Az optimális önrész a bonus-malus rendszerben

Diplomamunka

Írta: Retteghy Orsolya

Alkalmazott matematikus szak

Témavezető:

Arató Miklós, egyetemi docens

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2009

Tartalomjegyzék

1. Bevezető **1**

2. Bonus-malus rendszer **3**

2.1. Kármentességi díjengedmény 3

2.2. Károkozás miatti pótdíj 4

2.3. Új belépők 4

3. Módszer **6**

3.1. A bonus-malus kiskapui 6

3.2. Stratégia 7

3.3. A lejtő módszer 7

4. Lépések **9**

4.1. A biztosító által kifizetett károk számának valószínűsége 9

4.2. Kifizetett károk számának várható értéke 15

4.3. Várható kárnagyság 21

4.4. Az alapdíj meghatározása 22

5. Eredmények **23**

5.1. Az optimális eredmények Exponenciális kárnagyság esetén 23

5.2. Az optimális eredmények Pareto kárnagyság esetén 24

6. Új tényezők **26**

6.1. Új kárszám eloszlás 26

6.2. Az idő 26

7. Összefoglalás **28**

Ábrák jegyzéke

4.1. $\widetilde{d}_1$ alatti károk valószínűsége és az átlagos kárszám függvénye 16
4.2. $\widetilde{d}_2$ alatti károk valószínűsége és az átlagos kárszám függvénye 17
4.3. $\widetilde{d}_3$ alatti károk valószínűsége és az átlagos kárszám függvénye 19
4.4. $\widetilde{d}_4$ alatti károk valószínűsége és az átlagos kárszám függvénye 21

5.1. Exponenciális és Pareto eloszlás feltételezése melletti összeghatárok . 25

6.1. A $\widetilde{d}_1$ értékei különböző kárszámok függvényében, Exponenciális és Pareto eloszlás feltételzése mellett 26

1. fejezet

Bevezető

Minden autó tulajdonosa találkozott már a kötelező gépjármű-felelősségbiztosítással. A KGFB-t ahogy a nevében is benne van kötelező minden gépkocsi üzembentartójának igénybe venni a törvény szerint.
Egy baleset okozása nagyon megviseli az embereket, mégha csak egy kis koccanásról is van szó. De az első nagy megrázkodtatás után, érdemes elgondolkodnunk rajta, hogy mekkora kárt okoztunk. Természetesen kár mértékénél kizárólag vagyoni kárról beszélünk. Előfordulhat ugyanis, hogy a kár összege nem haladja meg az éves díjunk felét se. Természetesen a biztosító a kár méretétül függetlenül büntet minket a kiszabott díjpótlékkal.
Ebben az esetben felmerül egy olyan lehetőség, hogy mi fizessük ki az okozott kárt a biztosító helyett. Cserébe a bíztosító nem terhel ránk magasabb díjat, hanem továbbra is kármentesnek tekint minket.
Csakhogy megtörténhet, hogy az év további szakaszában szerencsétlenségünkre újabb kárt okozunk. Ekkor a biztosító mégiscsak sújt minket díjpótlékkal, Ugyan nem akkorával, mintha 2 kárt okoztunk volna, de talán jobban jártunk volna, ha az első kárt mégsem mi fizetjük ki. Persze előfordulhat az is, hogy mindkét kárunk olyan csekély, hogy a legjobb ha mindet kifizetjük.
Másrészt viszont a gyakori károkozók esetében előfordulhat, hogy a következő évben a legalacsonyabb bónusz-osztályban kezdhetjük az évet, ami azt jelenti, hogy magasabb díjat már nem szabhat ki ránk a bíztosító. Ilyenkor nyilvánvalósan, egy 20 Ft értékű kárt se érdemes kifizetnünk. Ezzel szemben, egy "jó vezető" esetében talán mindegyiket ki kéne fizetnünk.
Az lenne a cél, hogy megelőlegezzünk egy olyan stratégiát, amelyel vélhetően a legjobban járunk.
Azt szeretnénk kideríteni, hogy egy adott bónusz-osztályba egy adott kárszám után, mekkora az az összegű kár maximuma, amit még nekünk kellene kifizetnünk, ahhoz,

hogy várhatóan a legtöbb pénzt spóroljuk meg hosszútávon.
Ehhez rengeteg számolásra lesz majd szükség. Egyrészt meg kell állapítani, hogy milyen valószínűségekkel mozgunk majd ezzel a stratégiával a bonus-malus rendszerben, ami a biztosítási díj meghatározására szolgál. Másrészt meg kell tudnunk jósolni, hogy várhatóan mennyit költünk majd a károk kifizetésére. Ehhez szükségünk lesz a kárszám illetve a kárnagyság eloszlására [1]. Ebből a 2 összetevőből próbáljuk meg kitalálni az optimális stratégiát.
Első lépésben megismerkedünk a magyar bonus-malus rendszer szabályaival és lehetőségeivel [1], [2]. Bemutatjuk a károk száma és a bonus-fokozatok közti kapcsolatot. Azután, felírjuk a stratégiát általánosan, ismeretlen összegekkel. Végül kiszámítva a várható költséget a változók segítségével, megpróbáljuk az optimalizálni [3], hogy végül megkapjuk a kívánt értékeket.
Sajnos előfordulhat, hogy a stratégiánk nem válik be, közbe szól a balsors, és minden óvatosságunk ellenére a vártnál több vagy nagyobb balesetet okozunk, amivel tönkretehetjük a szépen felépített pénzmegatakarítási szándékunkat.
Mindenkinek kellemes és balesetmentes vezetést kívánok!

2. fejezet

Bonus-malus rendszer

Minden magyarországi telephelyű gépjármű üzemben tartója köteles az e rendeletben és mellékleteiben foglalt feltételek szerinti felelősségbiztosítási szerződést kötni, és azt folyamatos díjfizetéssel hatályban tartani. Gépjármű a Magyar Köztársaság területén kizárólag e feltételek fennállása esetén üzemeltethető.(190/2004. (VI. 8.) Korm. rendelet 2.§ (1).bek.)
Az üzemben tartó jogosult arra, hogy a biztosítónak a teljes kárkifizetés összegéről szóló írásbeli értesítését követő hat héten belül a teljes kárösszeget a biztosítónak megfizesse, és így a bonus-malus osztályba sorolását ne rontsa.(190/2004. (VI. 8.) Korm. rendelet III.számű melléklet 9.)

Európában általánosan elterjedt, hogy a gépjármű-üzembentartókat un. bonus-malus osztályba kell sorolni (2.1), és az abban elért fokozatuk alapján kerül sor a biztosítási díj megállapítására. A bonus-malus fokozatba történő besorolást a biztosítók nyilvántartják, így ha valaki másik biztosítót választ, bónusz fokozatát viszi magával az új biztosítóhoz.
Magyarországon 2008. január 1-től a megfigyelési időszakok a naptári évhez igazodnak. Tehát 2009-ben a megfigyelési időszak: 2008.01.01-2008.12.31. Továbbiakban a magyar bonus-malus rendszerrel foglalkozunk.

2.1. Kármentességi díjengedmény

Ha a gépjárművel kapcsolatban a megfigyelési időszakban kárkifizetés nem történt, vagy a károsult(tak)nak kifizetett teljes kártérítési összeget a károkozó gépjármű üzembentartója (biztosított) az erről szóló értesítést követő hatvan napon belül saját elhatározásából visszafizette a biztosító társaságnak, akkor az üzembentartó kármentességi díjengedményre jogosult, amely az jelenti, hogy besorolási fokozata 1 fokozattal javul a megfigyelési időszakot követő év január 1-jével. Kivételt képeznek azok, akik már elérték a legmagasabb, a B10-es fokozatot. Ebben az esetben nincs több díjengedmény.

fokozat	díjszorzó
M4	2
M3	1.65
M2	1.35
M1	1.15
A0	1
B1	0.95
B2	0.9
B3	0.85
B4	0.8
B5	0.75
B6	0.7
B7	0.65
B8	0.6
B9	0.55
B10	0.5

2.1. táblázat. Bonus-malus fokozatok

2.2. Károkozás miatti pótdíj

Ha a megfigyelési időszakban a gépjárművel bármikor okozott kárral kapcsolatban első kárkifizetés történt, a megfigyelési időszakot követő naptári évben az üzembentartó az első kárkifizetések számától függően pótdíjat köteles fizetni, egy figyelembe vett kár esetén két fokozatot, két figyelembe vett kár esetén négy fokozatot, három figyelembe vett kár esetén hat fokozatot romlik a szerződő bonus-malus besorolása a tárgyévihez képest. Ha a szerződő négy figyelembe vett kárt okozott, akkor az M4-es bonus-malus osztályba kerül.

2.3. Új belépők

A bonus-malus rendszer az üzembentartó személyéhez kötődik, és nem a gépjárműhez. Ennek megfelelően a gépjármű eladása, cseréje stb. esetén (amelyek a kötelező felelősségbiztosítási szerződés megszűnését eredményezik), az új üzembentartóra "nem száll át" a korábbi kötelező gépjármű-felelősségbiztosítási szerződés alapján elért bonus-malus fokozat.

Új belépőnek minősül az, aki két éven belül nem volt azonos gépjármű kategóriába tartozó kötelező gépjármű-felelősségbiztosítás szerződője. Új belépő esetén a szerződés bonus-malus besorolása csak A0 lehet.

Jelöljük Z_n-nel egy biztosítás n-edik évi díjfokozatát. Feltesszük, hogy

$$P(Z(n) = i | Z(0), Z(1), \cdots, Z(n-1)) = P(Z(n) = i | Z(n-1)),$$

tehát $Z(n)$ Markov-lánc. A magyar rendszer esetén bármely $i \in I$ állapotból bármely $j \in I$ állapotba pozitív valószínűséggel eljuthatunk, és $lnko\{n : P(Z(n) = i | Z(0) = i)\} = 1$. Ebben az esetben Z_n egy irreducibilis, aperiodikus, véges állapotterű Markov-lánc.

Feltesszük, hogy a kárszám eloszlása λ paraméterű Poisson-eloszlás.

p_i: i darab kár okozásának valószínűsége $= \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda}$

Az átmenetvalószínűségek mátrixát a 2.2-es táblázatban mutatjuk be.

	M4	M3	M2	M1	A0	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
M4	$1-p_0$	p_0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M3	$1-p_0$	0	p_0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M2	$1-p_0$	0	0	p_0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M1	$1-p_0-p_1$	p_1	0	0	p_0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A0	$1-p_0-p_1$	0	p_1	0	0	p_0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B1	$1-p_0-p_1-p_2$	p_2	0	p_1	0	0	p_0	0	0	0	0	0	0	0	0
B2	$1-p_0-p_1-p_2$	0	p_2	0	p_1	0	0	p_0	0	0	0	0	0	0	0
B3	$1-p_0-p_1-p_2-p_3$	p_3	0	p_2	0	p_1	0	0	p_0	0	0	0	0	0	0
B4	$1-p_0-p_1-p_2-p_3$	0	p_3	0	p_2	0	p_1	0	0	p_0	0	0	0	0	0
B5	$1-p_0-p_1-p_2-p_3$	0	0	p_3	0	p_2	0	p_1	0	0	p_0	0	0	0	0
B6	$1-p_0-p_1-p_2-p_3$	0	0	0	p_3	0	p_2	0	p_1	0	0	p_0	0	0	0
B7	$1-p_0-p_1-p_2-p_3$	0	0	0	0	p_3	0	p_2	0	p_1	0	0	p_0	0	0
B8	$1-p_0-p_1-p_2-p_3$	0	0	0	0	0	p_3	0	p_2	0	p_1	0	0	p_0	0
B9	$1-p_0-p_1-p_2-p_3$	0	0	0	0	0	0	p_3	0	p_2	0	p_1	0	0	p_0
B10	$1-p_0-p_1-p_2-p_3$	0	0	0	0	0	0	0	p_3	0	p_2	0	p_1	0	p_0

2.2. táblázat. Átmenetvalószínűségmátrix

3. fejezet

Módszer

3.1. A bonus-malus kiskapui

Mivel a cél az, hogy a költségeket minimálisra csökkentsük, igénybe vehetjük a nem tökéletes rendszer által adta lehetőségeket. Ha málusz osztályba jutnánk, akkor van mód arra, hogy helyette A0 fokozatba kerüljünk. Például: Új belépőknek álcázhatjuk magunkat, átíratjuk az autót másra. Ezért a 15 bónusz-málusz fokozat helyett a továbbiakban csak 11-gyel számolunk (3.1).

fokozat	díjszorzó
A0	1
B1	0.95
B2	0.9
B3	0.85
B4	0.8
B5	0.75
B6	0.7
B7	0.65
B8	0.6
B9	0.55
B10	0.5

3.1. táblázat. Bonus fokozatok

3.2. Stratégia

Amint azt a bevezetőben említettük, a célunk az, hogy a költségeket minimalizáljuk. Tegyük fel, hogy egy X nagyságú kárt okozunk. Ha $X < b_{ij}$ akkor kifizetjük a kárt, ha nagyobb, akkor a biztosítóra hagyjuk, és vállaljuk a bonus fokozatunk csökkenését. A cél az, hogy meghatározzuk, azokat az összeghatárokat, ami alatt magunkra vállaljuk a károk kifizetését.
i: aktuális bonus fokozatunk,
j: az eddig okozott károk száma az adott biztosítási időszakban.
A b_{ij}-ket úgy kellene meghatározni, hogy a kárkifizetések és KGFB díjak összege minimális legyen. Új belépőként 11 évre előre tervezünk. A belépésünk éve a 0. év, és további 10 évet vizsgálunk, mert ez alatt az idő alatt, minden fokozatot lehetőségünk van megjárni.
λ: az átlagos éves kárszám.

Ezzel az új módszerrel az átmenetvalószínűségek módosulnak, mert akkor is feljebb lépünk, ha az összes kárt amit okozunk kifizetjük. Tehát akkor lesz 0 db kárunk, ha vagy nem okozunk kárt, vagy az összes kár amit okozunk olyan kicsi, hogy érdemes inkább nekünk kifizetni. Az összes többi kárszám valószínűsége is módosul, mert azoknál is előfordulhatnak olyan károk, amelyeket nem a biztosítóval fizettetünk ki. Ha kiszámoljuk ezeknek a valószínűségét, akkor kicserélve a régi értékeket az átmenetvalószínűség mátrixban követni tudjuk bonus fokozatunk változását a 10 év alatt. Az új kárszámeloszlások a továbbiakban a bonus fokozattól is függnek, mivel minden osztályban más-más lehet az optimális összeg ami alatt a kárt kifizetjük.
Továbbá meg kell határoznunk, hogy várhatóan hány kárt fogunk kifizetni bizonyos összeghatárok alatt, mert ezentúl a díjakon kívül ezek is a mi költségeinket terhelik. Ezek az összeghatárok egy bonus osztályon belül is változhatnak, attól függően, hogy hány kárt okoztunk, amit nem fizettünk ki.
Végül meg kell határoznunk, hogy az összeghatár alatti károk (amit mi térítünk meg), várhatóan mekkorák. Két különböző káreloszlást is összehasonlítunk: Exponenciális és Pareto.

3.3. A lejtő módszer

A számolások elvégzése után egy 44 ismeretlenből álló egyenletrendszerhez jutunk, ahol a változók a különböző összeghatárokhoz tartozó valószínűségek. Azaz, azok a $d_{i,j}$ értékek amik megegyeznek a $p(y < \widetilde{d_{i,j}})$ valószínűségekkel, ahol y a kárnagyság

valószínűségi változója, az i és a j paraméterek pedig azt jelölik, hogy az i-edik bonus fokozatban járunk, $j-1$ db kárszámmal. Ennek a 44 ismeretlenes egyenletrendszernek a kiszámításához egy numerikus eszközhöz fogunk folyamodni, amellyel, reményeink szerint, jól meg tudjuk közelíteni az optimális értékeket [3].
A szakdolgozatnak nem témája a lejtő módszer részletes ismertetése, és célravezetőségének bizonyítása, ezért csak nagy vonalakban mutatjuk be, miről is van tulajdonképpen szó.

Adott $g(\mathbf{x}) : D \to \mathbf{R}$ folytonos függvény, ahol D korlátos és zárt halmaz $\mathbf{R}^n$-ben. Keresendő lokális (vagy totális) $\mathbf{x}_*$ minimumhely, vagyis olyan $\mathbf{x}_* \in D$ amelyre

$$g(\mathbf{x}) \geq g(\mathbf{x}_*)$$

teljesül az $\mathbf{x}_*$ valamely környezetében.

Definíció. Egy $\mathbf{p} \neq 0$ vektort a $g(\mathbf{x})$ függvény *lejtőjének* nevezzünk valamely $\mathbf{x}$ helyen, ha megadható olyan $\delta > 0$, hogy minden $0 < h < \delta$-ra

$$g(\mathbf{x} + h\mathbf{p}) < g(\mathbf{x}),$$

vagyis $g(x)$ lokálisan csökken a $\mathbf{p}$ irányában.

Tétel. Tegyük fel, hogy $g(\mathbf{x})$ parciálisan deriválható az $\mathbf{x}$ helyen. Ekkor, ha

$$|\text{grad } g(\mathbf{x})|^T \mathbf{p} < 0$$

akkor $\mathbf{p}$ lejtő $\mathbf{x}$-ben. A minimum keresésére az alábbi iterációt értelmezzük, amely az optimális lejtő módszerek általános alakja: adott $\mathbf{x}_0 \in D$ kezdőközelítés esetén legyen

$$\mathbf{x}_{m+1} := \mathbf{x}_m - \alpha_m \text{grad } g(\mathbf{x}_m) \qquad (m = 0, 1, \cdots)$$

ahol $\lambda = \alpha_m$-et abból a feltételből határozzuk meg, hogy

$$g(\mathbf{x}_{m+1}) = \min_{\lambda > 0} g(\mathbf{x}_m) - \lambda \cdot \text{grad } g(\mathbf{x}_m)$$

Az utóbbi ún. vonalmenti minimum biztosan létezik és

$$g(\mathbf{x}_{m+1}) < g(\mathbf{x}_m) \qquad (m = 0, 1, \cdots)$$

Esetünkben $\mathbf{x}_m$ a valószínűségek 11×4-es mátrixa. A g függvény pedig a költségünk függvénye lesz. Tehát ezzel az eljárással fogunk közelíteni a függvény minimumához.

4. fejezet

Lépések

4.1. A biztosító által kifizetett károk számának valószínűsége

0 kár valószínűsége. 0 kárunk úgy lehet, hogy egyáltalán nem okoztunk kárt, vagy az összes kár amit okoztunk $\widetilde{d_{i1}}$ alatt volt. Egyelőre nem teszünk különbséget az osztályok között: $\widetilde{d_{ij}}$ helyett $\widetilde{d_j}$-t használunk, ahol $j-1$ az eddig okozott, biztosító által megtérített károk száma.
η: az eredeti kárszám, feltételezésünk szerint Poisson eloszlású valószínűségű változó.
ξ: az új kárszám valószínűségi változója.

$$p(\xi = 0) = \sum_{k=0}^{\infty} p(\xi = 0|\eta = k) \cdot p(\eta = k)$$

$$p(\eta = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$p(\xi = 0|\eta = k) = (p(y < \widetilde{d_1}))^k$$

Ebből

$$p(\xi = 0) = \sum_{k=0}^{\infty} (p(y < \widetilde{d_1}))^k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(p(y < \widetilde{d_1})\lambda)^k}{k!} \cdot e^{-p(y<\widetilde{d_1})\lambda} \cdot e^{-(1-p(y<\widetilde{d_1}))\lambda} =$$

$$= e^{-(1-p(y<\widetilde{d_1}))\lambda}$$

Tehát

$$p(\xi = 0) = e^{-(1-d_1)\lambda}$$

Bevezetünk egy új jelölést:

$$d_j = p(y < \widetilde{d_j})$$

1 kár valószínűsége. 1 kárunk úgy lehet, hogy van $\widetilde{d_1}$ feletti kár, utána már csak $\widetilde{d_2}$ alatti károkat okozunk.

$$p(\xi = 1) = \sum_{k=1}^{\infty} p(\xi = 1|\eta = k) \cdot p(\eta = k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{k} d_1^{l-1} \cdot (1 - d_1) \cdot d_2^{k-l} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{k} \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{l-1} \cdot (1 - d_1) \cdot d_2^{k-1} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

Összegezzük a mértani sort

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^k - 1}{\frac{d_1}{d_2} - 1} \cdot (1 - d_1) \cdot d_2^{k-1} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= \frac{1 - d_1}{d_1 - d_2} \cdot (\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda d_1)^k}{k!} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda d_2)^k}{k!}) \cdot e^{-\lambda} =$$

$$= \frac{1 - d_1}{d_1 - d_2}((1 - e^{-\lambda d_1}) \cdot e^{-\lambda(1-d_1)} - (1 - e^{-\lambda d_2}) \cdot e^{-\lambda(1-d_2)})$$

Tehát

$$p(\xi = 1) = \sum_{k=1}^{\infty} p(\xi = 1|\eta = k) \cdot p(\eta = k) =$$

$$= \frac{1 - d_1}{d_1 - d_2}(e^{-\lambda(1-d_1)} - e^{-\lambda(1-d_2)})$$

2 kár valószínűsége. 2 kárunk úgy lehet, hogy van $\widetilde{d_1}$ feletti kár, utána van $\widetilde{d_2}$ feletti kár, utána már csak $\widetilde{d_3}$ alatti károkat okozunk.

$$p(\xi = 2) = \sum_{k=2}^{\infty} p(\xi = 2|\eta = k) \cdot p(\eta = k) =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l=1}^{k-1} d_1^{l-1} \cdot (1 - d_1) \cdot \sum_{m=l+1}^{k} d_2^{m-1-l} \cdot (1 - d_2) \cdot d_3^{k-m} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l=1}^{k-1} d_1^{l-1} \cdot (1 - d_1) \cdot \sum_{m=l+1}^{k} \left(\frac{d_2}{d_3}\right)^{m-1-l} \cdot (1 - d_2) \cdot d_3^{k-l-1} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

Összegezzük az utolsó $\sum$-mát!

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l=1}^{k-1} d_1^{l-1} \cdot (1-d_1) \cdot \frac{\frac{d_2}{d_3}^{k-l} - 1}{d_2 - d_3} \cdot (1-d_2) \cdot d_3^{k-l} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l=1}^{k-1} d_1^{l-1} \cdot (1-d_1) \cdot \frac{d_2^{k-l} - d_3^{k-l}}{d_2 - d_3} \cdot (1-d_2) \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{d_1}{d_2}^{l-1} \cdot \frac{(1-d_1) \cdot (1-d_2)}{d_2 - d_3} \cdot d_2^{k-1} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{d_1}{d_3}^{l-1} \cdot \frac{(1-d_1) \cdot (1-d_2)}{d_2 - d_3} \cdot d_3^{k-1} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

Összegezzük a mértani sorokat!

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1-d_1) \cdot (1-d_2)}{d_2 - d_3} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot \left(\frac{d_1^{k-1} - d_2^{k-1}}{d_1 - d_2} \cdot d_2 - \frac{d_1^{k-1} - d_3^{k-1}}{d_1 - d_3} \cdot d_3 \right) =$$

$$= \frac{(1-d_1) \cdot (1-d_2)}{d_2 - d_3} \left(\frac{(1 - e^{-\lambda d_1} - \lambda d_1 \cdot e^{-\lambda d_1}) \cdot \frac{d_2}{d_1} \cdot e^{-\lambda(1-d_1)} - (1 - e^{-\lambda d_2} - \lambda d_2 \cdot e^{-\lambda d_2}) \cdot e^{-\lambda(1-d_2)}}{d_1 - d_2} \right) -$$

$$- \frac{(1-d_1) \cdot (1-d_2)}{d_2 - d_3} \left(\frac{(1 - e^{-\lambda d_1} - \lambda d_1 \cdot e^{-\lambda d_1}) \cdot \frac{d_3}{d_1} \cdot e^{-\lambda(1-d_1)} - (1 - e^{-\lambda d_3} - \lambda d_3 \cdot e^{-\lambda d_3}) \cdot e^{-\lambda(1-d_3)}}{d_1 - d_3} \right) =$$

$$= \frac{(1-d_1) \cdot (1-d_2)}{d_2 - d_3} \frac{(e^{-\lambda(1-d_1)} - e^{-\lambda}) \cdot \frac{d_2}{d_1} - (e^{-\lambda(1-d_2)} - e^{-\lambda})}{d_1 - d_2} -$$

$$\frac{(e^{-\lambda(1-d_1)} - e^{-\lambda}) \cdot \frac{d_3}{d_1} - (e^{-\lambda(1-d_3)} - e^{-\lambda})}{d_1 - d_3} =$$

$$= \frac{1}{d_1} \frac{(1-d_1) \cdot (1-d_2)}{d_2 - d_3} \frac{(e^{-\lambda(1-d_1)} - e^{-\lambda}) \cdot d_2 - (e^{-\lambda(1-d_2)} - e^{-\lambda}) \cdot d_1}{d_1 - d_2} -$$

$$- \frac{(e^{-\lambda(1-d_1)} - e^{-\lambda}) \cdot d_3 - (e^{-\lambda(1-d_3)} - e^{-\lambda}) \cdot d_1}{d_1 - d_3} =$$

$$= \frac{1}{d_1} \frac{(1-d_1) \cdot (1-d_2)}{d_2 - d_3} \frac{(e^{-\lambda(1-d_1)}) \cdot d_2 - (e^{-\lambda(1-d_2)}) \cdot d_1}{d_1 - d_2} -$$

$$- \frac{(e^{-\lambda(1-d_1)}) \cdot d_3 - (e^{-\lambda(1-d_3)}) \cdot d_1}{d_1 - d_3}$$

Tehát

$$p(\xi = 2) = \sum_{k=2}^{\infty} p(\xi = 2 | \eta = k) \cdot p(\eta = k) =$$

$$(1-d_1)(1-d_2) \left(\frac{e^{-\lambda(1-d_1)}}{(d_1-d_2)(d_1-d_3)} + \frac{e^{-\lambda(1-d_2)}}{(d_2-d_1)(d_2-d_3)} \right) + \frac{e^{-\lambda(1-d_3)}}{(d_3-d_2)(d_3-d_1)})$$

3 kár valószínűsége. 3 kárunk úgy lehet, hogy van $\widetilde{d_1}$ feletti kár, utána van $\widetilde{d_2}$ feletti kár, utána van $\widetilde{d_3}$ feletti kár, utána már csak $\widetilde{d_4}$ alatti károkat okozunk.

$$p(\xi=3)=\sum_{k=3}^{\infty}p(\xi=3|\eta=k)\cdot p(\eta=k)=$$

$$=\sum_{k=3}^{\infty}\sum_{l=1}^{k-2}d_1^{l-1}\cdot(1-d_1)\cdot\sum_{m=l+1}^{k-1}d_2^{m-1-l}\cdot(1-d_2)\cdot\sum_{n=m+1}^{k}d_3^{n-m-1}\cdot(1-d_3)\cdot d_4^{k-n}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=$$

Összegezzük az utolsó $\sum$-mát!

$$=\sum_{k=3}^{\infty}\sum_{l=1}^{k-2}d_1^{l-1}\cdot(1-d_1)\cdot\sum_{m=l+1}^{k-1}d_2^{m-1-l}\cdot(1-d_2)\cdot\frac{d_3^{k-m}-d_4^{k-m}}{d_3-d_4}\cdot(1-d_3)\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=$$

$$=\sum_{k=3}^{\infty}\sum_{l=1}^{k-2}d_1^{l-1}\cdot(1-d_1)\cdot\sum_{m=l+1}^{k-1}\left(\frac{d_2}{d_3}^{m-1-l}\cdot d_3^{k-l-1}-\frac{d_2}{d_4}^{m-1-l}\cdot d_4^{k-l-1}\right)\frac{(1-d_2)\cdot(1-d_3)}{d_3-d_4}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=$$

Újabb összegzés

$$=\sum_{k=3}^{\infty}\sum_{l=1}^{k-2}d_1^{l-1}\cdot(1-d_1)\cdot\left(\frac{d_2^{k-1-l}-d_3^{k-1-l}}{d_2-d_3}\cdot d_3-\frac{d_2^{k-1-l}-d_4^{k-1-l}}{d_2-d_4}\cdot d_4\right)\frac{(1-d_2)\cdot(1-d_3)}{d_3-d_4}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=$$

$$=\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{\frac{d_1^{k-2}-d_2^{k-2}}{d_1-d_2}\cdot d_2d_3-\frac{d_1^{k-2}-d_3^{k-2}}{d_1-d_3}\cdot d_3^2}{d_2-d_3}-\frac{\frac{d_1^{k-2}-d_2^{k-2}}{d_1-d_2}\cdot d_2d_4-\frac{d_1^{k-2}-d_4^{k-2}}{d_1-d_4}\cdot d_4^2}{d_2-d_4}\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{(1-d_1)\cdot(1-d_2)\cdot(1-d_3)}{d_3-d_4}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=$$

Ebből

$$=\frac{(1-e^{-\lambda d_1}-\lambda d_1\cdot e^{-\lambda d_1}-\frac{(\lambda d_1)^2}{2}\cdot e^{-\lambda d_1})\cdot e^{-\lambda(1-d_1)}\frac{d_3d_2}{d_1^2}}{(d_1-d_2)(d_2-d_3)}-$$

$$-\frac{(1-e^{-\lambda d_2}-\lambda d_2\cdot e^{-\lambda d_2}-\frac{(\lambda d_2)^2}{2}\cdot e^{-\lambda d_2})\cdot e^{-\lambda(1-d_2)}\frac{d_3}{d_2}}{(d_1-d_2)(d_2-d_3)}-$$

$$-\frac{(1-e^{-\lambda d_1}-\lambda d_1\cdot e^{-\lambda d_1}-\frac{(\lambda d_1)^2}{2}\cdot e^{-\lambda d_1})\cdot e^{-\lambda(1-d_1)}\frac{d_3^2}{d_1^2}}{(d_1-d_3)(d_2-d_3)}+$$

$$+\frac{(1-e^{-\lambda d_3}-\lambda d_3\cdot e^{-\lambda d_3}-\frac{(\lambda d_3)^2}{2}\cdot e^{-\lambda d_3})\cdot e^{-\lambda(1-d_3)}}{(d_1-d_3)(d_2-d_3)}-$$

$$-\frac{(1-e^{-\lambda d_1}-\lambda d_1\cdot e^{-\lambda d_1}-\frac{(\lambda d_1)^2}{2}\cdot e^{-\lambda d_1})\cdot e^{-\lambda(1-d_1)}\frac{d_4d_2}{d_1^2}}{(d_1-d_2)(d_2-d_4)}+$$

$$+\frac{(1-e^{-\lambda d_2}-\lambda d_2\cdot e^{-\lambda d_2}-\frac{(\lambda d_2)^2}{2}\cdot e^{-\lambda d_2})\cdot e^{-\lambda(1-d_2)}\frac{d_4}{d_2}}{(d_1-d_2)(d_2-d_4)}+$$

$$+\frac{(1-e^{-\lambda d_1}-\lambda d_1\cdot e^{-\lambda d_1}-\frac{(\lambda d_1)^2}{2}\cdot e^{-\lambda d_1})\cdot e^{-\lambda(1-d_1)}\frac{d_4^2}{d_1^2}}{(d_1-d_4)(d_2-d_4)}-$$

$$-\frac{(1-e^{-\lambda d_4}-\lambda d_4\cdot e^{-\lambda d_4}-\frac{(\lambda d_4)^2}{2}\cdot e^{-\lambda d_4})\cdot e^{-\lambda(1-d_4)}}{(d_1-d_4)(d_2-d_4)}$$

$$\cdot \frac{(1-d_1)\cdot(1-d_2)\cdot(1-d_3)}{d_3-d_4} =$$

$$= \frac{(1-e^{-\lambda d_1}-\lambda d_1\cdot e^{-\lambda d_1})\cdot e^{-\lambda(1-d_1)}\frac{d_2 d_3}{d_1^2}-(1-e^{-\lambda d_2}-\lambda d_2\cdot e^{-\lambda d_2})\cdot e^{-\lambda(1-d_2)}\frac{d_3}{d_2}}{(d_1-d_2)(d_2-d_3)} -$$

$$- \frac{(1-e^{-\lambda d_1}-\lambda d_1\cdot e^{-\lambda d_1})\cdot e^{-\lambda(1-d_1)}\frac{d_3^2}{d_1^2}-(1-e^{-\lambda d_3}-\lambda d_3\cdot e^{-\lambda d_3})\cdot e^{-\lambda(1-d_3)}}{(d_1-d_3)(d_2-d_3)} -$$

$$- \frac{(1-e^{-\lambda d_1}-\lambda d_1\cdot e^{-\lambda d_1}-)\cdot e^{-\lambda(1-d_1)}\frac{d_2 d_4}{d_1^2}-(1-e^{-\lambda d_2}-\lambda d_2\cdot e^{-\lambda d_2})\cdot e^{-\lambda(1-d_2)}\frac{d_4}{d_2}}{(d_1-d_2)(d_2-d_4)} +$$

$$+ \frac{(1-e^{-\lambda d_1}-\lambda d_1\cdot e^{-\lambda d_1})\cdot e^{-\lambda(1-d_1)}\frac{d_4^2}{d_1^2}-(1-e^{-\lambda d_4}-\lambda d_4\cdot e^{-\lambda d_4})\cdot e^{-\lambda(1-d_4)}}{(d_1-d_4)(d_2-d_4)}$$

$$\cdot \frac{(1-d_1)\cdot(1-d_2)\cdot(1-d_3)}{d_3-d_4} =$$

$$= \frac{(e^{-\lambda(1-d_1)}-e^{-\lambda}-\lambda d_1\cdot e^{-\lambda})\frac{d_2 d_3}{d_1^2}-(e^{-\lambda(1-d_2)}-e^{-\lambda}-\lambda d_2\cdot e^{-\lambda})\cdot\frac{d_3}{d_2}}{(d_1-d_2)(d_2-d_3)} -$$

$$- \frac{(e^{-\lambda(1-d_1)}-e^{-\lambda}-\lambda d_1\cdot e^{-\lambda})\frac{d_3^2}{d_1^2}-(e^{-\lambda(1-d_3)}-e^{-\lambda}-\lambda d_3\cdot e^{-\lambda})}{(d_1-d_3)(d_2-d_3)} -$$

$$- \frac{(e^{-\lambda(1-d_1)}-e^{-\lambda}-\lambda d_1\cdot e^{-\lambda})\frac{d_2 d_4}{d_1^2}-(e^{-\lambda(1-d_2)}-e^{-\lambda}-\lambda d_2\cdot e^{-\lambda})\cdot\frac{d_4}{d_2}}{(d_1-d_2)(d_2-d_4)} +$$

$$+ \frac{(e^{-\lambda(1-d_1)}-e^{-\lambda}-\lambda d_1\cdot e^{-\lambda})\frac{d_4^2}{d_1^2}-(e^{-\lambda(1-d_4)}-e^{-\lambda}-\lambda d_4\cdot e^{-\lambda})}{(d_1-d_4)(d_2-d_4)}$$

$$\cdot \frac{(1-d_1)\cdot(1-d_2)\cdot(1-d_3)}{d_3-d_4} =$$

Az $e^{-\lambda(1-d_1)}$ együtthatói összegezve:

$$d_2^2d_3 - d_2d_3d_4 - d_1^{-1}d_2^2d_3d_4 + d_1^{-1}d_2d_3d_4^2 - d_1^{-1}d_2^2d_3^2 + d_1^{-1}d_2d_3^2d_4 + d_1^{-2}d_2^2d_3^2d_4 - d_1^{-2}d_2d_3^2d_4^2$$

$$-d_2d_3^2 + d_3^2d_4 + d_1^{-1}d_2d_3^2d_4 - d_1^{-1}d_3^2d_4^2 + d_1^{-1}d_2^2d_3^2 - d_1^{-1}d_2d_3^2d_4 - d_1^{-2}d_2^2d_3^2d_4 + d_1^{-2}d_2d_3^2d_4^2$$

$$-d_2^2d_4 + d_2d_3d_4 + d_1^{-1}d_2^2d_3d_4 - d_1^{-1}d_2d_3^2d_4 + d_1^{-1}d_2^2d_4^2 - d_1^{-1}d_2d_3d_4^2 - d_1^{-2}d_2^2d_3d_4^2 + d_1^{-2}d_2d_3^2d_4^2$$

$$+d_2d_4^2 - d_3d_4^2 - d_1^{-1}d_2d_3d_4^2 + d_1^{-1}d_3^2d_4^2 - d_1^{-1}d_2^2d_4^2 + d_1^{-1}d_2d_3d_4^2 + d_1^{-2}d_2^2d_3d_4^2 - d_1^{-2}d_2d_3^2d_4^2$$

$$((d_1-d_2)(d_1-d_3)(d_1-d_4)(d_2^2d_3 - d_2^2d_4 + d_2d_4^2 - d_2d_3^2 + d_3^2d_4 - d_3d_4^2))^{-1}e^{-\lambda(1-d_1)} =$$

$$= d_2^2d_3 - d_2d_3d_4$$

$$-d_2d_3^2 + d_3^2d_4$$

$$-d_2^2d_4 + d_2d_3d_4$$

$$d_2d_4^2 - d_3d_4^2$$

$$((d_1-d_2)(d_1-d_3)(d_1-d_4)(d_2^2d_3 - d_2^2d_4 + d_2d_4^2 - d_2d_3^2 + d_3^2d_4 - d_3d_4^2))^{-1}e^{-\lambda(1-d_1)} =$$

A többi tag kiesik

$$= ((d_1 - d_2)(d_1 - d_3)(d_1 - d_4))^{-1} e^{-\lambda(1-d_1)}$$

Az $e^{-\lambda(1-d_2)}$ együtthatói összegezve:

$$-d_1^2 d_3 + d_1^2 d_2^{-1} d_3 d_4 + d_1 d_3 d_4 - d_1 d_2^{-1} d_3 d_4^2 + d_1 d_3^2 - d_1 d_2^{-1} d_3^2 d_4 - d_3^2 d_4 + d_2^{-1} d_3^2 d_4^2 +$$

$$+ d_1^2 d_4 - d_1^2 d_2^{-1} d_3 d_4 - d_1 d_3 d_4 + d_1 d_2^{-1} d_3^2 d_4 - d_1 d_4^2 + d_1 d_2^{-1} d_3 d_4^2 + d_3 d_4^2 - d_2^{-1} d_3^2 d_4^2$$

$$((d_1 - d_2)(d_2 - d_3)(d_2 - d_4)(d_1^2 d_3 - d_1^2 d_4 + d_1 d_4^2 - d_1 d_3^2 + d_3^2 d_4 - d_3 d_4^2))^{-1} e^{-\lambda(1-d_2)} =$$

$$-d_1^2 d_3 + d_1 d_3^2 - d_3^2 d_4 +$$

$$+ d_1^2 d_4 - d_1 d_4^2 + d_3 d_4^2$$

$$((d_1 - d_2)(d_2 - d_3)(d_2 - d_4)(d_1^2 d_3 - d_1^2 d_4 + d_1 d_4^2 - d_1 d_3^2 + d_3^2 d_4 - d_3 d_4^2))^{-1} e^{-\lambda(1-d_2)}$$

A többi tag kiesik

$$= (d_2 - d_1)(d_2 - d_3)(d_2 - d_4)^{-1} e^{-\lambda(1-d_2)}$$

Tehát

$$p(\xi = 3) = \sum_{k=3}^{\infty} p(\xi = 3 | \eta = k) \cdot p(\eta = k) =$$

$$= \left(\frac{e^{-\lambda(1-d_1)}}{(d_1 - d_2)(d_1 - d_3)(d_1 - d_4)} + \frac{e^{-\lambda(1-d_2)}}{(d_2 - d_1)(d_2 - d_3)(d_2 - d_4)} \right) \cdot (1 - d_1)(1 - d_2)(1 - d_3) +$$

$$+ \left(\frac{e^{-\lambda(1-d_3)}}{(d_3 - d_2)(d_3 - d_1)(d_3 - d_4)} + \frac{e^{-\lambda(1-d_4)}}{(d_4 - d_2)(d_4 - d_3)(d_4 - d_1)} \right) \cdot (1 - d_1)(1 - d_2)(1 - d_3)$$

Legalább 4 kár valószínűsége. Legalább 4 kárunk úgy lehet, hogy van $\widetilde{d_1}$ feletti kár, utána van $\widetilde{d_2}$ feletti kár, utána van $\widetilde{d_3}$ feletti kár, és utána van egy $\widetilde{d_4}$ feletti kár, és utána már mindegy milyen károkat okozunk, mert úgyis M4-be kerülünk.

A korábbi egyenletek szabályszerűségéből következtethetünk a következőre:

$$p(\xi \geq 4) = \sum_{k=4}^{\infty} p(\xi \geq 4 | \eta = k) \cdot p(\eta = k) =$$

$$= \sum_{k=4}^{\infty} \sum_{l=1}^{k-3} d_1^{l-1} \cdot (1-d_1) \cdot \sum_{m=l+1}^{k-2} d_2^{m-1-l} \cdot (1-d_2) \cdot \sum_{n=m+1}^{k-1} d_3^{n-m-1} \cdot (1-d_3) \cdot \sum_{o=n+1}^{k} d_4^{o-n-1} \cdot (1-d_4) \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

Tehát

$$\left(\frac{e^{-\lambda(1-d_1)}}{(d_1-1)(d_1-d_2)(d_1-d_3)(d_1-d_4)} + \frac{e^{-\lambda(1-d_2)}}{(d_2-1)(d_2-d_1)(d_2-d_3)(d_2-d_4)} \right) \cdot (1 - d_1)(1 - d_2)(1 - d_3)(1 - d_4) +$$

$$+ \left(\frac{e^{-\lambda(1-d_3)}}{(d_3-1)(d_3-d_2)(d_3-d_1)(d_3-d_4)} + \frac{e^{-\lambda(1-d_4)}}{(d_4-1)(d_4-d_2)(d_4-d_3)(d_4-d_1)} \right) \cdot (1-d_1)(1-d_2)(1-d_3)(1-d_4) + 1$$

A biztosító által kifizett károk számának valószínűségei könnyen ellenőrizhetők, mert az összegük 1.

Az új átmenetvalószínűségmátrixot bonyolultsága miatt külön-külön mutatjuk be..

- $q_{10,10} = e^{-(1-d_{10,1})\lambda}$
- $q_{i,i+1} = e^{-(1-d_{i,1})\lambda} \quad i = 1\dots 9$
- $q_{i,i-2} = \frac{1-d_1}{d_1-d_2}(e^{-\lambda(1-d_1)} - e^{-\lambda(1-d_2)}) \quad i = 4\dots 10$
- $(q_{i,i-4} = (1-d_{i,1})(1-d_{i,2})\left(\frac{e^{-\lambda(1-d_{i,1})}}{(d_{i,1}-d_{i,2})(d_{i,1}-d_{i,3})} + \frac{e^{-\lambda(1-d_{i,2})}}{(d_{i,2}-d_{i,1})(d_{i,2}-d_{i,3})} + \frac{e^{-\lambda(1-d_{i,3})}}{(d_{i,3}-d_{i,2})(d_{i,3}-d_{i,1})}\right)$

  $i = 6\dots 10$

- $q_{i,i-6} = \left(\frac{e^{-\lambda(1-d_{i,1})}}{(d_{i,1}-d_{i,2})(d_{i,1}-d_{i,3})(d_{i,1}-d_{i,4})} + \frac{e^{-\lambda(1-d_{i,2})}}{(d_{i,2}-d_{i,1})(d_{i,2}-d_{i,3})(d_{i,2}-d_{i,4})}\right) \cdot (1-d_{i,1})(1-d_{i,2})(1-d_{i,3}) +$
  $+\left(\frac{e^{-\lambda(1-d_{i,3})}}{(d_{i,3}-d_{i,2})(d_{i,3}-d_{i,1})(d_{i,3}-d_{i,4})} + \frac{e^{-\lambda(1-d_{i,4})}}{(d_{i,4}-d_{i,2})(d_{i,4}-d_{i,3})(d_{i,4}-d_{i,1})}\right) \cdot (1-d_{i,1})(1-d_{i,2})(1-d_{i,3})$

  $i = 8\dots 10$

- $q_{i,1} = 1 - \sum_{j=2}^{10} q_{i,j}$
- A többi elem 0.

Ha a mátrixot n-edik hatványra emeljük, és vesszük az első sorát, akkor megkapjuk, hogy A0-ból indulva n év után az egyes osztályokban milyen valószínűséggel fordulhatunk meg. Ezt szorozva a díjszorzók vektorával megkapjuk, hogy várhatóan mennyi díjat fogunk fizetni a 10 év alatt.
A díjak költségéhez még hozzá kell számolni azokat a károkat, amelyeket ki fogunk fizetni. Ehhez szükségünk lesz a várható kárszámra és a várható kárnagyságra.

4.2. Kifizetett károk számának várható értéke

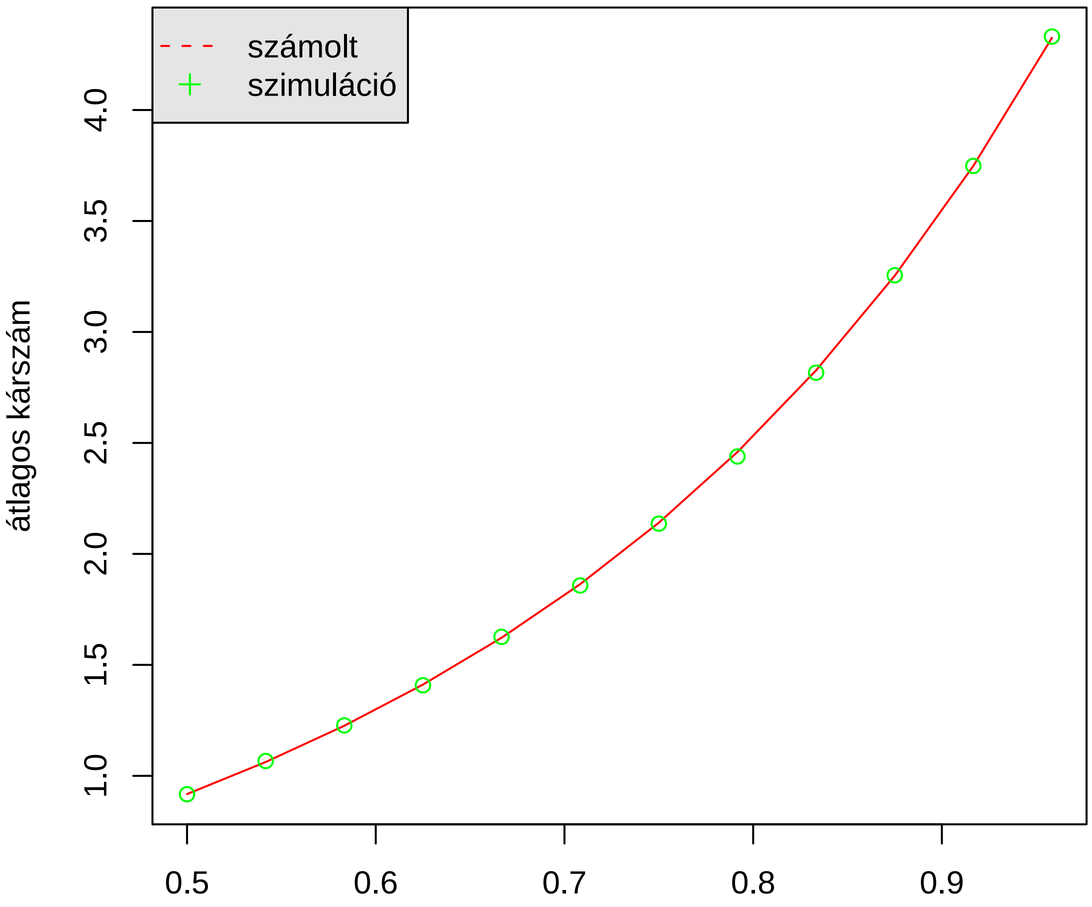
A továbbiakban először meghatározzuk az általunk kifizetett károk számának várható értékét. A számolások helyességét szimulációval ellenőrizzük, amit 1.000.000 mintán futtatunk le..

$\widetilde{d_1}$ alatti károk számának várható értéke. Legyen ψ_i a $\widetilde{d_i}$ alatti károk számának valószínűségi változója.

$$E_{\widetilde{d_1}} = \sum_{l=1}^{\infty} p(\psi_1 \geq l) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=l}^{\infty} d_1^l \cdot \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{k} d_1^l \cdot \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_1^{k+1}-d_1}{d_1-1} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \frac{d_1}{d_1-1} \cdot e^{-\lambda(1-d_1)} - \frac{d_1}{d_1-1}$$

A szimulációs ellenőrzést a 4.1-es ábrán mutatjuk be.



4.1. ábra. $\widetilde{d_1}$ alatti károk valószínűsége és az átlagos kárszám függvénye

$\widetilde{d_2}$ alatti károk számának várható értéke.

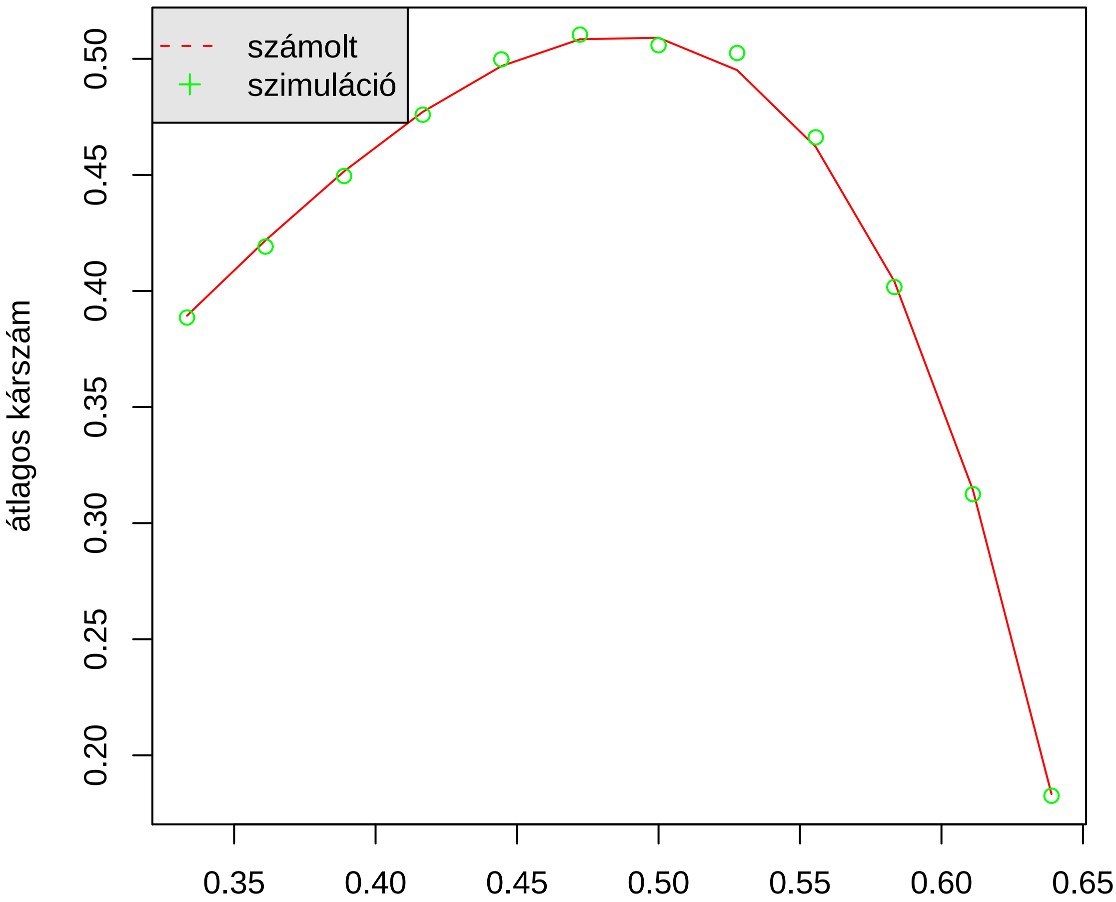
$$E_{\widetilde{d_2}} = \sum_{l=1}^{\infty} p(\psi_2 \geq l) =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=l+1}^{\infty} \sum_{m=0}^{k-l-1} d_1^m \cdot (1-d_1) \cdot d_2^l \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} =$$

Mértani sor összegzés

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=l+1}^{\infty} (1-d_1^{k-l}) \cdot d_2^l \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \left(- \sum_{k=l+1}^{\infty} d_1^{k-l} \cdot d_2^l \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} + \sum_{k=l+1}^{\infty} d_2^l \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \right) =$$



4.2. ábra. $\widetilde{d_2}$ alatti károk valószínűsége és az átlagos kárszám függvénye

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l=1}^{k-1} \left(\left(-\frac{d_2}{d_1} \right)^l \cdot \frac{(\lambda d_1)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} + d_2^l \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \right) =$$

Újabb összegzés

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{d_2^k d_1 - d_1^k d_2}{d_1 - d_2} + \frac{d_2^k - d_2}{d_2 - 1} \right) \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} =$$

Ebből

$$= \frac{d_1 e^{-\lambda(1-d_2)} - d_2 e^{-\lambda(1-d_1)}}{d_1 - d_2} + \frac{e^{-\lambda(1-d_2)} - d_2}{d_2 - 1} =$$

$$= \frac{d_2}{1-d_2} - e^{-\lambda(1-d_1)} \left(\frac{d_2}{d_1 - d_2} \right) + e^{-\lambda(1-d_2)} \left(\frac{d_2(1-d_1)}{(1-d_2)(d_1-d_2)} \right)$$

A szimulációs ellenőrzést a 4.2-es ábrán mutatjuk be.

$\widetilde{d_3}$ alatti károk számának várható értéke.

$$E_{\widetilde{d_3}} = \sum_{l=1}^{\infty} p(\psi_3 \geq l)$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=l+2}^{\infty} \sum_{m=0}^{k-l-2} \frac{d_1^{m+1} - d_2^{m+1}}{d_1 - d_2} \cdot (1-d_1)(1-d_2) \cdot d_3^l \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=l+2}^{\infty} \left(\frac{1 - d_1^{k-l-1}}{d_1 - d_2} \cdot d_1(1-d_2) - \frac{1 - d_2^{k-l-1}}{d_1 - d_2} \cdot d_2(1-d_1) \right) \cdot d_3^l \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} =$$

$$= \sum_{k=3}^{\infty} \sum_{l=1}^{k-2} \frac{d_1 - d_1 d_2 - d_2 + d_1 d_2}{d_1 - d_2} d_3^l \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} -$$

$$- \frac{1-d_2}{d_1-d_2} \cdot \left(\frac{d_3}{d_1}\right)^l \cdot \frac{(\lambda d_1)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} + \frac{1-d_1}{d_1-d_2} \cdot \left(\frac{d_3}{d_2}\right)^l \cdot \frac{(\lambda d_2)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} =$$

$$= \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{d_3^{k-1} - d_3}{d_3 - 1} - \frac{(1-d_2)d_1}{d_1 - d_2} \cdot \frac{d_3^{k-1} d_1 - d_1^{k-1} d_3}{d_3 - d_1} + \frac{(1-d_1)d_2}{d_1-d_2} \cdot \frac{d_3^{k-1} d_2 - d_2^{k-1} d_3}{d_3 - d_2} \right) \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} =$$

$$= \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{d_3^k - d_3^2}{d_3^2 - d_3} - \frac{(1-d_2)d_1}{d_1-d_2} \cdot \frac{d_3^k d_1^2 - d_1^k d_3^2}{d_3^2 d_1 - d_1^2 d_3} + \frac{(1-d_1)d_2}{d_1-d_2} \cdot \frac{d_3^k d_2^2 - d_2^k d_3^2}{d_3^2 d_2 - d_2^2 d_3} \right) \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} =$$

$$= \frac{d_3}{1-d_3} + e^{-\lambda(1-d_3)} \left(\frac{1}{d_3^2 - d_3} - \frac{(1-d_2)d_1^2}{(d_1-d_2)d_3(d_3-d_1)} + \frac{(1-d_1)d_2^2}{(d_1-d_2)d_3(d_3-d_2)} \right) -$$

$$- e^{-\lambda(1-d_1)} \left(\frac{(1-d_2)d_3}{(d_1-d_2)(d_3-d_1)} \right) + e^{-\lambda(1-d_2)} \left(\frac{(1-d_1)d_3}{(d_1-d_2)(d_3-d_2)} \right) - e^{-\lambda} \left(\frac{1-d_3^2}{d_3^2 - d_3} \right) -$$

$$- e^{-\lambda} \left(- \frac{(1-d_2)d_1^2}{(d_1-d_2)d_3(d_3-d_1)} + \frac{(1-d_1)d_2^2}{(d_1-d_2)d_3(d_3-d_2)} + \frac{(1-d_2)d_3}{(d_1-d_2)(d_3-d_1)} - \frac{(1-d_1)d_3}{(d_1-d_2)(d_3-d_2)} \right) -$$

$$- \lambda \cdot e^{-\lambda} \left(-1 - \frac{(1-d_1)d_2 - (1-d_2)d_1}{d_1 - d_2} \right) =$$

$$= \frac{d_3}{1-d_3} + e^{-\lambda(1-d_3)} \left(\frac{1}{d_3^2 - d_3} - \frac{(1-d_2)d_1^2(d_3-d_2) - (1-d_1)d_2^2(d_3-d_1)}{(d_1-d_2)d_3(d_3-d_1)(d_3-d_2)} \right) -$$

$$- e^{-\lambda(1-d_1)} \left(\frac{(1-d_2)d_3}{(d_1-d_2)(d_3-d_1)} \right) + e^{-\lambda(1-d_2)} \left(\frac{(1-d_1)d_3}{(d_1-d_2)(d_3-d_2)} \right) -$$

$$- e^{-\lambda} \left(\frac{1-d_3^2}{d_3^2 - d_3} + \frac{(1-d_2)(d_1+d_3)}{(d_1-d_2)d_3} - \frac{(1-d_1)(d_2+d_3)}{(d_1-d_2)d_3} \right) =$$

$$= \frac{d_3}{1-d_3} + e^{-\lambda(1-d_3)} \left(\frac{1}{d_3^2 - d_3} - \frac{d_1^2 d_3 - d_1^2 d_2 - d_1^2 d_2 d_3 + d_1^2 d_2^2 - d_2^2 d_3 + d_2^2 d_1 + d_2^2 d_1 d_3 - d_1^2 d_2^2}{(d_1-d_2)d_3(d_3-d_1)(d_3-d_2)} \right) +$$

$$+ e^{-\lambda(1-d_1)} \left(\frac{(1-d_2)d_3}{(d_1-d_2)(d_3-d_1)} \right) - e^{-\lambda(1-d_2)} \left(\frac{(1-d_1)d_3}{(d_1-d_2)(d_3-d_2)} \right) - e^{-\lambda} \left(\frac{1-d_3^2}{d_3^2-d_3} + \frac{1+d_3}{d_3} \right) =$$

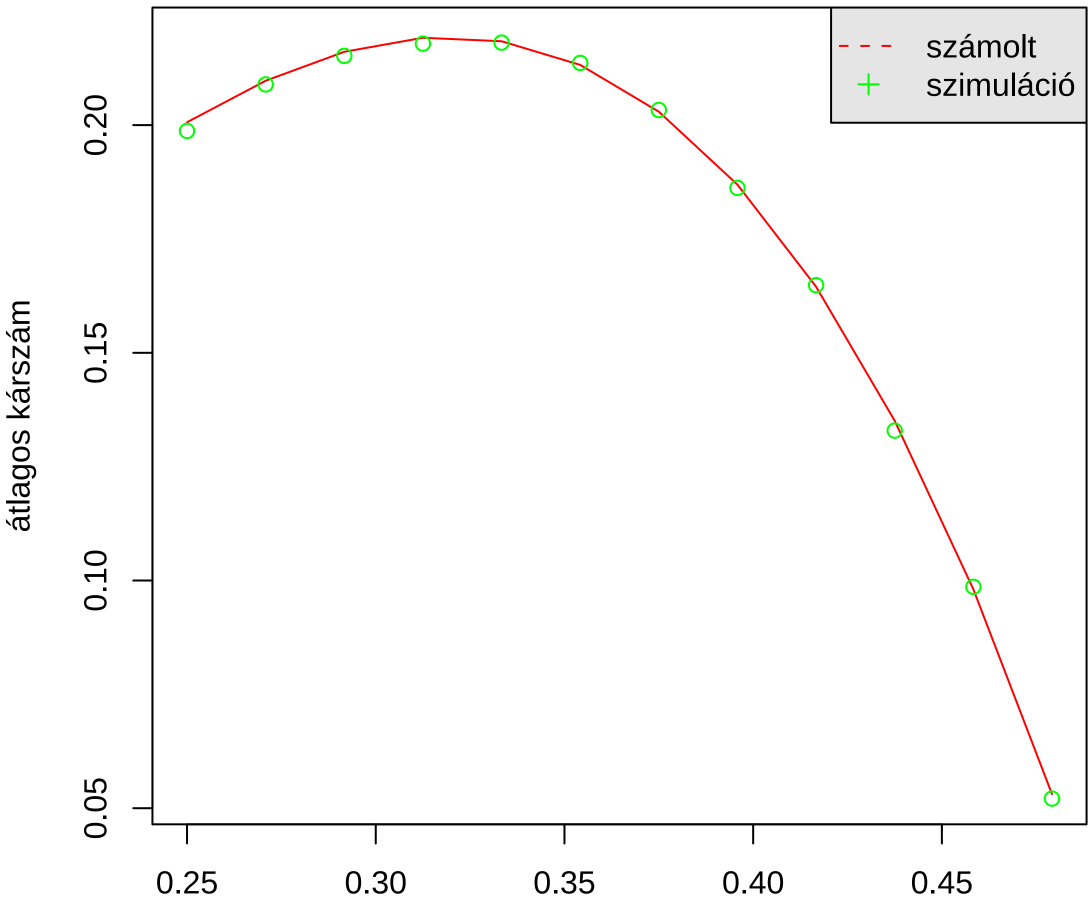
$$= \left(\frac{d_3^2 + d_1 d_2 - d_3 d_1 - d_3 d_2 - ((d_1+d_2)d_3^2 - d_1 d_2 d_3 - d_1 d_2 d_3^2 - (d_1+d_2)d_3 + d_1 d_2 + d_1 d_2 d_3)}{e^{\lambda(1-d_3)} \cdot (d_3-1) d_3 (d_3-d_1)(d_3-d_2)} \right) +$$

$$+ \frac{d_3}{1-d_3} - e^{-\lambda(1-d_1)} \left(\frac{(1-d_2)d_3}{(d_1-d_2)(d_3-d_1)} \right) + e^{-\lambda(1-d_2)} \left(\frac{(1-d_1)d_3}{(d_1-d_2)(d_3-d_2)} \right) - e^{-\lambda} \cdot \left(\frac{1 - d_3^2 + d_3^2 - 1}{d_3^2 - d_3} \right) =$$

$$= - e^{-\lambda(1-d_3)} \left(\frac{d_3(1-d_1)(1-d_2)}{(1-d_3)(d_1-d_3)(d_2-d_3)} \right) +$$

$$+ \frac{d_3}{1-d_3} - e^{-\lambda(1-d_1)} \left(\frac{(1-d_2)d_3}{(d_1-d_2)(d_1-d_3)} \right) + e^{-\lambda(1-d_2)} \left(\frac{(1-d_1)d_3}{(d_1-d_2)(d_2-d_3)} \right)$$

A szimulációs ellenőrzést a 4.3-es ábrán mutatjuk be.



4.3. ábra. $\widetilde{d_3}$ alatti károk valószínűsége és az átlagos kárszám függvénye

$\widetilde{d_4}$ alatti károk számának várható értéke.

$$E_{\widetilde{d_4}} = \sum_{l=1}^{\infty} p(\psi_4 \geq l)$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=l+3}^{\infty} \sum_{m=0}^{k-l-3} \left(\frac{d_1^{m+2}}{(d_1-d_2)(d_1-d_3)} + \frac{d_2^{m+2}}{(d_2-d_1)(d_2-d_3)} + \frac{d_3^{m+2}}{(d_3-d_1)(d_3-d_2)} \right) \cdot$$

$$\cdot (1-d_1)(1-d_2)(1-d_3) \cdot d_4^l \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=l+3}^{\infty} \left(\frac{(d_1^2 - d_1^{k-l})(1-d_2)(1-d_3)}{(d_1-d_2)(d_1-d_3)} + \frac{(d_2^2 - d_2^{k-l})(1-d_1)(1-d_3)}{(d_2-d_1)(d_2-d_3)} + \frac{(d_3^2 - d_3^{k-l})(1-d_1)(1-d_2)}{(d_3-d_1)(d_3-d_2)} \right)$$

$$\cdot d_4^l \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} =$$

$$= \sum_{k=4}^{\infty} \sum_{l=1}^{k-3} d_4^l \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} - \frac{(1-d_2)(1-d_3)}{(d_1-d_2)(d_1-d_3)} \cdot \left(\frac{d_4}{d_1}\right)^l \cdot \frac{(\lambda d_1)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} +$$

$$+ \frac{(1-d_1)(1-d_3)}{(d_1-d_2)(d_2-d_3)} \cdot \left(\frac{d_4}{d_2}\right)^l \cdot \frac{(\lambda d_2)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} - \frac{(1-d_1)(1-d_2)}{(d_1-d_3)(d_2-d_3)} \cdot \left(\frac{d_4}{d_3}\right)^l \cdot \frac{(\lambda d_3)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} =$$

$$= \sum_{k=4}^{\infty} \frac{d_4^{k-2} - d_4}{d_4 - 1} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} - \frac{d_1^2(1-d_2)(1-d_3)}{(d_1-d_2)(d_1-d_3)} \cdot \frac{d_4^{k-2} d_1 - d_1^{k-2} d_4}{d_4 - d_1} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} +$$

$$+ \frac{d_2^2(1-d_1)(1-d_3)}{(d_1-d_2)(d_2-d_3)} \cdot \frac{d_4^{k-2} d_2 - d_2^{k-2} d_4}{d_4 - d_2} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} - \frac{d_3^2(1-d_1)(1-d_2)}{(d_1-d_3)(d_2-d_3)} \cdot \frac{d_4^{k-2} d_3 - d_3^{k-2} d_4}{d_4 - d_3} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} =$$

$$= -\frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} \left(\frac{d_1^2(1-d_2)(1-d_3)(d_2-d_3) - d_2^2(1-d_1)(1-d_3)(d_1-d_3) + d_3^2(1-d_1)(1-d_2)(d_1-d_2)}{(d_1-d_2)(d_1-d_3)(d_2-d_3)} \right) +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} - \lambda \cdot e^{-\lambda} \left(-\frac{d_4+1}{d_4} + \frac{d_1(d_4+d_1)(1-d_2)(1-d_3)(d_2-d_3)}{d_4(d_1-d_2)(d_1-d_3)(d_2-d_3)} \right)$$

$$- \frac{d_2(d_4+d_2)(1-d_1)(1-d_3)(d_1-d_3) + d_3(d_4+d_3)(1-d_1)(1-d_2)(d_1-d_2)}{d_4(d_1-d_2)(d_1-d_3)(d_2-d_3)})$$

$$-e^{-\lambda} (-\frac{d_4^2+d_4+1}{d_4^2} + \frac{(d_4^2+d_4 d_1+d_1^2)(1-d_2)(1-d_3)(d_2-d_3)}{d_4^2(d_1-d_2)(d_1-d_3)(d_2-d_3)}$$

$$- \frac{(d_4^2+d_4 d_2+d_2^2)(1-d_1)(1-d_3)(d_1-d_3) + (d_4^2+d_4 d_3+d_3^2)(1-d_1)(1-d_2)(d_1-d_2)}{d_4^2(d_1-d_2)(d_1-d_3)(d_2-d_3)})$$

$$-e^{-\lambda(1-d_1)} \frac{(1-d_2)(1-d_3)d_4}{(d_1-d_2)(d_1-d_3)(d_1-d_4)} + e^{-\lambda(1-d_2)} \frac{(1-d_1)(1-d_3)d_4}{(d_1-d_2)(d_2-d_3)(d_2-d_4)} -$$

$$-e^{-\lambda(1-d_3)} \frac{(1-d_1)(1-d_2)d_4}{(d_1-d_3)(d_2-d_3)(d_3-d_4)} + \frac{d_4}{1-d_4} + e^{-\lambda(1-d_4)} \cdot ...$$

$$... = \frac{1}{d_4^3 - d_4^2} + \frac{d_1^3(1-d_2)(1-d_3)}{(d_1-d_2)(d_1-d_3)(d_1-d_4)d_4^2} -$$

$$- \frac{d_2^3(1-d_1)(1-d_3)}{(d_1-d_2)(d_2-d_3)(d_2-d_4)d_4^2} + \frac{d_3^3(1-d_1)(1-d_2)}{(d_1-d_3)(d_2-d_3)(d_3-d_4)d_4^2} =$$

$$= \frac{1}{d_4^3 - d_4^2} + \frac{d_1^3(1-d_2)(1-d_3)(d_2-d_3)(d_2-d_4)(d_3-d_4)}{(d_1-d_2)(d_1-d_3)(d_1-d_4)(d_2-d_3)(d_2-d_4)(d_3-d_4)d_4^2} -$$

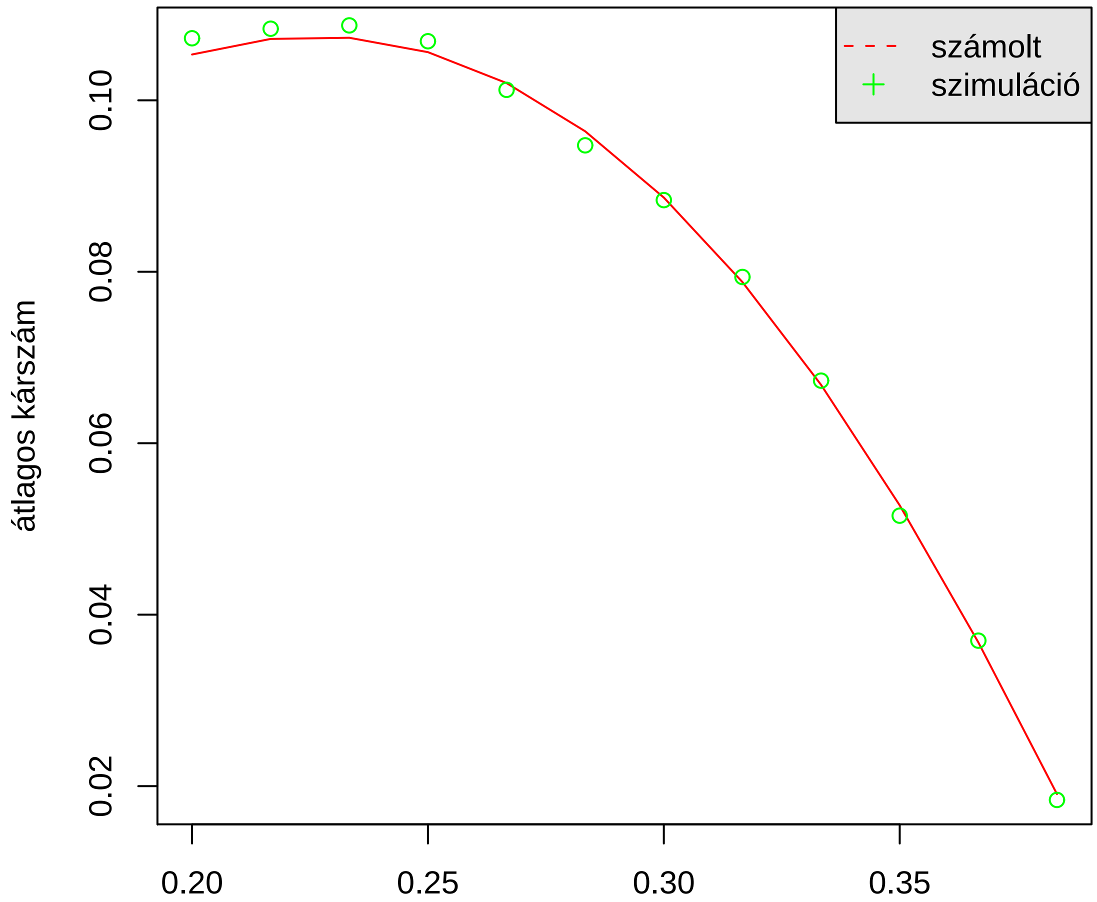
$$- \frac{d_2^3(1-d_1)(1-d_3)(d_1-d_3)(d_1-d_4)(d_3-d_4)}{(d_1-d_2)(d_1-d_3)(d_1-d_4)(d_2-d_3)(d_2-d_4)(d_3-d_4)d_4^2} +$$

$$+ \frac{d_3^3(1-d_1)(1-d_2)(d_1-d_2)(d_1-d_4)(d_2-d_4)}{(d_1-d_2)(d_1-d_3)(d_1-d_4)(d_2-d_3)(d_2-d_4)(d_3-d_4)d_4^2}$$

$$E_{\widetilde{d_4}} = e^{-\lambda(1-d_4)} \left(\frac{d_4(1-d_1)(1-d_2)(1-d_3)}{1-d_4(d_1-d_4)(d_2-d_4)(d_3-d_4)} \right) - e^{-\lambda(1-d_1)} \left(\frac{(1-d_2)(1-d_3)d_4}{(d_1-d_2)(d_1-d_3)(d_1-d_4)} \right) +$$

$$+ e^{-\lambda(1-d_2)} \left(\frac{(1-d_1)(1-d_3)d_4}{(d_1-d_2)(d_2-d_3)(d_2-d_4)} \right) - e^{-\lambda(1-d_3)} \left(\frac{(1-d_1)(1-d_2)d_4}{(d_1-d_3)(d_2-d_3)(d_3-d_4)} + \frac{d_4}{1-d_4} \right)$$

A szimulációs ellenőrzést a 4.4-es ábrán mutatjuk be.



4.4. ábra. $\widetilde{d}_4$ alatti károk valószínűsége és az átlagos kárszám függvénye

4.3. Várható kárnagyság

Az általunk kifizett károk nagyságának várható értékére is szükségünk lesz. A várható kárnagyság meghatározásánál figyelembe kell vennünk, hogy csak egy bizonyos összeg alatt mozoghat.

$$E(X|X<\widetilde{d}_i)$$

$$E(X)=E(X|X<\widetilde{d}_i)\cdot P(X<\widetilde{d}_i)+E(X|X>\widetilde{d}_i)\cdot P(X>\widetilde{d}_i)$$

$$E(X|X<\widetilde{d}_i)=\frac{E(X)-E(X|X>\widetilde{d}_i)\cdot P(X>\widetilde{d}_i)}{P(X<\widetilde{d}_i)}$$

Exponenciális káreloszlás. Az örökifjú tulajdonság miatt: $E(X|X > \widetilde{d_i}) = \frac{1}{\mu} + \widetilde{d_i}$
$d_i = P(X < \widetilde{d_i}) = 1 - e^{-\mu\widetilde{d_i}}$ ebből: $\widetilde{d_i} = -\frac{ln(1-d_i)}{\mu}$

$$E(X|X < \widetilde{d_i}) = \frac{\frac{1}{\mu} - \left(\frac{1}{\mu} + \widetilde{d_i}\right) \cdot (1 - d_i)}{d_i} = \frac{\frac{1}{\mu} - \frac{1 - ln(1-d_i)}{\mu} \cdot (1 - d_i)}{d_i}$$

Pareto káreloszlás. $d_i = P(X < \widetilde{d_i}) = 1 - \left(\frac{\beta}{\beta + \widetilde{d_i}}\right)^{\alpha}$ ebből: $\widetilde{d_i} = \frac{\beta}{(1-d_i)^{-\alpha}} - \beta$ és $E(X) = \frac{\beta}{\alpha - 1}$ és
$\widetilde{d_i}$ feletti rész valószínűsége:

$$P(X < x|X > \widetilde{d_i}) = \frac{\left(\frac{\beta}{\beta + \widetilde{d_i}}\right)^{\alpha} - \left(\frac{\beta}{\beta + x + \widetilde{d_i}}\right)^{\alpha}}{\left(\frac{\beta}{\beta + \widetilde{d_i}}\right)^{\alpha}}$$

az új eloszlás $(\alpha, \beta + \widetilde{d_i})$ paraméterű Pareto.

$E(X|X > \widetilde{d_i}) = \frac{\beta + \widetilde{d_i}}{\alpha - 1} + \widetilde{d_i} = \frac{\beta + \alpha\widetilde{d_i}}{\alpha - 1}$

$$E(X|X < \widetilde{d_i}) = \frac{\frac{\beta}{\alpha - 1} - \frac{\beta + \alpha\left(\frac{\beta}{(1-d_i)^{-\alpha}} - \beta\right)}{\alpha - 1} \cdot (1 - d_i)}{d_i} = \beta\frac{\frac{1}{\alpha - 1} + (1 - \frac{\alpha((1-d_i)^{\alpha})}{\alpha - 1}) \cdot (1 - d_i)}{d_i}$$

4.4. Az alapdíj meghatározása

A kezdeti díj összegét, azaz az alapdíjat a várható károk összegéből fogjuk meghatározni. Amikor a biztosító meghatározza a díjakat, valószínüleg nem feltételezi, hogy az átlag ember efféle stratégiákhoz folyamodna, ezért csak az eredeti kárszám, illetve kárnagyság játszik szerepet az összeg meghatározásában. Sőt még a 15 bonus fokozatú rendszert fogjuk használni a számoláshoz.
Tehát abból indulunk ki, hogy az egy főre jutó átlagos díjnak fedeznie kell az egy főre jutó átlagos kár összegét. Az átlagos kárösszeget pedig úgy kapjuk, hogy az átlagos kárszámot szorozzuk az átlagos kárnagysággal.
Már csak az hiányzik, hogy megtudjuk, vajon hányszorosa az átlagos díj az alapdíjnak.
A stacionárius eloszlás közelíti legjobban, hogy az emberek hány százaléka tartózkodik az egyes osztályokban. A stacionárius eloszlást az átmenetvalószínűség mátrix $\lambda = 1$ sajátértékéhez tartozó baloldali sajátvektora adja.

$$\pi(\Pi - \lambda I) = 0$$

egyenletből könnyen számolható pl. a MAPLE-lel, ahol Π-vel az átmenetvalószínűség mátrixot, I-vel az egységmátrixot, λ-val az 1 értékű sajátértéket, π-vel meg a keresett sajátvektort jelöltük.
A kapott vektort skalárisan szorozva a díjszorzók vektorával megkapjuk a kívánt összeget.

5. fejezet

Eredmények

A számoláshoz szükség van bizonyos adatokra. A KSH (Központi Statisztikai Hivatal) adatai alapján adjuk meg a kezdeti értékeket.
Az átlagos kárszám: $\lambda = 0,14$.
Az átlagos kárnagyság $m \approx 450.000$ Ft.
Feltételezzük, hogy a biztosító a díj 25%-át egyéb költségekre fordítja, 75%-át meg a károk kifizetésére.
$\lambda = 0,14$-gyel számolva az átlagos díj az alapdíj 54%-a lesz. Ebből megkapható az alapdíj, ami 155.556 Ft.
Az átmenetvalószínűség mátrix n-edik hatványának első sora adja, hogy az n. évben milyen valószínűséggel melyik osztályban leszünk. Ezt a sort skalárisan szorozva a díjszorzók vektorával, és a kapott eredményt az alapdíj összegével, megkapjuk, hogy az n. évben várhatóan mennyi díjat fogunk fizetni. Ezt $n = 1 \ldots n$-re összeadva kapjuk a 11 év alatt fiezetendő díj várható értékét.
Ehhez jön még a 11 év alatt fizetendő károk összege.

Ha nem használunk semmilyen stratégiát, akkor 1.520.935 Ft-ot fizethetünk a biztosítónak 11 év alatt. Az Exponenciális káreloszlást feltételező eloszlással, ez az összeg 1.438.610 Ft-ra csökkent, Pareto eloszlást feltételezve pedig 1.460.372 Ft. Látható, hogy mindkét eloszlásnál a stratégia eredményre vezet. A pareto eloszlásnál az eredményessége nem jelentős. Hosszabb időszak vizsgálatánál esetleg komolyabb összegre is számíthatunk.

5.1. Az optimális eredmények Exponenciális kárnagyság esetén

Az Exponenciális eloszlás paraméterét a várható értékből határozzuk meg.

$$E(x) = 450.000 = \frac{1}{\mu} \qquad \mu = \frac{1}{450000}$$

Az 5.1-es mátrixban a 0-kat önkényesen beírtuk. Hiszen ha a kárszám alapján már úgyis a legkisebb osztályban kerültünk, akkor attól kezdve okozott károkat biztosan nem érdemes kifizetnünk.

bonus fokozat	1.kár	2.kár	3.kár	4.kár
A0	317197			
B1	353432			
B2	358154			
B3	356343	299127		
B4	353685	299342		
B5	351852	299335	286043	
B6	349672	299291	286047	
B7	348839	297362	286047	272731
B8	350098	299262	286078	272712
B9	359462	295671	285821	272633
B10	349782	299350	286045	272707

5.1. táblázat. Az Exponenciális eloszlás eredményei

5.2. Az optimális eredmények Pareto kárnagyság esetén

Pareto eloszlásnál meg kell adni a paramétereket. A várható értékből (450.000 Ft) kapunk összefüggést közöttük.

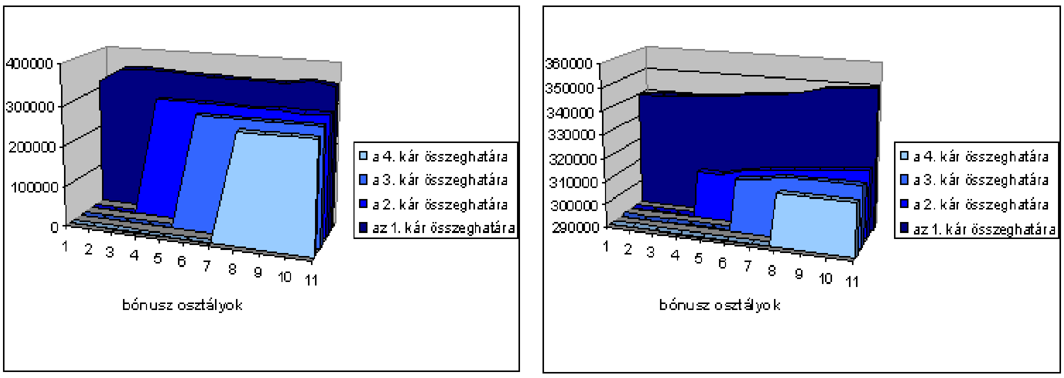
$$E(x) = \frac{\beta}{\alpha - 1}$$

α-t 4-nek választva:

$$\beta = E(x) \cdot (\alpha - 1) = 1350000$$

bonus fokozat	1.kár	2.kár	3.kár	4.kár
A0	339423			
B1	339785			
B2	340407			
B3	341179	319127		
B4	341889	319342		
B5	343637	319335	316043	
B6	344774	319291	316047	
B7	345765	317362	316047	312731
B8	348906	319262	316078	312712
B9	349704	315671	315821	312633
B10	349782	319350	316045	312707

5.2. táblázat. A Pareto eloszlás eredményei



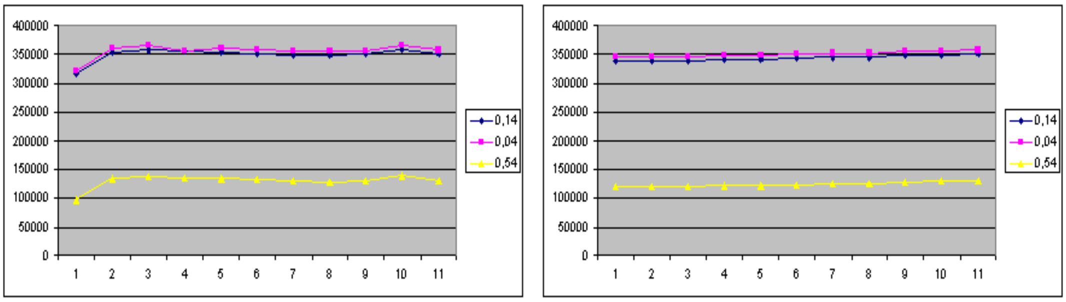
5.1. ábra. Exponenciális és Pareto eloszlás feltételezése melletti összeghatárok

6. fejezet

Új tényezők

6.1. Új kárszám eloszlás

Tudni szeretnénk, hogy jobb illetve rosszabb vezetők esetében, hogyan változnak az összeghatárok. Tehát az egészet újra számoljuk $\lambda_2 = 0,04$, illetve $\lambda_3 = 0,54$ paraméterekre. A változások leginkább az első kárnál figyelhetők meg. Grafikonon mutatjuk be, a különböző paraméterű kárszám eloszlások, hogyan változtatják a $\widetilde{d_1}$ értékeit.



6.1. ábra. A $\widetilde{d_1}$ értékei különböző kárszámok függvényében, Exponenciális és Pareto eloszlás feltételzése mellett

6.2. Az idő

Látható, hogy a stratégiánk ugyan eredményre vezet, de ahhoz, hogy jelentősebb összeget takarítsunk meg legalább hosszú évekig kellene vezetnünk. Bevezetünk egy új változót a képletünkbe, amivel finomíthatunk egy kicsit a stratégián.

Nem árt figyelembe venni, hogy mennyi idő telt el az évből, amikor a balesetet okozzuk. Az új stratégia, hogy akkor fizetjük ki a kárt, ha

$$(1-t) \cdot \frac{\lambda}{\mu} + X < b_{i,j}$$

ez azon alapszik, hogy az év elején okozott kárnál nagyobb a valószínűség arra, hogy abban az évben még okozunk kárt, mint az év végén.
Ezt a módszert szimulációval hasonlítjuk össze az eredeti stratégiánkkal, ahol az okozott kár idejét az éven belül egyenletes eloszlással határoztuk meg. A kiszámolt optimális összeghatárokon nem változtatunk.
10.000.000 mintára lefuttatva, a szimulációval kapott költségek kellően közelítik a kívánt értékeket.
A stratégia nélküli átlagos egy főre jutó költség 1.531.072 Ft lett.
A stratégia alkalmazásával Exponenciális káreloszlást feltételezve 1.440.269 Ft, Pareto káreloszlást feltételzve 1.475.228 Ft-ot kaptunk.
Az időt is figyelembe véve, Exponenciális káreloszlásnál 1.287.025 Ft, Pareto káreloszlásnál 1.325.502 Ft-ot kaptunk.
Ez a költségcsökkenés már jelentősnek tekinthető.
Ezek szerint az eredeti stratégia a kívánt célra vezet, csakhogy több tényezővel is számolnunk kell a bonus fokozatunk aktuális állapotán és a kártörténetünkön kívül. Az idő figyelembe vételével a módszer hatékonynak bizonyul.

		$\lambda = 0,14$	$\lambda = 0,04$	$\lambda = 0,54$
stratégia nélkül	számolás	1.520.935 Ft	1.332.703 Ft	2.771.792 Ft
	szimuláció	1.531.072 Ft	1.360.977 Ft	2.801.116 Ft
Exponenciális káreloszlás	számolás	1.438.610 Ft	1.320.915 Ft	2.419.330 Ft
	szimuláció	1.440.269 Ft	1.321.275 Ft	2.420.804 Ft
	idő	1.287.025 Ft	1.295.813 Ft	2.196.051 Ft
Pareto káreloszlás	számolás	1.460.372 Ft	1.327.144 Ft	2.482.394 Ft
	szimuláció	1.475.228 Ft	1.326.932 Ft	2.481.779 Ft
	idő	1.325.502 Ft	1.297.836 Ft	2.289.038 Ft

6.1. táblázat. Eredmények összehasonlítása

7. fejezet

Összefoglalás

Célunk az volt, hogy meghatározzuk, hogy hol van az az összeghatár, amely alatt a biztosított számára inkább megéri a kár általa való megtérítését, mint hosszútávon viselni a bonus-malus besorolás anyagi következményeit.
Első lépésben a rendszer hiányosságait kihasználva "eltöröltük" a malus osztályokat.
Ezt követően Poisson kárszám eloszlást feltételezve próbáltuk prognosztizálni az elkövetkezendő évek kártörténetét. A változók a még nem ismert összeghatárokhoz tartozó valószínűségek voltak. Ezekkel konstruáltuk meg az új átmenetvalószínűség mátrixot. Ennek segítségével tudtuk modellezni a fizetendő díj változását. Ehhez még hozzájött a kifizetett károk költsége, ami ezen károk számából és nagyságából tevődött össze. A kárnagyság eloszlásánál 2 különböző feltételezett eloszlást vizsgáltunk. Exponenciálist és Pareto-t.
Ezzel egy 44 ismeretlenes költségfüggvényhez jutottunk, melynek minimalizálásához a lejtő módszert vettük igénybe.
Így jutottunk a 5.1-es és a 6.1-es táblázatok értékeihez.
A stratégiával a vizsgált 11 év alatt körülbelül 80.000 Ft-ot spóroltunk Exponenciális káreloszlás feltételezése mellett. Pareto eloszlás esetében a megtakarítás még ezt az összeget sem érte el.
Megvizsgáltuk, hogy módosulnak az eredmények más paraméterű kárszám eloszlás esetén. Jelentős megtakarítást itt sem értünk el.
Végül a cél érdekében egy jelentős változtatáshoz folyamodtunk. A szimulációban, abban a lépésben, ahol eldől, hogy kifizetjük e a kárt, figyelembe vettük, hogy mennyi telt el abból az évből, amelyben a kárt okoztuk.
Ezzel kiegészítve a stratégiát jelentősebb összeget takaríthatunk meg. Az eredmények azt mutatják, hogy ez az összeg 200.000 Ft közelíti meg, ami a kevesebb kárt okozó sofőrök esetében, az összköltségnek körülbelül a 13%-a.
Szimulációval ellenőriztük az eljárás hatékonyságát.

Irodalomjegyzék

[1] Arató Miklós, *Nem-élet biztosítási matematika* ELTE Eötvös Kiadó, (Budapest 2001), 45-49.o.

[2] J. Lemaire, *A Comparative Analysis of Bonus-Malus Systems*, (Astin Bulletin) 287-309.o.

[3] Móricz Ferenc, *Numerikus módszerek az algebrában és az analízisben*, Polygon, (Szeged 1997), 69-73.o.

[4] R. Norberg, *A Credibility Theory for Automoblie Bonus System*, (Scandivanian Actuarial Journal 1976), 92-107.o.

[5] J.F.Walhin and J. Paris, *The partical replacement of a bonus-malus system*, (Belgium)