Véges projektív terek részleges befedései

Szekér Anna

2009. június 18.

Szakdolgozat

ELTE 2009

témavezető: Gács András, Számítógép-Tudományi Tanszék

Tartalomjegyzék

I. rész
Bevezetés

A dolgozat véges projektív terek adott dimenziós alterekkel való fedéseiről és részleges fedéseiről szól. Lineáris algebrai nyelven ez azt jelenti, hogy a $GF(q)$ véges test feletti n dimenziós térben akarunk páronként triviálisan metsző k-dimenziós altereket választani. A tipikus kérdések: befedhető-e teljesen a tér, legkevesebb hány alteret kell megadnunk, hogy a rendszer maximális legyen, legfeljebb hány adható meg, ha teljesen nem fedhető be a tér.

A bevezető részben néhány alapvető definíciót és tételt mondunk ki, melyekre később szükség lesz. A második rész foglalkozik azzal az esettel, amikor egyenesekkel, azaz 2-dimenziós terekkel akarunk fedni, a harmadik részben lesz szó magasabb dimenziós fedésekről, végül a negyedikben tárgyalunk egy alkalmazást.

Minden olyan, a bevezetésben található állítás bizonyítása, melyet nem bizonyítunk, megtalálható Hirschfeld megfelelő könyvében [11] [12] [13].

1. Projektív tér, befedés, részleges befedés

1.1. Definíció. *A $GF(q)$ véges testre épített* n-dimenziós projektív tér*nek ($PG(n, q)$) a $GF(q)$ test feletti $n+1$-dimenziós tér nem-triviális altereinek rendszerét hívjuk. Az $1, 2, 3, n$-dimenziós alterek neve rendre pont, egyenes, sík, hipersík. A vektortér $k+1$ dimenziós alterének projektív dimenziója k.*

A projektív dimenzió tehát (melyet végig használni fogunk) eggyel kisebb, mint a vektortér dimenzió.

Az altereket sokszor a bennük lévő pontok halmazával azonosítjuk. Két altér tehát, melyek a vektortérben triviálisan metszenek, a projektív térben diszjunktak.

1.2. Definíció. *A $PG(n, q)$ tér* t-befedése *olyan t-dimenziós altereket jelent, melyek páronként diszjunktak és lefednek minden pontot.*

1.3. Definíció. *A $PG(n, q)$ tér* részleges t-befedése *páronként diszjunkt t-dimenziós altereket jelent. A részleges befedés maximális, ha nem vehető hozzá még egy altér.*

A $t = 2$ esetben néha (részleges) egyenes fedést mondunk vagy csak egyszerűen (részleges) befedést.

2. Regulus, ellentett regulus, hiperbolikus másodrendű felület

2.1. Lemma. *Legyenek l_0, l_1 és l_2 páronként kitérő egyenesek $PG(3, q)$-ban.*

- *Pontosan $q + 1$ olyan egyenes van a térben, melyek mindhárom l_i-t metszik. Jelölje ezeket $m_0, m_1, \dots, m_q$;*
- *$m_0, m_1, \dots, m_q$ páronként kitérők;*
- *pontosan $q + 1$ olyan egyenes van a térben, melyek minden m_i-t metszenek (az eredeti l_i-ket is beleszámolva). Jelölje ezeket $l_0, l_1, \dots l_q$;*
- *az l_i-k együtt ugyanazt a ponthalmazt fedik le, mint az m_i-k, jelölje ezt Q;*
- *Q hiperbolikus másodrendű felület, melynek $(q + 1)^2$ pontja van és minden pontján egy m_i és egy l_i megy át. Ezt* hiperbolikus kvádrik*ának is nevezzük.*

2.2. Definíció. Regulus*nak hívunk $q+1$ egyenest, melyek három (és akkor a lemma szerint $q+1$) kitérő egyenest metszenek. Az őket metsző $q+1$ egyenes neve ellentett regulus.*

Lemma 2.1 értelmében egy regulus és annak ellentett regulusa ugyanazt a $(q+1)^2$ pontot fedi, ezek a pontok éppen egy hiperbolikus másodrendű felület pontjai. Ez fordítva is igaz, minden hiperbolikus másodrendű felületen van egy regulus és egy ellentett regulus.

Az is látható lemma 2.1 alapján, hogy bármely három egyenes pontosan egy regulusban van benne. Ezt szokás a *három egyenes által generált regulus*nak hívni.

2.3. Definíció. Reguláris *egy S befedés, ha bármely három egyenesét kiválasztva S-nek, az ezek által generált regulus minden egyenese benne van S-ben.*

2.4. Tétel. *Legyen S befedés $PG(3, q)$-ban. A következő állítások ekvivalensek.*

- *S reguláris;*
- *a tér bármely nem S-beli egyenesét metsző S-beli egyenesek regulust alkotnak.*

Amint látni fogjuk, $PG(3, q)$-nak van reguláris és nem reguláris befedése.

3. Lefogó ponthalmazok

3.1. Definíció. *A $PG(2,q)$ projektív sík* lefogó ponthalmaz*a olyan ponthalmaz, mely bármely egyenest metsz.*

Mivel egy projektív síkon bármely két egyenes metszi egymást, tetszőleges egyenes pontjai lefogó ponthalmazt alkotnak. Azt is könnyű látni, hogy az egyenesek a legkisebb lefogó ponthalmazok. *Nem-triviális*nak hívunk egy lefogó ponthalmazt, ha nem tartalmaz egyenest.

Kicsit általánosabban, tetszőleges dimenziós tér adott dimenziós altereit lefogó ponthalmazokra is szükségünk lesz.

3.2. Definíció. *A $PG(n,q)$ projektív tér* k-lefogó ponthalmaz*a olyan ponthalmaz, mely minden $(n-k)$-dimenziós alteret metsz. A lefogó ponthalmaz* triviális*, ha tartalmaz k-dimenziós alteret.*

Könnyen végiggondolható, hogy a k dimenziós alterek lefognak minden $(n-k)$-dimenziós alteret és ezek a legkisebb $(n-k)$-lefogó ponthalmazok. Innen a triviális elnevezés.

A $PG(2,q)$-beli lefogó ponthalmazok tehát az általános definíció szerint 1-lefogók, általában pedig az 1-lefogók azok, melyek a maximális dimenziós altereket (hipersíkokat) lefogják.

$PG(2,q)$ nem-triviális lefogó ponthalmazairól az alábbiak ismertek.

3.3. Tétel. *(Bruen, Pelikán) Legyen B nem-triviális lefogó ponthalmaz $PG(2,q)$-ban. Ekkor $|B| \geqslant q+\sqrt{q}+1$ és egyenlőség esetén B minden egyenest 1 vagy $\sqrt{q}+1$ pontban metsz.*

3.4. Definíció. *$PG(2,q)$ egy B ponthalmaza* Baer részsík*, ha mérete $q+\sqrt{q}+1$, és minden egyenest 1 vagy $\sqrt{q}+1$ pontban metsz.*

Ha q négyzetszám, akkor $PG(2,q)$-ban van Baer részsík, tehát ilyenkor a Bruen-Pelikán becslés éles.

Ha tudjuk, hogy q hányadik hatványa a test karakterisztikájának, akkor több is mondható.

3.5. Tétel. *Legyen B nem-triviális lefogó ponthalmaz $PG(2,q)$-ban, ahol $q=p^m$, p prím.*

- *Ha $m=1$, akkor $|B| \geqslant 3\frac{q+1}{2}$ (Blokhuis);*

- *ha m páros, akkor $|B| \geqslant q + \sqrt{q} + 1$ (Bruen-Pelikán);*
- *ha $m = 3$, akkor $|B| \geqslant q + \frac{q}{p} + 1$ (Polverino);*
- *ha $m \geq 4$ páratlan, akkor $|B| \geqslant q + 1 + \frac{q+p^e}{p^e+1}$, ahol e a legnagyobb m-től különböző osztója m-nek (Szőnyi-Sziklai).*

Négyzet q esetén tudjuk, hogy a legkisebb nem-triviális minimális blokkoló halmazok a Baer részsíkok. A második legkisebb méretére is vannak becslések, ezekből a következőket kapjuk.

3.6. Tétel. *1. (Blokhuis-Storme-Szőnyi) $PG(2, q)$-ban, ahol $q = p^{2h}$, $h > 1$, $p \geqslant 5$ prím, minden nem-triviális lefogó halmaz, melynek mérete kisebb, mint $q + q^{\frac{2}{3}} + 1$, tartalmaz Baer-részsíkot.*

2. (Szőnyi) $PG(2, q)$-ban, ahol $q = p^2$, p prím, minden olyan nem-triviális lefogó halmaz, melynek mérete kisebb mint $\frac{3(q+1)}{2}$, tartalmaz Baer-részsíkot.

4. Befedés létezése

4.1. Létezés általában

4.1. Tétel. *(André) $PG(n, q)$-ban akkor és csak akkor van t-befedés, ha $t + 1$ osztója $n + 1$-nek.*

Bizonyítás $PG(n, q)$ pontjainak száma

$$\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Egy t dimenziós altér

$$\frac{q^{t+1} - 1}{q - 1}$$

pontot tartalmaz.

Csak akkor lehet $PG(n, q)$-ban t-befedés, ha
$\frac{q^{t+1}-1}{q-1}$ osztója $\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$-nak.

Ez csak akkor teljesül, ha $q^{t+1} - 1$ osztója $q^{n+1} - 1$-nek, ami azzal ekvivalens, hogy $t + 1$ osztója $n + 1$-nek.

A másik irányhoz tegyük fel, hogy $t + 1$ osztója $n + 1$-nek.

Legyen $F_0 = GF(q)$, $F_1 = GF(q^{t+1})$, $F_2 = GF(q^{n+1})$. Tekintsük F_2-t vektortérnek F_0 fölött, ennek dimenziója $n+1$. Az F_2 vektortér alterei alkotják a $PG(n,q)$ projektív teret. Az F_1 test $t+1$ dimenziós altér ebben a vektortérben, így t dimenziós altér a $PG(n,q)$ projektív térben. Ugyanez igaz az aF_1 mellékosztályokra, ahol $a \in F_2$. Ezek a mellékosztályok partícionálják F_2 multiplikatív csoportját, tehát t-befedést alkotnak $PG(n,q)$-ban. $\square$

4.2. Befedések $PG(3,q)$-ban

4.2. Lemma. *Az 4.1 tétel bizonyításában $t = 2$ esetén kapott befedés reguláris.*

4.3. Konstrukció. *(Bruen switching) Legyen S tetszőleges (részleges) egyenes befedés $PG(3,q)$-ban, mely tartalmaz egy R regulust. R egyeneseit kidobva és az ellentett regulus egyeneseit betéve S-be egy S' (részleges) befedést kapunk. Ha S maximális részleges befedés volt, akkor S' is az.*

4.4. Következmény. *$PG(3,q)$-ban vannak nem reguláris befedések.*

II. rész

Részleges befedések egyenesekkel

5. Részleges befedések három dimenzióban

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, hogy mekkora lehet egy részleges befedés, mely maximális, tehát újabb egyenes nem vehető hozzá. A lehető legnagyobb ilyen nyilván a befedés, melynek mérete $q^2 + 1$ (ennek létezését a bevezető részben bizonyítottuk), az érdekes kérdés az, hogy legfeljebb mekkora lehet a második legnagyobb és legalább mekkora lehet a legkisebb ilyen.

5.1. Felső becslések és konstrukciók nagy maximális részleges befedésre

A legnagyobb ismert részleges befedés, mely nem befedés (kivéve a $q = 7$ esetet, ld alább) a következő tételből jön.

5.1. Tétel. *(Bruen-Thas, Freeman és Jungnickel [12]) $PG(3, q)$-ban van q^2-q+2 méretű maximális részleges befedés, ha $q > 3$.*

Bizonyítás Kicsit kevesebbet bizonyítunk: annyit, hogy van $q^2 - q + 2$ vagy $q^2 - q + 1$ méretű maximális részleges befedés.

A 4.4 következmény szerint vannak nem reguláris befedések is $PG(3, q)$-ban. Legyen S nem reguláris befedés. Ekkor a 2.4 tétel szerint van egy l egyenes $PG(3, q)$-ban, ami nincs S-ben, és az l-et metsző S-beli egyenesek nem alkotnak regulust. Vegyük ki ezeket az S befedésből, és vegyük be l-et. Jelölje az így keletkezett részleges befedést S_1.

Ekkor S_1 mérete $q^2 - q + 1$, és csak olyan egyenes vehető hozzá, ami metszi az l egyenest metsző egyenesek mindegyikét. Állítjuk, hogy legfeljebb egy ilyen egyenes lehetséges. Tegyük fel indirekt, hogy két ilyen egyenes van; jelölje őket l_1 és l_2. Ekkor az l egyenest metsző S-beli egyenesek éppen az l, l_1, l_2 egyenesek által definiált regulus ellentett regulusát alkotják, ami ellentmond l választásának.

Így $PG(3, q)$-ban van $q^2 - q + 1$ vagy $q^2 - q + 2$ méretű maximális részleges befedés. □

Általánosan elfogadott sejtés, hogy (elegendően nagy q-ra) a fenti konstrukció adja a legnagyobb maximális részleges befedéseket, melyek nem befedések. Az egyetlen ismert kivétel az alábbi.

5.2. Tétel. *(Heden [8]) $PG(3,7)$-ben van $7^2 - 7 + 3 = 45$ méretű részleges befedés.*

Most rátérünk az ismert felső becslések ismertetésére. Az első ilyet Bruen bizonyította.

5.3. Tétel. *Ha S maximális részleges befedés $PG(3,q)$-ban, mely nem befedés, akkor*

$$|S| \leqslant q^2 - \sqrt{q}$$

A bizonyítás néhány fogalom bevezetése és lemma bizonyítása után fog kijönni, sőt egy kicsit többet is bizonyítani fogunk a 5.8 következményben.

Jelölje S $PG(3,q)$ részleges befedését $q^2 + 1 - \delta$ egyenessel. Vegyük észre, hogy δ éppen a befedés méretétől való eltérés. Ezt S *hiány*ának is hívjuk.

5.4. Definíció. *Nevezzük S* üres sík*jának azt a síkot, mely nem tartalmaz S-beli egyenest;* gazdag sík*jának pedig azt, mely tartalmaz.*

5.5. Tétel. *Legyen S δ hiányú maximális részleges befedés. Ekkor S-nek $\delta(q+1)$ lyuka és $\delta(q+1)$ üres síkja van.*

Bizonyítás $PG(3,q)$ ponthalmaza beosztható $q^2 + 1$ egyenesbe, így a δ hiányú S részleges befedés által fedetlenül hagyott pontok száma $\delta(q+1)$. Tehát az S részleges befedésnek $\delta(q+1)$ lyuka van.

Mivel a maximális részleges befedés fogalma önduális, ezért az üres síkokról szóló állítás duálisan bizonyítható. □

Ha E sík, akkor jelölje az E-ben levő lyukak halmazát $H(E)$.

5.6. Lemma.

1. *Ha az l egyenes nincs S-ben, akkor ugyanannyi lyuk van l-en, mint ahány l-en átmenő üres sík.*
2. *Ha E üres sík, akkor $|H(E)| = q+\delta$, és ha E gazdag sík, akkor $|H(E)| = \delta$.*
3. *Ha E üres sík, akkor $H(E)$ nem-triviális lefogó halmaz E-ben.*

Bizonyítás

1. Ha t azoknak az S-beli egyeneseknek a száma, amik metszik l-t, akkor l $q + 1 - t$ lyukat tartalmaz. Továbbá az l-en átmenő síkok közül t tartalmaz egyenest, $q + 1 - t$ l-en átmenő sík üres.
2. Ha E üres sík, akkor S minden egyenese egy pontban metszi az E síkot. Mivel S $q^2 + 1 - \delta$ egyenest tartalmaz, azért $|H(E)| = q + \delta$. A gazdag síkról szóló állítás hasonlóan bizonyítható.

3. Indirekt tegyük fel, hogy E üres sík, de az $l \subset E$ egyenesen nincs lyuk. Ekkor $q+1$ olyan S-beli egyenes kell legyen, mely metszi l-et. Ez a $q+1$ egyenes páronként különböző síkban kell, hogy legyen, azaz minden l-en átmenő síkban van S-beli egyenes. Ez ellentmond annak, hogy E üres sík. Eszerint $H(E)$ blokkoló halmaz E-ben. Nem tartalmazhat egyenest, hiszen egy ilyen egyenes hozzávehető lenne S-hez ellentmondva S maximalitásának.

□

5.7. Tétel. *(Bruen) Legyen S δ hiányú maximális részleges befedés $PG(3,q)$-ban. Ekkor $\delta \geqslant \epsilon$, ahol $q+\epsilon$ a legkisebb nem-triviális lefogó halmaz mérete $PG(2,q)$-ban.*

Bizonyítás Tegyük fel indirekt, hogy $\delta < \epsilon$. Tekintsük S egy E üres síkját. Ekkor az E-be eső lyukak $H(E)$ halmaza tartalmaz egy l egyenest, mert a lyukak $q+\delta$ száma kisebb a nem triviális lefogó ponthalmaz $q+\epsilon$ méreténél.

Ekkor az l egyenessel bővíteni lehet az S befedést, ami ellentmond S maximalitásának. □

Ezt egybevetve a ma ismert legjobb becslésekkel $PG(2,q)$ nem-triviális lefogó ponthalmazainak méretéről (3.5 tétel), konkrét felső becslést kapunk a legnagyobb olyan maximális részleges befedés méretére, mely nem befedés. Mint láttuk 3.5 tételben, ez függ attól, hogy q hányadik hatványa a karakterisztikának. A két legfontosabb esetet most újra kimondjuk.

5.8. Következmény. *Legyen S δ hiányú maximális részleges befedés $PG(3,q)$-ban, $\delta > 0$. Ekkor*

1. *$\delta \geqslant \sqrt{q}+1$, minden q-ra;*
2. *$\delta \geqslant (q+3)/2$, ha q páratlan prím.*

Minden q esetén érvényes tehát az $|S| \geqslant q^2 - \sqrt{q}$ becslés. A továbbiakban célunk annak megmutatása, hogy egyenlőség sem lehet.

5.9. Lemma. *Legyen S δ hiányú maximális részleges befedés, ahol δ olyan, hogy PG(2,q) minden $q+\delta$ méretű nem-triviális lefogó halmaza tartalmaz Baer-részsíkot.*

Ha E üres sík, akkor $H(E)$ tartalmazza E egy Baer-részsíkját.

Bizonyítás Közvetlenül következik az 5.6lemmából. □

A következőkben szükségünk lesz a Baer részsík 3-dimenziós általánosítására projektív és affin terekben, melyet *Baer résztér*nek hívnak, és ennek alapvető tulajdonságaira. Se a definíciót, se az alaptulajdonságokat itt nem tárgyaljuk, ezek megtalálhatók Hirschfeld [12] könyvében.

5.10. Tétel. *(Blokhuis-Metsch): Definiáljunk egy súlyfüggvényt az $AG(3, q^2)$, affin téren a következőképpen: rendelje az f súlyfüggvény az (x_1, x_2, x_3) ponthoz az $(x_1 x_2 x_3)^{q-1}$ szorzatot. Egy ponthalmaz súlya pedig legyen a benne szereplő pontok súlyának összege. Ekkor a súlyfüggvényre teljesül:*

1. *a teljes tér súlya nulla;*
2. *ha $q \geq 5$, akkor minden egyenes súlya nulla;*
3. *a kanonikus $AG(3, q)$ Baer résztér súlya nem nulla.*

Bizonyítás Ld az eredeti [3] cikket. □

5.11. Tétel. *(Blokhuis-Metsch [3]) Ha $q > 4$ négyzet, akkor $PG(3, q)$-ban nincs $\delta = \sqrt{q} + 1$ hiányú maximális részleges befedés.*

Bizonyítás Ha indirekt lenne egy ilyen maximális részleges befedés, akkor minden üres síkon Baer részsíkot alkotnának a lyukak a korábbiak szerint. Ez alapján megmutatható, hogy a lyukak szükségképpen egy Baer résztér pontjai, azaz fel lehetne osztani $PG(3, q)$ pontjait $q^2 - \sqrt{q}$ páronként diszjunkt egyenesre és egy $\Pi = PG(3, \sqrt{q})$ részgeometriára.

Vegyünk egy H hipersíkot, ami a Π részgeometriát Baer-részsíkban metszi. Ekkor az $AG(3, q) = PG(3, q) \setminus H$ affin tér pontjai feloszthatók $q^2 - \sqrt{q}$ affin egyenesre és egy $AG(3, \sqrt{q})$ affin altérre.

Használjuk fel a 5.10 tételt. Az affin egyenesek súlya nulla, de az affin részgeometriáé nem nulla. Összesítve az affin pontok súlya nem nulla. Ellentmondás. □

Ez az eredmény $q = 4$-re nem igaz.

5.12. Tétel. *(Van Dam) PG(3,4)-ben legalább háromféle lényegesen különböző maximális részleges befedés van 14 egyenessel.*

Végül bizonyítás nélkül megemlítünk egy további eredményt.

5.13. Tétel. *(Metsch, Storme [15]) Legyen δ egész, $q > 4$ négyzet, prímhatvány. Tegyük fel, hogy teljesül a következő két feltétel.*

1. $2\delta \leqslant q+1$

2. $PG(2,q)$ *minden legfeljebb* $q+\delta$ *pontú nem-triviális lefogó halmaza tartalmaz Baer-részsíkot.*

Ekkor $PG(3,q)$ *tetszőleges* S $q^2+1-\delta$ *méretű maximális részleges befedésére teljesül a következő.*

1. $\delta = s(\sqrt{q}+1)$, s *egész;*

2. S *lyukainak halmaza* s *darab* $PG(3,\sqrt{q})$ *Baer-részgeometria diszjunkt uniója.*

Az 3.6 és az 5.11 tétel összegzésével ebből a következőt kapjuk.

5.14. Következmény. *(Metsch, Storme [15])*

1. Legyen δ *egész,* $\delta \leqslant q^{2/3}+1$, *és* q *négyzet,* $q = p^h$, $h > 2$, $p \geqslant 5$, p *prím.*

Ha S *maximális részleges befedés* $PG(3,q)$*-ban* $q^2+1-\delta$ *egyenessel, akkor* $\delta = s(\sqrt{q}+1)$ *egy* $s \geqslant 2$ *egészre, és az* S *által fedetlenül hagyott pontok halmaza* s $PG(3,\sqrt{q})$ *részgeometria diszjunkt uniója.*

2. Legyen δ *egész,* $q > 4$ *prímnégyzet,* $2\delta \leqslant q+1$.

Ha S *maximális részleges befedés* $PG(3,q)$*-ban* $q^2+1-\delta$ *egyenessel, akkor* $\delta = s(\sqrt{q}+1)$ *egy* $s \geqslant 2$ *egészre, és az* S *által fedetlenül hagyott pontok halmaza* s *Baer-részgeometria diszjunkt uniója.*

5.2. Alsó becslések

Az előző alfejezet eredményeiből azonnal kapjuk a következőt.

5.15. Tétel. *(Bruen) Ha* S *valódi maximális részleges befedés* $PG(3,q)$*-ban, akkor*

$$q+\sqrt{q}+1 \leqslant |S|$$

Ennél több is igaz.

5.16. Tétel. *(Glynn)* $PG(3,q)$*-ban maximális részleges befedésnek legalább* $2q$ *eleme van.*

Bizonyítás ($q > 4$-re, a kis eseteket külön el lehet intézni, itt nem tárgyaljuk.)

Legyen $l_1, l_2, \ldots, l_k$ maximális részleges befedés. Jelöje λ_i minden $i \in \mathbb{N}_0$ -ra azon nem S-beli egyenesek számát, melyeket pontosan i S-beli egyenes metsz.

Vegyük észre, hogy $\lambda_0 = 0$ a maximalitás miatt, és ha $i > q+1$, akkor $\lambda_i = 0$; ugyanis egy egyenesen $q+1$ pont van, és ezeken legfeljebb $q+1$ diszjunkt egyenes mehet át.

Ha össze akarjuk adni őket, akkor elég 1-től $q+1$-ig összegeznünk:

$$\sum_{1}^{q+1} \lambda_i = (q^2+1)(q^2+q+1) - k,$$

ugyanis ezzel leszámláltuk a tér egyeneseit, kivéve azokat, amik a befedésben vannak.

Folytassuk a leszámlálást: azoknak az l_j, l pároknak a száma, ahol $l \in PG(3,q)$ metszi l_j-t:

$$\sum_{1}^{q+1} i\lambda_i = k(q+1)(q^2+q)$$

és azoknak az l_j, l_k, l hármasoknak a száma, ahol l, l_j és l_k mind metszi egymást:

$$\sum_{1}^{q+1} i(i-1)\lambda_i = k(k-1)(q+1)^2,$$

és azoknak az l_j, l_k, l_s, l négyeseknek a száma, ahol l metszi l_j, l_k, l_s mindegyikét:

$$\sum_{1}^{q+1} i(i-1)(i-2)\lambda_i = k(k-1)(k-2)(q+1),$$

Ezek mindegyikét ki tudjuk számolni. Ismerjük tehát a következő összegeket is:

$$\sum_{1}^{q+1} \lambda_i, \sum_{1}^{q+1} i\lambda_i, \sum_{1}^{q+1} i^2\lambda_i, \sum_{1}^{q+1} i^3\lambda_i$$

Így mindent ki tudunk számítani, aminek alakja

$$\sum_{1}^{q+1} (a + bi + ci^2 + di^3)\lambda_i$$

tehát a következő összeget is:

$$\sum_{1}^{q+1}(i-1)(i-3)(i-4)\lambda_i = \sum_{1}^{q+1}(-12+19i-8i^2+i^3)\lambda_i.$$

Ez soha sem negatív, mert $i = 1,3,4$ esetén a szorzat nulla, $i = 2$ esetén egy pozitív és két negatív tényező szorzata, nagyobb i-re pedig mindhárom tényező pozitív.

Átalakítás után a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$(k-2q+1)\{(q+1)(k^2-k(3q+9)+2(3q^2+q+8))+12\}-2(q-4)(q^2+2q-5) \geq 0.$$

Kis számolással látható, hogy $q > 4$ esetén $k \leq 2q-1$-re a bal oldal negatív. $\square$

A fenti tételnél jobbat azóta sem sikerült bizonyítani. A legkisebb ismert konstrukció mérete $q\ln(q)$ nagyságrendű. Ezt a következő szakaszban fogjuk ismertetni.

5.3. Konstrukciók, sűrűségi eredmények

Amint azt a 5.1 tételben láttuk, a befedések utáni legnagyobb ma ismert befedés mérete q^2-q+2 általános q-ra. Ez alatt egy teljes intervallum minden értékére ismert részleges befedés.

5.17. Tétel. *(Heden [9]) Páratlan $q > 5$ esetén a $[\frac{q^2+13}{2}, q^2-q+2]$ intervallum minden k elemére létezik $PG(3,q)$-ban k méretű maximális részleges befedés.*

5.18. Tétel. *(Govaerts-Heden-Storme [10]) Ha q elég nagy páros prímhatvány, akkor a $[\frac{q^2+q+16}{2}, q^2-q+2]$ intervallum minden k elemére létezik $PG(3,q)$-ban k méretű maximális részleges befedés.*

Most azt a konstrukciót mutatjuk be, mely a ma ismert legkisebb példát is adja. Ehhez először néhány lemmára lesz szükségünk.

5.19. Lemma. *Reguláris befedés egyenesei és regulusai inverzív síkot alkotnak.*

Bizonyítás Ha egy befedés reguláris, akkor q^2+1 egyenest tartalmaz. Minden regulus $q+1$ egyenesből áll, és három egyenes meghatároz egy regulust. Ezek éppen az inverzív síkokat definiáló tulajdonságok. $\square$

5.20. Lemma. *S reguláris befedés, $l \in S$; ekkor S regulusai beoszthatók l-en átmenő, egyébként diszjunkt regulusokba.*

Bizonyítás Tekintsük az előző tételbeli inverzív síkot. Ennek az l egyenesre vett derivált blokkrendszere affin sík, aminek párhuzamossági osztályai partíciót alkotnak. □

5.21. Konstrukció. *(Beutelspacher) Legyen S reguláris befedés $PG(3, q)$-ban és $l \in S$ tetszőleges egyenes. Az előző lemma szerint $S \setminus \{l\}$ felosztható l-en átmenő, egyébként diszjunkt regulusokra. Legyenek ezek $R_1, \dots, R_k, \dots, R_q$. Jelölje R_i ellentett regulusát R_i^*. Válasszunk $l_1, \dots, l_{q+1}$ egyeneseket $\cup_{i=k+1}^{q} R_i^*$-ból úgy, hogy l különböző pontjain mennek át és teljesül, hogy minden $k+1 \leqslant i \leqslant q$-ra R_i^*-ból legalább egy egyenest választunk.*

Ekkor az

$$\cup_{i=1}^{k} R_i \cup \{l_1, \dots, l_{q+1}\} \setminus \{l\}$$

részleges befedés. A maximalitáshoz elégséges, ha k-ra teljesül, hogy $R_1, \dots, R_k$ egyeneseinek uniója (mint ponthalmaz) metsz minden olyan egyenest, mely nincs benne sem S-ben, sem valamelyik R_i^*-ban.

Bizonyítás Mivel az R_i^* ellentett regulusok l pontjain kívül különböző térrészeket fednek (ugyanazt, mint a megfelelő R_i egyenesei), l pontjain pedig csak egy-egy egyenest vettünk, ezért az új rendszer valóban részleges befedés.

A maximalitáshoz tegyük fel, hogy egy m egyenes hozzávehető a kapott egyenes halmazhoz. Ha $m \in S$, akkor benne van valamelyik R_i-ben. Ez viszont nem lehet: $i \geqslant k+1$-re minden R_i^*-ból legalább egy egyenest vettünk, egy ilyen pedig metszi R_i minden egyenesét, $i \leqslant k$-ra pedig eleve benthagytunk minden R_i-beli egyenest (kivéve l-et, de $m = l$ nyilván nem lehet).

Végül tegyük fel, hogy $m \notin S$. Ekkor a 2.4 tétel miatt az m-et metsző S-beli egyenesek regulust alkotnak. Ha ez az egyik R_i, akkor $m \in R_i^*$, de akkor m metszi l-et, melynek minden pontja le van fedve, ellentmondás. Ha az m-et metsző egyenesek regulusa nem az egyik R_i, akkor m nincs benne egyik R_i^*-ban sem, a feltételünk éppen az volt, hogy az ilyen egyeneseket metszi legalább egy egyenes a benthagyott $R_1, \dots, R_k$-ból. □

A kérdés tehát az, hogy milyen k-ra teljesülhet az a tulajdonság a fenti konstrukcióban, hogy az első k R_i egyeneseinek uniója metsz minden nem S-beli és nem valamelyik R_i^*-beli egyenest. Vegyük észre, hogy az R_i-k sorrendje a konstrukció elején tetszőleges, másrészt, ha találunk k megfelelő R_i-t, akkor további R_i-k hozzávételével a tulajdonság nem romlik el. Az tehát csak a kérdés, hogy melyik a legkisebb k, melyre a feltétel teljesülhet. Geometriai megfontolásokat használva könnyű látni, hogy $k \geqslant \frac{q+1}{2}$ esetén találhatók megfelelő R_i-k. Véletlen választással jobbat is lehet csinálni.

5.22. Lemma. *A konstrukcióban $k \geqslant 6\ln(q)$ esetén választható úgy az első k R_i az R_i-k közül, hogy a kapott részleges befedés maximális legyen.*

Bizonyítás A q regulus közül $\binom{q}{k}$-féleképpen választhatunk k-t. Az olyan választások száma, melyekre egy rögzített m egyenes (mely nincs benne sem S-ben sem valamelyik R_i^*-ban) nincs lefogva, legfeljebb $\binom{(q+1)/2}{k}$, hiszen egy hiperbolikus kvádrika, mely nem tartalmazza m-et, legfeljebb 2 pontban metsz. Mivel a térben legfeljebb $2q^4$ egyenes van, azon választások száma, melyekre van nem lefogott egyenes, legfeljebb $2q^4\binom{(q+1)/2}{k}$. Kis számolás mutatja, hogy ez kisebb mint $\binom{q}{k}$, tehát van megfelelő választás. □

5.23. Tétel. *(Beutelspacher-Gács-Szőnyi) $PG(3,q)$-ban minden $6\ln(q)+1 \leqslant c \leqslant q$ esetén van $cq+1$ méretű maximális részleges befedés.*

A fenti tételből jövő legkisebb példa mérete $6q\ln(q)$ körül van, míg az előző fejezetben ismertetett legjobb alsó becslés $2q$.

Bizonyítunk még egy egyszerű következményt, melyre egy későbbi konstrukciónál lesz szükségünk.

5.24. Következmény. *A fenti konstrukcióban minden olyan egyenese a térnek, mely $i \geqslant k+1$ esetén nincs sem R_i-ben sem R_i^*-ban, legfeljebb $2(q-k)$ lyukat tartalmaz.*

Bizonyítás Az eredeti reguláris befedés minden pontot fedett. A kapott részleges befedésben lyukak csak az $R_{k+1}, R_{k+2}, \ldots, R_q$ regulusok által lefedett térrészben keletkeztek. Ez $q-k$ hiperbolikus kvádrika uniója. Ha egy egyenes nincs rajtuk, akkor mindegyiket legfeljebb 2 pontban metszi, tehát a konstrukció során legfeljebb $2(q-k)$ pontot veszthetett.

□

6. Részleges egyenesfedések négy dimenzióban

A fejezetben ismertetett eredmények Eisfeld, Storme és Sziklaitól származnak [6].

Szükségünk lesz a regulus és a reguláris befedés megfelelőjére síkok és síkfedések esetén. Ha M_1, M_2 és M_3 páronként diszjunkt síkok $PG(5,q)$-ban, akkor pontosan q^2+q+1 olyan egyenes van, mely mindhármukat metszi, jelölje ezeket $l_1,\dots,l_{q^2+q+1}$. Megmutatható, hogy pontosan $q+1$ olyan sík van, mely az előbb definiált l_ik mindegyikét metszi, legyenek ezek $M_1, M_2, \dots, M_{q+1}$. Ezt hívják az M_1, M_2 és M_3 által *generált regulus*nak.

$PG(5,q)$ síkfedése *reguláris*, ha bármely három síkjával együtt a generált regulus összes síkját tartalmazza.

6.1. Lemma. *(Beutelspacher) Legyen S síkfedés $PG(5,q)$-ban és vegyünk egy olyan U_2 hipersíkot, mely tartalmazza S egyik U_1 elemét. Ekkor S többi eleme egyenesben metszi U_2-t, azaz U_2-ben (mely izomorf $PG(4,q)$-val) ezek a metszetek olyan részleges egyenesfedést adnak, mely $U_2 \setminus U_1$ pontjait fedi.*

Bizonyítás S elemei diszjunktak U_1-től, így legfeljebb egy egyenesben metszhetik U_2-t, másrészt a dimenziók miatt legalább egy egyenesben. □

6.2. Konstrukció. *(Beutelspacher) $PG(4,q)$-ban van q^3+1 méretű maximális részleges fedés, melyben a fedetlen pontok egy sík mínusz egy egyenest alkotnak.*

Bizonyítás Azonosítsuk $PG(4,q)$-t az előző lemmában szereplő U_2-vel. Az ott kapott részleges fedését U_2-nek egészítsük ki egy tetszőleges U_1-beli egyenessel. □

Mostantól a fenti konstrukcióból kiindulva próbálunk kisebb maximális részleges fedéseket gyártani. Jelöljük P-vel azt a részleges fedést, melyet a 6.1 lemmában kaptunk.

6.3. Lemma. *Legyen α U_2-beli hipersík, amely egy l egyenesben metszi U_1-et.*

(I) α pontosan q P-beli egyenest tartalmaz;

(II) ha P-t egy reguláris síkfedésből gyártottuk, akkor a q darab α-beli egyenes és l regulust alkot.

Bizonyítás (I) Tartalmazzon az α hipersík a P-beli egyenest, és jelölje b a P-beli, α-t egy pontban metsző egyenesek számát. Ekkor $a+b=q^3$ és $a(q+1)+b=q^3+q^2$. Ebből következik, hogy $a=q$.

(II) Jelölje $l_1,\dots,l_q$ a kérdéses egyeneseket és $M_1,\dots,M_q$ azokat a síkokat, melyekből származnak (azaz $PG(5,q)$-ban $l_i = U_2 \cap M_i$). Azt fogjuk megmutatni, hogy U_1, $M_1,\dots,M_q$ síkregulust alkotnak $PG(5,q)$-ban. Jelölje $l^*, l_1^*, \dots, l_q^*$ azt a $q+1$ egyenest, melyek metszik l-t, l_1-et és l_2-t (azaz az

l, l_1 és l_2 által generált regulus ellentett regulusát). Ez a $q+1$ egyenes metszi az U_1, M_1 és M_2 síkokat, így metszi az általuk generált síkregulus minden elemét. Mivel a kérdéses $q+1$ egyenes α-n belül van, olyan síkok kell legyenek a síkregulusban, melyek α-t legalább $q+1$ pontban metszik, azaz éppen $U_1, M_1, \ldots, M_q$ alkotja ezt a regulust. Ebből viszont az is következik, hogy ezen síkok α-ba eső részét metszi $l^*, l_1^*, \ldots, l_q^*$ mindegyike, azaz $l, l_1, \ldots, l_q$ valóban regulust alkot.

□

6.4. Lemma. *Legyen r rögzített pont U_1-ben, és legyen $l_1, \ldots, l_{q-1}$ tetszőleges r-en átmenő U_1-beli egyenes. Van olyan $H_1, H_2, \cdots, H_{q-1}$ 3-dimenziós altér U_2-ben, hogy teljesülnek a következők.*

- *H_i és U_1 metszete l_i ($i = 1, \ldots, q-1$);*
- *$i \neq j$-re a H_i-ben és H_j-ben lévő P-beli egyenesek különbözők.*

Bizonyítás Összesen q^2 olyan 3-dimenziós altér van U_2-ben, melyek U_1-et l_1-ben metszik. Ezek bármelyike jó H_1-nek. A H_1-beli q egyenese P-nek q olyan 3-dimenziós alteret generál l_1-gyel együtt, melyek nem jók H_2-nek. Így abból a q^2 3-dimenziós altérből, melyek U_1-et l_2-ben metszik, legalább $q^2 - q$ jó H_2-nek. Rekurzíven definiálhatjuk a $H_3, \ldots, H_{q-1}$ altereket. Ha már $H_1, \ldots, H_i$ megvan, akkor az ezekben lévő $i(q+1)$ P-beli egyenes legfeljebb $i(q+1) < q^2$ olyan 3-dimenziós alteret zár ki, melyek U_1-et l_{i+1}-ben metszik. Tehát találunk megfelelő H_{i+1}-et. □

6.5. Tétel. *(Eisfeld, Storme, Sziklai[6]) $PG(4, q)$-ban van $q^3 + 1 - i$ méretű maximális részleges befedés minden $1 \leqslant i \leqslant q-2$-re, ha $q \geqslant 5$.*

Bizonyítás Az előző lemmában kapott H_i-k mindegyike q egyenest tartalmaz P-ből. Minden i-re a kapott q egyenes és l_i regulust alkot a 6.3 lemma miatt. Ha lecseréljük a H_1-beli q egyenest a kérdéses regulus ellentett regulusára (és a többi P-beli egyenest megtartjuk), akkor olyan $q^3 + 1$ méretű részleges fedést kapunk, melyben a fedetlen pontok halmaza: $U_1 \setminus l_1$.

Ha most a H_2-beli q egyenest is kidobjuk P-ből, akkor az ellentett regulus minden elemét betehetjük, kivéve azt, amelyik r-en ment át. Így továbbra is q^3+1 méretű részleges fedést kapunk, de most a fedetlen pontok: $U_1 \setminus (l_1 \cup l_2)$ és egy r-en átmenő, nem U_1-beli egyenes pontjai.

Ha ugyanezt megcsináljuk még a $H_3, \ldots, H_i$ alterekben (tehát kidobunk minden H_i-beli egyenest és helyette betesszük a megfelelő ellentett regulus nem r-en átmenő elemeit), akkor olyan $q^3 + 1$ méretű P_i részleges fedést kapunk, melyben U_1 pontjai közül azok fedettek, melyek $l_1, l_2, \ldots, l_i$ valamelyikén vannak, van viszont $i - 1$ egyenes r-en át nem U_1-ben, melynek r-től különböző pontjai fedetlenek.

Vegyünk egy r-en nem átmenő T egyenest, majd azon át az előző lemmához hasonlóan egy olyan H 3-dimenziós alteret, mely csak T-ben metszi U_1-et és nem tartalmaz olyan P-beli egyenest, mely benne van $H_1, \ldots, H_i$ bármelyikében (itt használjuk, hogy $i \leqslant q - 1$).

Ha most a H-beli egyeneseket is kidobjuk P_i-ből, akkor ezek ellentett regulusának azon elemeit tehetjük csak vissza, melyek nem mennek át a $T \cap l_1$, $T \cap l_2$, $\ldots$,$T \cap l_i$ pontokon. Így a kapott részleges fedés mérete $q^3 + 1 - i$. Meg kell még mutatnunk, hogy maximális.

Tegyük fel indirekt, hogy egy R egyenes hozzávehető a kapott részleges fedéshez. R-nek nyilván legfeljebb 1 pontja van U_1-ben. A nem U_1-beli lyukak kétfélék lehetnek: i darab r-en átmenő egyenes r-től különböző pontjai (I típus), illetve i darab T-t metsző egyenes nem T-re eső pontjai (II típus). Az utóbbi egyenesek egy ellentett regulus egyenesei, így, ha R ezekből legalább 3-t metszene, akkor már benne lenne a regulusban (azaz eredetileg P-ben volt), ez nem lehet, mert legalább egy elem az ellentett regulusból benne van a részleges befedésünkben.

A fentiekből azonnal adódik, hogy egyetlen esetben nem nyilvánvaló a maximalitás: ha $i = q - 2$ és R pontosan egy U_1-beli, $q - 2$ I típusú és 2 II típusú pontot tartalmaz. Ez azt jelenti, hogy a kérdéses $q - 2$ I típusú lyukat adó, r-en átmenő $S_1, S_2, \ldots, S_{q-2}$ egyenes egysíkú. Ezek rendre a $H_1, H_2, \ldots, H_{q-2}$ alterekben vannak. Ez lehetséges, de kis számolással megmutatható, hogy H_{q-2} választható úgy, hogy ilyen R ne létezhessen. $\square$

7. Egyenesbefedések $PG(n, q)$-ban $n \geqslant 5$-re

7.1. Konstrukciók nagy és kicsi maximális részleges befedésre

A befedések létezéséről szóló fejezetben láttuk, hogy pontosan akkor létezik egyenes fedés, ha a dimenzió páratlan. Először a páros dimenziós legnagyobb részleges befedést ismertetjük. Ez a 4-dimenziós térre megismert konstrukció általánosítása.

7.1. Lemma. *(Beutelspacher) Vegyünk $PG(n, q)$-ban egy 2 kodimenziós H alteret. H komplementere lefedhető egyenesekkel. (Magyarul: $PG(n, q) \setminus PG(n-2, q)$ befedhető egyenesekkel.)*

Bizonyítás Vegyünk $PG(2n-3,q)$-ban egy befedést $(n-2)$-dimenziós alterekkel. Ezek egyikét jelöljük H-val, egy tetszőleges H-t tartalmazó n-dimenziós alteret pedig W-vel. Ez a W lesz az állításban szereplő $PG(n,q)$, melynek H-n kívüli részét particionáljuk egyenesekkel.

A dimenziók miatt könnyű látni, hogy a befedésbeli alterek legalább egy egyenesben metszik W-t. Másrészt a H-tól különböző befedésbeli alterek diszjunktak H-tól. Könnyű látni (megintcsak a dimenziók miatt), hogy ez csak úgy lehet, ha H-n kívül minden befedésbeli altér pontosan egy egyenesben metszi W-t. Ez pont azt jelenti, hogy $W \setminus H$ egyenesekkel van partícionálva. $\square$

7.2. Konstrukció. *(Beutelspacher) $PG(n,q)$-ban páros n-re van olyan maximális részleges egyenes fedés, melynek mérete* $\frac{q^{n+1}-q^3}{q^2-1}+1 = q^{n-1}+q^{n-3}+\cdots+q^3+1.$

Bizonyítás Legyen $n=2k$ és vegyünk $PG(n,q)$-ban egy $H_1 < H_2 < \cdots < H_k$ altérláncot, ahol H_1 2-dimenziós, H_2 4-dimenziós, …, H_k $2k$-dimenziós. (Tehát H_1 sík, H_k az egész tér, és kettesével nő a dimenzió.)

A 7.1 lemma szerint $H_k \setminus H_{k-1}$ befedhető egyenesekkel. Ha ez megvan, akkor megint az előző lemmát alkalmazva befedjük $H_{k-1} \setminus H_{k-2}$-t egyenesekkel, …, végül befedjük $H_4 \setminus H_2$-t egyenesekkel. Végül veszünk egy egyeneset H_2-ben. Így a tér be lesz fedve, kivéve egy sík mínusz egy egyenes, ebbe nyilván nem fér be még egy egyenes. $\square$

A következő szakaszban látni fogjuk, hogy páros n-re az imént adott konstrukció adja a legnagyobb részleges befedést.

Most rátérünk a kis méretű konstrukcióra. Mivel egy hipersík minden egyenest metsz, egy részleges befedés maximalitásához elég, ha van olyan hipersík, melynek minden pontja fedve van. Ez az egyszerű észrevétel adja a következőt.

7.3. Konstrukció. *(Beutelspacher) $PG(n,q)$-ban maximális részleges befedést kapunk, ha egy hipersíkban veszünk egy tetszőleges S részleges befedést és ezt kiegészítjük olyan páronként kitérő egyenesekkel, melyek a hipersíkot épp az S által fedetlen pontokban metszik. Egy ilyen mérete* $|S| + \frac{q^n-1}{q-1} - |S|(q+1)$.

A következő szakaszban látni fogjuk, hogy ha S-et a lehető legnagyobbra választjuk, akkor a 7.3 konstrukció adja a lehető legkisebb példákat.

7.2. Becslések

Először a legnagyobb maximális részleges befedés méretét határozzuk meg. Ez páratlan n-re éppen a befedés mérete. Páros n-re a következő igaz.

7.4. Tétel. *(Beutelspacher) Páros n-re $PG(n,q)$-ban tetszőleges részleges befedés mérete legfeljebb $q^{n-1}+q^{n-3}+\cdots+q^3+1$ (tehát a 7.2 konstrukció adja a legnagyobb példát).*

Bizonyítás Indirekt tegyük fel, hogy találtunk egy S részleges befedést legalább $q^{n-1}+q^{n-3}+\cdots+q^3+2$ egyenessel. Először megmutatjuk, hogy tetszőleges hipersíkban legfeljebb $q^{n-3}+q^{n-5}+\cdots+q^3+q$ eleme lehet S-nek ($n=4$ esetén ez q-t jelent, $n=6$-ra q^3+q-t).

Legyen H hipersík, melyben s egyenese van S-nek. Mivel minden egyenes metszi H-t és S elemei diszjunktak, a fedett H-beli pontok számából az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk: $s(q+1)+(|S|-s)\leqslant|H|$, azaz $sq\leqslant|H|-|S|\leqslant q^{n-2}+q^{n-4}+\cdots+q^2+q-1$ a feltételek szerint. q-val osztva és egészrészt véve kapjuk az ígért $s\leqslant q^{n-3}+q^{n-5}+\cdots+q^3+q$ egyenlőtlenséget.

Most számoljuk meg a (H,l) párokat, ahol H hipersík, $l\in S$ és l H-ban van. Mivel egy egyenesen $\frac{q^{n-1}-1}{q-1}$ hipersík megy át, a párok száma pontosan $|S|\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\geqslant(q^{n-1}+q^{n-3}+\cdots+q^3+2)\frac{q^{n-1}-1}{q-1}$.

Másrészt összesen $\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ hipersík van, így, kihasználva a bizonyítás elején kapott becslést, a párok száma legfeljebb $\frac{q^{n+1}-1}{q-1}(q^{n-3}+q^{n-5}+\cdots+q^3+q)$.

A kétféle becslést a párok számáról összevetve ellentmondáshoz jutunk. $\square$

Most rátérünk a legkisebb maximális részleges befedés méretének becslésére.

7.5. Lemma. *(Beutelspacher) Legyen b a legkisebb nem-triviális egyenes-lefogó ponthalmaz mérete $PG(n,q)$-ban. Bármely S maximális részleges befedés, melyre $|S|<b/(q+1)$, a 7.3 konstrukcióból kell, hogy jöjjön.*

Bizonyítás S maximalitása azt jelenti, hogy az S-beli egyenesek uniója lefogó ponthalmaz az egyenesekre nézve. Ha ez kisebb, mint b, akkor tartalmaznia kell hipersíkot. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez éppen azt jelenti, hogy S a 7.3 konstrukcióból jön. $\square$

7.6. Tétel. *(Beutelspacher) $PG(n,q)$-ban a legkisebb maximális részleges egyenes fedés mérete $\frac{q^n-1}{q^2-1}$, ha $n\geq 4$ páros és $\frac{q^n-q^2}{q^2-1}+q^2+1$, ha $n\geq 5$ páratlan. Egyenlőséget csak a 7.3 konstrukcióból jövő példa ad.*

Bizonyítás Beutelspacher lefogó ponthalmazokról szóló eredményei szerint $\frac{q^n-1}{q^2-1}$ is és $\frac{q^n-q^2}{q^2-1}+q^2+1$ is kisebb, mint $b/(q+1)$, ahol b jelöli a legkisebb nem-triviális lefogó ponthalmaz méretét $PG(n,q)$-ban. Így alkalmazhatjuk a 7.5 lemmát, mely szerint ezen méretek vagy ezek alatti maximális részleges befedés csak a 7.3 konstrukcióból jövő példa lehet. Azt kell tehát megmutatnunk, hogy ezek a méretek jönnek ki, ha a hipersíkba a lehető legnagyobb részleges fedését tesszük $PG(n-1,q)$-nak. Ha n páros, akkor $PG(n-1,q)$-ban van fedés, ennek mérete éppen $\frac{q^n-1}{q^2-1}$. Ha q páratlan, akkor pedig a lehető legnagyobb részleges fedésével kell számolnunk $PG(n-1,q)$-nak, ez $\frac{q^n-q^2}{q^2-1}+1$ méretű. Ehhez egy-egy egyenest hozzávéve a fedetlen pontokon a konstrukcióban leírtak szerint, a méret $\frac{q^n-q^2}{q^2-1}+q+1$ lesz. □

7.3. Sűrűségi eredmények $PG(n,q)$ maximális részleges egyenes befedéseiről

Az alábbi három tétel azt mondja, hogy a legkisebb és legnagyobb maximális részleges befedés mérete között majdnem minden méretre van példa 5 dimenzióban és afölött (precízebben ld az összefoglaló szakaszt).

7.7. Tétel. *(Gács-Szőnyi[7]) $PG(n,q)$-ban, $n \geqslant 5$ páratlan, q elég nagy; minden*

$$[9nq^{n-2}\ln q, \frac{q^{n+1}-q}{q^2-1} - q + 1]$$

intervallumbeli mérethez van maximális részleges egyenes befedés.

7.8. Tétel. *(Gács-Szőnyi [7]) $PG(n,q)$-ban, $n \geqslant 6$ páros, q elég nagy; minden*

$$[9nq^{n-2}\ln q, \frac{q^{n+1}-q}{q^2-1} - q^3 + q^2 - 2q + 2]$$

intervallumbeli mérethez van maximális részleges egyenes befedés.

7.9. Tétel. *(Eisfeld-Sziklai-Storme [6]) $PG(n,q)$-ban, $n \geqslant 6$ páros, $q \geq 5$; minden $[\frac{q^{n+1}-q}{q^2-1} - q^3 + q^2 - 2q + 2, \frac{q^{n+1}-q}{q^2-1} - q + 1]$ intervallumbeli mérethez van maximális részleges egyenes befedés.*

Részletesen itt a páratlan dimenziós esetet tárgyaljuk.

7.10. Lemma. *Rögzítsünk egy l egyenest $PG(n,q)$-ban, ahol $n \geqslant 5$ páratlan. Ekkor a tér pontjai beoszthatók l-en átmenő, egyébként diszjunkt három dimenziós alterekbe.*

Bizonyítás Az l-en átmenő alterek éppen egy $PG(n-2,q)$-t alkotnak, ennek kell venni egy egyenes befedését, erről tudjuk, hogy létezik. □

7.11. Konstrukció. *Legyenek $U_1, U_2, \ldots, U_k, \ldots$ az előző lemmában talált 3-dimenziós alterek. Tegyük fel, hogy az első k uniója metsz minden olyan egyenest, mely nincs benne egyik U_i-ben sem és nem metszi l-et. $1 \leq i \leq k$-ra vegyünk egy l-et tartalmazó befedést U_i-ben, $i \geq k+1$-re pedig vegyünk egy tetszőleges l-et tartalmazó maximális részleges befedést U_i-ben. A kapott egyeneshalmaz maximális részleges befedés $PG(n,q)$-ban.*

Bizonyítás Mivel az U_i-k l-en kívül diszjunktak, l pedig minden (részleges) befedésben benne van, amit egy-egy U_i-ben választunk, valóban részleges befedést kapunk. Tegyük fel indirekt, hogy egy m egyenes hozzávehető. Ha $m \subseteq U_i$ valamilyen i-re, akkor azzal jutunk ellentmondásra, hogy az U_i-ben választott részleges befedés maximális volt. Ha pedig m nincs benne egyik U_i-ben sem, akkor az első k U_i-re tett feltevésből adódóan metszi valamelyik U_i-t $1 \leqslant i \leqslant k$-ra. Ez viszont ellentmondás, mert ebben az U_i-ben befedést vettünk, tehát minden pontja fedve van. □

A 7.7 Tétel bizonyítása A fenti konstrukcióban az U_i-k sorrendje tetszőleges volt, másrészt, ha teljesül a megkívánt feltétel néhány U_i-re, akkor újabbakat hozzávéve továbbra is teljesülni fog, tehát a legkisebb elérhető mérethez azt kell tisztázni, hogy legkevesebb hány U_i foghat le minden egyenest, mely nincs benne egyik U_i-ben sem.

Összesen $N = \frac{q^{n-1}-1}{q^2-1}$ alterünk van, így k U_i-t $\binom{N}{k}$ féleképpen tudunk választani. Azon választások száma, melyeknél egy rögzített m egyenes (mely nincs benne egyik U_i-ben sem és diszjunkt l-től) diszjunkt mind a k altértől $\binom{N-q-1}{k}$, hiszen m minden U_i-t legfeljebb egy pontban metsz, így pontosan $q+1$ U_i megy át rajta. A tér egyeneseinek száma nem több, mint $4q^{2n-2}$, így legfeljebb $4q^{2n-2}\binom{N-q-1}{k}$ olyan választás van, amikor nem teljesül a blokkoló tulajdonság a k darab U_i-re. Kis számolás mutatja, hogy ha q nagy és $k \geqslant 4nq^{n-4}\ln(q)$, akkor a rossz választások száma kisebb mint $\binom{N}{k}$, azaz van megfelelő választás.

Ha a fentiekből kapott lehető legkisebb k-val keresünk U_i-ket, majd minden $i \geqslant k+1$-re U_i-be a korábban konstruált lehető legkisebb 3-dimenziós maximális részleges befedést tesszük, akkor még az állításban szereplő intervallum aljánál is kisebb maximális részleges befedést kapunk. Ha egy $cq\log(q)$ nagyságrendű méretűt átcserélünk arra a méretre, ahonnan kezdődik a korábban kimondott sűrűségi tétel 3-dimenziós terekre (5.17 és 5.18 tételek), akkor a kapott befedés méretét egyesével tudjuk növelni az idézett tételek miatt. Ha egy U_i-ben elérjük a lehető legnagyobb értéket, akkor még egy U_i-be megfelelő 3-dimenzióst választunk az idézett 3-dimenziós sűrűségi tételek segítségével, stb. A legnagyobb értéket úgy kapjuk, hogy mindenhova befedést teszünk, kivéve egy U_i-t, ahova $q^2 - q + 2$

méretű maximális részleges befedést.

Páros dimenzióban (7.8 tétel) hasonló konstrukciót lehet csinálni, csak bonyolultabban, mert ezekben a terekben nincsenek teljes 1-befedések.

Annyi a különbség , hogy itt egy rögzített egyenesen keresztül nem teljes befedést kell venni 3 dimenziósokból, hanem a lehető legnagyobb részleges befedést. Itt is meg lehet mutatni, hogy $cnq^{n-4}\log(q)$ elem lefog minden olyan egyenest, amelyik nem ezen 3-dimenziósok egyikében fekszik.

A 7.9 tétel bizonyítását nem tárgyaljuk.

7.4. Összefoglalás részleges egyenes fedésekről

3 **dimenzióban**

- a legjobb alsó becslés $2q$, míg a legkisebb ismert példa $cq\log(q)$ méretű;
- a $[cq\log(q), q^2/2]$ intervallumban néhány értékre ismert példa, a többire nyitott, hogy van-e példa;
- a $[\frac{q^2+13}{2}, q^2-q+2]$ intervallum minden értékére van példa (páros q-ra kicsit nagyobb az intervallum alsó széle);
- nyitott, hogy nagy q-ra $[q^2-q+3, q^2-\sqrt{q}]$-ban van-e példa;
- $[q^2-\sqrt{q}, q^2]$-ben nem lehet példa;
- a legnagyobb példa a q^2+1 méretű befedés.

4 **dimenzióban**

- A legkisebb maximális részleges befedés a q^2+1 méretű befedés hipersíkban;
- a legkisebb méret fölött egy darabig mindent tudunk, de a legnagyobb itteni méret nagyságrendje is q^2;
- sűrűségi eredmény van $[q^3-q+3, q^3+1]$-ben;
- a legnagyobb mérete q^3+1.

$n \geq 5$ **páratlan dimenzióban**

- A legkisebb maximális részleges befedés hipersík maximális részleges befedése, plusz egy-egy egyenes a lyukakon, ennek mérete $q^{n-2}+q^{n-3}+\cdots+q^4+2q^3+2^2+1$;
- a legkisebb méret fölött egy darabig mindent tudunk (de a nagyságrend, amíg minden ismert ugyanúgy q^{n-2});
- sűrűségi eredmény van a $[cnq^{n-2}\ln(q), \frac{q^{n+1}-1}{q^2-1}-q+1]$ intervallumra;
- a legnagyobb méret a befedésé: $\frac{q^{n+1}-1}{q^2-1}$.

$n \geq 6$ **páros dimenzióban**

- A legkisebb maximális részleges befedést egy hipersík egyenes befedése adja (méret: $\frac{q^n-1}{q^2-1}$);
- a legkisebb fölött egy darabig ismertek a példák (de a nagyságrend, amíg minden ismert ugyanúgy q^{n-2});
- $cnq^{n-2}\log(q)$-tól minden értékre van példa a legnagyobb méretéig, azaz $q\frac{q^n-1}{q^2-1}-q+1$-ig.

III. rész

Magasabb dimenziós részleges befedések

8. Részleges t-befedések $PG(n,q)$-ban, ahol $(t+1) \nmid (n+1)$

8.1. Konstrukciók

Először annak a konstrukciónak az általánosítását adjuk meg, mely páros dimenziós térben a legnagyobb részleges egyenes fedést adta. Ebben a szakaszban minden Beutelspachertől származik [2].

8.1. Lemma. *Legyen U s dimenziós altér $PG(s+t+1,q)$-ban, ahol $s \geqslant t$. Ekkor U komplementere fedhető t-dimenziós alterekkel (magyarul $PG(s+t+1,q) \setminus PG(s,q)$ partícionálható t-dimenziós alterekkel).*

Bizonyítás Legyen S^1 s-befedés $PG(2s+1,q)$-ban. Legyen $U \in S^1$ és válasszunk egy U-t tartalmazó W $(s+t+1)$-dimenziós alteret (ez lesz a $PG(s+t+1,q)$). Diszjunktság miatt S^1 összes többi eleme t dimenziós altérben metszi W-t. Ezeknek a metszeteknek a halmaza adja a keresett fedést. □

8.2. Következmény. *Legyen $n = k(t+1)+r-1$, ahol $r \leqslant t$. $PG(n,q)$-ban van olyan részleges t-befedés, melyben a kimaradó pontok éppen egy $(t+r)$-dimenziós altér pontjai.*

Bizonyítás Vegyünk egy $U_1 < U_2 < \cdots < U_k$ altérláncot, ahol U_1 $(t+r)$-dimenzós és minden lépésben $(t+1)$-gyel nő a dimenzió. Tehát U_i dimenziója $r-1+i(t+1)$ és U_k az egész tér. Az előző lemma miatt lefedhetjük $U_k \setminus U_{k-1}$-et, majd $U_{k-1} \setminus U_{k-2}$-t, végül $U_2 \setminus U_1$-et páronként diszjunkt t-dimenziós alterekkel. Így végül éppen U_1 pontjai maradnak ki. □

8.3. Tétel. *$PG(k(t+1)+r-1,q)$-ban van olyan részleges t-befedés, melynek mérete*

$$q^r \frac{q^{k(t+1)}-1}{q^{t+1}-1} - q^r + 1$$

Bizonyítás Az előző következmény szerint egy U $r+t$ dimenziós altér kivételével fedjük be a teret, és vegyünk hozzá egy t dimenziós alteret U-ból. $\square$

Mint látni fogjuk, $r=1$ esetén ennél nagyobb példa nincs.

8.2. Felső becslések

Legyen a továbbiakban $n = k(t+1)+r-1$, ahol $1 \leqslant r \leqslant t$.

Triviális leszámlálással a következőt kapjuk.

8.4. Tétel. *$PG(n,q)$ részleges befedése legfeljebb $q^r \frac{q^{k(t+1)}-1}{q^{t+1}-1}$ elemet tartalmaz.*

Bizonyítás $PG(n,q)$ $\frac{q^{k(t+1)+r}-1}{q-1} = q^r \frac{q^{k(t+1)}-1}{q-1} + \frac{q^r-1}{q-1}$ pontot tartalmaz. Itt az első tag osztható $\frac{q^{t+1}-1}{q-1}$-gyel, ami a t dimenziós altér pontjainak száma. Ebből következik az állítás. $\square$

A következő tétel már jobb becslést ad.

8.5. Tétel. *Legyen $t, k \geqslant 1$, $1 \leqslant r \leqslant t$. Legyen továbbá S maximális részleges t-befedés $PG(k(t+1)+r-1,q)$-ban, melynek mérete*

$$q^r \frac{q^{k(t+1)}-1}{q^{t+1}-1} - s.$$

Ekkor

1. *$s \geqslant q-1$ (Beutelspacher [2])*
2. *$s > \frac{q^r-1}{2} - \frac{q^{2r-t-1}}{5}$ (Drake-Freeman [4])*

Bizonyítás A tételt több lépésben látjuk be:

1. lépés: S lyukainak száma $\frac{q^r-1}{q-1} + s\frac{q^{t+1}-1}{q-1}$.

Számoljuk meg a lyukakat:

$$|PG(n,q)| - |S| \cdot \frac{q^{t+1}-1}{q-1} = \frac{q^{k(t+1)+r}-1}{q-1} - q^r \cdot \frac{q^{k(t+1)}-1}{q-1} + s \cdot \frac{q^{t+1}-1}{q-1}$$

2. lépés: Az egy hipersíkban levő lyukak száma kongruens $\frac{q^r-1}{q-1} + s \cdot \frac{q^t-1}{q-1} \bmod q^t$.

Legyen H hipersík. Ekkor S egy eleme vagy $\frac{q^{t+1}-1}{q-1}$, vagy $\frac{q^t-1}{q-1}$ pontban metszi a H hipersíkot. Ez a szám tehát mindkét esetben kongruens $\frac{q^t-1}{q-1}$-gyel $\bmod q^t$.

Mivel $|S| \equiv q^r - s \bmod q^t$, azért az S által fedett H-beli pontok száma $\frac{q^t-1}{q-1}|S| \equiv (q^r - s) \cdot \frac{q^t-1}{q-1} \bmod q^t$. Tehát a lyukak száma H-ban kongruens $\frac{q^n-1}{q-1} + (s - q^r) \cdot \frac{q^t-1}{q-1} \equiv \frac{q^r-1}{q-1} + s \cdot \frac{q^t-1}{q-1} \bmod q^t$.

3. lépés: A tétel első állítása teljesül.

Legyen $s \leqslant q-2$. A 2. lépés szerint minden H hipersík legalább $\frac{q^r-1}{q-1} + s \cdot \frac{q^t-1}{q-1}$ lyukat tartalmaz. Legyen H hipersík, P lyuk. Leszámlálva az illeszkedő (H, P) párokat

$$\left(\frac{q^r-1}{q-1} + s \cdot \frac{q^{t+1}-1}{q-1}\right) \cdot \frac{q^n-1}{q-1} \geqslant \frac{q^{n+1}-1}{q-1}\left(\frac{q^r-1}{q-1} + s \cdot \frac{q^t-1}{q-1}\right),$$

ekvivalens alakban $s(q^n - q^t) \geqslant q^n(q^r - 1)$. Ellentmondás.

4. lépés: A tétel második állítása teljesül.

Szorítkozhatunk a $k \geqslant 2$ esetre, különben $|S| \leqslant 1$. Legyen λ_i az i lyukat tartalmazó hipersíkok száma minden $i \in \mathbb{N}_0$-ra.

Kettős leszámlálással

$$\sum_i \lambda_i = \frac{q^{k(t+1)+r}-1}{q-1}$$

$$\sum_i i\lambda_i = \left(\frac{q^r-1}{q-1} + s\frac{q^{t+1}-1}{q-1}\right)\frac{q^{k(t+1)+r-1}-1}{q-1}$$

$$\sum_i i(i-1)\lambda_i = \left(\frac{q^r-1}{q-1} + s\frac{q^{t+1}-1}{q-1}\right)\left(\frac{q^r-1}{q-1} + s\frac{q^{t+1}-1}{q-1} - 1\right)\frac{q^{k(t+1)+r-2}-1}{q-1}$$

A 2. lépés eredményével

$$\sum_i \left(i - \frac{q^r-1}{q-1} - s\frac{q^t-1}{q-1}\right)\left(i - \frac{q^r-1}{q-1} - s\frac{q^t-1}{q-1} + q^t\right)\lambda_i \geqslant 0.$$

Behelyettesítve a $\sum \lambda_i$, $\sum i\lambda_i$, és a $\sum i(i-1)\lambda_i$ értékeket némi számolás után megkapjuk a tétel második állítását. $\square$

Vegyük észre, hogy $r = 1$ esetén az előző szakaszbeli konstrukció miatt a becslés éles.

9. Részleges t-befedések $PG(n, q)$-ban, ahol $(t+1)|(n+1)$

9.1. Geometrikus és reguláris befedések magasabb dimenziós terekben

Ebben a szakaszban néhány fogalmat vezetünk be és tételt monduk ki ezekkel kapcsolatban, melyekre a következő szakaszbeli konstrukcióknál lesz szükség.

9.1. Definíció. *Legyen S t-befedés $PG(n, q)$-ban. S* geometrikus befedés*, ha S bármely különböző V és W elemére teljesül, hogy az általuk generált $< V, W >$ $2t + 1$ dimenziós altér S minden elemét vagy tartalmazza vagy diszjunkt tőle.*

Vegyük észre, hogy a fenti definícióból következik, hogy a $< V, W >$ altérbe eső elemei a befedésnek a kérdéses altér t-befedését adják.

Most geometrikus befedések segítségével megadjuk bizonyos projektív terek egy modelljét.

9.2. Tétel. *(Segre) Legyen S geometrikus t-befedés $PG(a(t + 1) - 1, q)$-ban és tekintsük a következő $\mathcal{I}(S)$ halmazrendszert.*

$\mathcal{I}(S)$ pontjai: S elemei

$\mathcal{I}(S)$ blokkjai: a $< V, W >$ alterek, ahol V és W különböző elemei S-nek.

Ekkor a kapott halmazrendszer izomorf $PG(a - 1, q^{t+1})$ pontjaival és egyeneseivel.

Ismert, hogy $PG(n, q)$ tartalmaz geometrikus befedést minden $t + 1|n + 1$ esetén, azaz, ha a befedés létezésére vonatkozó egyszerű oszthatósági feltétel teljesül.

9.2. Konstrukciók

Ebben a szakaszban Beutelspachertől [2] származó konstrukciókat tárgyalunk.

Célunk először $PG(4s + 2, q)$-beli maximális részleges befedések konstrukciója. A trükk az, hogy vesszük $PG(3, q^{s+1})$-nek az előző szakaszban megadott modelljét (9.2 tétel). Ebben az egyeneseket $2s + 1$-dimenziós alterek adják. Ebben a modellben tekintjük $PG(3, q^{s+1})$ (tehát egy 3-dimenziós tér) egy maximális részleges egyenes befedését (ilyeneket korábban konstruáltunk). A részleges befedés egyeneseinek ebben a modellben diszjunkt $(2s+1)$-dimenziós alterek felelnek meg, azaz $PG(4s+2,q)$ egy részleges $(2s+1)$-fedése. Persze ez nem automatikusan maximális, hiszen csak azon $(2s+1)$-dimenziós alterekről tudjuk, hogy nem vehetők hozzá, melyek $PG(3,q^{s+1})$ egyenesének felelnek meg. De egy konkrét 3-dimenziós példa, nevezetesen a 5.21 konstrukció megfelelő k-val, esetén maximális lesz a kapott részleges befedés.

Mielőtt megadnánk a konstruciót, szükségünk van még egy lemmára.

9.3. Lemma. *$PG(n,q)$ valódi alterekkel való partíciójához legalább $q+1$ altérre van szükség.*

Bizonyítás Legyen r a partíció egyik elemének dimenziója. Ekkor a többi dimenziója legfeljebb $n-r-1$, így az alterek száma legalább $1+\frac{q^{n+1}-q^{r+1}}{q^{n-r}-1} \geq q+1$. □

9.4. Tétel. *Legyen q prímhatvány, s pozitív egész, $t = 2s+1$, és $m < (q-1)/2$. Ekkor $PG(2t+1,q)$ tartalmaz S maximális részleges befedést, aminek mérete*

$$|S| = q^{t+1} + 1 - mq^{s+1}.$$

Bizonyítás Legyen S_0 reguláris s-befedés $PG(4s+3,q) = PG(2t+1,q)$-ban. A 9.2 tétel szerint ennek elemei megfeleltethetők $PG(3,q^{s+1})$ pontjainak, az elempárjai által generált $(2s+1)$-dimenziós alterek pedig $PG(3,q^{s+1})$ egyeneseinek. Vegyük ebben a modellben azt a maximális részleges egyenesfedést, melyet a 5.21 konstrukcióban megadtunk, méghozzá $k = q^{s+1} - 1 - m$ választással. (Vegyük észre, hogy az ottani q itt q^{s+1}.) Ennek egyenesei $PG(4s+3,q)$-ban páronként diszjunt $(2s+1)$-dimenziós alterek, azaz egy S részleges befedést alkotnak. Könnyű számolás mutatja, hogy a méret éppen $q^{t+1} + 1 - mq^{s+1}$. Megmutatjuk, hogy a részleges befedés maximális, ezzel készen leszünk.

Tegyük fel indirekt, hogy van olyan U t-dimenziós altér, mely hozzávehető, azaz S minden eleméhez kitérő. U nem felelhet meg egyenesnek a modellben (mert a 3-dimenziós részleges befedés, melyből származtattuk, maximális volt), tehát van olyan V eleme S_0-nak, mely nem része U-nak, de metszi. Legyen V_1 egy másik U-t metsző S_0-beli elem és tekintsük a $< V, V_1 >$ alteret, mely egy L egyenesnek felel meg a modellben. Ebben a pontoknak megfelelő s-dimenziós alterek (ezek páronként diszjunktak) közül legalább kettő metszi U-t, így 9.3 lemma szerint legalább $q+1$. Mivel U diszjunkt S minden elemétől, ennek a $q+1$ pontnak is diszjunktnak kell lennie (hiszen egy egyenesnek megfelelő $(2s+1)$-dimenziós altér vagy tartalmaz egy pontot vagy diszjunkt tőle). Azt kapjuk tehát, hogy L olyan egyenes $PG(3,q^{s+1})$-ben, melyen legalább $q+1$ lyuk van. Ez több, mint $2(q^{s+1} - k)$, így a 5.24 lemma szerint L vagy az egyik R_i-ben vagy egy R_i^*-ban van (a 5.21 konstrukció jelöléseivel) valamilyen $i > k$-ra.

Nyilván nem lehet $L = l$, hiszen l-en egyetlen lyuk sincs. Ekkor viszont L-nek van olyan lyuka, mely nincs l-en, azaz egyetlen R_i által fedett hiperbolikus kvádrikán van. Ha most V-t ilyen pontnak választjuk, akkor látható, hogy legfeljebb két olyan V-n átmenő egyenes lehet, melyen V-n kívül van lyuk (hiszen a kvádrikán egy ponton csak két egyenes megy, másrészt a fentiek szerint minden ilyen egyenes a kvádrikán kell legyen).

A V-n átmenő egyeneseknek megfelelő $(2s + 1)$-dimenziós alterek lefedik az egész $PG(2t + 1, q)$-t, tehát U-t is, márészt azt kaptuk, hogy legfeljebb 2 ilyen $(2s + 1)$-dimenziós altér metszi $U \setminus V$-t. Könnyű látni, hogy ez csak úgy lehet, ha egyetlen ilyen (egyenesnek megfelelő) altér van, és ez megegyezik U-val. Ez viszont azt jelenti, hogy U egyenes volt, tehát volt hozzávehető egyenes, ellentmondva S_0 maximalitásának.

□

Bizonyítás nélkül kimondunk még egy tételt és következményt, melyek általánosítják a fenti konstrukciót.

9.5. Tétel. *Legyen q prímhatvány, a és t pozitív egész, $a > 2$, és $m_2, \ldots, m_a$ pozitív egészek, $m_i \leqslant q^{(t+2)/2}$, ha $i \in \{3, \ldots, a\}$. Tegyük fel továbbá, hogy van $PG(2t + 1, q)$-ban maximális részleges t-befedés, aminek mérete $q^{t+1} + 1 - m_2$. Ekkor $PG(a(t + 1) - 1, q)$ tartalmaz S maximális részleges t-befedést, aminek mérete*

$$\sum_{i=0}^{a-1} q^{i(t+1)} - \prod_{i=2}^{n} m_i$$

9.6. Következmény. *q prímhatvány, $s, a, m_3, \ldots, m_a$ pozitív egészek, $a \geqslant 2, c < (q-1)/2, m_i \leqslant q^{s+1}$ minden i-re. Ekkor, ha $t = 2s+1$, akkor a $PG(a(t+1)-1, q)$ tartalmaz olyan S maximális részleges befedést, aminek mérete*

$$\sum_{i=0}^{a-1} q^{i(t+1)} - cq^{s+1} \prod_{i=3}^{a} m_i$$

IV. rész
Egy alkalmazás

Ebben a részben egy Aldersontól és Mellingertől [1] származó alkalmazását mutatjuk be a befedéseknek. A szakaszban C végig egy n *hosszúságú,* d *minimális távolságú,* k*-elemű ábécé feletti kód*ot fog jelölni. Ez a következőket jelenti:

- C egy k-elemű halmaz elemeiből alkotott n-hosszúságú sorozatok halmaza;
- bármely két C-beli sorozat legalább d helyen eltér.

Az ábécé végig az $A = \{1, 2, \ldots, k\}$ halmaz lesz. C elemeit kódszavaknak hívjuk.

9.7. Definíció. *C $n_1, n_2, \ldots, n_k$ paraméterű* állandó összetételű kód*, ha minden c kódszóra és $i \in A$ betűre teljesül, hogy i éppen n_i-szer szerepel c-ben. Ennek jele: $CCC([n_1, n_2, \ldots, n_k], d)$.*

Ezeknek a kódoknak fontos gyakorlati alkalmazásai vannak [16].

Reguláris befedések segítségével fogunk ilyeneket konstruálni. Ezt készíti elő a következő.

9.8. Tétel. *$PG(3, q)$ két reguláris befedésének legfeljebb $q + 1$ közös egyenese lehet.*

Bizonyítás Ld például Hirschfeld könyvét [12].

9.9. Definíció. *A definiálandó C kód hossza $n = q^3 + q^2 + q + 1$ lesz. Mivel pontosan ennyi pontja van $PG(3, q)$-nak, megcímkézhetjük a koordinátákat $PG(3, q)$ pontjaival. A kódszavakat $PG(3, q)$ reguláris befedéseiből származtatjuk. Egy S reguláris befedés egyeneseit számozzuk meg valahogy 1-től $q^2 + 1$-ig, majd készítsünk egy c_S kódszót úgy, hogy minden koordinátába beírjuk, hogy a neki megfelelő pont melyik egyenesen van.*

9.10. Tétel. *A fent definiált kód $CCC([n_1, n_2, \ldots, n_k], d)$, ahol $k = q^2 + 1$, $n_1 = n_2 = \cdots = n_{q^2+1} = q + 1$, $d \geq q^2 - q$.*

Bizonyítás $k = q^2 + 1$, hiszen ennyi eleme van egy befedésnek $PG(3, q)$-ban. Minden egyenesnek $q + 1$ pontja van, azaz valóban minden kódszóban minden szám $q + 1$-szer szerepel. A minimális távolsághoz legyen C_S és $C_{S'}$ két kódszó, melyek m helyen egyeznek. Ez azt jelenti, hogy pontosan m olyan pont van, melyen ugyanazon sorszámú egyenes megy át S-ben és S'-ben. A két befedésnek legfeljebb $q+1$ közös egyenese lehet, ha ezek ugyanúgy vannak számozva (mondjuk $1, 2, \ldots, q+1$), akkor ez $(q+1)^2$ közös koordinátát ad. Az összes többi egyezés egy ugyanúgy számozott metsző egyenespárt jelent, ezeknek több közös pontja nincs, azaz minden $i \geqslant q+2$-re legfeljebb egy további egyezés lehet. Tehát $m \leqslant (q+1)^2+(q^2-q) = 2q^2+q+1$. Tehát $d \geqslant (q^3+q^2+q+1)-(2q^2+q+1) = q^3-q^2$. $\square$

A fentinél jobb konstrukciót is kaphatunk, ha kihasználjuk még, hogy az egyenesek számozása egy-egy befedésen belül tetszőleges volt. Ha egy S befedést többféleképpen is megszámozunk és származtatunk belőle kódszót, akkor továbbra is megmarad a minimális d távolság két különböző befedésből származtatott kódszó közt. Arra kell tehát csak vigyáznunk, hogy egy rögzített S befedésnek olyan beszámozásait vegyük, hogy a kapott kódszavakra is legalább d legyen a távolság. Ehhez nyilván az kell, hogy az alkalmazott beszámozások olyan permutációknak feleljenek meg, melyek legalább $\frac{q^3-q^2}{q+1} \leqslant q^2-2q+2$ helyen különböznek.

9.11. Konstrukció. *Álljon P az $\{1, 2, \ldots, q^2+1\}$ elemek olyan permutációiból, hogy bármely két különböző eleme P-nek legalább q^2-2q+2 helyen eltér. Módosítsuk úgy a 9.9 konstrukciót, hogy minden reguláris befedést minden P-beli permutáció szerint beszámozunk és származtatunk belőle egy kódszót.*

A fenti kódban már $|P|$-szer annyi kódszó lesz, mint a korábban definiáltban. Ezt egybevetve a legjobb ismert konstrukciókkal a fenti tulajdonságú P permutációhalmazra, a következőt kapjuk.

9.12. Tétel. *Minden q prímhatványra van olyan q^2+1-elemű ábécé fölötti $CCC([q+1, q+1, \ldots, q+1], q^3-q^2)$, mely nagyságrendileg $\frac{1}{2}q^{14}$ kódszót tartalmaz.*

Hivatkozások

[1] T.L. ALDERSON, K. MELLINGER, Partitions in finite geometry and related constant composition codes, *Innovations in Incidence Geometry*, megjelenés alatt.

[2] A. BEUTELSPACHER, Blocking sets and partial spreads in finite projective spaces, *Geometriae Dedicata* **9** (1980) 425-449.

[3] A. BLOKHUIS, K. METSCH, On the size of a maximal partial spread. *Des. Codes Cryptogr.* **3** (1993), 187–191.

[4] D. A. DRAKE, J. W. FREEMAN, Partial t-spreads and group constructive (s, r, μ)-nets. *J. Geometry* **13/2** (1979), 210-216.

[5] J. EISFELD, L. STORME, (Partial) t-spreads and minimal t-covers in finite projective spaces, http://cage.ugent.be/ fdc/intensivecourse2/final.html.

[6] J. EISFELD, L. STORME, P. SZIKLAI, On the spectrum of the sizes of maximal partial line spreads in $\mathrm{PG}(2n, q), n \geq 3$, *Des. Codes Cryptogr.* **36** (2005), 101–110.

[7] A. GÁCS, T. SZŐNYI, Random constructions and density results, *Designs Codes and Cryptography* **47**, 267-287.

[8] O. HEDEN, A Maximal Partial Spread of Size 45 in $PG(3, 7)$, *Des. Codes Cryptography* **22** 331-334 (2001).

[9] O. HEDEN, Maximal partial spreads and the modular n-queen problem III, *Discrete Math.* **243** (2002), 135–150.

[10] O. HEDEN, P. GOVAERTS, L. STORME, On the spectrum of sizes of maximal partial spreads in PG$(3, q)$, q even, publikálatlan kézirat.

[11] J. W. P. HIRSCHFELD, *Projective geometries over finite fields*, Clarendon Press, Oxford, 1979, 2nd edition, 1998.

[12] J.W.P. HIRSCHFELD, Finite projective spaces of three dimensions, Oxford Univ. Press (1985).

[13] J.W.P. HIRSCHFELD AND J.A. THAS, General Galois geometries, Oxford Univ. Press (1991).

[14] KISS GY., SZŐNYI T., Véges geometriák, *Polygon* 2001.

[15] K. METSCH, L. STORME, Partial linear complexes of $PG(3, q)$ *Discr. Math.* **255** (2002), 287-296.

[16] N. PAVLIDOU, A.J.H. VINCK, J. YAZDANI, AND B. HONARY, Power line communications: state of the art and future trends., *IEEE Comm. Magazine*, 34-40, (2003).