlásának megfelelően. Ezután olyan $\boldsymbol{y}^*$ küszöb vektort keresünk, amely megközelítőleg teljesíti az

$$P\left(B_j(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{D})\right) = \frac{p_{j+1}}{p_1}, \qquad j = 1,2, \ldots, n-1$$

egyenlőséget

$$P\left(B_j(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{D})\right) = P\left(D_1 + \cdots + D_j > y_j \middle| B_{j-1}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{D})\right) P\left(B_{j-1}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{D})\right)$$

Tehát

$$P\left(D_1 + \cdots + D_j > y_j^* \middle| B_{j-1}(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{D})\right) = \frac{1}{P\left(B_{j-1}(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{D})\right)} \frac{p_{j+1}}{p_1} = \frac{p_{j+1}}{p_j}, \qquad j = 1 \ldots, n-1$$

mivel

$$P\left(B_{j-1}(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{D})\right) = \frac{p_j}{p_1}$$

Ez alapján felépíthető a következő algoritmus:

Definiáljuk az $S_j^k = d_1^k + d_2^k + \cdots + d_j^k$ részösszegeket a generált $K$ db. $d^k = (d_1^k, d_2^k, \ldots, d_j^k)$ vektorból minden $k = 1, \ldots, K$ és $j = 1, \ldots, n-1$ értékre

Legyen $j = 1$ valamint $\mathcal{K} := \{1, \ldots, K\}$

*While* $j < n-1$

Rendezzük az $\boldsymbol{S}^k$ vektorokat a $j$ -ik komponensük $S_j^k$ értéke alapján. $[l]$ jelölje az $l$ -ik elemet ebben a rendezett listában, azaz $S_j^{[1]} \leq S_j^{[2]} \leq \cdots \leq S_j^{[|K|]}$

$l^* := \left\lfloor \frac{p_{j+1}}{p_j} |\mathcal{K}| \right\rfloor$

$y_j = \frac{1}{2}\left(S_j^{[l^*]} + S_j^{[l^*+1]}\right)$

$\mathcal{K} := \left\{k \in \mathcal{K} : S_j^k > y_j\right\}$

$j := j + 1$

*Endwhile*

### 4.1.10 Heurisztikák

Az optimális foglalási korlátok egzakt kiszámítása sem bonyolult, mégis a gyakorlatban sokkal inkább elterjedtek különböző heurisztikák használata. Ennek legfőbb oka, az lehet, hogy könnyebben programozhatók, gyorsabbak, és legtöbbször az optimálistól csak csekély mértékben eltérő eredményt szolgáltatnak.

### 4.1.11 EMSR-a (*expected marginal seat revenue-version a*)

Az EMSR-a heurisztika alapötlete, hogy az egymás utáni párokra tekintett Littlewood szabály által szolgáltatott korlátok összegével becsüli a foglalási korlátokat.

$j+1$-ik szakaszban $y_j$-t szeretnénk meghatározni, azaz a $j$ -ik és afeletti osztályok számára a foglalási korlátot.

Tekintsük a $k$ -ik osztályt a még hátra lévő $j, j-1, \dots, 1$ osztályok közül és hasonlítsuk a $k$ -ik osztályt a $j+1$-ik osztállyal, valamint határozzuk meg az $y_k^{j+1}$ kapacitásfoglalást a $k$-ik osztály számára, Littlewood szabálya alapján.

$$P\left(D_k > y_k^{j+1}\right) = \frac{p_{j+1}}{p_k}$$

Ez alapján a $j$ és magasabb osztályok számára lefoglalt kapacitáskorlát

$$y_j = \sum_{k=1}^{j} y_k^{j+1}$$

### 4.1.12 EMSR-b (*expected marginal seat revenue-version b*)

$j+1$-ik szakaszban $y_j$-t szeretnénk meghatározni. A $j, j-1, \dots, 1$ osztályok aggregát jövőbeli igénye $S_j = \sum_{k=1}^{j} D_k$, valamint a súlyozott jövőbeli hozama az $1, \dots, j$ osztályoknak

$$\bar{p}_j = \frac{\sum_{k=1}^{j} p_k E[D_k]}{\sum_{k=1}^{j} E[D_k]} \qquad (4.2)$$

Ekkor az EMSR-b által a $j$-ik és efölötti osztályok számára lefoglalt kapacitás, $y_j$-t, Littlewood szabálya szerint úgy kell megválasztani, hogy

$$P(S_j > y_j) = \frac{p_{j+1}}{\bar{p}_j}$$

Példa: Ha az osztályok iránt $i$ igények függetlenek, normális eloszlásúak $\mu_j$ várható értékkel valamint $\sigma_j^2$ szórással, akkor $y_j = \mu + z_\alpha \sigma^2$, ahol $\mu = \sum_{k=1}^{j} \mu_k$ és $\sigma^2 = \sum_{k=1}^{j} \sigma_k^2$, valamint $z_\alpha = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{p_{j+1}}{\bar{p}_j}\right)$, ahol $\Phi^{-1}(\mathrm{x})$ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének inverze.

### 4.1.13 DCAP (*Dynamic Capacity Apportionment Procedure*)

A sztochasztikusan érkező megrendeléseinket a megrendelt termék osztálya, a rendelés mérete valamint határideje jellemzi. Az időhorizontot $N$ periódusra bontjuk. Célunk a beérkező igények szelektív elfogadása úgy hogy a lehető legnagyobb profitra tegyünk szert. Ha pl. a $t$ időpontban $\Omega$ méretű megrendelés érkezik be $d$ határidővel akkor a procedúra a következő lépéseket hajtja végre:

Meghatározza a szükséges kapacitásokat a $t$-től $d$-ig terjedő intervallumban. Amennyiben a megrendelés a legjövedelmezőbb osztályra szól, akkor minden elérhető kapacitás felhasználható, azonban, ha alacsonyabb osztályú a megrendelés a procedúra meghatározza a megrendelés teljesítéséhez felhasználható erőforrás mennyiségét az összes elérhető erőforrás közül.

A második lépésben az algoritmus eldönti, hogy elfogadjuk-e vagy nem a megrendelést. A megrendelést akkor fogadjuk el, ha a teljesítéséhez felhasználható erőforrás minden $t$-től $d$-ig terjedő periódusban legalább $\Omega$.

Az algoritmus legfontosabb része annak eldöntése hogy mekkora kapacitást foglaljunk le a későbbi, magasabb hozamú megrendeléseknek.

$j$ osztályú igény a DCAP algoritmus $q_{j-1}^t$egységet foglal le az $1, \dots, j-1$ osztályok számára. A felhasználható kapacitás mennyiség a j osztály számára tehát $(q_0^{\mathrm{t}} - q_{j-1}^t)$. Az algoritmus célja a lehető legjobb ilyen $q_{j-1}^t$ -t megtalálni. Legyen:

$X_{it}^d$ - összes igény mennyisége $i$ osztály iránt a $[t, d]$ intervallumban

$P_i$ – i termék profit hozama

$\frac{1}{\theta_{it}^d}$ – az összes igény hozamának várható értéke a $[t, d]$ intervallumban

$\bar{P}_{[1,j-1]} = \frac{\sum_{i=1}^{j-1} \frac{P_i}{\theta_{it}^d}}{\sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{\theta_{it}^d}}$ és $\bar{P}_{[j,L]} = \frac{\sum_{i=j}^{L} \frac{P_i}{\theta_{it}^d}}{\sum_{i=j}^{L} \frac{1}{\theta_{it}^d}}$ az $1, \dots, j-1$ valamint $j, \dots, L$ csoportok igényszámmal súlyozott átlagos profithozama.

$p_t^d = P(\sum_{i=j}^{L} X_{it}^d > (q_0^{\mathrm{t}} - q_{j-1}^t))$ - annak a valószínűsége, hogy a $j, \dots, L$ osztályok iránti összes igény [$t$,$d$] intervallumban nagyobb mint a nem védett kapacitás.

$\beta_t^d = P(\sum_{i=1}^{j-1} X_{it}^d > q_{j-1}^t)$ - annak a valószínűsége, hogy az $1, \dots, j-1$ osztályok iránti igények a $[t, d]$ intervallumban meghaladja a védett kapacitás mennyiséget.

$w = \frac{\sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{\theta_{it}^{d}}}{\sum_{i=1}^{L} \frac{1}{\theta_{it}^{d}}}$ - a $q_{j-1}^{t}$ védett kapacitáson felül a nem védett kapacitásból, az $1, \dots, j-1$ osztályok iránti igények kiszolgálására felhasznált kapacitás.

Négy eset lehetséges a beérkező igények mennyisége alapján:

- mind az alacsonyabb, mint a magasabb osztályok iránti igények kevesebbek mint a számunkra elérhető kapacitás

$\sum_{i=j}^{L} X_{it}^{d} \le q_0^{\mathrm{t}} - q_{j-1}^{t}$ és $\sum_{i=1}^{j-1} X_{it}^{d} \le q_{j-1}^{t}$, a várható profit pedig

$$\left(1 - p_t^d\right)(1 - \beta_t^d) \sum_{i=1}^{L} P_i X_{it}^{d}$$

- a magasabb osztályok iránti igények meghaladják a védett kapacitás mennyiségét, de az alacsonyabb osztályok iránti igény kevesebb mint a nem védett kapacitás mennyisége

$\sum_{i=j}^{L} X_{it}^{d} \le q_0^{\mathrm{t}} - q_{j-1}^{t}$ és $\sum_{i=1}^{j-1} X_{it}^{d} > q_{j-1}^{t}$, a várható profit pedig

$$\left(1 - p_t^d\right)\beta_t^d\left(\bar{P}_{[1,j-1]}\left[q_{j-1}^{t} + O_{[1,j-1]}^{a}\right] + \bar{P}_{[j,L]} O_{[j,L]}^{a}\right)$$

$O_{[1,j-1]}^{a}$ - a nem védett kapacitásból az $1, \dots, j-1$ osztályok igényeinek teljesítésére felhasznált kapacitásmennyiség

$O_{[j,L]}^{a}$ - a nem védett kapacitásból az $j, \dots, L$ osztályok igényeinek teljesítésére felhasznált kapacitásmennyiség

- a magasabb osztályok iránti igények nem haladják meg a védett kapacitás mennyiségét, de az alacsonyabb osztályok iránti igények meghaladják a nem védett kapacitás mennyiségét

$\sum_{i=j}^{L} X_{it}^{d} > q_0^{\mathrm{t}} - q_{j-1}^{t}$ és $\sum_{i=1}^{j-1} X_{it}^{d} \le q_{j-1}^{t}$, a várható profit pedig

$$p_t^d\left(1 - \beta_t^d\right)\left(\sum_{i=1}^{j-1} P_i X_{it}^{d} + \bar{P}_{[j,L]}\left[q_0^{\mathrm{t}} - q_{j-1}^{t}\right]\right)$$

- mind a magasabb, mint az alacsonyabb osztályok iránti igények meghaladják a számukra elérhető kapacitás mennyiségét.

$\sum_{i=j}^{L} X_{it}^{d} > q_0^{\mathrm{t}} - q_{j-1}^{t}$ és $\sum_{i=1}^{j-1} X_{it}^{d} > q_{j-1}^{t}$, a várható profit pedig

$$p_t^d \beta_t^d \left\{\bar{P}_{[1,j-1]}\left[q_{j-1}^{t} + w\left(q_0^{\mathrm{t}} - q_{j-1}^{t}\right)\right] + \bar{P}_{[j,L]}\left[q_0^{\mathrm{t}} - q_{j-1}^{t}\right](1 - w)\right\}$$

Hasonlóan kapjuk a várható profithozamot abban az esetben ha $(q_{j-1}^{t} + 1)$ kapacitásegységet foglalunk le. A várható profithozam változása:

$$\Delta E[V_t^d] = p_t^d \cdot [\beta_t^d(1-w)\left[\bar{P}_{[1,j-1]} - \bar{P}_{[j,L]}\right] - (1-\beta_t^d)\bar{P}_{[j,L]}] \tag{4.3}$$

$q_{j-1}^t$ -t mindaddig érdemes növelni amíg $\Delta E[V_t^d] > 0$. Az optimális $q_{j-1}^t$ értéket a $\Delta E[V_t^d] = 0$ egyenlet megoldásából kapjuk. Átrendezve az (4.3) összefüggést,

$$\beta_t^d = P\left(\sum_{i=1}^{j-1} X_{it}^d > q_{j-1}^{*t}\right) = \frac{\bar{P}_{[j,L]}}{\bar{P}_{[1,j-1]} - w[\bar{P}_{[1,j-1]} - \bar{P}_{[j,L]}]} \tag{4.4}$$

adja a lokális maximumot a $[t,d]$ intervallumon.

$$X_{it}^d = \sum_{j=1}^{N_i} Y_{ij} \geq 0$$

ahol $N_i$ megrendelések száma az $i$ osztályból, $Y_{ij}$ az $i$ termék $j$-ik megrendelésének mennyisége független azonos eloszlású valószínűségi változók. ■

### 4.1.14 Csoportos foglalás

Csoportos foglalások tekintetében két eset merül fel. Amennyiben a csoportosan érkező kapacitás igények részlegesen is teljesíthetők, akkor a korábban ismertetett modell továbbra is alkalmazható. Ez az az eset, amikor a vásárló hajlandó $m < n$ egységet is megvásárolni, ahol $m$ a szabad kapacitás az igény érkezésekor, míg $n$ az igény.

A másik eset, amikor a csoportos foglalási igények csak egészben teljesíthetők. Azaz, a lefoglalt kapacitás vagy $n$ vagy 0. Ebben az esetben az igazi nehézséget az okozza, hogy a célfüggvény konvexitása nem garantálható. A határnövekedés negatív is lehet. Az optimális kapacitásfoglalások meghatározása egy ládapakolási feladat, amely NP-nehéz. Azonban ha az igények nagy hányada érkezik kis csoportokra, valamint a kapacitás elegendően nagy, a csoportos foglalásokat nem figyelő modell jó közelítésként használható, amit a legtöbb hozammenedzsment rendszer a gyakorlatban is alkalmaz.

### 4.1.15 Dinamikus igény érkezési modell

A dinamikus modellek esetében az egyes osztályok iránti igények nem a hozamuk szerint növekvő sorrendben érkeznek. Az osztályok iránti igények viszont továbbra is függetlenek egymástól és független a kapacitáskontrolltól.

A dinamikus modellek esetén már nincsen egyértelmű megfeleltetés az osztályok és a szakaszok között. $n$ osztályunk van, $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n$ $T$ periódust nézünk, ezeket $t$-vel indexeljük, $t = 1, \ldots, T$. Feltételezzük, hogy minden periódusban maximum 1 igény érkezik. Ezt az időszalag megfelelő számú felosztásával, elérhető. Jelölje $\lambda_j(t)$ annak a valószínűségét, hogy a $t$ periódusban érkezik $j$ osztályra igény.

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t) \leq 1$$

A periódusok hossza nem feltétlenül kell egyforma legyen, a foglalások kezdeti periódusai hosszabbak, míg a csúcsidőszakban sokkal rövidebbek. Az igények érkezésének valószínűsége függ $t$-től.

$x$ jelöli a szabad kapacitást.$V_t(x)$ a célfüggvényt. $R(t)$ egy véletlen változó,

$$R(t) = \begin{cases} p_j, & a\ t \text{ periódusban érkezi igény } j \text{ osztályra} \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

$P\big(R(t) = p_j\big) = \lambda_j(t)$. Legyen

$$u = \begin{cases} 1, & \text{ha volt igény amit elfogadtunk} \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

A célunk maximalizálni az aktuális szakasz és a hátralévő szakasz bevételének összegét, azaz $R(t)u + V_{t+1}(x-u)$

A Bellman egyenlet alapján:

$$V_t(x) = E\left[\max_{u\in\{0,1\}}\{R(t)u + V_{t+1}(x-u)\}\right] = V_{t+1}(x) + E\left[\max_{u\in\{0,1\}}\{\big(R(t) - \Delta V_{t+1}(x)\big)u\}\right],$$

ahol $\Delta V_{t+1}(x) = V_{t+1}(x) - V_{t+1}(x-1)$ a kapacitás határhozama a $t+1$ periódusban,valamint $V_{T+1}(x) = 0, x = 0,1, \dots, C$ és $V_t(0) = 0, t = 1, \dots, T$

Tehát ha egy igény érkezik a $j$. osztály iránt, azaz $R(t) = p_j$, akkor optimális elfogadni az igényt akkor és csakis akkor, ha $p_j > \Delta V_{t+1}(x)$. Tehát azokat az igények amelyek hozama meghaladja a $\Delta V_t(x)$-et elfogadjuk, a többit pedig nem.

**Tétel**: $\Delta V_t(x)$-re igaz $\forall x, t$:

*(i)* $\Delta V_t(x+1) \leq \Delta V_t(x)$

*(ii)* $\Delta V_{t+1}(x) \leq \Delta V_t(x)$

A védett kapacitás mennyiségek a $t$ periódustól függően meghatározhatók:

$$y_j^*(t) = \max\{x : p_{j+1} < \Delta V_{t+1}(x)\}, \qquad j = 1,2, \dots, n-1$$

A foglalási korlátok pedig ez alapján:

$$b_j^*(t) \equiv C - y_{j-1}^*(t), \qquad j = 2, \dots, n$$

A gyakorlatban a védett kapacitásmennyiségek meghatározása bizonyos időközönként frissül, de ez még mindig közel optimális eredményhez vezet.

Továbbá a védett kapacitások a következő rekurziós képlettel számolhatók ki a gyakorlatban:

$$V_t(x) = V_{t+1}(x) + E\left[\big(R(t) - \Delta V_{t+1}(x)\big)^+\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t) \left(p_j - \Delta V_{t+1}(x)\right)^+, \qquad t = 1, \dots, T$$

valamint $V_{T+1}(x) = 0, \forall x$

### 4.1.16 Átfedő csoportok, vásárlói szokások figyelembe vétele

Az eddigiek során azt feltételeztük, hogy nem befolyásolja az igényeket, az hogy mely osztályok elérhetőek, nyitottak. Buy-up-nak hívjuk azt az esetet amikor egy diszkont osztály értékesítése már befejeződött a vásárló hajlandó egy magasabb osztályból vásárolni.

### 4.1.17 Buy-up

A legegyszerűbb két osztályos modellben Littlewood szabálya alapján 2. osztályból igényeket akkor és csakis akkor fogadunk el, ha $p_2 \geq p_1 P(D_1 > x)$. Ha azonban a 2. osztály egy vásárlója abban az esetben ha a 2. osztály zárva van, q valószínűséggel az 1. osztályból fog vásárolni, akkor az igény elfogadásának hozama nem változik, de elutasítás esetén $p_1 - p_1 P(D_1 > x)$ bevételre teszünk szert.

Tehát optimális elfogadni a 2. osztály iránti igényeket ha, $p_2 - p_1 P(D_1 > x) \geq q p_1 \big(1 - P(D_1 > x)\big)$ azaz ha $p_2 \geq (1-q) p_1 P(D_1 > x) + q p_1$ .

Ebben a modellben nagyobb valószínűséggel fogunk visszautasítani egy 2. osztály iránti igényt, mint az egyszerű két osztályos modellben, mivel nagyobb a valószínűsége, hogy egy adott kapacitást 1. osztályúként tudjuk értékesíteni. A probléma ezzel a modellel, hogy nem lehet pontosan kibővíteni több osztályos modellé, mivel több osztály esetén a vásárlónak egy multinominális döntést kell hoznia, a nyitott osztályok függvényében, a kétosztályos modellben pedig csak egy bináris döntést. De heurisztikaként kibővíthető például az EMSR-a illetve EMSR-b esetében is közelítő megoldásként.

$$p_{j+1} = (1 - q_{j+1}) \bar{p}_j P\big(S_j > y_j\big) + q_{j+1} \hat{p}_{j+1}$$

ahol $q_{j+1}$ annak a valószínűsége, hogy a $j+1$ osztály valamely vásárlója a $j, j-1, \dots, 1$ osztályokból vásárol, $\bar{p}_j$ pedig ezen osztályok hozamának súlyozott átlaga az (4.2) alapján, $\hat{p}_{j+1} > p_{j+1}$ pedig egy becslése az előző esetek átlagos hozamának. Például $\hat{p}_{j+1} = p_j$ abban az esetben, ha azt feltételezzük, hogy a vásárlók a legalacsonyabb olyan osztályból fognak vásárolni, amely osztálya a sajátjukénál magasabb. A hatása ennek az EMSR-b szabályra, hogy hamarabb fogjuk bezárni az egyes osztályok értékesítését, mint a hagyományos EMSR-b módszer alkalmazása esetén.

### 4.1.18 A diszkrét választások módszere

Ahogy az előző dinamikus modellben itt is diszkrét idővel számolunk. Minden periódusban legtöbb egy igény érkezik, $\lambda$ annak a valószínűsége, hogy érkezik igény, és feltesszük, hogy ez minden $t$ periódusra azonos. Az osztályok száma $n$, és $\mathcal{N} = \{1 \dots, n\}$ az összes osztály halmaza. $p_j$ a $j$. osztály ára, és az általánosság megszorítása nélkül feltesszük, hogy $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n \geq 0$. $p_0 = 0$ a nem vásárlás ára, azaz, ha a vásárló az elérhető osztályok egyikéből sem vásárol.

Minden $t$ periódusban az eladó kiválaszt egy $S_t \subseteq \mathcal{N}$ eladásra kínált halmazt. Ekkor annak a valószínűsége, hogy a vásárló a $j \in S_t$ osztályt választja $P_j(S_t)$. $P_0(S_t)$ pedig a nem vásárlás valószínűsége.

Tehát annak a valószínűsége, hogy $j$ osztályból adunk el $\lambda P_j(S_t)$ és annak a valószínűsége, hogy nincs eladás $\lambda P_0(S_t) + (1 - \lambda)$ Ez utóbbi összeg a nem vásárlás, és az igény beérkezés hiányának valószínűségeinek összege. $\forall S \subseteq \mathcal{N}$ -re

$$P_j(S) \geq 0, \forall j \in S$$

$$\sum_{j \in S} P_j(S) + P_0(S) = 1$$

Legyen $C$ a teljes kapacitás, $T$ a periódusok száma, $t$ az aktuális periódus, $x$ a még nem allokált kapacitás egységek száma. $V_t(x)$ legyen a maximálisan elérhető várható hozama a $t, t+1, \dots, T$ feltéve hogy $x$ szabad kapacitás egység van, valamint $t$ az aktuális periódus.

Bellman egyenlet alapján:

$$V_t(x) = \max_{S \subseteq \mathcal{N}} \left\{ \sum_{j \in S} \lambda P_j(S) \left( p_j + V_{t+1}(x-1) \right) + (\lambda P_0(S) + 1 - \lambda) V_{t+1}(x) \right\}$$
$$= \max_{S \subseteq \mathcal{N}} \left\{ \sum_{j \in S} \lambda P_j(S) \left( p_j - \Delta V_{t+1}(x) \right) \right\} + V_{t+1}(x)$$

$\forall S$ -re $\sum_{j \in S} P_j(S) + P_0(S) = 1$

$V_{T+1}(x) = 0, x = 0,1, \dots, C$

$V_t(0) = 0, t = 1, \dots, T$

Egy lényeges különbsége ennek a modellnek az előzőekben tárgyaltakhoz, hogy míg eddig az eladó előbb észlelte az igény osztályát és az alapján elfogadta, vagy elutasította azt, ebben a modellben az eladó előre meghatározza a nyitott osztályokat, és ha azok valamelyike iránt érkezik igény azt mindig elfogadja. Ennek oka, hogy az előzőekben a beérkező igény osztálya nem függött attól, hogy mely osztályok elérhetők, most viszont a vevő a nyitott osztályok függvényében határozza meg igényének osztályát.

$$V_t(x) = \max_{S \subseteq \mathcal{N}} \left\{ \lambda \left( R(S) - Q(S) \Delta V_{t+1}(x) \right) \right\} + V_{t+1}(x)$$

a vásárlás valószínűsége:

$$Q(S) = \sum_{j \in S} P_j(S) = 1 - P_0(S)$$

a teljes várható bevétel, az S halmaz kínálata esetén:

$$R(S) = \sum_{j \in S} P_j(S)\, p_j$$

**Definíció**: Egy $T$ halmazt hatástalannak nevezünk, ha léteznek $\alpha(S), \forall S \subseteq \mathcal{N}$ valószínűségek úgy hogy $\sum_{S \subseteq \mathcal{N}} \alpha(S) = 1$ amelyekre

$$Q(T) \geq \sum_{S \subseteq \mathcal{N}} \alpha(S) Q(S) \text{ és } R(T) < \sum_{S \subseteq \mathcal{N}} \alpha(S) R(S)$$

Hatásos ha nem hatástalan.

**Tétel:** Egy hatástalan halmaz sohasem lehet az optimális választás.

## 4.2 Kapacitáshálózat kontrol

A hozammenedzsment ezen osztályába tartoznak mindazon problémák, amikor a foglalás, vásárlás megvalósítása egy eszközcsoport kapacitásának lefoglalásával történik. Ilyen eset a légi utas szállítás átszállásos utakkal kapcsolatosan. Az útvonalaknak számos kombinációja létezik.

A légi utas szállításban a probléma, az útvonalhálózat utasszállító kapacitásának menedzselése. A termék ebben az esetben egy indulópont, végállomás páros (*origin-destination itinary fare class* ODIF) Egy szálloda esetén több napra vonatkozó egymást fedő szobafoglalások által használt kapacitás menedzselése. Amikor egy terméket csomagban értékesítünk, a csomag bármely részéhez tartozó kapacitás hiányában a vásárlás meghiúsul

### 4.2.1 Felosztott foglalási korlátok (*Partitioned Booking Limits*)

Hálózat esetén minden eszközből egy fix kapacitást rendel hozzá az egyes termékekhez, azaz, termék, eszköz párokra vannak meghatározva a foglalási korlátok. Egy megrendelést, foglalást akkor tudunk elfogadni, ha minden szükséges eszközből van még rendelkezésre álló kapacitás. Ezt a módszert gyakran az optimális kapacitáselosztás korlátjaként használják.

### 4.2.2 Virtual Nesting Control

Kapacitáshálózat esetében az egymásba ágyazott foglalási korlátok megvalósítása erőforrásonként ugyanúgy történik, mint az egy erőforrásos esetben, azonban a korlátok nem az eredeti osztályokra, hanem virtuális osztályokra szólnak. Ezek a virtuális osztályok magába csoportosítanak össze különböző osztályokat, amelyek egy adott erőforrást használnak. A terméket indexálással rendeljük hozzá virtuális osztályokhoz. Ez tulajdonképpen megfeleltet minden terméknek egy virtuális osztályt, a hálózati értéke alapján. Ezek a virtuális osztályok erőforrásonként más és más osztályokat tartalmazhatnak. Ez a megfeleltetés rendszeresen frissíthető, módosítható, ahogyan a hálózat módosul. Egy beérkező igényt akkor fogunk elfogadni, ha a szükséges erőforrások mindenikén, a megrendelés osztályának megfeleltetett virtuális osztály kapacitása merült ki.

A virtuális osztályok módszerének hátrányaként szokták felhozni, hogy bonyolult, nehezen értelmezhető a gyakorlatban az elemzők számára, az indexálás pedig csak még bizonytalanabbá teszi az adatokat. A másik oldalról pedig egy jó kompromisszumnak vélik az egyszerű kapacitás elosztási megközelítés, valamint a hálózati kapacitás elosztási megközelítés között, mely főleg a repülőgép társaságok körében közkedvelt.

### 4.2.3 Bid Price Control

Hálózati esetben az árajánlat módszerek minden erőforráshoz értelmez ajánlati árat, küszöb árat. Egy beérkező igényt akkor fogadunk el, ha annak hozama meghaladja a termék erőforrásainak ajánlati ár összegét. Ellenkező esetben visszautasítjuk. A módszer egyszerűsége abban áll, hogy nem kell minden termékre számolni, csupán az erőforrásokra kell meghatározni a küszöb árakat. A módszernek számos előnye van, egyszerű, könnyen kezelhető, gyorsan számolható, logikusan magyarázattal alátámasztható működése, valamint az optimálist jól közelítő megoldást eredményez. Ennek ellenére nem annyira elterjedtek a gyakorlatban, aminek oka talán, a megvalósításhoz szükséges technológia elterjedtségének hiánya. A küszöb árakat minden elfogyasztott kapacitásegység, valamint eltelt időegység után frissíteni kell a pontos eredmény érdekében.

### 4.2.4 Hálózati kapacitáskontroll modellje

A hálózatnak $m$ erőforrása van, és a vállalat $n$ különböző terméket értékesít. Minden termék az erőforrások egy csoportját használja, meghatározott áron és feltételek mellett kerül értékesítésre.

Legyen

$$a_{ij} = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } i \text{ erőforrást használja a } j \text{ termék} \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

$\boldsymbol{A} = \left[a_{ij}\right]$ a termék erőforrás incidencia mátrixa, $j$ termék incidencia vektora pedig $\boldsymbol{A}_j$, $\boldsymbol{A}^i$ pedig azt mondja meg, hogy melyek azok a termékek, amelyeknek az $i$ erőforrásra szükségük van. A kapacitás állapotát az $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m)$ vektor mutatja. Amennyiben $j$ termék eladásra kerül a kapacitás $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}_j$-re változik. A legegyszerűbb hálózati esetben nem vesszük figyelembe a meg nem jelenéseket, lemondásokat, csoportos foglalásokat. $T$ periódust nézünk, $t$ jelöli az aktuális időt. Feltételezzük, hogy minden periódusban legfentebb egy igény érkezik. A $t$ periódusban az igényt egy véletlen vektorral modellezzük. $\boldsymbol{P}(t) = \left(P_1(t), \dots, P_n(t)\right)$. $P_j(t) = p_j > 0$ jelentése, hogy a $j$. termékre érkezett igény, és az igényhez tartozó ár $p_j$. Ha $P_j(t) = 0$ akkor nem érkezett igény $j$. termékre. $\boldsymbol{P}(t) = 0$ ha egyáltalán nem érkezik igény a $t$ periódusban.

$\{\boldsymbol{P}(t); t \geq 1\}$ független valószínűségi vektorváltozók

Legyen $\boldsymbol{u}(t)$ a döntés vektor, ahol $u_j(t) = 1$ ha elfogadunk $j$ termék iránti igényt a $t$ periódusban és $0$ különben.

$u_j(t)$ függ a hátralévő időtől, a szabad kapacitás mennyiségétől, valamint a $p_j$ ártól.

$$u_j(t) = u_j\left(t, \boldsymbol{x}, p_j\right)$$

és így

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$$

valamint

$$Y(x) = \{u \in \{0,1\}^n : \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} \le \boldsymbol{x}\}$$

Jelölje $\boldsymbol{u}^*(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ az optimális döntést, $V_t(\boldsymbol{x})$ a még elérhető maximális hozamot, $\boldsymbol{x}$ a szabad kapacitás, $t$ időpontban. Ekkor a $V_t(\boldsymbol{x})$ a Bellman egyenlet alapján

$$V_t(\boldsymbol{x}) = E\left[\max_{\boldsymbol{u} \in U(x)} \{\boldsymbol{P}(t)^{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) + V_{t+1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{u})\}\right]$$

valamint

$$V_t(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \forall \boldsymbol{x}$$

Ez alapján az optimális kontrol $\boldsymbol{u}^*$-ra

$$\boldsymbol{u}_j^*(t, \boldsymbol{x}, p_j) = \begin{cases} 1 & p_j \ge V_{t+1}(\boldsymbol{x}) - V_{t+1}(x - \boldsymbol{A}_j), \qquad \boldsymbol{A}_j \le \boldsymbol{x} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Azaz egy $j$ termék iránti igényt akkor fogadunk el $p_j$ áron, ha egyrészt van elegendő kapacitásunk az igény teljesítéséhez, másrészt $p_j \ge V_{t+1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}_j)$. Tehát akkor érdemes elfogadnunk egy igényt ha az ára több mint a teljesítéséhez szükséges kapacitás várható hozama.

### 4.2.5 Árajánlat kontroll (*Bid Prices*)

Ha feltételezzük, hogy a $V_{t+1}(\boldsymbol{x})$ függvénynek létezik $\nabla V_{t+1}(\boldsymbol{x})$ gradiense akkor a $p_j$ árú $j$ termék elfogadásának feltétele:

$$p_j \ge V_{t+1}(\boldsymbol{x}) - V_{t+1}(x - \boldsymbol{A}_j) \approx \nabla V_{t+1}^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}_j = \sum_{i \in \boldsymbol{A}_j} \pi_i(t, \boldsymbol{x})$$

ahol

$$\pi_i(t, \boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} V_{t+1}(\boldsymbol{x})$$

**Definíció**: Egy $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ szabályt árajánlat szabálynak nevezzük, ha van egy valós függvény $\boldsymbol{\pi}(t, \boldsymbol{x}) = (\pi_1(t, \boldsymbol{x}), \dots, \pi_m(t, \boldsymbol{x})), t = 1,2, \dots, T$, amelyre $u_j(t, \boldsymbol{x}, p_j) = 1$, akkor és csakis akkor ha

$$p_j \ge \sum_{i \in \boldsymbol{A}_j} \pi_i(t, \boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{A}_j \le \boldsymbol{x}$$

Minden erőforrásra, minden időpillanatra és minden kapacitás szintre értelmezve van egy árajánlat, és a beérkező ajánlatokat akkor fogadjuk el, ha az áruk meghaladja azon erőforrások aktuális árajánlatát amelyek szükségesek az adott megrendeléshez, valamint ha minden szükséges erőforrás a rendelkezésünkre áll.

Vannak olyan esetek, amikor nem létezik olyan árajánlat függvény és ez által árajánlat kontroll, mely optimális szabályt határozna meg.

A $V_t(\boldsymbol{x})$ értékek kiszámítása rengetek időt venne fel, és nagyon bonyolult lenne nagyobb számú termék vagy erőforrás esetén. Ezért gyakran egyszerű közelítéseket alkalmaznak.

### 4.2.6 Lineáris determinisztikus modell (*Deterministic Linear Programming Model - DLP*)

Legyen $D_j$ $j$ termék iránti várható igény a $t$ időpontban $\mu_j$ várható értékkel. $\boldsymbol{D} = (D_j, \dots, D_j)$ és $\mu = E[\boldsymbol{D}]$

Lineáris Determinisztikus modell (DLP):

$$V_t^{LP}(\boldsymbol{x}) = \max \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{y}$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \le \boldsymbol{x}$$
$$0 \le \boldsymbol{y} \le \boldsymbol{\mu}$$

Az $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)$ a kapacitás elosztást az $n$ termékre.

Számos esetben az optimális $\boldsymbol{y}$ helyett az $\pi^{LP}$ optimális duál változókat használják ajánlati árként.

Szállodaiparban a feladatot a következőképpen lehet megfogalmazni (NDSP modell):

$$\text{maximize} \quad \sum_{cLd} p_{cLd} y_{cLd}$$
$$\sum_{cLd|fedi\ az\ n\ napot} y_{cLd} \le x_n$$
$$0 \le y_{cLd} \le \mu_{cLd}$$

Ahol $x_n$ a kapacitás állapota az $n$ napon, $y_{cLd}$ a $c$ osztályú, $L$ hosszú $d$ napon kezdődő foglalásokhoz rendelt kapacitás mennyiség, $\mu_{cLd}$ ezen foglalások számának várható értéke, $p_{cLd}$ pedig az értékesítés várható bevétele.

### 4.2.7 Lineáris determinisztikus modell visszamondásokkal (*DLP with cancellations*)

Ha a DLP modellnél figyelembe vesszük, hogy nem minden előzetes foglalás következik be a következő modellhez jutunk:

$$\text{maximize} \quad \sum_{cLd} q_{cLd} p_{cLd} y_{cLd}$$
$$\sum_{cLd|fedi\ az\ n\ napot} q_{cLd} y_{cLd} \le x_n$$
$$0 \le y_{cLd} \le \mu_{cLd}$$

ahol $q_{cLd}$ annak a valószínüsége, hogy egy foglalás ténylegesen megvalósul.

### 4.2.8 Véletlenszerű nemlineáris modell (PNLP – *Probabilistic Nonlinear Programming Model*)

$$V_t^{PNLP}(\boldsymbol{x}) = \max \sum_{j=1}^{n} p_j E\left[\min\{D_j, y_j\}\right]$$
$$\boldsymbol{Ay} \leq \boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$$

Itt $E[\min\ \{D_j, y_j\}]$ a $j$ termék várható hozama az $\boldsymbol{y}$ kapacitás elosztás mellett. A modell annak ellenére, hogy nem lineáris, de a célfüggvény konkáv és szeparábilis $y_j$-ben, valamint a korlátok lineárisak, így viszonylag könnyen megoldható.

Diszkrét igények esetén segédváltozók segítségével lineárissá alakítható a modell. $z_{jd}$ bináris paraméter és értéke jelzi, hogy, a $j$ termékhez rendelt kapacitásmennyiség több vagy kevesebb mint $d$.

$$z_{jd} = f(x) = \begin{cases} 1, & y_j \geq d \\ 0, & y_j < d \end{cases}$$

Ekkor:

$$V_t^{PNLP}(\boldsymbol{x}) = \max \sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{d=1}^{M_j} z_{jd} P(D_j \geq d)$$
$$y_j = \sum_{d=1}^{M_j} z_{jd}, \qquad j = 1, \dots, n$$
$$\boldsymbol{Ay} \leq \boldsymbol{x}$$
$$0 \leq z_{jd} \leq 1, \qquad j = 1, \dots, n, \qquad d = 1, \dots, M_j$$

Ahol $M_j$ felső korlátja a $j$ termékhez rendelt kapacitásnak (Big M korlát)

Ha $D_j \in \left\{d_{j,1} < d_{j,2} < \dots < d_{j,K_j}\right\}$

$$V_t^{SLP}(\boldsymbol{x}) = \max \sum_{j=1}^{n} p_j y_j - \sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{d=0}^{K_j} y_{j,i} P(D_j \leq d_{j,i})$$
$$\boldsymbol{Ay} \leq \boldsymbol{x}$$
$$y_{j,0} \leq d_{j,1}$$
$$y_{j,i} \leq d_{j,i+1} - d_{j,i}, \qquad i = 1, \dots, K_j - 1$$

A célfüggvény baloldala az elérhető hozam abban az esetben, amikor minden terv szerint történik és a teljes kapacitást felhasználjuk, míg a jobb oldal a bizonytalanságot kompenzálja. $y_j$ felbontottuk $y_{j,i}$ részekre. Ezek mindegyike az igények $d_{j,i}$ és $d_{j,i+1}$ közé eső részére fenntartott kapacitást jelöli. Az igények számát diszkrét értékekre korlátozva, úgy hogy e diszkrét értékek összességének előfordulási valószínűsége elég nagy legyen, egy egyszerű és könnyen megoldható modellhez jutunk.

### 4.2.9 Dekompozíciós módszerek

A másik lehetőség hálózati tervezésre, a probléma feldarabolása $m$ egyszerű erőforrás problémára, úgy hogy mindegyik részfeladat tartalmaz információt a hálózatról, de egymástól függetlenül megoldhatók. Valamilyen módszerrel létrehozzuk az $m$ egyszerű kapacitás problémát, minden erőforrásra megoldjuk valamilyen $M_i$ módszerrel $V_t^{M_i}(x_i)$ célfüggvénnyel amely függ a $t$ hátralévő időtől, $x_i$ kapacitástól.

A teljes célfüggvény ez alapján

$$V_t(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} V_t^{M_i}(x_i)$$

Ajánlati ár pedig:

$$\pi_i(t, \boldsymbol{x}) = \Delta V_t^{M_i}(x_i), \qquad i = 1, \dots, m$$

ahol

$$\Delta V_t^{M_i}(x_i) = V_t^{M_i}(x_i) - V_t^{M_i}(x_i - 1)$$

A módszer hátránya, hogy a szétbontással lényeges hálózatot jellemző információk figyelmen kívül maradhatnak. Lényeges előny viszont, hogy könnyen megoldható, a hátralévő idő, valamint kapacitás változásával könnyen frissíthető, újra számolható.

### 4.2.10 OD Factors módszer (heurisztikus bid price) módszer

OD Faktor módszer (Origin-Destination) első lépésében erőforrásonként határozzuk meg az optimális kapacitás eloszlást, legyen ennek célfüggvény értéke $V_t^{ODF_i}(x_i)$.

Egy $j$ termék iránti igény beérkezésekor, amely az $i$ erőforrást is használja a $p_j$ árat kell összehasonlítani a következő ajánlati árral:

$$\Delta V_t^{ODF_i}(x_i) + \gamma \sum_{l \in \boldsymbol{A}_j, l \neq i} \Delta V_t^{ODF_l}(x_l)$$

ahol $\gamma$ egy globális OD faktor, amely általában $< 1$, és szimuláció útján van meghatározva. Ha $p_j$ meghaladja az ajánlati árat, akkor elfogadjuk az $i$ erőforráson. Egy igényt akkor fogadunk el, ha minden erőforráson, amelyet használ a termék, elfogadjuk. Azaz $p_j$-nek nagyobbnak vagy legalább akkorának kell lennie, mint a termék erőforrásainak ajánlati árainak maximuma.

Amennyiben a $j$ termék csak egyetlen erőforrást használ, úgy a döntés az egy erőforrásos módon történik, azonban, ha a $j$ termék több erőforrást is használ, akkor az ajánlati ár az $i$ erőforrás esetében magasabb lesz, mintha csak az $i$ erőforrást használná. A $\gamma$ faktor értelme, hogy az egyes erőforrás lekötésének értéke túlértékelt az adott erőforrás szemszögéből, mivel minden erőforrás a termék teljes árával számol.

A módszer előnye, hogy a már meglévő nem hálózati kapacitás tervezéssel számoló rendszer könnyen kiegészíthető OD faktor módszerré, és ezzel nagyon egyszerűen lehet a modellbe valamilyen szintű hálózati információt vinni. Ehhez csupán csak a $\gamma$ faktor meghatározására van szükség a már előzőleg is rendelkezésre álló adatokon túl.

### 4.2.11 Prorated EMSR (PEMSR)

Minden termékre, a termék árából egy részt a felhasznált erőforráshoz rendelünk. Ezután minden erőforrásra, az egy erőforrásos problémára vonatkozó EMSR heursiztikával meghatározzuk az ajánlati árakat, az adott erőforrásra vonatkozó árakkal.

Legyen $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ nemnegatív valósértékű vektor. Minden $j$ termékre értelmezzünk egy új árat minden $i$ erőforrásra amelyet a $j$ termék használ:

$$\bar{p}_{ij} = \frac{\alpha_i}{\sum_{l \in \boldsymbol{A}_j} \alpha_i} p_j, \qquad i \in \boldsymbol{A}_j$$

Ezután minden $i$ erőforrásra egymástól függetlenül alkalmazzuk az EMSR heurisztikát úgy mintha $D_j$ igény érkezett volna, de kisebb $\bar{p}_{ij}$ áron. Ezután

$$V_t^{PEMSR}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} V_t^{PEMSR_i}(x_i, \boldsymbol{\alpha})$$

ahol $V_t^{PEMSR_i}(x_i, \boldsymbol{\alpha})$ várható hozama az $i$ problémának az $\boldsymbol{\alpha}$ kiosztás mellett. A feladat legfontosabb része az $\boldsymbol{\alpha}$ kiosztás meghatározása.

### 4.2.12 Displacement- Adjusted Virtual Nesting (DAVN)

Első lépésben meghatározunk valamilyen módszerrel statikus ajánlati árakat $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_m)$. Ezután minden $i$ erőforrásra megoldunk egy egyszerű kapacitáselosztási feladatot a következők szerint.

Minden olyan $j$ termékre amely használja az $i$ erőforrást meghatározzuk a

$$\bar{p}_{ij} = p_j - \sum_{l \in \boldsymbol{A}_j, l \neq i} \pi_l$$

A $j$ termék hozamát csökkentjük az $i$ erőforráson azon ajánlati árakkal amelyek olyan erőforrásokra vonatkoznak, amelyeket a $j$ termék szintén használ. Azaz ahhoz hogy a $j$ termék iránti igényt teljesíteni tudjuk az $i$ erőforráson kívül más erőforrásokat is igénybe kell vennünk, csökkentve azok kapacitását, egyszersmind az erőforráson elérhető összes hozamot. Ennek célja a $j$ termék elfogadásának nettó hozamát megközelíteni. A következő lépésben a termékeket minden erőforrásra klaszterekbe, kosarakba, csoportosítjuk, $\bar{c} + 1$ virtuális osztályt hozva létre, ahol a virtuális osztályok száma a módszer paramétere. Egy egyszerű mód erre a csoportosításra, ha a $\bar{p}_{ij}$árak alapján növekvő sorrendbe rendezzük a termékeket, majd a sort $\bar{c} + 1$ részre. Ezután meghatározzuk ezeknek a virtuális osztályoknak az árát, ami általában az árak súlyozott átlaga, valamint az osztály iránti igény együttes eloszlását, átlagát, szórását. Ezekkel az adatokkal megoldjuk minden $i$ erőforrásra egy egyszerű kapacitás feladatot, meghatározva $\bar{c}$ kapacitásfoglalási korlátot minden erőforrásra $V_t^{DAVN_i}(x_i)$ célfüggvény értékkel.

Egy $j$ termék iránti igényt a neki megfelelő virtuális osztály iránti igénnyé alakítunk minden számára szükséges erőforrásra. Ha minden erőforrásra van elegendő erőforrás a kérést elfogadjuk, ha viszont a virtuális osztály kapacitása egy vagy több erőforrásra kimerült, az igényt visszautasítjuk.

### 4.2.13 Dinamikus felbontás (dekompozíció)

Hasonlóan a DAVN módszerhez létrehozzuk a $\bar{p}_{ij} = p_j - \sum_{l \in \boldsymbol{A}_j, l \neq i} \pi_l$ adjusztált árakat minden $i$ erőforrásra.

A $j$ termék iránti igény a $t$ periódusban $\lambda_j(t)$ valószínűséggel egy vagy egynél több. Ezután minden erőforrásra megoldjuk az egyszerű dinamikus problémát ahol az érkezési valószínűségek $\lambda_j(t)$ valamint $\bar{p}_{ij} = p_j - \sum_{l \in \boldsymbol{A}_j, l \neq i} \pi_l$ árakkal, melynek eredménye $V_t^{DPD_i}(x_i)$. A teljes célfüggvény értéke ekkor

$$V_t^{DPD}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} V_t^{DPD_i}(x_i)$$

valamint az ajánlati ár ez alapján

$$\pi_i^{DPD}(t, \boldsymbol{x}) = \Delta V_t^{DPD_i}(x_i), \ i = 1, \dots, m$$

# 5 Túlfoglalás

Üzleti szempontból, a legnagyobb kihívás, a meghiúsult foglalások által okozott negatív hatások megfelelő kezelése, a vásárló valamilyen formában történő kompenzálása, valamint a kötelező törvényi előírásoknak megfelelni.

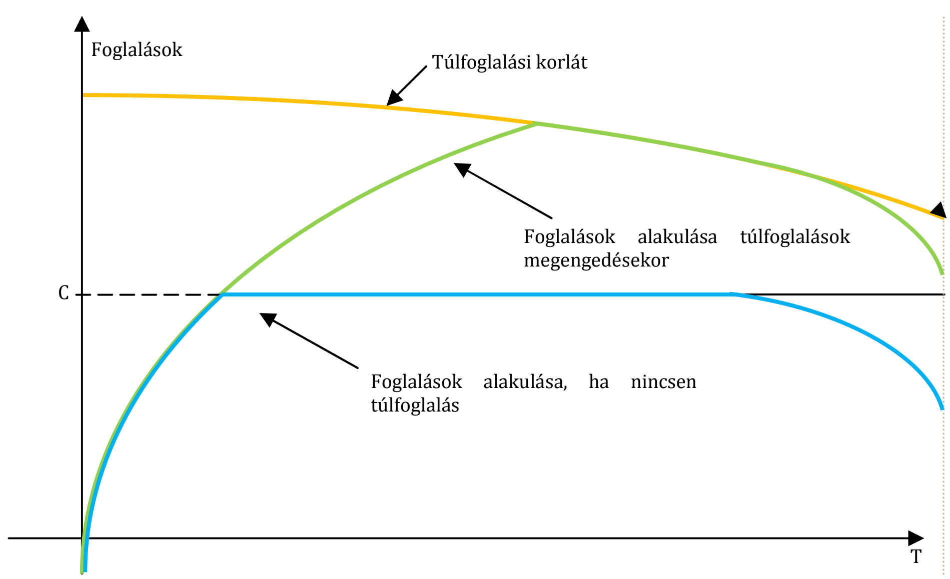
Ha túlfoglalás történik, és a lemondások száma, nem elég nagy, ahhoz, hogy a kapacitás elegendő legyen az igények kiszolgálására, bizonyos foglalásokat vissza kell utasítani. A visszautasított foglalások kiválasztásának hatása van a cég költségeire, valamint a vásárló elégedettségére. Például, a szabály, ami alapján kiválasztódnak azok a foglalások, amelyeket visszautasítunk, nem lehetnek diszkriminálók, előre meg kell hogy legyenek határozva, annak érdekében, hogy egy igazságos rendszer képét mutassák a vásárlók fele. Egy vásárló, foglalásának visszautasítását csak ilyen körülmények között lesz hajlandó elfogadni.

A visszautasított vásárló kompenzálásának módja iparágtól függő. Autókölcsönző

## 5.1 Statikus túlfoglalási modell

A legegyszerűbb módszer a túlfoglalások figyelembe vételére. Statikus túlfoglalás esetén, figyelmen kívül marad a vásárlók foglalásainak és lemondásainak időbeli dinamikája. Az egyetlen dolog ami számít, az a foglalás véghezvitelének valószínűsége, vagyis milyen valószínűséggel fog teljesülni, az adott foglalás. Adott az adott naptól, a teljesítés időpontjáig várható lemondások számának becslése és ez alapján meghatározásra kerül az a maximális foglalási szám, ami még megengedett.

Kétféle esemény van, amely befolyásolja a túlfoglalás menetét. Az egyik a lemondás (*cancelation*) a másik a meg nem jelenés (*no-show*) Az egyetlen különbség a kettő között a lemondás bekövetkeztének ideje. Egy statikus túlfoglalási modell esetén, a két eseményt nem kell megkülönböztetni. A túlfoglalási határt virtuális kapacitásnak is szokták nevezni.




Az ilyen statikus túlfoglalási modelleket általában meghatározott időközönként újra kell futtatni.



Idő

### 5.1.1 Binomiális modell

A következő feltevéseket tesszük:

- a vásárlók egymástól függetlenül mondanak le foglalásokat.
- Minden vásárló azonos valószínűséggel mondja le a foglalást
- A lemondás valószínűsége Markov folyamat, csupán a hátralévő időtől függ, és független a foglalás korától, azaz, hogy milyen rég volt foglalva.

Továbbá $t$ a még hátralévő idő, $C$ a fizikai kapacitás, $y$ az élő foglalások száma, $q$ annak a valószínűsége, hogy egy foglalás teljesül $(1-q)$ pedig annak a valószínűsége, hogy lemondják. Annak ellenére, hogy a $q$ függ a $t$ hátralévő időtől, a gyakorlatban gyakran mégsem a hátralévő idő, hanem az aktív foglalások számához mérik.

$Z(y)$ a teljesülő foglalások száma ha $y$ foglalásunk van.

$$P_y(z) = P(Z(y) = z) = \binom{y}{z} q^z (1-q)^{y-z}, \qquad z = 0,1, \dots, y$$

$$F_y(z) = P(Z(y) \leq z) = \sum_{k=0}^{z} \binom{y}{k} q^k (1-q)^{y-k}, \qquad z = 0,1, \dots, y$$

$$E[Z(y)] = qy$$

$$D[Z(y)] = yq(1-q)$$

$$\bar{F}_y(z) = P(Z(y) > z) = 1 - F_y(z)$$

A célunk pedig meghatározni az a $\bar{C}$ foglalási korlátot, amely felett már nem fogadunk el foglalásokat, amely várhatóan pontosan annyi teljesülő foglalást eredményez, mint amennyi a fizikai kapacitás.

### 5.1.2 Szolgáltatási szint kritérium

Legyen a túlfoglalási korlát $x > C$, azaz egész addig fogadunk el foglalásokat, amíg az aktív, élő foglalások száma $y$ nem éri el az $x$ -et.

$s_1(x) = F_x(C) = P(Z(x) > C)$, azaz az élő foglalásaink száma elérte az $x$ korlátot és ekkor $s_1(x)$ valószínűséggel nem tudjuk teljesíteni egy vagy több foglalást túlfoglalás miatt. Azaz végül mégsem lesz annyi lemondás, hogy a szolgáltatás időpontjában a $C$ fizikai kapacitás elegendő legyen az összes foglalás teljesítésére. Azaz $x$ foglalási korláttal garantálni tudjuk, hogy a nem teljesített foglalás valószínűsége nem haladja meg az $s_1(x)$-et.

**Visszautasított vásárlók aránya:**

$$s_2(x) = \frac{E[(Z(x)-C)^+]}{E[Z(x)]} = \frac{\sum_{k=C+1}^{x} (k-C)\, P_x(k)}{x(1-q)}$$

Tehát $x$ foglalási korlát mellett az elutasított ügyfelek aránya $s_2(x)$

$$s_2(x) = \bar{F}_{x-1}(C-1) - \frac{C}{qx} \bar{F}_x(C)$$

Úgy $s_1(x)$ mint $s_2(x)$ a legrosszabb esetben teljesül, azaz ha az igények száma meghaladja a meghatározott foglalási korlátot.

### 5.1.3 Túlfoglalások gazdaságossági alapon

Ebben a modellben azt tartjuk szem előtt, hogy a nagyobb foglalási korláttal elérhető nagyobb bevétel tudja-e fedezni a visszautasítás. Ennek megvalósításához tudnunk kell, legalább becslés szintjén, hogy mennyibe kerül egy visszautasított vevő, valamint hogy mekkora a veszteségünk ilyenkor.

Legyen $z$ a teljesült foglalások száma (szolgáltatás időpontjában megjelenők száma), $c(z)$ az elutasítás költsége, ami $z$-ben növekvő és feltesszük, hogy konvex. Ha feltételezzük, hogy a visszautasítás költsége konstans $h$ akkor

$$c(z) = h(z - C)^+$$

Legyen $p$ a határhozama egy újabb foglalás elfogadásának.

$$V(y) = py - E\left[c\big(Z(y)\big)\right]$$

ahol $Z(y)$ azon foglalások száma $y$ foglalásból, amelyeket nem mondanak le. Ha $c(x)$ konvex akkor $V(x)$ konkáv. Azaz egész addig érdemes elfogadni foglalásokat, amíg $\Delta V(y) = V(y) - V(y-1)$ pozitív. Az optimális $x^*$ foglalási korlátra

$$x^* = \max\left\{x \middle| \Delta V(x) = E\left[c\big(Z(x)\big)\right] - E\left[c\big(Z(x-1)\big)\right] \leq p\right\}$$

$q$ paraméterű binomiális modell és $h$ konstans költség mellett

$$x^* = \max\left\{x \middle| hqP\big(Z(x-1)\big) \leq p\right\}$$

azaz $\bar{F}_{x-1}(C-1) \leq \frac{p}{qh}$ ami megegyezik azzal mintha $C-1$ kapacitás esetén szolgáltatási szint kritérium szerint járnánk el. Nagy $C$ kapacitás esetén pedig $\bar{F}_x(C) \approx \bar{F}_x(C-1)$

### 5.1.4 Statikus Modell Közelítések

Annak ellenére hogy a binomiális modell nagyon egyszerű gyakran még további egyszerűsítést alkalmaznak, a számítások egyszerűsége miatt, valamint kevés rendelkezésre álló adat esetében is.

**Determinisztikus közelítés:**

Egyszerűen az átlagos lemondási aránnyal korrigáljuk a $C$ kapacitást.

$$x^* = \frac{C}{q}$$

**Normális közelítés:**

$F_x(.)$ normális eloszlású $\mu_x$várható értékkel valamint $\sigma_x^2$ szórással, úgy hogy:

$$\mu_x = xq$$
$$\sigma_x^2 = xq(1-q)$$

Ekkor $s_1(x) \approx 1 - \Phi(z_x)$, ahol $z_x = \frac{C-\mu_x}{\sigma_x}$, $\Phi(z_x)$ a standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye.

$$s_2(x) \approx \frac{\sigma_x}{\mu_x}\left[\Phi(z_x) - z_x\big(1 - \Phi(z_x)\big)\right]$$

mivel

$$E[(z-C)^+] = \sigma\Big(\Phi(z) - z\big(1 - \Phi(z)\big)\Big), \qquad z = \frac{C-\mu}{\sigma}$$

### 5.1.5 Vegyes vásárló osztályok

Különböző vásárlói osztályoknak, különböző osztályú termékek vásárlóinak lemondási aránya nem egyforma. Például egy diszkont osztály esetében a lemondás a vásárló számára költséggel jár, míg a teljes árú osztályok számára nincsenek megkötések a foglalások visszamondására. Így a diszkont osztály vásárlói kisebb arányban fogják visszamondani foglalásukat, mint a teljes árú osztályok vásárlói.

A probléma megoldásához az egyes osztályok foglalásait osztályonként kell nyilvántartani

## 5.2 Dinamikus túlfoglalási modell

A statikus módszerek nem veszik figyelembe a lemondások illetve foglalások dinamikáját, időbeli változásait.

### 5.2.1 Egzakt megközelítés

$t = 1, \dots, T$ - idő

$y$ - az élő foglalások száma

Ekkor a foglalások értéke:

$$V_{T+1}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq C \\ -c(y-C), & y > C \end{cases}$$

Ahol $C$ a fix kapacitás és $c(.)$ pedig egy büntetőfüggvény, amely a nem teljesített foglalások költségét tartalmazza.

$t$ időpillanatban egy új foglalás hozama $p(t) \geq 0$, amennyiben egy foglalást a $t$ időpontban lemondanak az $r(t) \geq 0$ költséggel jár

Minden $t$ periódusban a következő események zajlanak le.

$y$ élő foglalásunk van és $D_t$ új foglalási igény érkezik be

Eldöntjük, hogy mekkora legyen ebben a periódusban az $x$ foglalási korlát. $y \leq x \leq y + D_t$

Észleljük a visszamondásokat.

$$v_{t+1}(x) = E\left[V_{t+1}\big(Z_t(x)\big) - \big(x - Z_t(x)\big)r(t)\right]$$
$$V_t(x) = E\left[\max_{y \le x \le y + D_t} \{v_{t+1}(x) + (x-y)p(t)\}\right]$$

$Z_t(y)$ a $t$ periódus végén megmaradó foglalások száma, a $t$ periódus kezdetén lévő $y$ -ból.

$Z_t(y)$ binomiális eloszlású $q_t$ megmaradási valószínűséggel

Tétel: Ha a visszautasítás $c(y)$ költségfüggvénye konvex, akkor minden $t$ periódusban létezik $x^*(t)$ érték, úgy hogy az optimális döntés esetén egész addig kell elfogadni foglalásokat amíg az élő foglalások száma el nem éri az $x^*(t)$ értéket.

Tétel: Ha $c$ konvex, $q_t$ a megmaradási arány, $p(t)$ a hozam, visszafizetés $\mathrm{r}(t)$ és

$$q_t\big(p(t) - p(t+1)\big) + (1-q_t)\big(p(t) - \mathrm{r}(t)\big)$$

Akkor az $x^*(t)$ optimális foglalási korlátok monotonon csökkennek az idővel.

$$x^*(1) \ge x^*(2) \ge \cdots \ge x^*(T)$$

A tétel feltevése mindig teljesül, amikor a hozamok idővel nem nőnek $p(t) \ge p(t+1)$ valamint a visszafizetések nem haladják meg a hozamokat $p(t) \ge \mathrm{r}(t)$.

A tételben szereplő feltétel a következő formára írható át:

$$p(t) \ge q_t p(t+1) + (1-q_t)\mathrm{r}(t)$$

Amennyiben elfogadjuk az igényt, az $q_t$ valószínüséggel marad meg a $t+1$-ik periódusra, és ebben a periódusban a foglalás értéke $p(t+1)$. A foglalást viszont $(1-q_t)$ valószínüséggel lemondják, aminek költsége $\mathrm{r}(t)$. Tehát az egyenlőtlenség jobb oldalán lévő összeg ezen kimeneteleknek átlagos költsége. Azaz azt várjuk el a $p(t)$ ártól hogy legalább annyi legyen mint ez az átlagos költség. Így a foglalási korlátnak a $t$ periódusban legalább akorának kell lennie mint a $t+1$-ik periódusban.

A modell bonyolultsága miatt azonban ritkán használt. A foglalások beérkezésének és lemondásának dinamikáját gyakran a nettó foglalásokkal számolva veszik figyelembe az RM rendszerek. Azaz a beérkezett új foglalásokból levonva az adott periódusban történt lemondásokat megkapjuk a periódus nettó foglalási számát.

## 5.3 Kapacitás kontrol és túlfoglalás

Feltételezések:

*(i)* A lemondások és meg nem jelenések valószínűségei minden vásárlóra egyformák

*(ii)* A lemondások és meg nem jelenések függetlenek minden vásárlóra

*(iii)* A lemondások és meg nem jelenések minden periódusban függetlenek az igény elfogadásának idejétől

*(iv)* A visszafizetések valamint a visszautasítási költségek minden vásárlóra azonosak.

A *(ii)* pont nem teljesül például csoportos foglalások lemondása esetén. A visszafizetések, visszautasítási költségek gyakran a vásárló osztályától függ, így *(i)* és *(iv)* pontok is korlátozó feltevések. Azonban a feltevések teljesülése mellett könnyen számítható egyszerű modell áll rendelkezésünkre.

## 5.4 Helyettesíthető kapacitás.

Helyettesíthető kapacitásról beszélünk, olyankor, amikor több különböző típusú erőforrással, különböző osztályú igényeket szolgálunk ki és az egyik erőforrás hiányában a másik erőforrással kompenzálhatjuk a vevőt és nem kell automatikusan visszautasítani. Ilyen esettel találkozunk például olyan légitársaságok esetében, amelyek különböző osztályú jegyeket értékesítenek. Alacsony első osztályú igényszint mellett megengedhetik maguknak hogy nagyobb számban fogadnak el igényt turistaosztályra, és ha a szolgáltatás igénybevételekor kiderül, hogy túlfoglalás történt, első osztályú helyet kínálnak fel az utasnak.

A modell szempontjából az időhorizontot két részre bontjuk: foglalási periódusra, illetve szolgáltatás teljesítési periódusra. Az első periódusban csak előrejelzéseink illetve becsléseink vannak a várható lemondásokról

Osztályok száma – $n$

Erőforrások száma – $m$

Élő foglalások a $j$ osztályra – $y_j$ – állapot változó

A foglalási periódus végén maximálisan $x_j$ foglalást szeretnénk $x_j \geq y_j$

$h_{ji}$ – $j$ osztály $i$ erőforráshoz rendelésének nettó hozama

$C_i$ – $i$ erőforrás kapacitása

$z_j$ – $j$ osztály élő foglalásainak száma a szolgáltatási periódusban (maradnak meg, jelennek meg)

$z_{ji}$ – $z_j$ közül ennyit rendelünk $i$ -hez

Továbbá bevezetünk egy $i$=0 virtuális erőforrást, ami a visszautasításnak felel meg, aminek véges, de nagyon nagy kapacitást rendelünk hozzá. A kapacitással lehet például szabályozni, hogy maximálisan mennyi visszautasított vásárlót fogadunk még el, ami egy stratégiai, tervezési döntés. $z_{j0}$ a visszautasítottak $j$ osztályból, $h_{j0}$ pedig a veszteség egy ilyen visszautasítás esetén, ami magába foglalj minden visszautasítással járó költséget, mint a vásárló elégedetlensége.

$$\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_n), \boldsymbol{C} = (C_0, \dots, C_m)$$

A maximális hozam: $V(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{C})$

Szállítási feladatot kapunk, amelyben a készletek a vevői foglalások, és az igények a rendelkezésre álló kapacitások.

$$V(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{C}) = \max \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{m} h_{ji}\, z_{ji}$$

$$\sum_{i=0}^{m} z_{ji} = z_j, \qquad j = 1, \dots, n$$
$$\sum_{j=1}^{n} z_{ji} \le C_i, \qquad i = 0,1, \dots, m$$
$$z_{ji} \ge 0, \qquad j = 1, \dots, n, \qquad i = 0,1, \dots, m$$

Abban az esetben, ha a vevő igényét nem tudjuk kiszolgálni túlfoglalás miatt, de egy magasabb kategóriájú szolgáltatással igen, annak kapacitását használjuk fel. Például egy autókölcsönzőben, nincsen már az adott kategóriájú autóból, viszont van egy magasabb kategóriájú, amellyel a vevő igényeit ki tudjuk szolgálni, némi többlet költség árán, akkor ezt tesszük. Ilyenkor azonban egy magasabb profit részesedéssel rendelkező osztály le nem kötött kapacitását csökkentjük.

## 5.5 Kapacitás hálózattervezés túlfoglalással

Kapacitás hálózattervezési feladatok (*Network overbooking*) kulcsfontosságú bemenő adata a kapacitások nagysága. Túlfoglalások engedélyezésével ezek a korlátok növelhetők, virtuális kapacitáskorlátokat határozva meg. Az így megnövelt kapacitáskorlát egyértelműen befolyásolják az elfogadásokat, visszautasításokat. Kapacitástervezési döntéseink pedig a túlfoglalások irányításához szükséges adatokat befolyásolják.

Modell:

Termékek száma – $n$

Erőforrások száma – $m$

Az időhorizontot két részre bontjuk:

**foglalási periódus** $(0, T]$, ebben az időszakban az $n$ termék közül bármelyre lehet foglalást leadni

**szolgáltatási periódus,** ebben az időszakban a vásárlók megjelennek (vagy nem jelennek meg) a szolgáltatást igényelni. Ez idő alatt a cég bizonyos költséggel visszautasíthatja a meglévő foglalást a kapacitások kimerülése esetén

A foglalások beérkezése sztochasztikus folyamat $(0, T]$ periódusban.

$\boldsymbol{p} = (p_1, \dots, p_n)$ – az ár vektor

$\boldsymbol{C} = (C_1, \dots, C_m)$ – kapacitás vektor

$\boldsymbol{h} = (h_1, \dots, h_m)$ – visszautasítás költsége, ami különböző lehet az egyes erőforrásokon, de nem függ az időtől

$\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ – incidencia mátrix, $a_{ij} = 1$ ha $i$ erőforrást használja a $j$ termék és 0 különben. $A_i$ $i$-ik sora $\boldsymbol{A}$-nak, $A_j$ a $j$-ik oszlopa $\boldsymbol{A}$-nak

$\boldsymbol{x}$ – döntésváltozó, túlfoglalási korlát

$\boldsymbol{y}$ – elsődleges kapacitás kiosztási döntésváltozó

$$\max_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{y} - E[\boldsymbol{h}^T(Z(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{C})^+])$$

$$\boldsymbol{Ay} \leq \boldsymbol{x}$$

$$0 \leq \boldsymbol{y} \leq E[\boldsymbol{D}]$$

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{C}$$

Az $i$ erőforrást igénylők közül a megjelenők számát a $Z_i(x_i)$-val közelíti.

$H(\boldsymbol{x}) = E[\boldsymbol{h}^T(Z(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{C})^+]$ – túlfoglalás költsége

$F(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{y}$ – a kiosztás hozama -171

$$\Omega = \{\boldsymbol{y} ⋮ 0 \leq \boldsymbol{y} \leq E[\boldsymbol{D}]\}$$

$$\Psi = \{\boldsymbol{x} ⋮ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{C}\}$$

$$L(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\pi}) = F(\boldsymbol{y}) - H(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\pi}^T(\boldsymbol{Ay} - \boldsymbol{x}) - \frac{\gamma}{2}\|\boldsymbol{Ay} - \boldsymbol{x}\|^2$$

$$\gamma > 0$$

$$\boldsymbol{y}^{(k+1)} = \operatorname*{argmax}_{\boldsymbol{y}\in\Omega}\left\{F(\boldsymbol{y}) - \left(\boldsymbol{\pi}^{(k)}\right)^T\boldsymbol{Ay} - \frac{\gamma}{2}\left\|\boldsymbol{Ay} - \boldsymbol{x}^{(k)}\right\|^2\right\}$$

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \operatorname*{argmax}_{\boldsymbol{x}\in\Psi}\left\{-H(\boldsymbol{x}) + \left(\boldsymbol{\pi}^{(k)}\right)^T\boldsymbol{x} - \frac{\gamma}{2}\left\|\boldsymbol{Ay}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}\right\|^2\right\}$$

$$\boldsymbol{\pi}^{(k+1)} = \boldsymbol{\pi}^{(k)} + \gamma\left(\boldsymbol{Ay}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^{(k+1)}\right)$$

$\boldsymbol{x}^{(0)} \geq \boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{\pi}^{(0)} \geq 0$, tetszőlegesen megválaszthatók

$\boldsymbol{y}^{(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})}$ meghatározása

$$\max\left(F(\boldsymbol{y}) - \left(\boldsymbol{\pi}^{(k)}\right)^T\boldsymbol{Ay} - \frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{Ay} - \boldsymbol{x}^{(k)}\right\|^2\right)$$

DLP modell esetén ez egyenértékű

$$\max_{0\leq\boldsymbol{y}\leq E[\boldsymbol{D}]}\left(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{A^T}\boldsymbol{\pi}^{(k)} + \boldsymbol{A^T}\boldsymbol{x}^{(k)}\right)^T\boldsymbol{y} - \frac{1}{2}\boldsymbol{yA^TAy}$$

$\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})}$ meghatározása

$$\min\left(H(\boldsymbol{x}) - \left(\boldsymbol{\pi}^{(k)}\right)^T\boldsymbol{x} + \frac{\gamma}{2}\left\|\boldsymbol{Ay}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}\right\|^2\right)$$
$$= \boldsymbol{h}^T E[(Z(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{C})^+] - \left(\boldsymbol{\pi}^{(k)} + \boldsymbol{Ay}^{(k+1)}\right)^T\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x^T x}$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{y}^{(k+1)}\right)^T\boldsymbol{A^T A y}^{(k+1)}$$

Ezek alapján a következő algoritmus valósítható meg:

1. lépés $\gamma = 1, \boldsymbol{x}^{(0)} = 0,\ \boldsymbol{\pi}^{(0)} = 0, k = 1$

2. lépés (QP) feladat megoldása és $\boldsymbol{y}^{(k)}$ meghatározása
3. lépés (SP) feladat megoldása és $\boldsymbol{x}^{(k)}$ meghatározása
4. $\boldsymbol{\pi}^{(k)}$kiszámítása

$k$ értékének növelése és visszatérés az első lépéshez, ha a leállási kritérium nem teljesül

A leállási kritérium lehet bizonyos iteráció szám elérése, vagy a két egymás utáni $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$, értékek közötti küszöbkülönbség elérése stb.

# Irodalomjegyzék:


[1] L.R. Weatherford, *A taxonomy and research overview of perishable-asset revenue management: Yield management, overbooking and pricing*, Operations Research, 40, 5, 831-844. (1992)

[2] Kinshuk Jerath, Serguei Netessine, Senthil K. Veeraraghavan, *Revenue Menegement with Strategic Customers: Last-Minute Selling and Opaque Selling* Philadelphia (2007)

[3] Mehmet Barut, V.Sridharan, *Revenue Management in Order-Driven Production Systems*, Decision Sciences 36/2, (2005)

[4] Tim Baker, Nagesh N. Murthy, Vaidyanathan Jayaraman, *Service Package Switching in Hotel Revenue Management Systems*, Decision Sciences 33/1 (2002)

[5] Mihir Rajopadhye, Mounir Ben Ghalia, Paul P. Wang, Timothy Baker, Craig V. Eister, *Forecasting uncertain hotel room demand*, Information sciences 132 (2001)

[6] Abhijit Gosavi, Emrah Ozkaya, Aykut F. Kahraman, *Simulation optimization for revenue management of airlines with cancellations and overbooking*, OR Spectrum 29 (2007)

[7] Timothy Baker, K. Collier, David A., *Benefits of optimizing prices to manage demand in hotal revenue management systems*, Production and Operation Management (2003)

[8] Talluri Kalyan T., Van Ryzin Garrett J., *Theory and Practice of Revenue Management*, Springer (2005)

[9] Kevin Pak, Nanda Piersma, *Overview of OR Techniques for Airline Revenue Management*, Statistica Neerlandica 56/4 479-495 (2002)

[10] Paul Goldman, Richard Freling, Kevin Pak, Nanda Piersma, *Models and Techniques for Hotel Revenue Management using Rolling Horizon* (2001)

[11] Timothy Kevin Baker, David A. Collier, *A Comparative Revenue Management Analysis of Hotel Yield Management Heuristics*, Decision Sciences 30/1 (1999)

[12] Sanne V. de Boer, Richard Freling, Nanda Piersma, *Stochastic Programming for Multiple-Leg Network Revenue Management*, European Journal of Operational Research (2002)

[13] Stephen I. Harewood, *Managing a hotel's perishable inventory using bid prices*, International Journal of Operations & Production Management (2006)

[14] Weatherford, L., Length-of-Stay Heuristics: Do they Really Make a Difference, Cornell Hotel and Restaurant Administration Quarterly, 36/6 70-79 (1995)