Gráfok fokszámsorozatai

Diplomamunka

Írta: Bödei Nóra

Alkalmazott matematikus szak

Témavezető:

Frank András, egyetemi tanár

Operációkutatási Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2010

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke

1. fejezet

Bevezetés

Hálózatok modellezésénél jelentős szerepe van a gráfelméletnek. Egy gráf csúcsai reprezentálják a rendszer elemeit, az élek pedig azt jelölik, hogy mely elemek vannak egymással interakcióban. Többnyire a hálózatokról rendelkezésünkre állnak bizonyos adatok, tulajdonságok, de mivel ezek általában hiányosak, a gráfelméletet hívjuk segítségül, hogy megtudjunk olyan információkat, amelyek az adatokból nem látszanak közvetlenül.

A vizsgálat során definiálunk egy halmazt, amely azokat a gráfokat tartalmazza, melyek rendelkeznek az adott tulajdonságokkal. Ezt követően több célunk is lehet, például az alábbiak:

- Konstruálni egy konkrét gráfot ebből a halmazból
- Felmérni, hogy mekkora elemszámú lehet ez a halmaz
- A halmazból minden gráfot előállítani
- Olyan tulajdonságot mondani, ami a halmaz minden elemére teljesül

Egy v csúcs fokszáma a G gráfban, a rá illeszkedő élek száma. Ezt $d_G(v)$-vel jelöljük. A hurokéleket kétszer számoljuk. A 0 fokú csúcsot izolált pontnak nevezzük.

Diplomamunkámban azt az esetet vizsgálom, amikor csak annyi információnk van a hálózatról, hogy a csúcsoknak mennyi a foka, azaz ha adott egy nemnegatív egész számokból álló számsorozat, $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$, akkor létezik-e n pontú gráf ezekkel a fokszámokkal. Ha létezik, akkor azt a fokszámsorozatot *realizálhatónak* nevezzük. Könnyű megfigyelni, hogy egy fokszámsorozathoz több realizácó tartozhat.

A következő fejezetben megoldunk néhány olyan feladatot, ahol csak kevés megkötést teszünk arra vonatkozóan, hogy az előírt fokszámsorozatot milyen gráffal szeretnénk realizálni.

Ha egy gráfban előfordulhatnak párhuzamos élek és hurokélek, akkor *multigráfnak* nevezzük. A második fejezetet azzal kezdjük, hogy nem szabunk semilyen feltételt a realizációra, vagyis megelégszünk azzal, ha belátjuk egy számsorozatról, hogy egy multigráf fokszámsorozata. Gondoljuk meg, hogy még így sem tudunk minden számsorozatot lerajzolni, erre legegyszerűbb példa az $\{1, 1, 1\}$. Ha nem engedünk meg párhuzamos és hurokéleket, akkor *egyszerű* gráfról beszélünk.

A harmadik fejezetben ismertetjük a Havel-Hakimi algoritmust, melynek segítségével könnyedén előállíthatunk egy egyszerű gráfot a megadott fokszámokkal. Belátjuk, hogy ha az algoritmus elakad, akkor nem létezik a fokszámsorozathoz egyszerű realizáció. Ezután P.Erdős és T.Gallai [3] tételét mutatjuk be egy 2010-es bizonyítással, amely szükséges és elégséges feltételt ad az egyszerű gráffal történő realizálhatóságra.

Egy gráfot akkor nevezünk *összefüggőnek*, ha bármely két pontja között vezet út. A v_1 és v_n pontok között akkor vezet út, ha létezik a gráf pontjainak és éleinek egy $\{v_1, (v_1, v_2), v_2, ..., (v_{n-1}, v_n), v_n\}$ sorozata.
Külön fejezeteket szentelük a k-élösszefüggőség és k-összefüggőség vizsgálatának.

1.0.1. Definíció. *Egy $G = (V, E)$ gráfot k-élösszefüggőnek nevezünk, ha akárhogy távolítunk el a gráfból legfeljebb $k - 1$ élt, összefüggő marad.*

J. Edmonds [1] adott feltételeket arra, hogy adott fokszámsorozatnak mikor létezik egyszerű k-élösszefüggő realizációja.
Egy gráfot *párosnak* nevezünk, ha nem tartalmaz páratlan kört, azaz pontok és élek olyan $\{v_1, (v_1, v_2), v_2, ..., v_n, (v_n, v_1)\}$ sorozatát, ahol n páratlan és $v_i \neq v_j$, ha $i \neq j$. Ekkor a gráf ponthalmazát két osztályra lehet bontani úgy, hogy egy osztályon belül nem mennek élek, $G = (S, T; E)$. Edmonds bizonyítása nem alkalmazható páros gráfok esetén. A negyedik fejezet második felében egy másik bizonyítást mutatunk be, majd pedig hasonló módszerrel szükséges és elégséges feltételt adunk k-élösszefüggő páros realizáció létezésére, mely eredmény eddig nem volt ismert.

1.0.2. Definíció. *Egy $G = (V, E)$ gráfot k-összefüggőnek nevezünk, ha akárhogy eltávolítva $k - 1$, vagy kevesebb pontot, akkor összefüggő marad.*

A fokszámsorozatok és a k-összefüggőség kapcsolatára vonatkozó tételt, amely D.L. Wang és D.J. Kleitman eredménye [2], az ötödik fejezetben ismertetjük.

Befejezésül pedig bizonyítás nélkül felsorolunk néhány érdekes eredményt arról, hogy milyen tulajdonságokat tudunk elmondani egy gráfról, ha csupán a fokszámsorozatát ismerjük.

2. fejezet

Egyszerű példák

Ebben a részben bemutatunk néhány közismert feladatot, melyek megoldása könnyen látható.

Ha csak kevés elemű a számsorozat, kis gondolkodással meg tudjuk mondani, hogy lehet-e olyan gráfot rajzolni, melynek a fokszámsorozata az adott számsorozat. Például rögtön látszik, hogy a $\{2, 1, 1\}$ egy egyszerű útnak a fokszámsorozata, a $\{2, 2, 2\}$ pedig egy három hosszú köré.

Nézzük, hogy mit tudunk mondani, ha több pontból áll a fokszámsorozat.
A legegyszerűbb esettel kezdjük, tehát szükséges és elégséges feltételt adunk arra, hogy egy számsorozat mikor lehet egy multigráf fokszámsorozata. Ezt követően specializáljuk a gráfokat, először a hurokéleket tiltjuk, majd a párhuzamosakat is, aztán az összefüggőségre adunk feltételeket. A páros gráfok esetét külön vizsgáljuk.

2.1. Multigráf

2.1.1. Állítás. *A $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n$ számsorozat egy multigráf fokszámsorozata* $\Longleftrightarrow$ $2 \mid \sum_{i=1}^{n} d_i$

Bizonyítás: Szükséges, mert egy gráfban a fokszámok összege az élek számának kétszerese, így tehát párosnak kell lennie.

Elégséges, mert ha mohón összekötjük a csúcsokat, $\sum_{i=1}^{n} d_i$-re történő indukcióval beláthatjuk, hogy jó realizációt kapunk. Ha $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2$, akkor $\exists\ i, j$, melyekre $d_i = 1$, $d_j = 1$ (i és j nem feltétlenül különböző), ekkor a (v_i, v_j) élt behúzva készen vagyunk. Ha $\sum_{i=1}^{n} d_i > 2$, tetszőlegesen kiválasztunk két pontot, v_i-t és v_j-t, melyeknek nemnulla a foka (azaz $d_i > 0$ és $d_j > 0$), behúzunk közéjük egy élt, és tekintjük a $d_1, ..., d_{i-1}$, $d_i - 1, d_{i+1}, ..., d_{j-1}, d_j - 1, d_{j+1}, ..., d_n$ fokszámsorozatot, melyet az indukciós feltevés miatt tudunk realizálni egy G multigráffal. Ekkor $G+(v_i,v_j)$ olyan multigráf lesz, aminek $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n$ a fokszámsorozata.

□

2.2. Fa

2.2.1. Állítás. *A $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n$ számsorozat egy fa fokszámsorozata $\Longleftrightarrow$*

1. $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$
2. $d_n = 1$

Bizonyítás: A szükségesség egyértelmű, mert tetszőleges fára igaz, hogy tartalmaz olyan pontot, aminek 1 a foka, és az élek száma a pontok számánál eggyel kevesebb.

Az elégségesség belátása indukcióval történik a pontok számára. $n=2$ esetén $d_1=1$ és $d_2=1$ a fokszámsorozat. Ez egy olyan fa fokszámsorozata, amely két pontból és az őket összekötő élből áll. $n>2$ esetén összekötjuk a v_1 és v_n csúcsokat, ekkor a d_i' sorozatra (ahol $d_1' = d_1 - 1$, $d_n' = d_n - 1 = 0$, különben pedig $d_i' = d_i$) igazak a feltételek, hiszen

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n-1} d_i' = \sum_{i=1}^{n} d_i - 2 = (2n-2)-2 = 2(n-1)-2.$$

Ha pedig a második feltétel nem telsesülne, az azt jelenti, hogy az eredeti fokszámsorozatban $d_n = 1$ és $d_i \geq 2$, ha $i>1$, tehát $\sum_{i=1}^{n} d_i \geq 2n-1$, ami elletmondás. Így indukcióval kész vagyunk.

□

2.3. Hurokmentes multigráf

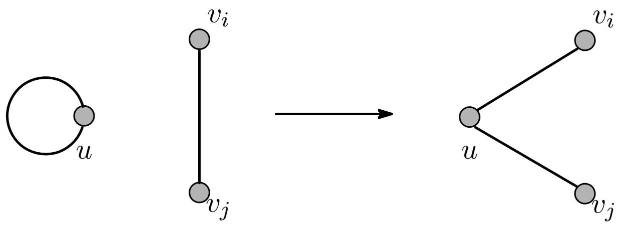
2.3.1. Állítás. *A $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n$ számsorozat egy hurokmentes multigráf fokszámsorozata $\Longleftrightarrow$*

1. $2 \mid \sum_{i=1}^{n} d_i$
2. $d_1 \leq \sum_{i=2}^{n} d_i$

Bizonyítás: Az első feltétel szükséges egy adott fokszámsorozatú multigráf létezéséhez, a másodikra azért van, szükség, mert nem engedünk meg hurokéleket, így a legnagyobb fokú pontból kiinduló éleket a többi ponthoz kell társítanunk.

Az elégségesség belátásához mohón húzzuk be az éleket, ekkor egy multigráfot kapunk. Tegyük fel, hogy egy olyan multigráfot, amiben a lehető legkevesebb a hurokél. Ha indirekt, egy u ponton mégis van hurokél, akkor $\exists$ egy u-tól független (v_i, v_j) él, különben sérülne a második feltétel. Cseréljük ki az (u, u) és (v_i, v_j) éleket az (u, v_i) és (u, v_j) élekre.

□



2.1. ábra. Hurokél megszüntetése

2.4. Összefüggő hurokmentes multigráf

2.4.1. Állítás. *A $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ számsorozat egy összefüggő hurokmentes multigráf fokszámsorozata* $\Longleftrightarrow$

1. $2 \mid \sum_{i=1}^{n} d_i$
2. $d_1 \leq \sum_{i=2}^{n} d_i$
3. $d_n \geq 1$
4. $\sum_{i=1}^{n} d_i \geq 2n - 2$

Bizonyítás: A feltételek szükségesek, az első kettő a hurokmentes multigráf létezéséhez, a harmadik azért, mert összefüggő gráfban nem lehet izolált pont, a negyedik pedig azért, mert a gráfnak tartalmaznia kell feszítő fát, így az élek számára kapunk egy alsó korlátot.

Az elégségesség bizonyításához tegyük fel, hogy teljesülnek a feltételek, vagyis tudunk egy G hurokmentes multigráfot rajzolni ezekkel a fokszámokkal, de G több komponensből áll. A harmadik feltétel miatt minden komponensben van legalább két csúcs, a negyedik feltétel miatt pedig van olyan, ami tartalmaz kört. Ebből a körből válasszunk ki egy (v_1, u_1) élt, egy másik komponensből egy tetszőleges (v_2, u_2) élt, majd ezeket cseréljük a (v_1, v_2) és (u_1, u_2) élekre. A fokszámok ekkor nem változnak, viszont eggyel kevesebb komponens lesz.

□

2.5. Páros multigráf

2.5.1. Állítás. *Az* $s_1 \geq s_2 \geq ... \geq s_n$*,* $t_1 \geq t_2 \geq ... \geq t_m$ *számsorozat egy páros multigráf fokszámsorozata* $\iff \sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{j=1}^{m} t_j$

Bizonyítás: A feltétel nyilván szükséges, hiszen a két osztály között mehetnek csak élek, így minden él eggyel járul hozzá a $\sum_{i=1}^{n} s_i$ és a $\sum_{j=1}^{m} t_j$ összeghez is.

Ha behúzunk egy élt, akkor $\sum_{i=1}^{n} s_i$ is és $\sum_{j=1}^{m} t_j$ is csökken eggyel, tehát igaz marad a feltétel, így mohó algoritmussal kaphatunk egy jó realizációt.

□

2.6. Összefüggő páros multigráf

2.6.1. Állítás. *Az* $s_1 \geq s_2 \geq ... \geq s_n$*,* $t_1 \geq t_2 \geq ... \geq t_m$ *számsorozat egy összefüggő páros multigráf fokszámsorozata* $\iff$

1. $\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{j=1}^{m} t_j$
2. $s_n \geq 1$
3. $t_m \geq 1$
4. $\sum_{i=1}^{n} s_i + \sum_{j=1}^{n} t_j \geq 2(n+m) - 2$

Bizonyítás: A szükségesség könnyen látható, így csak az elégségesség bizonyításával foglalkozunk. Tegyük fel, hogy nem igaz az állítás, és nézzük a legkevesebb komponensből álló $G = (S, T; E)$ ellenpédát. (Az előző állításból tudjuk, hogy létezik páros multigráf ilyen fokszámsorozatokkal.) Minden komponens legalább két pontból áll a második és a harmadik feltétel miatt. A negyedik feltételből következik, hogy legalább az egyik komponens tartalmaz kört. Válasszuk ki ennek a körnek egy (v_1, u_1) élét és egy másik komponensnek egy (v_2, u_2) élét, ($v_i \in A$, $u_j \in B$, $i, j = 1, 2$) majd cseréljük ki ezeket az (v_1, u_2), (v_2, u_1) élekre. Az így keletkező gráfnak ugyanaz marad a fokszámsorozata, viszont eggyel kevesebb komponensből áll, ami ellentmondás.

□

2.7. Egyszerű páros gráf

2.7.1. Állítás. *Az $s_1 \geq s_2 \geq ... \geq s_n$, $t_1 \geq t_2 \geq ... \geq t_m$ számsorozatok egy egyszerű páros gráf fokszámsorozata* $\Longleftrightarrow$

1. $\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{j=1}^{m} t_j$
2. $\sum_{i=1}^{k} s_i \leq \sum_{j=1}^{m} min\{t_j, k\}$

Bizonyítás: $\Rightarrow$ A feltételek szükségesek. Az első azért, mert minden él eggyel járul hozzá a $\sum_{i=1}^{n} s_i$ és a $\sum_{j=1}^{m} t_j$ összeghez. A második pedig azért, mert az egyik osztály egy részhalmazából kiinduló éleket a másik osztálynak be kell fogadnia, viszont párhuzamos éleket nem engedhetünk meg.

$\Leftarrow$ Elégségesek a feltételek, mert ha $n = 1$, vagyis csak egy s_1 fokú pontunk van, akkor 1. alapján $\sum_{j=1}^{m} t_j = s_1$, és a feltételek miatt $t_j = 1$ $(j = 1, ..., s_1)$, tehát gond nélkül behúzhatjuk az s_1 fokú v_1 pontból a t_j fokú u_j pontokba az éleket, $j = 1, ..., s_1$, ezáltal jó realizációt kapunk.
Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n-1$-re. Ha v_1-ből húzunk egy-egy élt u_1-be, u_2-be, ..., u_{s_1}-be, majd a v_1 csúcsot eltöröljük, és a t_j $(j = 1, ..., s_1)$, fokszámokat eggyel csökkentjük, akkor az így keletkező fokszámsorozatban az első tulajdonság nyilván igaz marad, a másodiknak a bal oldala pontosan s_1-gyel csökken, a jobb oldala pedig maximum s_1-gyel. Tehát a feltevés miatt az így kapott fokszámsorozatnak létezik egyszerű páros realizációja. Ha ehhez egy új v_1 pontot hozzáveszünk, behúzzuk a $(v_1, u_1), (v_1, u_2), ..., (v_1, u_{s_1})$ éleket, akkor megkapjuk az eredeti fokszámsorozat kívánt realizációját.

$\square$

Gondoljuk meg, hogy ha *2.6.1* Állítás feltételeit kibővítjük az imént szereplő

$$\sum_{i=1}^{k} s_i \leq \sum_{j=1}^{m} min\{t_j, k\}$$

feltétellel, akkor az összefüggő egyszerű páros realizáció létezésére kapunk szükséges és elégséges feltételt, ugyanisa bizonyítás során egy egyszerű realizációból ondulunk ki, és az élek cseréje az egszerűséget nem rontja el.

2.8. Hurokmentes 2-összefüggő multigráf

Remek példa arra, hogy az eddig megszerzett tudásunkat hogyan tudjuk hasznosítani, hiszen szerepelt már, hogy milyen feltételeknek kell teljesülni, hogy multigráfot tudjunk rajzolni adott fokszámsorozattal, majd szó volt a hurokmentes multigráfról, aztán az összefüggő hurokmentes multigráfról is. A *2.4*-ben szereplő kritériumoknak most is meg kell felelni, viszont szükségesek lesznek további megszorítások is.
A feladat Király Zoltán gráfelmélet gyakorlatáról származik.

2.8.1. Állítás. *A $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n$ fokszámsorozat realizálható hurokmentes 2-összefüggő multigráffal* $\Longleftrightarrow$

1. $2 \mid \sum_{i=1}^{n} d_i$
2. $d_1 \leq \sum_{i=2}^{n} d_i - 2n + 4$
3. $d_n \geq 2$

Bizonyítás: $\Rightarrow$ Az első feltétel szükséges, hogy realizálható legyen multigráffal, a második azért kell, hogy hurokmentes legyen, és ha a d_1 fokú csúcsot eltávolítjuk, akkor még mindig összefüggőnek kell maradnia a gráfnak, ezért tartalmaznia kell még $(n-1)-1$ élt. A harmadik nélkül pedig előfordulhat, hogy az egyik pont foka 1, és azt a szomszédja eltörlésével el lehetne szakítani a gráf többi részétől.

$\Leftarrow$ Mivel minden pont foka ≥ 2, ezért rajzolhatunk egy Hamilton-kört a csúcsokon, azaz húzzuk be a (v_i, v_{i+1}), $i = 1, ..., n$ éleket, ahol $v_{n+1} := v_1$. Az ezt követően megmaradt fokszámsorozatra ($d'_i = d_i - 2, i = 1, ..., n$) igazak lesznek *2.3* feltételei, tehát tudunk hurokmentes multigráfot rajzolni. Ha ehhez hozzávesszük a Hamilton-kört, akkor jó realizációt kapunk ez eredeti fokszámsorozathoz.

□

Vegyük észre, hogy a bizonyítás során többet is beláttunk, mégpedig azt, hogy egy fokszámsorozatnak akkor és csak akkor létezik 2-összefüggő hurokmentes realizációja, ha létezik Hamilton-kört tartalmazó hurokmentes realizációja.

3. fejezet

Havel-Hakimi algoritmus, Erdős-Gallai tétel

Már a bevezetésben feltettük a kérdést, hogy miként tudunk egy számsorozathoz jó realizációt rajzolni, tehát egy konkrét példát mutatni, ami bizonyítja, hogy a fokszámsorozat realizálható.

Ezt a kérdést többek között V. Havel [9] és S. Hakimi [8] válaszolták meg.

3.1. Havel-Hakimi tétel

3.1.1. Tétel. *Létezik $d_1 > 0$, $d_2 \geq ... \geq d_n$ fokszámú egyszerű gráf $\Longleftrightarrow$ létezik $d_2 - 1, ..., d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, ..., d_n$ fokszámú egyszerű gráf.*

Bizonyítás: $\Leftarrow$ Ez az irány könnyen látható, hiszen ha van egy G realizáció a $d_2 - 1, ..., d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, ..., d_n$ fokszámsorozathoz, akkor ha ehhez egy új pontot hozzáveszünk és összekötjük a $v_2, ..., v_{d_1+1}$ pontokkal, $d_1 > 0$, $d_2 \geq ... \geq d_n > 0$ egy jó realizációját kapjuk.

$\Rightarrow$ Azt kell belátnunk, hogy ha $d_1 > 0$, $d_2 \geq ... \geq d_n > 0$ fokszámsorozat realizálható egy egyszerű gráffal, akkor létezik olyan realizáció is, hogy a v_1 csúcs a $v_2, ..., v_{d_1+1}$ csúcsokkal van összekötve, mert ekkor a v_1 pontot kitörölve megkapjuk a kívánt realizációt.

Indirekt tegyük fel, hogy nem igaz, és válasszuk a G gráfot olyannak, hogy v_1-nek a lehető legtöbb szomszédja legyen az első d_1 pont között. Legyen v_i egy olyan pont, melyre $2 \leq i \leq d_1 + 1$, de v_1 mégsem szomszédja. Legyen v_j olyan pont, ami szomszédja v_1-nek, viszont $j > d_1 + 1$. Mivel $d_i \geq d_j$, v_i-nek $\exists$ v_t szomszédja, $t \neq j$, $t \neq i$, úgy, hogy a (v_t, v_j) él nem eleme G-nek.

Ha a (v_i, v_t) és (v_1, v_j) élek helyett a (v_1, v_i) és (v_j, v_t) éleket húzzuk be, akkor az így kapott G' gráf egyszerű lesz, és v_1-nek több szomszédja lesz a $\{v_2, v_3, ..., v_{d_1+1}\}$ halmazból, ami ellentmond G választásának.

$\square$

3.1.2. Definíció. *Tegyük fel, hogy a $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n$ sorozat realizálható. Ekkor a d_k leemelése azt jelenti, hogy a v_k csúcsot összekötjük a tőle különböző legnagyobb fokúakkal. Így az új sorozat $d_1 - 1, ..., d_{d_k} - 1, d_{d_{k+1}}, ..., d_{k-1}, d_{k+1}, ..., d_n$, ha $d_k < k$, illetve $d_1 - 1, ..., d_{k-1} - 1, d_{k+1} - 1, ..., d_{d_{k+1}} - 1, d_{d_{k+2}}, ..., d_n$, ha $d_k > k$. Ezt a d_k leemelése után megmaradó fokszámsorozatnak nevezzük.*

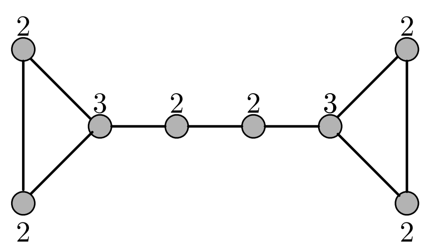
3.2. Havel-Hakimi algoritmus

Az előző tétel alapján az algoritmus:

1. fokszám szerint nemnövekvő sorba rendezzük a pontokat
2. kiválasztunk egy v_i csúcsot
3. összekötjük a (tőle különböző) d_i darab legnagyobb fokú csúccsal

Ezt addig ismételjük, amíg minden fok 0 lesz, ekkor egy egyszerű gráfot kapunk, melynek fokszámsorozata a kiindulási sorozat. Ezzel tehát válaszoltunk a bevezetésben szereplő egyik kérdésre, vagyis megmutattuk, hogy a $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n$ fokszámsorozattal rendelkező gráfok halmazából hogyan lehet előállítani egy tetszőlegeset.

Azt is észrevehetjük, hogy ezzel a módszerrel nem lehet az összes ilyen gráfot előállítani. Például a $\{3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2\}$ fokszámsorozatnak létezik olyan realizációja, ahol a harmadfokú pontok nincsenek összekötve, és nincs olyan másodfokú pont, ami mindkét harmadfokúnak a szomszédja lenne, viszont a Havel-Hakimi algoritmus ezen variációk egyikével indulna.



3.1. ábra. Amit Havel-Hakimi algoritmussal nem lehet előállítani

3.2.1. Definíció. *Ha valamely v_1, v_2, u_1, u_2 páronként különböző csúcsok olyanok, hogy v_i és u_i $(i = 1, 2)$ között megy él, akkor azt a műveletet, hogy kitörüljük a (v_1, u_1) és (v_2, u_2) éleket, valamint behúzzuk a (v_1, v_2) és az (u_1, u_2) éleket, elemcserének nevezzük.*

3.2.2. Tétel (Ryser). *Egy $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n$ fokszámsorozat bármely egyszerű realizációjából el lehet jutni egy másikba elemcserékkel, méghozzá az egyszerűség megtartásával.*

Bizonyítás: A Havel-Hakimi algoritmus során megtehetjük azt, hogy a kiválasztott pont mindig az aktuális legnagyobb fokszámú. A Havel-Hakimi tétel bizonyításában láttuk, hogy ha egy fokszámsorozatnak létezik egy G realizációja, ahol G egyszerű, akkor elemcserékkel el tudunk jutni egy olyan realizációhoz, ahol a v_1 pont a v_2, $v_3, ..., v_{d_1+1}$ pontokkal van összekötve. A megmaradó fokszámsorozatra is igaz ez, tehát bármely realizációból elemcserékkel el tudunk jutni ahhoz a gráfhoz, amit az algoritmus azon speciális esete szolgáltat, amikor a második lépésben mindig az épp aktuláis legnagyobb fokú pontot választjuk. Vagyis két tetszőleges realizáció között is létezik ilyen átjárás.

$\square$

3.3. Havel-Hakimi algoritmus irányított gráfok esetén

Ehhez kapcsolódóan nézzünk meg egy érdekes eredményt, melyet 2009-ben publikált P.L.Erdős, I.Miklós és Z.Toroczkai [4]. A Havel-Hakimi algoritmushoz hasonlót fogalmaztak meg irányított gráfokra.

3.3.1. Definíció. *Egy $(d^+, d^-) = \left(\left\{d_1^+, d_2^+, ..., d_n^+\right\}, \left\{d_1^-, d_2^-, ..., d_n^-\right\}\right)$ nemnegatív egészekből álló irányított fokszámsorozat realizálható, ha létezik olyan n pontú irányított gráf, melyre igaz, hogy a v_i csúcs befoka d_i^+, kifoka d_i^- $\forall$ i.*

3.3.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy irányított fokszámsorozat rendezett, ha minden $i = 1, ..., n-2$-re vagy $d_i^+ > d_{i+1}^+$, vagy $d_i^+ = d_{i+1}^+$ és $d_i^- \geq d_{i+1}^-$. (A v_n ki- és befokára nincs rendezési feltétel.)*

3.3.3. Tétel (Erdős, Miklós, Toroczkai). *Tegyük fel, hogy a (d^+, d^-) irányított fokszámsorozat rendezett, $d_j^+ + d_j^- > 0$, $j = 1, ..., n$ és $d_n^- > 0$. Ekkor a (d^+, d^-) irányított fokszámsorozat realizálható $\Longleftrightarrow$*

$$\Delta_j^+ = d_j^+ - 1, \text{ ha } j \leq d_n^-, \; d_j^+ \text{ különben}$$

$$\Delta_j^- = d_j^-, \text{ ha } j \neq n, \; 0 \text{ különben}$$

fokszámsorozat realizálható irányított gráffal.

A hasonlóságot a Havel-Hakimi algoritmussal könnyű észrevenni, hiszen a tétel alapján irányított esetben is mohón elő tudunk állítni a (d^+, d^-) irányított fokszámsorozathoz egy jó realizációt.

Bizonyítás: $\Leftarrow$ irány triviálisan látszik, hiszen ha nézzük a (Δ_k^+, Δ_k^-) egy realizációját, majd a v_n pontból irányított éleket húzunk az első d_n^- pontba, akkor (d^+, d^-) egy realizációját kapjuk.

$\Rightarrow$ Hasonlóan a Havel-Hakimi tételhez, most is elemcseréket használunk.

Azt kell belátnunk, hogy ha a (d^+, d^-) irányított fokszámsorozat realizálható, akkor létezik olyan realizáció is, ahol a v_n csúcsból kiinduló élek a rendezett sorban az első d_n^- pontba mennek. Tegyük fel, hogy nem ez a helyzet, és nézzünk egy olyan $\vec{G}$ realizációt, ahol a (v_n, v_i) (vagyis a v_n-ből a v_i-be menő) élek száma maximális, $i = 1, ..., d_n^-$. Legyen $1 \leq i \leq d_n^-$ olyan, hogy $(v_n, v_i) \notin \vec{E}$, viszont valamely $j > d_n^-$-re $(v_n, v_j) \in \vec{E}$.
Mivel a csúcsok rendezett sorban vannak, ezért tudjuk, hogy $d_i^+ \geq d_j^+$.

1. $d_i^+ > d_j^+$

   Ebben az esetben $\exists$ v_l pont, úgy, hogy $l \neq i, j, n$ és $(v_l, v_i) \in \vec{E}$, viszont $(v_l, v_j) \notin \vec{E}$. Ekkor a (v_n, v_j) és (v_l, v_i) éleket kitöröljük, és helyettük a (v_n, v_i) és (v_l, v_j) éleket húzzuk be, ezáltak kapunk egy olyan realizációt, ahol v_n-nek több szomszédja van az első d_n^- között, mint $\vec{G}$-ben, ellentétben $\vec{G}$ választásával.

2. $d_i^+ = d_j^+$

   - Ha továbbra is létezik a fent definiált l, vagyis végre tudjuk hajatni az elemcserét párhuzamos élek keletkezése nélkül, akkor kész vagyunk.
   - Ha nem létezik ilyen v_l csúcs, az csak akkor lehet, ha a következő két állítás egyszerre teljesül:
     $(v_j, v_i) \in \vec{E}$
     $(v_i, v_j) \notin \vec{E}$

   Ekkor a rendezett sorrend definíciója miatt, $d_i^- \geq d_j^-$, és mivel v_j-ből egy él v_i-be megy (és v_i-ből nem mehet él saját magába, mert $\vec{G}$ egyszerű), ezért $\exists$ m, hogy $(v_i, v_m) \in \vec{E}$, viszont $(v_j, v_m) \notin \vec{E}$. Hajtsunk végre egy úgynevezett hármas elemcserét, azaz a (v_n, v_j), (v_j, v_i) és (v_i, v_m) éleket töröljük ki, és helyettük vegyük a gráfhoz a (v_n, v_i), (v_i, v_j) és (v_j, v_m) éleket. Így kaptunk egy olyan egyszerű gráfot, amelynek létezése szintén ellentmond $\vec{G}$ választásának.

$\square$

3.4. Erdős-Gallai tétel

Erdős Pál és Gallai Tibor 1960-ban bizonyították a következő tételt. Az összes eddig ismert bizonyítás meglehetősen bonyodalmas, viszont 2010-ben publikáltak egy könnyen átláthatót [3], ezt ismertetjük most.

3.4.1. Tétel (Erdős, Gallai). *A $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n$ számsorozat realizálható egy egyszerű gráffal* $\Longleftrightarrow$

1. $2 \mid \sum_{i=1}^{n} d_i$
2. $\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} min\{k, d_i\},\ \forall\ 1 \leq k \leq n,\ k \in \boldsymbol{Z}$

Bizonyítás: $\Rightarrow$ A szükségesség könnyen látható: a fokszámok összege az élek számának kétszerese, ezért párosnak kell lennie. Az egyenlőtlenség jobb oldala az első k fokszám összegének maximumát adja meg úgy, hogy összeadja az első k pont között menő élek maximális számát és a többi pont maximális befogadóképességét.

$\Leftarrow$ Az elégségesség bizonyításához definiáljuk a $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n$ fokszámsorozat részrealizációját, ami a $v_1, v_2, ..., v_n$ pontokon egy olyan gráf, melyre teljesül, hogy $d(v_i) \leq d_i$ $(1 \leq i \leq n)$, ahol $d(v_i)$ a v_i fokszámát jelöli.

Ha adott a $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n$ fokszámsorozat, melyre teljesülnek a megadott feltételek, részrealizációk sorozatával készítünk egy jó realizációt, ezzel bizonyítjuk az elégségességet. Az első részrealizáció legyen az n pontú üres gráf.

Legyen r a legnagyobb olyan szám, melyre teljesül, hogy $d(v_i) = d_i\ \forall\ 1 \leq i < r$ esetén, r-et kritikus indexnek nevezzük. Kezdetben $r = 1$, kivéve, ha minden fokszám 0, ebben az esetben viszont készen vagyunk.

Amíg $r \leq n$, konstruálunk egy új részrealizációt, melyre a $d_r - d(v_r)$ különbség csökken, és közben ügyelünk arra, hogy a v_i pont fokszáma ne változzon, ha $i < r$. Az eljárás akkor ér véget, ha a kapott részrealizáció realizációja a $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n$ fokszámsorozatnak. $N(v)$-vel jelöljük a v pont szomszédainak halmazát.

1. eset: $v_r v_i \notin E(G)$ valamely v_i, $d(v_i) < d_i$ esetén. Ekkor adjuk hozzá a $v_r v_i$ élt.
2. eset: $v_r v_i \notin E(G)$, $i < r$

   Mivel $d(v_i) = d_i \geq d_r > d(v_r)$, így $\exists\ u \in N(v_i) - N(v_r)$. Ha $d_r - d(v_r) \geq 2$, akkor helyettesítsük uv_i élt $uv_r, v_i v_r$ élekkel. Ha $d_r - d(v_r) = 1$, akkor $\sum d_i - \sum d(v_i)$ párossága miatt $\exists k > r$, melyre $d(v_k) < d_k$. Ekkor az 1. eset áll fenn, kivéve, ha $v_r v_k \in E(G)$, ekkor viszont helyettesítsük $v_r v_k, uv_i$ éleket $uv_r, v_i v_r$ élekkel.

3. eset: $v_1, ..., v_{r-1} \in N(v_r)$ és $d(v_k) \neq min\{r, d_k\}$ valamely $k > r$-re.

   Tudjuk, hogy $d(v_k) \leq d_k$ és $d(v_k) \leq r$, tehát $d(v_k) < min\{r, d_k\}$. Ekkor az 1. eset áll fenn, kivéve, ha $v_k v_r \in E(G)$. Mivel $d(v_k) < r$, $\exists\ i < r\ v_k v_i \notin E(G)$. $d(v_i) > d(v_r)$, így $\exists\ u \in N(v_i) - N(v_r)$.
   Helyettesítsük uv_i-t $uv_r, v_i v_k$ élekkel.

4. eset: $v_1, ..., v_{r-1} \in N(v_r)$ és $v_i v_j \notin E(G)$, $i < j < r$.

   Az 2. eset áll fenn, kivéve, ha $v_i, v_j \in N(v_r)$. $d(v_i) \geq d(v_j) > d(v_r)$, így $\exists\ u \in N(v_i) - N(v_r)$ és $w \in N(v_j) - N(v_r)$. $u, w \notin N(v_r) \Rightarrow$ 2. eset áll fenn, kivéve, ha $u, w \in \{v_{r+1}, ..., v_n\}$. Ekkor helyettesítsük uv_i, wv_j éleket $v_i v_j, uv_r$ élekkel.

Ha egyik eset sem áll fenn, az azt jelenti, hogy $v_1, ..., v_r$ pontok közül bármely kettő között megy él és $d(v_k) = min\{r, d_k\}$, $k > r$, így

$$\sum_{i=1}^{r} d(v_i) = r(r-1) + \sum_{k=r+1}^{n} min\{r, d_k\}$$

Mivel a 2. feltétel teljesül, és a jobb oldal $\sum_{i=1}^{r} d_i$ felső becslése, így r-re már teljesül, hogy $d(v_r) = d_r$, tehát r-et növelve folytathatjuk az eljárást.

□

A $\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} min\{k, d_i\}$, $\forall\ 1 \leq k \leq n$ feltétel szemléletes jelentése tehát, hogy ha fokszám szerint nemnövekvő sorba rendezzük a pontokat, és a k-adik után húzunk egy képzeletbeli vonalat, akkor a balról a vonalat átlépő élek minimális száma nem lehet nagyobb, mint a jobbról érkező élek maximális száma.

Ha ugyanezt végiggondoljuk irányított gráfra is, azaz rendezzük az irányított fokszámsorozatot, a k-adik pont után húzunk egy vonalat, és megszámoljuk, hogy a vonal bal oldalán mennyi a minimális befok igény, akkor ez nem lehet több, mint azoknak a kifokoknak összege, amik jobbról átléphetik a vonalat vagyis a következő szükséges feltételt kapjuk:

$$\sum_{i=1}^{k} d_i^+ \leq \sum_{i=1}^{k} min\left\{k-1, d_i^-\right\} + \sum_{i=k+1}^{n} min\left\{k, d_i^-\right\}, \forall\ 1 \leq k \leq n$$

Rendezzük kifokok szerint az irányítot fokszámsorozatot, azaz $i = 1, ..., n-1$-re vagy $d_i^- > d_{i+1}^-$, vagy $d_i^- = d_{i+1}^-$ és $d_i^+ \geq d_{i+1}^+$, ekkor az előbbi gondolatmenet alapján, a következőt kapjuk:

$$\sum_{i=1}^{k} d_i^- \leq \sum_{i=1}^{k} min\left\{k-1, d_i^+\right\} + \sum_{i=k+1}^{n} min\left\{k, d_i^+\right\}, \forall\ 1 \leq k \leq n$$

Irányítatlan esetben nevezzünk egy S halmazt többletesnek, ha a halmazban lévő pontok fokszámainak összege nagyobb, mint $k(k-1)$, ugyanis ekkor szükség van arra, hogy S-en kívüli pontokból is menjen S pontjaiba él. Analóg módon definiáljuk irányított gráfok esetén a betöbbletes, illetve kitöbbletes halmazokat.

Ha irányítatlan gráfról beszélünk, akkor tudjuk, hogy a k elemű legnagyobb többletes halmaz a fokszám szerint nemnövekvő sorrend első k eleme, ezért lehetnek az Erdős-Gallai tételben szereplő feltételek elégségesek is. Viszont irányított gráf esetén nem tudunk ilyen sorrendet mondani, hiszen könnyen lehet, hogy az egy elemű S halmaz, ami mindig a legnagyobb befokú csúcs, nem része a három eleműnek.

3.5. Teljes párosítás létezésének feltétele

Már tudunk konstruálni egy adott fokszámsorozattal egy gráfot. A következő kérdés az, hogy az adott fokszámmal rendelkező gráf tartalmazhat-e bizonyos részgráfokat, például teljes párosítást.

A következő tételt Lovász László [7] bizonyította:

3.5.1. Tétel (Lovász). *A $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ számsorozat akkor és csak akkor lehet egy egyszerű 1-faktort tartalmazó gráf fokszámsorozata, ha $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ is és $d_1 - 1 \geq d_2 - 1 \geq \ldots \geq d_n - 1$ is realizálható egyszerű gráffal.*

Bizonyítás: $\Rightarrow$ Legyen G egy realizáció, ebben legyen F egy 1-faktor, ekkor ha a $G - F$ gráfot tekintjük, akkor az a $d_1 - 1 \geq d_2 - 1 \geq \ldots \geq d_n - 1$ fokszámsorozatnak egy jó realizációja lesz.

$\Leftarrow$ Legyenek G és G' jó realizációk (d_i illetve $d_i - 1$ fokszámokkal), melyek a legközelebb állnak egymáshoz, azaz $|E(G) - E(G')|$ minimális. Az állítás szerint ekkor $G' \subset G$.
Ha viszont ez nem igaz, akkor legyen x olyan csúcs, amire a legtöbb $E(G') - E(G)$-beli él illeszkedik, ezen élek száma legyen l. Tudjuk, hogy ekkor x-et $l+1$ $E(G) - E(G')$-beli él tartalmazza, legyenek ezek: $(x, y_1), \ldots, (x, y_{l+1})$, valamint $(x, z) \in E(G') - E(G)$. $\exists$ $v : (z, v) \in E(G) - E(G')$, ugyanis $d_G(z) > d_{G'}(z)$.

Válasszunk egy i-t, melyre $1 \leq i \leq l+1$ és $y_i \neq v$. Ekkor $(v, y_i) \in E(G)$, mert ha nem lenne, akkor (x, y_i)-t és (z, v)-t (x, z)-re és (v, y_i)-re cserélve olyan gráfot kapnánk, aminek fokszámai azonosak G-vel, de több éle egyezik meg G'-vel. Hasonlóan: $(v, y_i) \notin E(G')$, mert ha eleme lenne, akkor (v, y_i) és (x, z) helyett vehetnénk (x, y_i)-t és (z, v)-t, de az így keletkaző gráfnak és G-nek több közös éle lenne. Így $(v, y_i) \in E(G) - E(G')$.

Ha $v \neq y_1, \ldots, y_{l+1}$, akkor v legalább $l+2$ $E(G) - E(G')$-beli élen van $((v, z), (v, y_i) 1 \leq i \leq l+1)$, ami ellentmond x választásának. Ha viszont $v = y_i$ valamely $1 \leq i \leq l$, akkor szintén $l+2$ $E(G)-E(G')$-beli élen lenne $((v,z),(v,x),(v,y_i),\ 2\le i\le l+1)$, így megint ellentmondásba ütköznénk.

$\square$

Megfigyelhetjük, hogy a bizonyítás alkalmazható $G=(S,T;E)$ páros gráfokra is, ugyanis ha az y_i, z pontok S-ben vannak, akkor az x, v pontok T-ben, tehát a cserék során nem húznánk be tiltott éleket. Ebben az esetben a bizonyítás utolsó mondata feleslegessé válik, hiszen v nem lehet egyenlő y_i-vel $(i=1,...,l+1)$, mert különböző osztályban vannak.

Lovász tételénél valamivel többet is tudunk. A.R. Rao, S.B. Rao, valamint B. Grünbaum fogalmazták meg, viszont S. Kundu adott konstuktív bizonyítást – melyet most nem ismertetünk – a következőre [6]:

3.5.2. Tétel. *Legyenek $d_1\ge d_2\ge ...\ge d_n$ és $c_1\ge c_2\ge ...\ge c_n$ realizálható fokszámsorozatok, $c_i\le d_i$ és $|c_i-c_j|\le 1$ minden i,j párra. Ebben az esetben akkor és csak akkor létezik olyan G realizációja a fokszámsorozatnak, amely tartalmaz F faktort, hogy $d_G(v_i)=d_i$ és $d_F(v_i)=c_i$, $1\le i\le n$, ha a $d_1-c_1,...,d_n-c_n$ fokszámsorozat realizálható.*

$\square$

Ha a $|c_i-c_j|\le 1$ feltétel nem teljesül, akkor nem igaz a tétel. Például ha a d_i fokszámsorozat $7,7,7,4,4,3,3,3$, a c_i sorozat pedig $4,4,4,3,3,3,3,2$. Könnyen ellenőrizhető, hogy a d_i-c_i realizálható, de a d_i fokszámsorozatnak egy és csak egy realizációja létezik, de ennek nincs c_i fokszámsorozatú részgráfja.

4. fejezet

k-élösszefüggő gráfok fokszámsorozatai

Ebben a fejezetben először ismertetjük J.Edmonds [1] tételét az eredeti bizonyítással, majd a Lovásztól származó hármas egyenlőtlenséget felhasználva adunk egy másik bizonyítást a tételre. A dolgozatban szereplő önálló eredményt, vagyis annak a feltételét, hogy egy fokszámsorozat mikor realizálható k-élösszefüggő egyszerű páros gráffal, a *4.2* részben mutatjuk be.

4.1. Edmonds tétele

4.1.1. Definíció. *Azt az élhalmazt, melyet a G gráfból kitörölve, G két komponensre esik szét, vágásnak nevezzük. Ezt gyakran nem az élek megadásával definiáljuk, hanem a két komponens egyikében szereplő pontok halmazával.*

4.1.2. Tétel (Edmonds). $d_i \in \boldsymbol{Z}^+$, $i = 1, ..., n$ *(n>1) egy egyszerű k-élösszefüggő gráf fokszámsorozata* $\Longleftrightarrow$

1. *Egy egyszerű gráf fokszámsorozata (lsd. 3.4.1 Tétel)*

2. $d_i \geq k$, $\forall\ i$

3. $k = 1$ *esetén* $\sum_{i=1}^{n} d_i \geq 2(n-1)$

Bizonyítás: $\Rightarrow$ Az első feltétel nyilván szükséges.
A második feltétel is teljesül, hiszen ha létezne egy k-nál kisebb fokú pont, akkor azt egy k-nál kisebb vágással szeparálni lehetne a G gráf többi részétől.
$k = 1$ esetén, ha a gráf összefüggő, az azt jelenti, hogy $\exists\ e_1$ él, ami a v_1 pontot a G gráf többi részéhez köti, például egy v_2 csúcshoz, és $\exists\ e_2$ él, ami v_1,v_2-t köti a G többi pontjához,

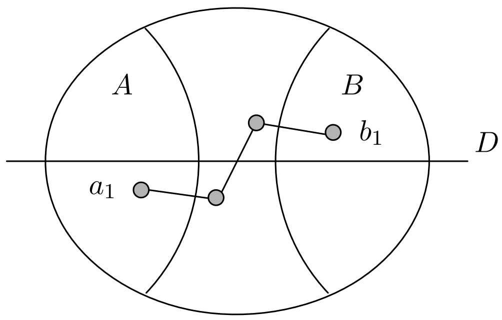
és így tovább. Nyilván, minden e_i él különböző, így G-ben van legalább $n-1$ él. Minden él 2-vel járul a fokszámokhoz, így $\sum_{i=1}^{n} d_i \geq 2(n-1)$, tehát a harmadik feltétel is szükséges.

$\Leftarrow$ Tudjuk, hogy létezik egy egyszerű H gráf d_i fokszámokkal, és $\sum_{i=1}^{n} d_i \geq 2(n-1)$, így H-nak van legalább $n-1$ éle. Ha H nem összefüggő, akkor komponensekből áll. H-ból tudunk konstruálni egy H' gráfot, melynek fokszámai ugyanazok, viszont kevesebb komponensből áll. Ebből indukcióval következik, hogy létezik egy összefüggő gráf ezekkel a fokszámokkal.

H' előállítása pedig úgy töténik, mint *2.4.1.* Állítás bizonyításában, hiszen ezzel az egyszerűséget nem rontjuk el, tehát $k=1$ esetén készen vagyunk.

Tegyük fel, hogy H csak h-élösszefüggő ahol $1 \leq h < k$. A bizonyítás során H-ból konstruálunk egy H' gráfot ugyanazokon a pontokon, ugyanazokkal a fokszámokkal úgy, hogy H' kevesebb h értékű vágást tartalmaz, mint H. Ebből indukcióval következik a tétel. Tekintsük H-nak $(A, \bar{A})$ és $(B, \bar{B})$ h értékű vágásait, ahol A és B diszjunkt, és egyiküknek sincs olyan C részhalmaza, melyre $(C, \bar{C})$ h értékű vágáF.

H összefüggőségéből következik, hogy $\exists$ P út, amely egy $a_1 \in A$ pontot egy $b_1 \in B$ ponttal köt össze, és P nem tartalmaz több pontot sem A-ból, sem B-ből.



4.1. ábra. Edmonds bizonyításában a_1 és b_1 választása

Mivel az a_1 foka legalább $k > h$, és A-ból csak h él lép ki, ezért $\exists$ $a_2 \in A$ pont, melyet e_a él köt a_1-hez, és a_2-ből nem lép ki él A-n kívülre. Hasonlóan definiáljuk a $b_2 \in B$ csúcsot és az e_b élt.

A H' gráf úgy keletkezik H-ból, hogy elhagyjuk az e_a és e_b, majd hozzávesszük az $e'_a = a_1b_2$ és $e'_b = b_1a_2$ éleket. H'-ben minden foka ugyanannyi, mint H-ban, és ezzel a cserével a $(A, \bar{A})$ és $(B, \bar{B})$ vágások értéke $h+2$ lett.

Már csak azt kell megmutatni, hogy nem keletkezett új, legfeljebb h értékű vágás.

Indirekt feltehető, hogy keletkezett egy ilyen $(D, \bar{D})$ vágás. Feltehető, hogy $a_1, b_2 \in D$, $a_2, b_1 \in \bar{D}$. Tekintsük a páronként diszjunkt $A \cap D$, $A \cap \bar{D}$, $B \cap D$, $B \cap \bar{D}$ halmazokat. A P út H'-ben összeköti az $a_1 \in A \cap D$ és a $b_1 \in B \cap \bar{D}$ pontokat, így $\exists$ e_0 él a P úton, ami benne van a $(D, \bar{D})$ vágásban. Mivel P nem tartalmaz csúcsot sem $A \cap \bar{D}$-ből, sem $B \cap D$-ből, így az e_0 él nem lehet olyan, hogy $A \cap \bar{D}$ és $A \cap D$ vagy $B \cap D$ és $B \cap \bar{D}$ között megy.

Osszuk három részre a $(D, \bar{D})$ vágás H' beli éleit:

1. $E_A : A \cap D$ és $A \cap \bar{D}$ között menő élek

2. $E_B : B \cap D$ és $B \cap \bar{D}$ között menő élek

3. E_C : A többi él. Az előbb láttuk, hogy $e_0 \in E_C$, így $|E_C| \geq 1$

Mivel $|E_A| + |E_B| + |E_C| \leq h \Rightarrow E_A$ vagy E_B maximum $\lfloor (h-1)/2 \rfloor$ élt tartalmaz. Szimmetria miatt feltehetjük, hogy E_A. Ekkor e_a élt is számolva legfeljebb $\lfloor (h-1)/2 \rfloor + 1$ él megy $A \cap D$ és $A \cap \bar{D}$ között H-ban.

Tudjuk, hogy az $(A, \bar{A})$ vágás értéke H-ban h, ezért vagy $A \cap D$-re vagy $A \cap \bar{D}$-ra igaz, hogy a belőle induló, $(A, \bar{A})$ vágáshoz tartozó élek száma legfeljebb $\lfloor h/2 \rfloor$. Legyen ez $A \cap D$.

H-ban az $A \cap D$-ből kiinduló élek vagy $A \cap \bar{D}$-be, vagy $\bar{A}$-be mennek, így ezen élek száma legfeljebb $\lfloor h/2 \rfloor + \lfloor (h-1)/2 \rfloor + 1$.

Ez pedig ellentmond annak a feltevésünknek, hogy A-nak nincs olyan S részhalmaza, melyre az $(S, \bar{S})$ vágás értéke H-ban $\leq h$, tehát a H-ból elemcserével keletkező H' gráfban nem jön létre olyan új vágás, aminek az értéke $\leq h$.

□

4.2. Alternatív bizonyítás

2.4.1. Állítás bizonyítása nyomán konstuálhatunk összefüggő egyszerű gráfot az adott fokszámokkal. Így feltehető, hogy már tudunk mutatni egy $k-1$-élösszefüggő gráfot, melynek fokszámsorozata a megadott számsorozat, és azt kell belátnunk, hogy ebből előállítható egy k-élösszefüggő.

Egyszerű leszámlálással megállapíthatjuk, hogy ha veszünk két $k-1$-es vágást, melyeknek nincs olyan valódi részhalmaza, amit $\leq k-1$ él eltörlésével szeparáni lehet a gráf többi részétől, (vagyis Edmonds bizonyításában szereplő A és B halmazokat), akkor mindkettőben van (legalább 1) olyan pont, amiből nem lép ki él a halmazon kívülre. Az A-ban legyen egy ilyen pont a_1, a B-ben pedig b_1. Ha választunk egy-egy olyan élt, ami ezekre a pontokra illeszkedik, akkor anélkül tudjuk végrehajtani az elemcserét, hogy párhuzamos élek keletkeznének, ezáltal az egyszerűség megtartásával növelhetjük az A és B vágások értékét. Az egyértelműség kedvéért megjegyezzük, hogy az elemcsere során az a_1 és b_1 pontokat nem egymással kötjük össze.

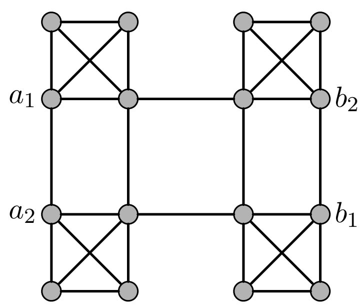
A kérdés már csak az, hogy keletkezik-e új, $\leq k-1$ élű vágás.
Ha megszámoljuk az éleket, akkor arra jutunk, hogy nem keletkezhet $< k-1$ élű vágás. Ha mégis így lenne, az azt jelentené, hogy a gráfban volt olyan $\leq k$ élű vágás, aminek elemei a két cserélt él. Legyen ez C. Ekkor vagy az $(A\cap C, A\cap \bar{C})$ élek száma, vagy a $(B\cap C, B\cap \bar{C})$ élek száma $\leq \lfloor k/2 \rfloor$. Tegyük fel, hogy az elöbbié.

Mivel az A vágás értéke $k-1$, így vagy $(A\cap C, \bar{A})$, vagy $(A\cap \bar{C}, \bar{A})$ élek száma $\leq \lfloor (k-1)/2 \rfloor$. Tegyük fel, hogy $(A\cap C, \bar{A})$. Ekkor az $A\cap C$-ből kilépő élek maximális száma $\leq \lfloor k/2 \rfloor + \lfloor (k-1)/2 \rfloor \leq k-1$, ami ellentmond A és B választásának.

Tegyük most fel, hogy az elemcserét követően keletkezik egy új $k-1$-vágás, azaz létezik olyan $k+1$ él, amit eltávolítva a gráf D és $\bar{D}$ komponensekre esik szét, és az elemcserével ebből egy $k-1$-es vágás lesz. Vegyük észre, hogy ekkor a következő feltételeknek egyszerre kell teljesülniük:

- $A\cap D$ halmazból A-n kívülre pontosan $(k-1)/2$ él megy
- $A\cap \bar{D}$ halmazból A-n kívülre pontosan $(k-1)/2$ él megy
- $B\cap D$ halmazból B-n kívülre pontosan $(k-1)/2$ él megy
- $B\cap \bar{D}$ halmazból B-n kívülre pontosan $(k-1)/2$ él megy
- $B\cap D$-ből $B\cap \bar{D}$-be pontosan $(k+1)/2$ él megy
- $A\cap D$-ből $A\cap \bar{D}$-be pontosan $(k+1)/2$ él megy
- nincs út $A\cap D$-ből $B\cap \bar{D}$-be és nincs út $B\cap D$-ből $A\cap \bar{D}$-be

Ezek következménye, hogy k páratlan, hiszen $(k+1)/2$ és $(k-1)/2$ csak így lehet egész szám. Tehát a legkisebb példa arra, hogy nem lehet tetszés szerint éleket választani a cseréhez:



4.2. ábra. Példa arra, hogy nem lehet bárhogy végrehajtani az elemcserét

Az ábrán jól látható, hogy ha úgy járunk el, hogy az a_1 és b_1 pontokat választjuk (azokból nem megy él a vágáson kívülre), majd a következő lépésben az (a_1, a_2) és (b_1, b_2) éleket akarjuk az (a_1, b_2) és (a_2, b_1) élekre cserélni, akkor keletkezik egy új, $k-1$-es vágás. Azt állítjuk, hogy ha ehelyett az (a_1, b_1) és (a_2, b_2) élekre cseréljük, akkor nem áll fenn ez a probléma. (Párhuzamos élek ekkor sem keletkeznek, mert a fentiek miatt ezek között a pontok között nem mehet él.) Tegyük fel indirekt, hogy mégis van egy olyan F vágás, hogy $a_2, b_2 \in F$, és F-re szintén igazak a D-re feltett feltételek.

A Lovásztól származó hármas egyenlőtlenséget használva felső becslést tudunk adni k-ra.

4.2.1. Lemma. *Egy irányítatlan gráfban, melynek ponthalmaza V, bármely $A, B, C \subset V$ halmazra fennáll a következő egyenlőtlenség*

$$d(A) + d(B) + d(C) \geq$$
$$d(A \cap B \cap C) + d(A - (B \cup C)) + d(B - (A \cup C)) + d(C - (B \cup A)) + 2d(A \cap B \cap C, V - (A \cup B \cup C))$$

□

Az A, D, F halmazokra a következők adódnak:

1. $d(A) = k - 1$, $d(D) = d(F) = k + 1$
2. $d(A \cap D \cap F) \geq k$, mert $(A \cap D \cap F) \subset A$
3. $d(A - (D \cup F)) \geq k$, mert $(A - (D \cup F)) \subset A$
4. $d(D - (A \cup F)) \geq k$, ugyanis nem üres, mert b_1-et tartalmazza, és ha $< k$ volna, akkor $D \cap B < k$ élű vágás lenne, ami ellentmond B választásának.
5. az előzőhöz hasonló logika alapján $d(F - (D \cup A)) \geq k$

Vagyis

$$k - 1 + k + 1 + k + 1 \geq k + k + k + k \Rightarrow k \leq 1$$

Mivel $k > 1$, mert a $k = 1$ esetet külön kezeltük, nem létezhet F halmaz a megadott tulajdonságokkal, vagyis (a_1, a_2) és (b_1, b_2) éleket lecserélhetjük (a_1, b_1) és (a_2, b_2) élekre, ezáltal növelve az A és B vágások értékét.

□

4.3. Páros gráfok k-élösszefüggősége

A második fejezetben láttuk, hogy a kapott eredményeket kis módosításokkal ugyan, de könnyen megfogalmazhatjuk páros gráfok esetére is. Természetes kérdés tehát, hogy Edmonds bizonyítását tudjuk-e akkor is alkalmazni, ha $s_1 \geq s_2 \geq ... \geq s_n$ és $t_1 \geq t_2 \geq ... \geq t_m$ fokszámsorozatú k-élösszefüggő egyszerű páros gráfot szeretnénk előállítani. A válasz sajnos nemleges, hiszen nem tudjuk garantálni, hogy az Edmonds által definiált P út páros hosszú legyen. Például, ha csak egy $k-1$-es vágás van a gráfban, akkor a P út mindössze egy él, és akkor a bizonyításban szereplő elemcserét nem hajthatjuk végre, mert azonos osztályban lévő pontok között kellene élt behúznunk.

Hasonlóképp beláthatjuk, hogy nem alkalmazható a *4.2*-ben bizonyított állítás sem, miszerint ha két, pontszámra nézve minimális diszjunkt $k-1$-es vágásban választunk egy-egy olyan pontot, amiből nem megy él a vágáson kívülre, akkor ezeken tetszőlegesen választhatunk egy-egy élt, amelyeken elvégezhetjük az elemcserét anélkül, hogy a gráfban új $\leq k-1$-es vágás keletkezne.

Ebben a fejezetben bebizonyítjuk, hogy páros gráf esetén a fenti módszerrel választott bármely két pontra illeszkednek olyan élek, amelyeken az elemcserét vérgehajtva indukcióval beláthatjuk a következő tételt:

4.3.1. Tétel. *Létezik $s_1 \geq s_2 \geq ... \geq s_n$ és $t_1 \geq t_2 \geq ... \geq t_m$ fokszámokkal k-élösszefüggő egyszerű páros gráf* $\Leftrightarrow$

1. *A fokszámsorozat realizálható egyszerű páros gráffal*
2. $s_i \geq k$ *és* $t_j \geq k \ \forall\ i, j$
3. $k = 1$ *esetén* $\sum_{i=1}^{n} s_i + \sum_{j=1}^{m} t_j \geq 2(n+m-1)$

Bizonyítás: A feltételek nyilván szükségesek, ezért csak az elégségességet bizonyítjuk.

Először konstruáljunk egy $G = (S, T; E)$ egyszerű páros gráfot. (Ez 1. miatt megtehető.)

Ezt az gráfot előbb összefüggővé tesszük. Úgy járunk el, mint Edmonds bizonyításában, csak arra ügyelünk, hogy a komponenseket összekötő elemcserénél a megfelelő (különböző osztályban lévő) éleket párosítsuk össze. Tegyük fel, hogy a gráf már $k-1$ összefüggő.

Ha minden pont foka k, viszont létezik $k-1$-es vágás, akkor úgy, mint korábban, nézzünk két minimális $k-1$-es vágást, A-t és B-t.

4.3.2. Állítás. *$A \cap S$, $A \cap T$, $B \cap S$, $B \cap T$ is tartalmaz olyan pontot, amiből nem lép ki él.*

Bizonyítás: Az állítás bizonyítása ugyanúgy történik mind a négy halmazra, ezért elég csak az egyikre belátnunk.

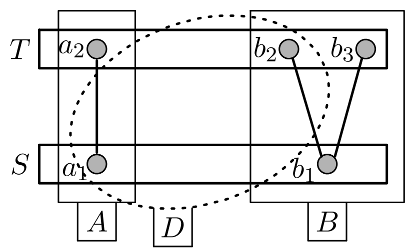
Tegyük fel indirekt, hogy $A \cap S$ összes pontjából lép ki él a vágáson kívülre. $\Rightarrow l := |A \cap S| \leq k-1$, viszont így $A \cap T$ minden pontjából menne ki legalább $k-l$ él. $m := |A \cap T|$, $m > 0$, hiszen ha $A \cap T$ üres lennne, akkor az $A \cap S$-ben lévő pontokból induló összes él kilépne A-ból, ez pedig több lenne, mint k.
Így legalább $m(k-l) + l \geq k$ él megy a vágáson kívülre, ami ellentmondás.

□

Válasszunk $A \cap S$, $B \cap S$ halmazokból egy-egy olyan pontot, amiből nem megy a vágáson kívülre él. Legyenek ezek a_1 és b_1. Ezeknek a pontoknak válasszuk ki egy-egy szomszédját, a_2-t és b_2-t.

Mivel egy páros gráfban vannak tiltott élek, ezért az (a_1, a_2) és (b_1, b_2) éleket csak az (a_1, b_2) és (a_2, b_1) élekre cserélhetjük.

4.3.3. Állítás. *Ha a fenti cserét nem lehet végrehajtani, mert létezik D $k+1$-es vágás, amiből ezáltal $k-1$-es vágás lenne, akkor létezik b_1-nek olyan b_3 szomszédja, hogy az (a_1, a_2), $(b_1, b_3) \Rightarrow (a_1, b_3)$ és (a_2, b_1) cserét követően jó realizációt kapunk. Ezáltal az A és B vágások értéke nő, valamint nem keletkezik új, $< k$-as vágás.*



4.3. ábra. Páros gráfok k-élösszefüggősége

Bizonyítás: D legyen az a b_2-t tartalmazó $k+1$-es vágás, ami b_1 szomszédai közül a lehető legtöbbet tartalmazza. b_1-nek létezik olyan szomszédja, ami nincs D-ben, mert $(S \cap B) - D$-ből $D \cap B$-be legfeljebb $(k+1)/2$ él megy, b_1-nek pedig legalább k szomszédja van, ezért ezek közül $(k-1)/2$ biztosan $(B \cap T) - D$-ben van. Legyen ezek közül az egyik b_3. Mint a korábbi eseteknél, most is csak akkor lehet gond, ha létezik $k+1$ élű F vágás

úgy, hogy $a_1 \in F$ és $b_3 \in F$, de $a_2 \notin F$ és $b_1 \notin F$.
Lovász hármas egyenlőtlenség lemmáját ismét használhatjuk, most is az A, D és F halmazokra.

$$d(A) + d(D) + d(F) \geq$$
$$d(A \cap D \cap F) + d(A - (D \cup F)) + d(D - (A \cup F)) + d(F - (D \cup A)) + 2d(A \cap D \cap F, V - (A \cup D \cup F))$$

D választása miatt egyik halmaz sem üres, így a következő adódik:

$$k - 1 + k + 1 + k + 1 \geq k + k + k + k \Rightarrow k \leq 1$$

Ezzel ellentmondásra jutunk, ami azt jelenti, hogy nem létezhet F halmaz a megadott tulajdonságokkal, vagyis kész a tétel bizonyítása.

□ □

5. fejezet

k-összefüggő gráfok fokszámsorozatai

5.1. Wang-Kleitman tétel

Világos, hogy egy G gráf k-élösszefüggősége nem garantálja a k-összefüggőséget, így ezt a kérdést külön kell vizsgálnunk. D.L.Wang és D.J.Kleitman [2]-ben közölt eredményét az eredeti bizonyítással ismertetjük, csak a jelölésrendszert és a felépítést változtattuk meg valamelyest.

5.1.1. Tétel (Wang, Kleitman). *$d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n$ egy k-összefüggő egyszerű gráf v_i $(i = 1, ..., n)$ csúcsainak fokszámai $\Longleftrightarrow$*

1. *A d_i fokszámsorozat realizálható egyszerű gráffal (lsd. 3.4.1 Tétel)*
2. *$\forall\ d_i \geq k$*
3. *$q - \sum_{i=1}^{k-1} d_i + \frac{(k-1)(k-2)}{2} \geq n - k$, ahol q az élek száma.*

Bizonyítás: $\Rightarrow$ Szükségesek a feltételek, az első és második triviálisan teljesül minden k-összefüggő gráfra, a harmadikra azért van szükség, mert a $G - \{v_1, ..., v_{k-1}\}$ gráf összefüggő, azaz ha az első $k-1$ pont által lefogott éleket eltávolítjuk (amelyek maximális száma $q - \sum_{i=1}^{k-1} d_i + \frac{(k-1)(k-2)}{2}$), akkor a többi ponton kell maradni legalább $n - k$ élnek.

$\Leftarrow$ Az elégségesség belátásához tegyük fel, hogy teljesülnek a feltételek, és konstruáljunk egy k-összefüggő gráfot.

Először vizsgáljunk egy speciális esetet:

5.1.2. Lemma. *Tegyük fel, hogy a d_i fokszámsorozat realizálható, és $d_i = k$ vagy $d_i = k+1$ $\forall\ i = 1, ..., n$. Azt állítjuk, hogy ebben az esetben mindig létezik k-összefüggő realizáció.*

Bizonyítás: Amennyiben k páros, a v_i pontot akkor és csak akkor kössük össze a v_j ponttal, ha $|i - j| \leq k/2$. Majd $l = 1$-től kezdve v_l-t kössük össze $v_{l+\lfloor n/2 \rfloor}$-vel addig, amíg elegendő $k+1$ fokú pont lesz. Ez megtehető, hiszen a $k+1$ fokú pontok száma páros, mert $k+1$ páratlan. Az így keletkező gráf k-összefüggő lesz, mivel bármely vágásnak (legalább) két olyan halmazt kell tartalmaznia, amely $k/2$ egymást követő indexű pontból áll. Tehát ha minden fok k, akkor

$G_k := \{(v_i v_{i+j}) | i = 1, ..., n, j = 1, ..., k/2\}$, $k \equiv 0 \bmod 2$ esetén.

Ha pedig k páratlan, akkor a v_i pontot akkor és csak akkor kössük össze a v_j ponttal, ha $|i-j| \leq (k+1)/2$. Majd az egymást követő pontpárok közötti éleket töröljük addig, amíg megfelelő számú k fokú pontunk lesz.

Ha k páratlan és minden fok k, akkor azt speciális esetként kezeljük, és úgy tekintjük, hogy $k' = k-1$ és minden fok $k'+1 = k$. Vagyis:

$G_k := \{(v_i v_{i+j}) | i = 1, ..., n, j = 1, ..., (k-1)/2\} \cup \left\{(v_i v_{i+\lfloor n/2 \rfloor}) | i = 1, ..., n\right\}$, ha $k \equiv 1 \bmod 2$.

Ha létezik k és $k+1$ fokú pont is, akkor az fent definiált gráfok:

1. eset k páros $\Rightarrow k+1$ páratlan, a páratlan fokú pontok száma $2r$. Ekkor

$G := G_k \cup \left\{(v_i v_{i+(\lfloor n/2 \rfloor)}) | i = 1, ..., r\right\}$

2. eset k páratlan $\Rightarrow k+1$ páros, a páratlan fokú pontok száma $2r$. Ekkor

$G := G_{k+1} - \{(v_1 v_2), (v_3 v_4), ..., (v_{2r-1} v_{2r})\}$

Könnyen látható, hogy ebben az esetben egy vágásnak legalább $(k-1)/2 + (k+1)/2 = k$ pontot kell tartalmaznia, kivéve, ha $n = k+3$ és $2r > n/2$, ugyanis ekkor ügyelnünk kell arra, hogy az egymással szemközti éleket ne töröljük, ezért ebben az esetben:

$G = G_{k+1} - \left\{(v_1 v_2), ..., (v_{n/2-1} v_{n/2}), (v_{n/2+2} v_{n/2+3}), ..., (v_{2r} v_{2r+1})\right\}$

□

5.1.3. Lemma. *Legyenek a G gráf csúcsai $v_1, ..., v_n$, rendre $d_1, ..., d_n$ fokszámokkal. Ha $G - v_n$ k-összefüggő és $d_n \geq k \Rightarrow G$ is k-összefüggő.*

Bizonyítás: Válasszunk ki G pontjai közül $k-1$-et, jelöljük ezek halmazát S-sel.

1. eset $v_n \notin S$. Ekkor $G - v_n - S$ összefüggő, és v_n-ből legalább egy él megy $G - v_n - S$-be, mivel $d_n \geq k$.

2. eset $v_n \in S$. Ekkor $G - S = G - v_n - S$, ami összefüggő.

Így G k-összefüggő.

□

A tétel bizonyításához szükségünk lesz egy korábban már bizonyított állításra:

5.1.4. Lemma. *Ha $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n$ realizálható, akkor a leemelés után megmaradó sorozat is realizálható.*

□

5.1.5. Lemma. *Ha $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n$ kielégíti a tételben szereplő feltételeket, és $d_i - 1 \geq k \ \forall\ i \leq d_n$, akkor a $d_1 - 1, ..., d_{d_n} - 1,\ d_{d_n+1}, ..., d_{n-1}$ fokszámsorozat is kielégíti.*

Bizonyítás: Az előző lemma miatt elegendő belátni, hogy a leemelés után a 3. feltétel teljesül, ami azt mondja, hogy a $v_1, ..., v_{k-1}$ pontok elhagyása után a megmaradó $n-(k-1)$ pontú gráfnak szükséges, hogy legyen legalább $n-(k-1)-1$ éle, mivel a $k-1$ legnagyobb fokú pontot eltávolítva a maradéknak kell tartalmaznia feszítő fát.

Amíg a leemelések során az első $k-1$ pont nem változik, az alábbiak igazak:

- Ha v_n foka k, akkor csak egy olyan élt használunk fel, aminek egyik végpontja sincs a $\{v_1, ..., v_{k-1}\}$ halmazban. Tehát így a feltétel továbbra is igaz marad.

- Ha v_n-nek $k+1$ a foka, akkor a leemelés előtt minden pont rajta van legalább két olyan élen, ami nincs az első $k-1$ ponton, vagyis a 3. feltétel egyenlőtlenséggel teljesül. Így ha a leemelés után nem váltzik az első $k-1$ pont, akkor továbbra is telesülni fog.

- Ha v_n foka $\geq k+2$, akkor v_n leemelése után a legkisebb fok legalább $k+1$, ami azt jelenti, hogy minden pont rajta van legalább két olyan élen, ami nincs az első $k-1$ ponton, vagyis eleve elég olyan él van, ami diszjunkt az első $k-1$ ponttól, tehát azokat eltávolítva a maradék pontokon lesz feszítő fa.

Ezután már csak azokat az eseteket kell megvizsgálni, amikor a leemelés után változik az első $k-1$ pont:

1. eset $d_n = k$

Tegyük fel, hogy $d_{k-m} = ... = d_{k+m} = l$, $m > 0$, és az alábbiak közül legalább az egyik igaz:

- $d_{k-m-1} > l$

- $d_{k+m+1} < l$

- $k = m + 1$

- $k + m = n - 1$

Azt kell megmutatnunk, hogy

$$(q-k)-\sum_{i=1}^{k-m-1}(d_i-1)-ml+\frac{(k-1)(k-2)}{2}\geq n-1-k$$

vagyis:

$$q-\sum_{i=1}^{k-1}d_i+\frac{(k-1)(k-2)}{2}\geq n-k+m$$

Belátjuk, hogy ha $q-\sum_{i=1}^{k-1}d_i+\frac{(k-1)(k-2)}{2}<n-k+m$, akkor ellentmondásba ütközünk. Mivel

$$q=(\sum_{i=1}^{n}d_i)/2\geq\left[(n-k-m)k+(2m+1)l+\sum_{i=1}^{k-m-1}d_i\right]/2,$$

ezért

$$(n-k-m)k+(2m+1)l+\sum_{i=1}^{k-m-1}d_i-2\sum_{i=1}^{k-1}d_i+(k-1)(k-2)\leq 2(n-k+m-1),$$

így

$$(n-k-m)k+l-(k-1-m)(n-1)+(k-1)(k-2)\leq 2(n-k+m-1),$$

mivel $d_i\leq n-1$, $i=1,...,k-1-m$, és $d_i=l$, $i=k-m,...,k$.
Tehát azt kapjuk, hogy

$$l-km+nm\leq n+3m-3$$

$$n(m-1)\leq 3m+km-l-3$$

Tudjuk, hogy $l\geq k+1$ (mivel a feltevés szerint $l-1\geq k$).
$n(m-1)\leq 3m+km-k-3-1=(m-1)(k+3)-1$.
Ha $m>1$, akkor $n\leq k+2\Rightarrow m\leq 1$, ellentmondás.
Ha $m=1$, akkor $0\leq -1$, ellentmondás.

2. eset $d_n=k+1$

Tegyük fel valamely $m\geq 0$-ra, hogy $d_{k-m},...,d_{k+m+1}=l$, és a következő négy állítás közül legalább az egyik igaz:

- $d_{k-m-1}>l$
- $d_{k+m+2}<l$
- $k-m=1$
- $k+m+1=n-1$

Ekkor azt kell megmutatnunk, hogy

$$(q-(k+1))-\sum_{i=1}^{k-m-1}(d_i-1)-ml+\frac{(k-1)(k-2)}{2}\geq n-1-k$$

ekvivalensen:

$$q-\sum_{i=1}^{k-1}d_i+\frac{(k-1)(k-2)}{2}\geq n-k+m+1$$

Indirekt $q-\sum_{i=1}^{k-1}d_i+\frac{(k-1)(k-2)}{2}\leq n-k+m$.

Mivel $q=(\sum_{i=1}^{n}d_i)/2\leq(k+1)(n-k-m-1)+(2m+2)l+\sum_{i=1}^{k-m-1}d_i$ és $d_i\leq n-1$, $\forall\ i$, ezért azt kapjuk, hogy

$$(k+1)(n-m-k-1)+2l-(k-1-m)(n-1)+(k-1)(k-2)\leq 2(n-k+m)$$

Tehát $mn\leq m(k+4)+2k-2l\Rightarrow mn\leq m(k+4)-2$, mert $l\geq k+1$.

Ha $m\geq 1$, akkor $n\leq k+3$ és így $m=1\Rightarrow n\leq k+4-2=k+2\Rightarrow m=0$, ellentmondás.

Ha $m=0\Rightarrow 0\leq -2$, ellentmondás.

3. eset $d_n\geq k+2$

Ebben az esetben $d_i-1\geq k+1$, $\forall\ i$. A $d'_1,...,d'_{n'}$ realizálható fokszámsorozatra a 3. feltétel teljesül, mivel $d'_i\geq k+1$, és

$$q'-\sum_{i=1}^{k-1}d'_i+\frac{(k-1)(k-2)}{2}\geq\frac{(n'-k)[(k+1)-(k-1)]}{2}=n'-k$$

□

A fenti segédtételek miatt elég belátnunk, hogy ha a $d_1,...,d_{k-1},k,...,k$ fokszámsorozatra teljesülnek az alábbi feltételek, akkor tudunk konstuálni egy k-összefüggő gráfot.

1. $d_1\geq d_2\geq ...d_{k-1}\geq k=k=...=k$ realizálható
2. $d_i\geq k$
3. $q-\sum_{i=1}^{k-1}d_i+\frac{(k-1)(k-2)}{2}\geq n-k$

5.1.6. Lemma. *Ha $d_1\geq d_2\geq ...\geq d_n$ realizálható, és*

1. $d_i\geq k\ \forall\ i$

2. $q-\sum_{i=1}^{k-1}d_i+\frac{(k-1)(k-2)}{2}\geq n-k$

feltételek teljesülnek, akkor a d_1 leemelése után megmaradó $d'_1\geq d'_2\geq ...\geq d'_{n-1}$ sorozatra teljesül

1.′ $\forall$ *i-re* $d'_i\geq k-1$

2.′ $q'-\sum_{i=1}^{k-2}d'_i+\frac{(k-2)(k-3)}{2}\geq n-k$, *ahol* $q'=\sum_{i=1}^{n-1}d'_i/2=q-d_1$

Bizonyítás 1.$'$ triviális.

2.$'$: Ha $d'_1 = d_2 - 1, d'_2 = d_3 - 1, ..., d'_{k-2} = d_{k-1} - 1$, akkor 2.$'$ pontosan 2., és így kész vagyunk. Tehát tegyük fel, hogy $\exists\ m \geq 1$, $d_{k-m} = ... = d_{k-1} = d_k = ... = d_{d_1+1+m} = l$, és a következő négy állítás közül legalább az egyik igaz:

- $d_{k-m-1} > l$
- $d_{d_1+2+m} < l$
- $d_1 + 1 + m = n$
- $k - m - 1 = 1$

Ekkor 2.$'$:

$$q - \sum_{i=1}^{k-1} d_i + \frac{(k-1)(k-2)}{2} \geq n - k + m, \text{ mert } k \geq m + 2.$$

Tegyük fel, hogy ez nem igaz, azaz:

$$q - \sum_{i=1}^{k-1} d_i + \frac{(k-1)(k-2)}{2} \leq n - k + m - 1$$

Ugyanúgy, mint korábban:

$$q = (\sum_{i=1}^{n} d_i)/2 \geq \left[(n-k-m)k + (2m+1)l + \sum_{i=1}^{k-m-1} d_i\right]/2$$

Tehát $l(d_1+1-k+1)+(n-d_1-1-m)k-\sum_{i=1}^{k-1-m} d_i+(k-1)(k-2) \leq 2(n-k+m-1)$.

Mivel $d_1 + 1 + m \leq n$, ezért $d_1 \leq n - 2$, $d_i \leq d_1 \leq n - 1$, $l \geq k$.

Helyettesítsünk minden d_i-t $n - 2$-vel a $\sum_{i=1}^{k-1-m} d_i$ összegben, és k-val l-t.

$$k(d_1+1-k+1)+(n-d_1-1-m)k-(k-1-m)(n-2)+(k-1)(k-2) \leq 2(n-k+m-1)$$

$$2k + nm + 2 \leq n + mk + 4m$$

$$(m-1)(n-k) \leq 4m - k - 2 \leq 4m - m - 2 - 2 \text{ (mert } k \geq m+2)$$

$$(m-1)(n-k) \leq 3(m-1) - 1$$

Ha $m = 1$, akkor $0 \leq -1$ ellentmondás, ha pedig $m > 1$, akkor azt kapjuk, hogy $n - k \leq 2$, vagyis $n \leq k + 2$, tehát $m \leq 1$, ami szintén ellentmondás.

$\square$

AZ ALGORITMUS

A segédtételek bizonyítása után nézzük meg, hogyan lehet k-összefüggő gráfot konstruálni, melynek $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n$ fokszámsorozatára igaz, hogy $d_k = d_{k+1} = ... = d_n = k \geq 2$, $d_1 \geq k+2$, valamint teljesülnek a tételben szereplő feltételek.

Az első lépés d_1 leemelése.

$n-p$ lépés után a megmaradó fokszámsorozat legyen $d'_1, d'_2, ..., d'_p$, ekkor az $n-p+1$-edik lépés a következő:

Legyen $d'_p = l$.

Ha $d'_1 \leq l+1$, akkor az 1. lemmát használva készen vagyunk.

Ha $d'_1 \geq l+2$, akkor

- ha $d'_l \geq l+1$, d'_p leemelése
- ha $d'_l = l$, d'_1 leemelése

Még be kell látnunk, hogy az algoritmus által szolgáltatott gráf k-összefüggő.

Figyeljük meg, hogy ha az $n-p$-edik lépés után a megmaradó fokszámsorozat $d'_1 \geq d'_2 \geq ... \geq d'_p$, akkor a következők igazak lesznek:

1. $d'_1 \geq d'_2 \geq ... \geq d'_p$ realizálható fokszámsorozat. Ez a 3. lemmából következik.
2. Legyen $d'_p = l$, akkor a tétel 3. feltétele teljesül a $d'_1 \geq d'_2 \geq ... \geq d'_p$ fokszámsorozatra, azaz

$$q' - \sum_{i=1}^{l-1} d'_i + \frac{(l-1)(l-2)}{2} \geq p - l$$

   Ez az 5.1.2 és 5.1.6 segédtételekből következik.
3. Tegyük fel, hogy $d'_p = l$, ekkor $d'_l = l$ vagy $l+1$.

   A kiinduló fokszámsorozatra igaz ez a tulajdonság. Megmutatjuk, hogy a leemelések ezt nem rontják el. Tegyül fel, hogy az $n-p$-edik lépésig így van.

   Ha $d'_l = l+1$, akkor az $n-p+1$-edik lépésben $d'_p = l$-et emeljük le, így $d''_l = l+1-1 = l$ vagy $d''_l = d'_i$ valamely $l < i \leq n-1$, d_i-ről pedig tudjuk, hogy vagy l vagy $l+1$.

   Ha $d'_l = l$, akkor az $n-p+1$-edik lépésben a d'_1-t emeljük le, így $d''_{p-1} = l-1$. És $d''_{l-1} = d'_l - 1 = l-1$ vagy $d''_{l-1} = d'_i$ valamely $i > d'_l + 1$, tehát mivel $d'_i = l \Rightarrow d''_{l-1} = (l-1)+1$

4. Ha $d'_p = l$, akkor legalább négy d'_i egyenlő l-lel.

   Bizonyítás: Az első lépésben $d_1 \geq k+2$, így d_1 leemelése után a következő fokszámsorozat marad: $d_2 - 1, d_3 - 1, ..., d_k - 1, d_{k+1} - 1, ..., d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, ...d_n$. Ezt nemnövekvő sorba rendezve:

$$|\{i|d'_i = k-1\}| \geq (d_1+1) - (k-1) \geq (k+2+1) - (k-1) = 4$$

   Tegyük fel, hogy 4. igaz az $n-p$-edik lépés után megmaradó $d'_1, ..., d'_p$ fokszámsorozatra, ahol $d'_p = l$.

   Ha az $n-p+1$-edik lépés az utolsó, akkor kész vagyunk, így feltehető, hogy $d'_1 \geq l+2$. Ha $d'_l = l$, akkor d'_1-et leemeljük, és az előző érvelés alapján 4. igaz.

   Ha $d'_l \geq l+1$, akkor a 3. tulajdonság miatt $d'_l = l+1$, így $d''_l = d'_l - 1 = l+1-1 = l$, vagyis $d'_p = l$ leemelése újabb l fokú csúcsot eredményez, vagyis 4. teljesül.

5. $l \geq 2$ minden lépésben. Itt l a legkisebb fokszám a megmaradó fokszámsorozatból.

   Az algoritmus során, ha valamely lépésnél $l = 1$, akkor az azt megelőző lépésnél a fokszámsorozat csak a következőképp nézhet ki: $a, 2, 2, ..., 2$, ahol $a \geq 2+2 = 4$. (Ha $a \leq 3$, akkor az már az utolsó lépés lett volna.) Viszont a 2. megfigyelés alapján

$$q' - a + \tfrac{(2-1)(2-2)}{2} \geq n' - 2,$$

   azaz $\frac{a+(n'-1)2}{2} - a \geq n' - 2$. Így $a \leq 2$, ami ellentmond $a \geq 4$-nek. Tehát l egyik lépés után sem lehet egyenlő 1-gyel.

Ezen tulajdonságok segítségével belátjuk, hogy az algoritmus k-összefüggő gráfot szolgáltat.

Az $n-p$-edik lépés után a megmaradó fokszámsorozat nemnövekvő sorrendben $d'_1, d'_2, ..., d'_p$, és $d'_p = l$. Legyen G_p az a gráf, amit az algoritmus a $d'_1, d'_2, ..., d'_p$ sorozatból konstruál, tehát az $n-p+1$, $n-p+2$,... lépések után keletkező gráf. Megmutatjuk, hogy

1. G_p l-összefüggő

2. Legyen H egy l-vágás G_p-ben, így $G_p - H$ minden komponense, ami tartalmaz $l+1$ fokú pontot, tartalmaz olyat is, aminek nem $l+1$ a foka.

Ha 1.-t belátjuk, akkor készen vagyunk, hiszen ekkor G_n-ről is, azaz a kiinduló fokszámsorozatból az algoritmus által előállított gráfról mondhatnánk, hogy k-összefüggő.
2. állításra 1. bizonyításához lesz szükségünk.

Bizonyítás: Az utolsó lépésben a fokszámsorozat: $d'_1 \geq d'_2 \geq ... \geq d'_s$, és ha $d'_s = m$, akkor $d'_1 \leq m+1$. A 4. tulajdonság miatt az m fokú pontok száma ≥ 4, így az *5.1.2* Lemmából következik 1. és 2. ($m \geq 2$, 5. miatt.)

Tahát G_p-re igaz 1. és 2., ebből szeretnénk belátni, hogy G_{p+1}-re is.
A megmaradó fokszámsorozat az $n-p-1$-edik lépés után legyen $f_1 \geq f_2 \geq ... \geq f_{p+1}$, $f_{p+1} = l$. A G_{p+1} gráf pontjai rendre $w_1, w_2, ..., w_{p+1}$.

1. eset: $f_l = l+1$

   Ebben az esetben az $n-p$-edik lépése az algoritmusnak: f_{p+1} leemelése, azaz G_p pontjai $w_1, w_2, ..., w_p$ lesznek, $f_1 - 1, f_2 - 1, ...f_l - 1, f_{l+1}, ..., f_p$ fokszámokkal. Mivel $f_l - 1 = l$, és tudjuk, hogy G_p l-összefüggő, ezért az *5.1.3* Lemma alapján G_{p+1} is az, vagyis 1.-t bebizonyítottuk.

   Félreértések elkerülése végett valamely v pont fokát $deg(v)$-vel fogjuk jelölni. Legyen H egy l pontú vágás G_{p+1}-ben. Ha w_{p+1} benne lenne, akkor $G_{p+1} - H = G_p - (H - w_{p+1})$ összefüggősége miatt ellentmondásra jutnánk. $\Rightarrow w_{p+1} \notin H$. Legyen $w_i \in G_{p+1} - H$, $deg(w_i) = l+1$ G_{p+1}-ben. Ha $i \leq l$, akkor w_i a w_{p+1} szomszédja, vagyis egy olyan ponté, amelynek a foka $l \neq l+1$ G_{p+1}-ben.

   Ha $i > l$, legyen w_j az a pont, aminek a foka nem $l+1$ G_p-ben, és $G_p - H$-ban ugyanabba a komponensbe esik, mint w_i. Ha $deg(w_j) \neq l$ G_{p+1}-ben, akkor w_j szomszédja w_{p+1}-nek, így $G_{p+1} - H$-ban w_{p+1} ugyanabban a komponensben van, mint w_i, és tudjuk, hogy $deg(w_{p+1}) \neq l+1$, így 2.-t is beláttuk.

2. eset: $f_l = l$

   Ha $f_l = l$, akkor az algoritmus $n-p$-edik lépése f_1 leemelése, ami azt jelenti, hogy G_p pontjai $w_2, w_3, ..., w_{p+1}$, $f_2 - 1, f_3 - 1, ..., f_{f_1+1} - 1, f_{f_1+2}, ..., f_{p+1}$ fokszámokkal, és $l-1$ a minimális fokszám G_p-ben. Tehát eddig a következőket tudjuk:

   - G_p $k-1$-összefüggő
   - Legyen G_p-ben H' egy $l-1$ pontú vágás, ekkor a $G_p - H'$ minden olyan komponensében, amely tartalmaz (G_p-ben) l fokú pontot, van olyan pont is, aminek nem l a foka (G_p-ben).

   Figyeljük meg, hogy $f_1 \geq l+2$, különben az $n-p-1$-edik lépés az utolsó lenne.

   Legyen $H' \subset G_{p+1}$ $l-1$ elemű.
   Ha $w_1 \in H'$, akkor $G_{p+1} - H' = G_p - (H' - w_1)$ G_p $(l-1)$-összefüggősége miatt összefüggő. $\Rightarrow w_1 \notin H'$, és ha $G_p - H'$ összefüggő, akkor G_{p+1} is az $f_1 \geq l+2$ miatt.

Tegyük fel tehát, hogy $w_1 \notin H'$ és $G_p - H'$ nem összefüggő. Tudjuk, hogy ha $2 \leq i \leq f_1 + 1$, akkor w_i a w_1 szomszédja, ha pedig $i \geq f_1 + 1$, akkor $f_i = l$, tehát van olyan w_j pont, aminek a foka G_p-ben nem l, és $G_p - H'$-ben ugyanabba a komponensbe esik, mint w_i. Viszont ekkor G_{p+1}-ben w_j w_1 szomszédja, azaz w_i ugyanabban a komponensben van, mint w_1.Tehát arra jutottunk, hogy a $G_{p+1} - H'$ gráfban minden pont ugyanabban a komponensben van, mint w_1, tehát $G_{p+1} - H'$ összefüggő minden $H' \subset G_{p+1}$-re, ahol H' $l - 1$ elemű.

2. belátásához legyen H egy l elemű vágása G_{p+1}-nek.

Ha $w_1 \in H$, akkor $H' := H - w_1$. Ez vágása G_p-nek, hiszen $G_{p+1} - H = G_p - H'$ nem összefüggő. Legyen w_i $l + 1$ fokú pont G_{p+1}-ben $\Rightarrow$ w_i l fokú pont G_p-ben, így $\exists$ w_j $G_p - H'$ ugyanazon komponensében, mint w_i,és $deg(w_j) \neq l$ G_p-ben $\Rightarrow$ $deg(w_j) \neq l + 1$ G_{p+1}-ben.

Ha $w_1 \notin H$, akkor minden $l + 1$ fokú pontnak szomszédosnak kell lennie w_1-gyel, $deg(w_1) = f_1 \geq l + 2 \neq l + 1$, ezzel befejeztük 2. bizonyítását G_{p+1}-re, és ezáltal az algoritmus helyességét is beláttuk.

$\square$ $\square$

6. fejezet

Árulkodó fokszámsorozatok

A korábbiakban részletesen foglalkoztunk a fokszámsorozatok és a gráfok összefüggőségének kapcsolatával. A továbbiakban csak röviden, a teljesség igénye nélkül felsorolunk olyan eredményeket, amik azzal foglalkoznak, hogy egy fokszámsorozat és bizonyos gráftulajdonságok között milyen összefüggések fedezhetőek fel. Ezeket két alfejezetre bontjuk. Az első olyan fokszámsorozatokról szól, amiknek létezik olyan realizációja, ami rendelkezik egy adott tulajdonsággal, a második pedig olyanokról, amelyeknek minden realizációjáról elmondható egy tulajdonság. A következő bizonyítás nélkül szereplő eredmények S.L. Hakimi és E.F. Schmeichel összefoglaló cikkéből [6] származnak.

6.1. Tulajdonságok, melyeket feltételezhetünk

A Hamilton út, illetve Hamilton kör létezése egy gráfban mindig érdekes kérdés volt, lássunk néhány példát, hogy a fokszámsorozatok mit mondanak nekünk erről:

6.1.1. Tétel. *A $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n$ fokszámsorozat realizálható olyan gráffal, melyen a v_i és v_j csúcsok között léteik Hamilton út $(i < j)$ $\Longleftrightarrow$*

1. *A $(d_1 - 2, ..., d_{i-1} - 2, d_i - 1, d_{1+1} - 2, ..., d_{j-1} - 2, d_j - 1, d_{j+1} - 2, ..., d_n$ fokszámsorozat realizálható*
2. $\sum_{i=1}^{k} d_i <$
   - $k(n-k-2) + \sum_{i=n-k}^{n} d_i$, *ha* $k < \frac{n-1}{2}$ *és* $i > k$, $j > n-k$
   - $k(n-k-1) + \sum_{i=n-k+1}^{n} d_i$, *ha* $k < \frac{n}{2}$ *és vagy* $i > k, j \leq n-k$ *vagy* $i \leq k, j > k$
   - $k(n-k) + \sum_{i=n-k+2}^{n} d_i$, *ha* $k < \frac{n+1}{2}$ *és* $i, j \leq k$

Most nézzünk néhány állítást, amik a gráfok síkbarajzolhatóságának és fokszámsorozatának kapcsolatáról szólnak. (Egy gráf síkbarajzolható, ha létezik olyan lerajzolása, ahol az élek nem metszik egymást.) Az Euler formula szükséges feltételt ad:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \leq 6(n-2)$$

Nevezzünk egy fokszámsorozatot Eulernek, ha teljesül rá az Euler formula. A síkbarajzolhatóság problémáját nehéz megközelíteni, ezért először csak olyan gráfokra szerettek volna szükséges és elégséges feltételt adni, ahol a fokszámok egyenlőek, majd olyanokat vizsgáltak, ahol a maximális és minimális fokszámok közötti különbség 1. Ezentúl az egyszerűség kedvéért, az i^k jelentése: k darab i fokú pont. (Például a $4^2 2^3 1^2$ a $4, 4, 2, 2, 2, 1, 1$ fokszámsorozatot jelöli.)

6.1.2. Tétel. *Minden reguláris Euler fokszámsorozat realizálható síkbarajzolható gráffal, kivéve* 4^7 *és* 5^{14}.

6.1.3. Tétel. *Minden Euler számsorozatnak, amire teljesül, hogy* $d_1 - d_n = 1$*, létezik síkbarajzolható realizációja, kivéve a következőknek:* $5^{10}4^1$, $5^{12}4^1$, $6^1 5^{12}$ *és* $6^1 5^{14}$.

6.2. Tulajdonságok, melyekben biztosak lehetünk

Ha egy n pontú gráfban minden fok $n-1$, akkor tudjuk, hogy egyszerű gráffal csak egyféleképp lehet realizálni, mégpedig az n pontú teljes gráffal. Ilyenkor könnyű dolgunk van, ha meg akajuk mondani, hogy mely π tulajdonságok tejesülnek az összes lerajzolásra. Most nézzük meg, hogy milyen feltételek garantálnak speciális kör-, vagy út-szerkezetet egy gráfban. Dirac eredménye a következő:

6.2.1. Tétel. *Ha* $d_i \geq n/2 \ \forall \ 1 \leq i \leq n$*, akkor a* $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n$ *fokszámsorozatnak minden realizációja tartalmaz Hamilton kört.*

Chvátal nevéhez fűződik az alábbi két tétel:

6.2.2. Tétel. $d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_n$, $n \geq 3$. *Ha a* $d_k \leq k < n/2$*-ből következik, hogy* $d_{n-k} \geq n-k$*, akkor a fokszámsorozat minden realizációjában van Hamilton kör.*

Ez a tétel nem foglalja magában az összes ilyen fokszámsorozatot, hiszen például a $2^1 3^2 4^5$ is mindenképp tartalmaz Hamilton kört.

6.2.3. Tétel. *Legyen* $d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_n$. *Ha* $d_k \leq k-1 < \frac{n-1}{2}$*-ből következik, hogy* $d_{n-k+1} > n-k$*, akkor minden realizáció tartalmaz Hamilton utat.*

Egy korábbi fejezetben szó volt róla, hogy bizonyos feltételek mellett létezik egy számsorozathoz k-összefüggő realizáció. A következő tétel azt mondja meg, hogy mire van szükségünk ahhoz, hogy minden realizáció ilyen legyen.

6.2.4. Tétel. *Legyen* $d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_n$. *Ha* $d_i \leq i+k-2$*-ből következik, hogy* $d_{n-k+1} \geq n-i$, $1 \leq i \leq \left[\frac{n-k+1}{2}\right]$*, akkor minden realizáció* k*-összefüggő.*

Ez elégséges, de nem feltétlenül szükséges, hiszen a $7^5 6^6 4^2 3^1 2^1$ minden realizációja összefüggő, viszont a tételben szereplő feltétel nem igaz $k = 1$-re.

Irodalomjegyzék

[1] J. Edmonds : Existence of k-edge connected ordinary graphs with prescribed degrees, 1964

[2] D.L.Wang, D.J.Kleitman : On the existence of N-connected graphs with prescribed degrees, 1972

[3] A.Tripathi, S.Venugopalan, D.B.West : A short constructive proof of the Erdős-Gallai characterization of graphic lists, 2010

[4] P.L.Erdős, I.Miklós, Z.Toroczkai : A simple Havel-Hakimi type algorithm to realize graphical degree sequences of directed graphs, 2009

[5] H.Kim, Z.Toroczkai, P.L.Erdős, I.Miklós,L.A.Székely : Degree-based graph construction, 2009.

[6] S.L.Hakimi, E.F.Schmeichel : Graphs and their degree sequences: A survey, 1978

[7] Lovász László : Kombinatorikai problémák és feladatok

[8] S.Hakimi : On the Realizability of a Set of Integers as Degrees of the Vertices of a Graph, 1962

[9] V. Havel : A remark on the existence of finite graphs, 1955

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőmnek, Frank Andrásnak az érdekes témafelvetést, az értékes szakmai tanácsokat, a sokat jelentő útmutatást, bíztatást. Köszönöm, hogy mindig számíthattam a segítségére.

Köszönöm Bérczi Kristófnak a dolgozat formai és tartalmi ellenőrzését, építő javaslatait.

Továbbá hálás vagyok mindazoknak, akik egyetemi éveim során segítettek, támogattak.