

A Poiseuille áramlás nemlineáris stabilitásvizsgálata

Diplomamunka

Írta: Maksó Róbert

Alkalmazott matematikus szak

Témavezetők:

Hős Csaba, egyetemi adjunktus

Hidrodinamikai Rendszerek Tanszék

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar

Stoyan Gisbert, egyetemi tanár

Numerikus Analízis Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Informatikai Kar



Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2010

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. Matematikai modell	4
2.1. Áramlástan egyenletek	4
2.2. Dimenziótlan egyenletek, áramfüggvény	7
2.3. Közelítés véges dimenzióban	11
3. Lineáris stabilitás	17
3.1. Newton-Raphson módszer	18
3.2. Pszeudó ívhossz módszer	19
4. Nemlineáris vizsgálat	22
5. Utószó	28
Függelék	29
Irodalomjegyzék	29

Ábrák jegyzéke

2.1. Áramlási tartomány	5
2.2. Sebességprofilok	6
2.3. Eltérés a stacionárius sebességprofiltól	9
2.4. η irányú bázisfüggvények	11
3.1. Newton-Raphson módszer $\alpha = 1.03$ paraméterre	19
3.2. Pszeudó ívhossz módszer	20
3.3. Kritikus görbék különböző dimenziós numerikus közelítésekre	21
4.1. Szubkritikus Hopf bifurkáció	24
4.2. Bifurkációs diagramm $N=40$, $M=2$	25
4.3. Bifurkációs diagramm $N=40$, $M=3$	26
4.4. Bifurkációs diagramm $N=40$, $M=4$	26
4.5. Áramlási sebesség egy perióduson $Re=5800$ -nál	27

Jelölésjegyzék

Jelölés	Mértékegység	Magyarázat
h	m	hossz
L	m	hossz
u	$\frac{m}{s}$	sebesség
u_{ref}	$\frac{m}{s}$	referencia sebesség
v	-	dimenziótlán sebesség $v = \frac{u}{u_{ref}}$
Re	-	Reynolds szám $Re = \frac{u_{ref} h}{\nu}$
\Re	-	egy komplex szám valós része
p	$\frac{N}{m^2}$	nyomás
ρ	$\frac{kg}{m^3}$	sűrűség
ν	$\frac{m^2}{s}$	viszkozitás
α	-	hullámhossz

1. fejezet

Bevezetés

Minden természeti jelenség modellezésekor vagy egy mérnöki feladat elvégzésénél fontos lépés a vizsgált folyamat matematikailag történő pontos leírása. Valamilyen időben változó jelenséget dinamikai rendszerrel tudunk modellezni. Ezért kutatások során differenciálegyenletek tulajdonságainak vizsgálatával lehet következtetéseket levonni egyes természetbeli vagy ipari folyamatokban zajló események jellegzetességeiről. Így teret kapnak a matematikai módszerek, különösképpen a stabilitásvizsgálati eszközök és a programtervezési eljárások. Áramlási feladatok esetében egy áramló folyadékrészecske helyzetét kell térben és időben minél pontosabban leírni. Ismerni kell a modellünkre teljesülő fizikai törvényeket. Zárt rendszerben történő áramlásra teljesül az anyagmegmaradás törvénye és Newton II. törvénye, ezekből vezethetők le az áramlástan egyenletei.

Az áramlástanban parciális differenciálegyenletekkel írhatóak le a megfigyelt jelenségek. A parciális differenciálegyenletek már egyszerű modelleknél is igen bonyolult szerkezetűek lehetnek, ezért gyakran nem komplexen vizsgáljuk, hanem speciális feltételek mellett egyszerűbb rendszereket keresünk, amik valamilyen tulajdonságot megőriznek. Ilyen egyszerűsítő célt szolgál a dimenziótlan mennyiségek használata is, amivel a paraméterek számát csökkenthetjük. Áramlási modellekben nagy segítséget nyújtanak a mértékegység nélküli viszonyszámok, a legismertebb közülük a Reynolds-szám. A tapasztalatok szerint csövekben lamináris áramlás $Re < 2320$ tartományban alakul ki, $Re > 2320$ esetén az áramlás turbulens, ez utóbbi esetben az áramkép igen komplex, időben kaotikus, térben fraktálszerű struktúrát mutat. Azt a Reynolds-számot, melynél a turbulens áramlás kialakul, kritikus Reynolds-számnak nevezik.

Az általunk tanulmányozott Poiseuille áramlás valamilyen végtelen hosszúságú tartományban kialakuló anyagmozgást ír le. A tartomány alakja szerint megkülönböztethetünk csőben lévő áramlást és párhuzamos síklapok között keletkező áramlást. Szállítási feladatok tervezésekor előtérbe kerülnek az ilyen típusú modellek. Mi a kétdimenziós Poiseuille áramlással foglalkozunk a dolgozat fejezeteiben. A modell főleg elméleti szempontból érdekes és a turbulens áramlások viselkedésének a megértését segíti. Numerikus eszközökkel előállítható az a Reynolds-szám, aminél elveszti a rendszer a stabilitását, valamint periodikushoz hasonló kaotikus megoldások helyzetéről is eredmények kaphatók. A Poiseuille áramlás stabilitását tanulmányozzák például a műanyag gyártás területén, ugyanis az instabilitás befolyásolja az öntött polimerek száradás utáni kinézetét, ami fontos szempont a gyártás során [5].

A dolgozatban a síkbeli Poiseuille áramlás egy modellezésének bemutatásáról olvashatunk. Több al-

goritmussal találkozunk, amiket előszeretettel használnak a numerikus analízisben, ilyen például a Galjorkin vetítés vagy a pszeudó ívhossz módszer. Láthatjuk majd, hogy a stabilitásvizsgálat hogyan történhet lineáris és nemlineáris feladaton. A rendszerünk több paramétert tartalmaz, ezért azt is megfigyeljük, hogy a stabilitás miként változik a paraméterek változása során. A Poiseuille áramlásban 5772-es Reynolds-számnál találunk egy lokális stabilitási határt, amely alatt, más paraméterek bármely értékeire lineárisan stabil az áramlás. Modellezés során felmerülő részfeladatok megoldásakor gondosan kell megválasztani azt az algoritmust, ami a saját feladatunkat leghatékonyabban elvégzi és számunkra érdekes, új eredményt szolgáltatja. A feladat végrehajtása számítógépek segítségével, numerikusan történik. Rendelkezésünkre állnak bevált és elterjedt szoftverek - ilyen például a Matlab -, melyek dinamikai rendszerek modellezését beépített eljárással megkönnyítik és az eredmények grafikus megjelenítését is támogatják.

A dolgozat a következőképpen épül fel: a 2. fejezetben bemutatjuk a modellt, majd a megoldás véges dimenziós közelítésére használt módszert. A 3. fejezetben a differenciálegyenlet lineáris stabilitásvizsgálatát és bifurkációját találjuk. Az utolsó, 4. fejezetben, a valódi nemlineáris rendszer kaotikus megoldásait jellemezzük.

2. fejezet

Matematikai modell

2.1. Áramlástan egyenletek

A Poiseuille áramlás két párhuzamos sík között kialakuló kétdimenziós áramlás. A síklapok között mindkét irányba végtelen hosszúságú, csatornaszerű tartományt tételezünk fel. Ezt a végtelen tartományt azonos hosszúságú téglalapok egymás mellé helyezésével is megkaphatjuk. A továbbiakban mi egy ilyen, L hosszúságú és $2h$ magasságú, téglalap alakú résztartományban vizsgáljuk folyadékok áramlását és ezt a téglalapot tekintjük az áramlási tartománynak (2.1 ábra). A tartomány alsó és felső fala merev. Áramlás többféleképpen létrejöhet: az egyik lehetőség, hogy a felső síklapot állandó sebességgel mozgatjuk valamelyik irányba (Couette áramlás). A mozgás másik okozója a tartományban levő nyomáskülönbség lehet, azaz a nem nulla nyomásgradiens. Ebben a dolgozatban csak olyan típusú áramlásokat vizsgálunk, ahol nem mozognak a tartomány határoló falai és csak egy állandó nyomásgradiens a mozgás okozója. Az ilyen modellt nevezzük Poiseuille áramlásnak. A fizikai modellek vizsgálatakor meg kell adnunk a vizsgált anyag tulajdonságait leíró anyagjellemzőket. A folyadék valamilyen összenyomhatatlan, viszkózus folyadék, amit a sűrűsége és a viszkozitása jellemez. Ezek az anyagjellemzők konstans mennyiségek:

$$\begin{aligned} \text{sűrűség: } \rho &= \textit{konstans} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \\ \text{viszkozitás: } \nu &= \textit{konstans} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]. \end{aligned}$$

Ismeretlen eloszlások a folyadék sebessége és a nyomás. A modellezéshez a következő jelöléseket használjuk:

$$\Omega = [0, L] \times [-h, h] \subseteq \mathbb{R}^2, \text{ tartomány}$$

$$u(t, x, y) : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2, \text{ sebesség } t \text{ időben az } (x, y) \text{ pontban}$$

$$u_x(t, x, y) : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ } x\text{-irányú sebesség } t \text{ időben az } (x, y) \text{ pontban}$$

$$u_y(t, x, y) : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ } y\text{-irányú sebesség } t \text{ időben az } (x, y) \text{ pontban}$$

$$p(t, x, y) : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ nyomás } t\text{-időben az } (x, y) \text{ pontban}$$



2.1. ábra. Áramlási tartomány

Az így létrehozott áramlásra felírható a Navier-Stokes egyenlet, és a kontinuitási vagy anyagmegmaradási egyenlet. A Navier-Stokes egyenlet a newtoni mozgásegyenlet, ami az impulzus megmaradását írja le egy áramló közegben (2.1) és (2.2). A kontinuitási egyenlet azt fejezi ki, hogy a sebesség vektormező divergenciája nulla, ami a közeg állandó sűrűségéből következik (2.3). Feltesszük, hogy $p \in C^1(\Omega)$ és $u_x, u_y \in C^1(\mathbb{R}_+) \cap C^3(\Omega)$. A Navier-Stokes egyenlet komponensenkénti alakját használva képlettel kifejezve az alábbiak, ld. [1] és [2] :

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0. \quad (2.3)$$

Poiseuille modelljében a tartomány alsó és felső határolófalánál nulla a részecskék sebessége, a merev falnak köszönhetően. Ezt az áramlástanban a tapadás törvényével magyarázzák, miszerint a folyadék sebessége szilárd fal közelében megegyezik a fal sebességével (nekiütközve felveszi a sebességét). A bal és jobboldali falakra periodikus peremfeltétel adható, ugyanis a modell x irányú periodicitást feltételez L periódussal, az x irányban végtelen tartomány miatt. Ennek megfelelően a peremfeltételek felírhatóak a sebességre:

$$u_{x,y}(t, x, h) = 0$$

$$u_{x,y}(t, x, -h) = 0 \quad (2.4)$$

$$u_{x,y}(t, 0, y) = u_{x,y}(t, L, y).$$

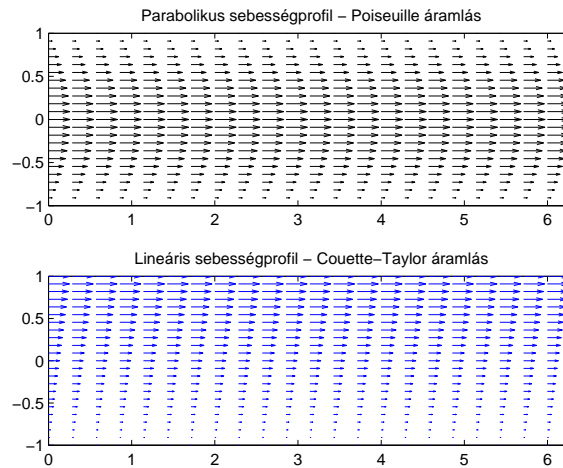
Állandósult megoldás:

A differenciálegyenlet egy időben állandó, speciális megoldása könnyen megadható. Olyan (u_x, u_y, p) megoldás legyen, amire $\frac{\partial}{\partial t}(u) = 0$ és $\frac{\partial}{\partial t}(p) = 0$. Tegyük fel, hogy $u_y = 0$, azaz a sebességvektoroknak csak a vízszintes irányú komponense lehet nem nulla. A kontinuitás miatt a sebesség csak y függvénye, a mozgásegyenletekből pedig levezethető, hogy a nyomás csak x -től függ és az x irányú sebesség y -nak legfeljebb másodfokú polinomja.

Ha feltesszük még, hogy $p(x)$ lineáris függvény, $p(0) = p_1$, $p(L) = p_2$ és $p_1 > p_2$, a $\Pi = \frac{1}{\rho\nu} \frac{p_1 - p_2}{L}$ jelölés mellett kapjuk, hogy:

$$u_{x, \text{stac}} = \frac{\Pi}{2} h^2 \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right). \quad (2.5)$$

$u_{x, \text{stac}}$ egy stacionárius megoldása a rendszernek, amely párhuzamos, azonos irányítású sebességvektorokból áll. Az ilyen áramlásokat lamináris áramlásnak nevezünk. $u_{x, \text{stac}}$ másodfokú függvény egy parabolikus sebességprofil eredményez. A 2.2 ábrán parabolikus és lineáris sebességprofilok láthatók. Az első kép az általunk tárgyalt parabolikus megoldás, aminek a maximuma $y = 0$ helyen van. A második képen olyan áramlásra jellemző sebességprofil látható, amiben a tartomány felső falánál van a maximális vízszintes irányú sebesség.



2.2. ábra. Sebességprofilok

A továbbiakban dimenziótlán változókat és mennyiségeket vezetünk be, annak érdekében, hogy a tartományt egyszerűbb alakúra normáljuk és mértékegység nélküli mennyiségek jelenjenek meg az egyenletekben.

2.2. Dimenziótlan egyenletek, áramfüggvény

Célunk egy olyan dimenziótlantítás megadása, ami a paraméterek számát csökkenti (h, L, ρ, ν, Π) és a mértékegység nélküli változókkal és mennyiségekkel az egyenletek olyan átalakítása, amiben megjelenik a Reynolds szám, az áramlást jellemző dimenziótlan paraméter. Ennek érdekében az alábbi transzformálásokat végezzük el:

$$\xi = \frac{x}{h}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad \tau = \frac{U_{ref}}{h}t, \quad v = \frac{u}{U_{ref}}$$

$$U_{ref} = \frac{\Pi}{2}h^2$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{U_{ref}}{h} \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{U_{ref}}{h} \frac{\partial v_\xi}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{U_{ref}}{h} \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{U_{ref}}{h} \frac{\partial v_\eta}{\partial \xi}.$$

Az x és y változókat a tartomány fél magasságával, h -val normáljuk. Bevezethető egy U_{ref} referencia sebesség, amivel τ dimenziótlan idő és v sebesség változókat kapjuk. A stacionárius áramlás sebessége $v_{\xi, stac} = (1 - \eta^2)$ alakot ölti új változókkal.

Definíció:

$\Psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ négyszer folytonosan differenciálható függvényt *áramfüggvénynek* nevezzük, ha teljesül hogy:

$$v_\xi = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}, \quad v_\eta = -\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}.$$

A három egyenletből álló (2.1)-(2.3) és (2.4) peremfeltételű lineáris, másodrendű parciális differenciálegyenlet-rendszer összes, időben változó megoldásait keressük. A rendszer három ismeretlent tartalmaz v_ξ -t, v_η -t és p -t. Vehetjük a mozgásegyenletek rotációját, $\frac{\partial}{\partial \eta}(2.1) - \frac{\partial}{\partial \xi}(2.2)$ -et, ekkor egy ismeretlen, a nyomás, kiesik. Ha $\omega = (\frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} - \frac{\partial v_\eta}{\partial \xi})$ jelöli a sebesség vektormező rotációját, akkor (2.6)-ban láthatjuk az így kapott örvénytranszport egyenletet, majd az áramfüggvénnyel felírt alakot. A Ψ áramfüggvény bevezetésével a kontinuitás automatikusan teljesül, ekkor egyetlen egyenletünk marad, ami egy negyedrendű parciális differenciálegyenlet, (2.7).

$$\begin{aligned} & \left(\frac{U_{ref}}{h}\right)^2 \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \omega + \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} \omega + \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} \omega + v_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \omega + v_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \omega \right] = \\ & = \nu \frac{U_{ref}}{h^3} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial^2 v_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_\xi}{\partial \eta^2} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2 v_\eta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_\eta}{\partial \eta^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\left(\frac{U_{ref}}{h}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \Delta \Psi + \left(\frac{U_{ref}}{h}\right)^2 [\Psi_\eta (\Psi_{\xi\eta\eta} + \Psi_{\xi\xi\xi}) - \Psi_\xi (\Psi_{\eta\eta\eta} + \Psi_{\eta\xi\xi})] =$$

$$\frac{\nu U_{ref}}{h^3} (\Psi_{\xi\xi\xi\xi} + 2\Psi_{\xi\xi\eta\eta} + \Psi_{\eta\eta\eta\eta})$$

Normálás után az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \Delta \Psi + \{\Delta \Psi, \Psi\} = \frac{1}{Re} \Delta^2 \Psi, \quad (2.7)$$

Definíció:

A $\Delta: C^2(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$, $\Delta(\Psi) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2}$ függvényt *Laplace operátornak* nevezzük.

Definíció:

Az f és $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények *Poisson-zárójelének* hívjuk az $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}$ függvényt.

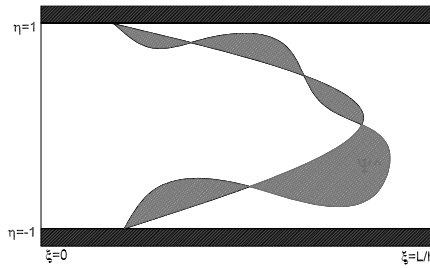
Az egyenletben szereplő Re kifejezés a Reynolds-számot jelöli. A Reynolds-szám dimenzió nélküli mennyiség, mely a tehetetlenségi erők és a viszkozus erők, vagyis a közeg belső súrlódása közötti viszonyszám:

$$Re = \frac{U_{ref} h}{\nu}.$$

Re számlálójában az áramlásra jellemző sebesség és a tartomány geometriáját jellemző hossz, nevezőjében a viszkozitás szerepelnek. Áramlástanban a folyadékok hasonlóságának a mértéke, összenyomhatatlan közegben két áramlás akkor hasonló, ha a geometriai viszonyok hasonlóak és a két áramlás Reynolds-száma azonos. A mi modellünkben a ν viszkozitás és h hossz állandó. Amikor a Reynolds-számot változtatjuk, akkor a sebesség változik, ezért dimenziótlan sebesség paraméternek mondjuk. Tapasztalatok szerint létezik egy kritikus Reynolds-szám, aminél a lamináris áramlás turbulenssé válik.

Zavarások

A továbbiakban az időben nem állandó sebességű áramlásokkal foglalkozunk. Egy nem stacionárius áramlást úgy képzelünk el, hogy egy α amplitúdójú x irányú zavarás keletkezik a rendszerben, ami kitéríti a sebességvektorokat a saját állandósul pályájukból. Ennek hatására átalakul a sebességprofil, megjelennek a függőleges irányú sebesség komponensek. A perturbáció után érdemes megfigyelni, hogy mennyire változik a laminárishoz képest az áramlásunk, illetve az idő múlásával erősödik vagy esetleg gyengül a zavarás okozta hatás az áramképben. Célszerű ezért azt vizsgálni, hogy a nem stacionárius áramlás mennyivel tér el az időben állandó, lamináris áramlástól. Az ismeretlen függvényeket két tagú összeg formájában adjuk meg, az első tag a már ismert stacionárius sebesség illetve nyomás, a második tag az ettől való eltérést jelöli. Az ilyen áramlásra úgy tekintünk, mint egy α rezonanciájú zavarás okozta áramlás, az időben nem állandó -kalapos- tag, ebből a zavarásból keletkező eltérést méri.



2.3. ábra. Eltérés a stacionárius sebességprofiltól

$$\begin{aligned}
 v_{\xi}(\tau, \xi, \eta) &= v_{\xi, stac}(\eta) + \hat{v}_{\xi}(\tau, \xi, \eta) \\
 v_{\eta}(\tau, \xi, \eta) &= \hat{v}_{\eta}(\tau, \xi, \eta) \\
 p(\tau, \xi, \eta) &= p_{stac}(\xi) + \hat{p}(\tau, \xi, \eta) \\
 \Psi(\tau, \xi, \eta) &= \Psi_{stac}(\eta) + \hat{\Psi}(\tau, \xi, \eta)
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

$v_{\xi, stac}(\eta) = (1 - \eta^2)$ a stacionárius áramlás sebességfüggvénye, $p_{stac}(\xi) = p_1 - \frac{(p_1 - p_2)h}{L}\xi$ a tartományban jelen levő lamináris áramlást keltő nyomás. Ha az így definiált ismeretlenekkel felírjuk a differenciálegyenletet, megkapjuk hogy csak a zavarásokra vonatkozó $\hat{\Psi}$ szerepel az egyenletben. A behelyettesítésénél azt használjuk ki, hogy a Laplace - operátor egy lineáris operátor, $\hat{\Psi}_{stac}$ egy harmadfokú polinom és a τ -szerinti deriváltja nulla.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \tau} \Delta \Psi &= \frac{\partial}{\partial \tau} \Delta \hat{\Psi} \\
 \{\Delta \Psi, \Psi\} &= \{\Delta \hat{\Psi}, \hat{\Psi}\} + v_{\xi, stac} \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta \hat{\Psi} - v_{\xi, stac}'' \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \xi}
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\Delta^2 \Psi = \Delta^2 \hat{\Psi}$$

A $\hat{\Psi}$ -ra vonatkozó parciális differenciálegyenlet ezek alapján a (2.10)-es egyenlet. A felső és alsó falaknál lévő peremfeltétel és az oldalsó falakra vonatkozó periodikus feltételek továbbra is fennállnak. A peremfeltételeket Ψ parciális deriváltjaival fejezzük ki, sőt a stacionárius megoldás speciális választása miatt ez a peremfeltétel kifejezhető $\hat{\Psi}$ -al.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \Delta \hat{\Psi} + \{\Delta \hat{\Psi}, \hat{\Psi}\} + v_{\xi, stac} \Delta \hat{\Psi}_{\xi} - v''_{\xi, stac} \hat{\Psi}_{\xi} &= \frac{1}{Re} \Delta^2 \hat{\Psi} \\ \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \xi}(\tau, \xi, -1) = \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \xi}(\tau, \xi, 1) = 0 \quad , \quad \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \eta}(\tau, \xi, -1) = \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \eta}(\tau, \xi, 1) &= 0 \quad (2.10) \\ \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \xi}(\tau, 0, \eta) = \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \xi}(\tau, \frac{L}{h}, \eta) \quad , \quad \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \eta}(\tau, 0, \eta) = \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \eta}(\tau, \frac{L}{h}, \eta) \end{aligned}$$

Az egyenlet egy nemlineáris parciális differenciálegyenlet, a nemlineáris tag a $\hat{\Psi}$ és $\Delta \hat{\Psi}$ Poisson zárójele, azaz a $\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \eta} \frac{\partial^3 \hat{\Psi}}{\partial \xi^3} + \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \eta} \frac{\partial^3 \hat{\Psi}}{\partial \xi \partial \eta^2} - \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \xi} \frac{\partial^3 \hat{\Psi}}{\partial \eta^3} - \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \xi} \frac{\partial^3 \hat{\Psi}}{\partial \xi^2 \partial \eta}$ kifejezés. A stacionárius sebességfüggvény és második deriváltja a dimenziótlan változókkal: $v_{\xi, stac} = (1 - \eta^2)$ és $v''_{\xi, stac} = -2$. Rendezve kapjuk az $F(\hat{\Psi}) = 0$ egyenletet, melyre a (2.10)-ben megadott peremfeltételek érvényesek:

$$F(\hat{\Psi}) := \frac{\partial}{\partial \tau} \Delta \hat{\Psi} + (1 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta \hat{\Psi} + 2 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \xi} - \frac{1}{Re} \Delta^2 \hat{\Psi} - \{\hat{\Psi}, \Delta \hat{\Psi}\} = 0. \quad (2.11)$$

$\hat{\Psi}$ értelmezési tartománya $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, $\Omega = [0, \frac{2\pi}{\alpha}] \times [-1, 1]$. A (2.11)-es differenciálegyenlet két paramétert tartalmaz: Re Reynolds-számot és α hullámhosszat, amit implicit módon, az ismeretlen függvény értelmezési tartománya határoz meg, ezt jelölve $F(\hat{\Psi}) = F(\hat{\Psi}, Re, \alpha)$.

2.3. Közelítés véges dimenzióban

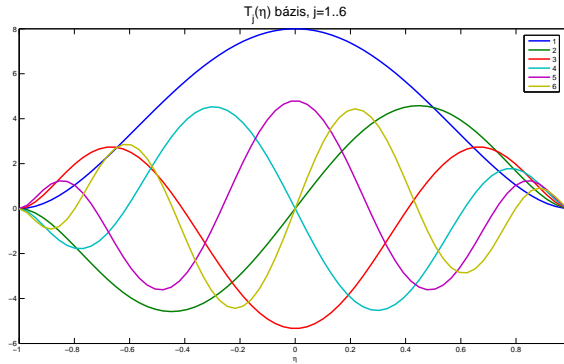
Numerikus megoldás

A differenciálegyenletet véges dimenziós közelítő módszerrel oldjuk meg. Ehhez a megoldás függvény Fourier sorát vesszük alapul, aminek egy részletösszegét vizsgáljuk.

Feltesszük, hogy a $\hat{\Psi}(\tau, \xi, \eta) \in H$ minden $(\tau, \xi, \eta) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$, ahol H egy Hilbert-tér. $\hat{\Psi}(\tau, \xi, \eta) \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}_+)$ minden rögzített $(\xi, \eta) \in \Omega$ -ra és $\hat{\Psi}(\tau, \xi, \eta) \in L^2(\Omega)$ minden $\tau \in \mathbb{R}_+$ -ra. A H Hilbert-tér tehát az $L^2(\Omega)$ tér, az Ω -n négyzetesen integrálható függvények tere. $L^2(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ az $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f \bar{g}$ skláris szorzattal Hilbert tér. H szeparábilis Hilbert-tér, azaz létezik egy megszámlálható bázisa, legyen ez $\{\varphi_{i,j}\}_{i,j=1}^{\infty}$. Tudunk választani bázist $L^2(\Omega)$ -ban úgy, hogy teljesüljenek az elemeire a $\hat{\Psi}$ -ra vonatkozó (2.10)-ben megadott peremfeltételek. A vízszintes irányú bázisfüggvények olyan trigonometrikus függvények, amik biztosítják a ξ -irányú periodicitást. Ilyen a sinus-cosinus rendszer: $\sin(m\alpha\xi)$, $\cos(m\alpha\xi)$, $\xi \in [0, \frac{2\pi}{\alpha}]$, $m = 1.. \infty$, ahol α az áramlásra vonatkozó zavaró hullámhossz paramétere. A függőleges irányú bázisfüggvényeket a \mathbf{T}_n Csebisev polinomok egy, a peremfeltételt teljesítő lineáris kombinációjaként választjuk. A j -edik Csebisev polinom definíció szerint $\mathbf{T}_j(\eta) = \cos(j \arccos(\eta))$, $\eta \in [-1, 1]$. Az ξ irányú bázisokat i -vel, az η irányúakat j -vel indexeljük.

$$\varphi_{2i-1} = \sin(i\alpha\xi) \quad \varphi_{2i} = \cos(i\alpha\xi) \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

$$T_j(\eta) := \varphi_j = -2\frac{j+1}{j}\mathbf{T}_{j+1}(\eta) + \frac{j+2}{j}\mathbf{T}_{j-1}(\eta) + \mathbf{T}_{j+3}(\eta) \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.13)$$



2.4. ábra. η irányú bázisfüggvények

Felírható a $\hat{\Psi}$ függvény Fourier sora a $\varphi_{i,j}$ bázisfüggvények segítségével. $a_{i,j}(\tau)$ és $b_{i,j}(\tau)$ az ismeretlen Fourier együtthatók a $\tau \in \mathbb{R}_+$ -ban.

$$\hat{\Psi}(\tau, \xi, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} [a_{ij}(\tau) \cos(i\alpha\xi) + b_{ij}(\tau) \sin(i\alpha\xi)] T_j(\eta) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} C_{ij} + b_{ij} S_{ij} \quad (2.14)$$

A végtelen összegnek köszönhetően ez egy formális megoldás, nem használható egy konkrét feladat megoldásának megkeresésére. A véges dimenziós approximáció lényege, hogy egy véges dimenziós altérbeli megoldással approximáljuk a végtelen dimenziós megoldást. A véges összegeket tudjuk numerikusan kezelni és ha megfelelően nagyra választjuk a közelítő tér dimenzióját a numerikus megoldás kis hibával megadja az eredeti feladat megoldását.

A Poiseuille-áramlás síkbeli modelljében ξ és η irányú bázisfüggvények szerepelnek és a vízszintes ξ - irányú bázisok kettessével jelennek meg, így a közelítő altér $2MN$ dimenziós, $i = 1, 2, \dots, M$, $j = 1, 2, \dots, N$.

$$H_{2MN} = \text{span}[\cos(i\alpha\xi)T_j(\eta), \sin(i\alpha\xi)T_j(\eta)]_{i=1}^M \text{ }_{j=1}^N, \quad H_{2MN}(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$$

Egy olyan eljárást ismertetünk, aminek segítségével egy véges dimenziós altér belüli legjobb közelítést kapunk egy lineáris algebrai egyenletrendszer megoldásaként. Parciális differenciálegyenlet esetében egy közönséges differenciálegyenlet rendszert kapunk eredményül, amiben az ismeretlenek a Fourier együtthatók és ezek τ szerinti deriváltjai szerepelnek.

Galjorkin-vetítés

A Galjorkin projekciós módszer egy olyan függvényközelítési technika, ami alkalmazható implicit módon adott függvények egy alacsonyabb dimenziós, legkisebb hibájú közelítésére, lásd: [3]. Az $f : X \rightarrow Y$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ korlátosak, ismeretlen függvény, melynek N -ed fokú közelítését adja az $\bar{f}(x) = \sum_{i=1}^N y_i \varphi_i(x)$ $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ függvény. y_i ismeretlen értékek, $\varphi_i(x)$ az első N báziselem $D(f)$ -en. Az f implicit módon definiált az $F(f) = 0$ egyenlettel. Bevezethető egy $R(y, x)$ úgynevezett reziduális függvény, ami karakterizálja a feladatot.

$$R(y, x) := F(\bar{f}(y, x)) \quad y = (y_1, \dots, y_N)$$

A reziduális értéke nulla az eredeti f megoldáson, ugyanis ez a hibafüggvény éppen a közelítés eltérését méri az eredeti megoldástól: $R = F(\bar{f}) - F(f)$.

R és a $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ közelítő tér bázisfüggvényei segítségével definiálhatunk egy skaláris szorzatot.

$$G_i = \int_X R(y, x) \varphi_i(x) dx \quad , \quad i = 1, \dots, N$$

Az R eltérés akkor lesz minimális, ha merőleges a közelítő altér minden bázisfüggvényére, ami pontosan akkor teljesül, ha $G_i = 0$ minden $i = 1..N$. Keressük az y megoldását a $G = (G_1, \dots, G_N)^T = 0$ egyenletrendszernek. Ez a megoldás megadja a legkisebb reziduálisú \bar{f} függvényt. Nagy figyelmet kell fordítani a $\phi_i(x) : X \rightarrow Y$ bázis megválasztására és az N közelítő altér dimenziójának kiválasztására. N választása többnyire kísérletezéssel történik, az eredmény minőségétől függően változtatjuk.

A Poiseuille-áramlást leíró modellben $F : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ a parciális differenciálegyenletet meghatározó függvény (differenciáloperátor). A $\hat{\Psi}(\tau, \cdot) \in L^2(\Omega)$, $\tau \in \mathbb{R}_+$ megoldás $2MN$ dimenziós altér-beli közelítő megoldása:

$$\bar{\Psi}(\tau, \xi, \eta) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [a_{ij}(\tau) \cos(i\alpha\xi) + b_{ij}(\tau) \sin(i\alpha\xi)] T_j(\eta) \quad (2.15)$$

A skaláris szorzás az $L^2(\Omega)$ tér skaláris szorzata. Elvégezve a Galjorkin vetítést mind a $2MN$ darab bázisfüggvényre egy $2MN$ darab egyenletből álló rendszert kapunk. Az egyes vetítések során az integrál felbontható a tagok integráljainak összegére (integrál linearitása) és az együtthatók kímélése után a bázisfüggvények skaláris szorzatai explicit módon kiszámíthatók. Az y együtthatók itt egy $2MN$ dimenziós vektorba rendezhetők,

$$y(\tau) = (a_{11}(\tau), b_{11}(\tau), a_{12}(\tau), b_{12}(\tau), \dots, a_{MN}(\tau), b_{MN}(\tau)) \in \mathbb{R}^{2MN} \quad , \quad \tau \in \mathbb{R}_+.$$

Ezzel az eljárással egy közönséges differenciálegyenlet rendszert kapunk ami $2MN$ darab egyenletből áll. Autonóm differenciálegyenlet, nincs benne τ - tól való függés, $\dot{y}(\tau) = f(y(\tau))$.

Induljunk ki a Poisseuille áramlás $\hat{\Psi}$ áramfüggvényéből ami tehát a stacionárius áramfüggvénytől való eltérést méri egy α hullámhosszú zavarás során. A dinamikai rendszert jellemző második paraméter a Reynolds-szám. A $\hat{\Psi}$ -re vonatkozó (2.11) parciális differenciálegyenleten tagonként végezzük el a bázisfüggvényekre vonatkozó vetítéseket. Az egyenlet tagjait megszámozzuk a könnyebb követhetőség végett. A lineáris tagok : (I) $=\frac{\partial}{\partial \tau} \Delta \hat{\Psi}$, (II) $= (1-\eta^2) \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta \hat{\Psi}$, (III) $= -2 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \xi}$ és (IV) $= \frac{1}{Re} \Delta^2 \hat{\Psi}$. A $\hat{\Psi}$ és $\Delta \hat{\Psi}$ Poisson zárójeléből adódó nemlineáris rész, négy tag összegére bontható : (V)-(VIII). Ezek a tagok a választott bázisban felírva megtalálhatók a Függelékben.

$F(\hat{\Psi})$ Galjorkin vetítését tagonként végezzük el, úgy, hogy az egyenlet tagjait skalárisan szorozzuk $\cos(m\alpha\xi)T_n(\eta)$ és $\sin(m\alpha\xi)T_n(\eta)$ alakú bázissal: (2.15). A megfelelő vetítés indexeit m -mel és n -nel jelöljük. $m = 1, 2, \dots, M$, $n = 1, 2, \dots, N$. Ekkor a Galjorkin vetítés

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \int_{-1}^1 F(\hat{\Psi}) \cos(m\alpha\xi) T_n(\eta) d\eta d\xi &= 0 \\ \int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \int_{-1}^1 F(\hat{\Psi}) \sin(m\alpha\xi) T_n(\eta) d\eta d\xi &= 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

alakot ölti. A kettős integrálok két egyváltozós integrál szorzataként számolhatók ki. Mivel F differenciáloperátor és tagonként végezzük a vetítést, ezért egy általános tagot az alább jelölt módon kezelhetünk, melyben u és v a megfelelő derivált.

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \int_{-1}^1 \cos(i\alpha\xi)^{(u)} T_j^{(v)}(\eta) \cos(m\alpha\xi) T_n(\eta) d\eta d\xi = \int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \cos(i\alpha\xi)^{(u)} \cos(m\alpha\xi) d\xi \int_{-1}^1 T_j^{(v)}(\eta) T_n(\eta) d\eta$$

A ξ - irányú bázis egy sinus - cosinus rendszer, ami egy ortogonális rendszer $L^2([0, \frac{2\pi}{\alpha}])$ -n:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \cos(i\xi\alpha) \cos(m\xi\alpha) d\xi &= \begin{cases} \frac{\pi}{\alpha} & \text{ha } i = m \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \\ \int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \sin(i\xi\alpha) \sin(m\xi\alpha) d\xi &= \begin{cases} \frac{\pi}{\alpha} & \text{ha } i = m \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \\ \int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \sin(i\xi\alpha) \cos(m\xi\alpha) d\xi &= 0, \quad \text{minden } i = 1, 2, \dots, M. \end{aligned}$$

Az η irányú vetítéseket $N \times N$ - es mátrixokba rendezzük:

$$\begin{aligned} A \in \mathbb{R}^{N \times N}, A_{i,j} &= \int_{-1}^1 T_i T_j d\eta \\ B \in \mathbb{R}^{N \times N}, B_{i,j} &= \int_{-1}^1 T_i T_j'' d\eta \end{aligned}$$

$$C \in \mathbb{R}^{N \times N}, C_{i,j} = \int_{-1}^1 (1 - \eta^2) T_i T_j d\eta$$

$$D \in \mathbb{R}^{N \times N}, D_{i,j} = \int_{-1}^1 (1 - \eta^2) T_i T_j'' d\eta$$

$$E \in \mathbb{R}^{N \times N}, E_{i,j} = \int_{-1}^1 T_i T_j^{(4)} d\eta$$

A lineáris tagokon elvégezve a $2MN$ skaláris szorzást, $2MN$ darab egyenletet kapunk, aminek az együtthatói a fenti A, B, C, D és E mátrixok elemei. Ezek ismert számok, az integrálokat szimbolikusan számoljuk ki Maple7 programmal. A vetítésekhez szükséges levezetések a Függelékben találhatóak. Első nyolc, lineáris tag vetítés után az alábbi:

$$\langle (I), C_{m,n} \rangle = \frac{\pi}{\alpha} \sum_{j=1}^N \dot{a}_{m,j}(\tau) (B_{n,j} - m^2 \alpha^2 A_{n,j})$$

$$\langle (I), S_{m,n} \rangle = \frac{\pi}{\alpha} \sum_{j=1}^N \dot{b}_{m,j}(\tau) (B_{n,j} - m^2 \alpha^2 A_{n,j})$$

$$\langle (II), C_{m,n} \rangle = -m\pi \sum_{j=1}^N b_{m,j}(\tau) [(2 + m^2 \alpha^2) C_{n,j} - D_{n,j}]$$

$$\langle (II), S_{m,n} \rangle = m\pi \sum_{j=1}^N a_{m,j}(\tau) [(2 + m^2 \alpha^2) C_{n,j} - D_{n,j}]$$

$$\langle (III), C_{m,n} \rangle = 2\pi \sum_{j=1}^N m b_{m,j}(\tau) A_{n,j}$$

$$\langle (III), S_{m,n} \rangle = -2\pi \sum_{j=1}^N m a_{m,j}(\tau) A_{n,j}$$

$$\langle (IV), C_{m,n} \rangle = \frac{\pi}{\alpha} \sum_{j=1}^N a_{m,j}(\tau) (m^4 \alpha^4 A_{n,j} - 2m^2 \alpha^2 B_{n,j} + E_{n,j})$$

$$\langle (IV), S_{m,n} \rangle = \frac{\pi}{\alpha} \sum_{j=1}^N b_{m,j}(\tau) (m^4 \alpha^4 A_{n,j} - 2m^2 \alpha^2 B_{n,j} + E_{n,j})$$

$\dot{y}(\tau)$ együtthatóit egy BAL mátrixba rendezve, $y(\tau)$ együtthatóit $JOBB$ nevű mátrixba rendezve $L = (-BAL)^{-1} * JOBB$ mátrixszal megkapjuk a

$$\dot{y}(\tau) = Ly(\tau) \tag{2.17}$$

elsőrendű lineáris közönséges differenciálegyenletrendszer. $L(Re, \alpha) \in \mathbb{C}^{2MN \times 2MN}$ skalár mátrix, elemei a bázisok skaláris szorzataiból összerakott kifejezés, ami függ az áramlás paramétereitől.

Az $F(\hat{\Psi}) = 0$ egyenlet (V)-(VIII) tagjai nemlineárisak, az áramfüggvény parciális deriváltjainak két tényezősszorzatai szerepelnek bennük. A Galjorkin vetítés elvégezhető ezekre a másodfokú tagokra is az $F(\bar{\Psi}) = 0$ közelítő megoldáson. Ezúttal a bázisfüggvények deriváltjainak két

tényező szorzatait kell skalárisan összeszorozni az egyes bázisfüggvényekkel. Ezáltal négyzetesen nő a meghatározandó skaláris szorzatok száma a lineáris esethez képest. Az első $2MN$ bázisra elvégezve a vetítést, az $F(\bar{\Psi}) = 0$ parciális differenciálegyenletből egy $2MN$ egyenletből álló elsőrendű közönséges differenciálegyenlet rendszert kapunk, amelynek a jobboldala, az ismeretlen Fourier együtthatók másodfokú függvénye, azaz egy nemlineáris rendszer:

$$\dot{y}(\tau) = Ly(\tau) + y(\tau)^T NLy(\tau). \quad (2.18)$$

$NL \in \mathbb{C}^{2MN \times 2MN}$ mint L , skalár mátrix tartalmazza a megfelelő együtthatókat. L ugyanaz, mint a lineáris esetben, NL tagjai a nemlineáris tagok vetítése során kiszámolt értékek. A bázis függvények három tényező szorzatait kell kiintegrálni Ω -n, és megfelelően rendezni egy $2MN \times 2MN$ -es mátrixban. A vetítés során felhasználjuk, a trigonometrikus függvények integráljainak alábbi tulajdonságait. Levezetéseket a Függelékben találunk.

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \sin(i\xi\alpha) \sin(k\xi\alpha) \sin(m\xi\alpha) d\xi = 0 \quad , \quad \text{minden } i, k, m \in \mathbb{N}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \sin(i\xi\alpha) \cos(k\xi\alpha) \sin(m\xi\alpha) d\xi = \begin{cases} \frac{\pi}{2\alpha} & \text{ha } m = k + i \text{ vagy } m = k - i \\ -\frac{\pi}{2\alpha} & \text{ha } m = i - k \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \cos(i\xi\alpha) \cos(k\xi\alpha) \sin(m\xi\alpha) d\xi = 0 \quad , \quad \text{minden } i, k, m \in \mathbb{N}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \cos(i\xi\alpha) \cos(k\xi\alpha) \cos(m\xi\alpha) d\xi = \begin{cases} \frac{\pi}{2\alpha} & \text{ha } m = k + i \text{ vagy } m = k - i \\ -\frac{\pi}{2\alpha} & \text{ha } m = i - k \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Az egyenleteket a Matlab program ode45 függvényével oldjuk meg, ami egy negyed-ötödrendű Runge-Kutta módszert használó beépített függvény. A lineáris rendszer stabilitásvizsgálatát a 3. fejezet, a nemlineáris vizsgálatot a 4. fejezet tartalmazza.

3. fejezet

Lineáris stabilitás

Az $F(\bar{\Psi}) = 0$ parciális differenciálegyenletből kapott $\dot{y}(\tau) = Ly(\tau)$ közönséges differenciálegyenlet lineáris stabilitásvizsgálatával foglalkozunk. A differenciálegyenlet-rendszer két paramétert tartalmaz, az α és Re paraméterértékeket. Ezek a paraméterek megőrződnek a Galjorkin vetítés során. Minden (α, Re) párra meg szeretnénk határozni, hogy a lineáris rendszer stabil vagy instabil. Ezáltal a paraméterteret két részre osztani: stabil és instabil tartományra. A két tartományt elválasztó görbe olyan paraméterértékeket tartalmaz, melyekre a rendszer dinamikája minőségileg megváltozik, stabilból instabillá válik. Az ilyen görbét bifurkációs görbének nevezzük. Nézzünk át a továbbiakban szükséges alapvető definíciókat [4] nyomán.

Definíció:

$M \subseteq \mathbb{R}^{2MN}$ tartomány. A $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ folytonosan differenciálható függvényt *dinamikai rendszernek* nevezünk, ha $\phi(0, p) = p$, minden $p \in M$ és $\phi(t + s) = \phi(t, \phi(s, p))$ minden $p \in M$ és $s, t \in \mathbb{R}$.

Ismeretes, hogy autonóm differenciálegyenlet megoldása mindig megfeleltethető egy dinamikai rendszernek.

Definíció:

Egy $p \in M$ pont *egyensúlyi pont*, ha $\phi(t, p) = p$, minden $t \in \mathbb{R}$.

Az általunk vizsgált rendszernek egy egyensúlyi pontja van, ez az $y = 0 \in \mathbb{R}^{2MN}$ pont, vagyis $\phi(t, 0) = 0$, minden $t \in \mathbb{R}$. Állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet rendszer egyensúlyi pontjai azok a $2MN$ dimenziós vektorok, amik teljesítik az $Ly = 0$ egyenletrendszert. $y = 0$ eleget tesz ennek a feltételnek és nincs másik ilyen y vektor, (2.15)-beli bázis választás miatt. A stabilitás vizsgálat úgy történik, hogy a $\dot{y} = Ly$ alakra hozott rendszer L együtthatómátrixának sajátértékeit meghatározzuk. A lineáris rendszerek megoldásai ugyanis $y(\tau) = ce^{\lambda\tau}$ alakúak, ahol a λ az együtthatómátrix sajátértéke. Annak eldöntése hogy a megoldás tart-e a $\underline{y} = \underline{0}$ egyetlen stacionárius megoldáshoz miközben τ tart végtelenbe a λ sajátértékektől függ. $\dot{y} = Ly$ rendszer stabil, ha $\max(\Re(\lambda)) < 0$, $\lambda \in \text{eig}(L)$ ahol $\text{eig}(L)$ az L sajátértékeinek halmazát jelöli és instabil ha létezik pozitív valóságrészű sajátértéke az együtthatómátrixnak, azaz létezik λ , $\Re(\lambda) > 0$. A vizsgált paramétertartomány az $(\alpha, Re) \in [0.6, 1.2] \times [0, 10000]$. A differenciálegyenlet rendszer együtthatómátrixa az (α, Re) paraméterektől függ. Arra nincs lehetőség hogy minden egyes paraméterpárra megvizsgáljuk a sajátértékek eloszlását, mert ez nagy időigényű feladat és sok felesleges számítást hajtanánk végre, ugyanis ismert, hogy a differenciálegyenlet megoldása folytonosan függ

a bemenő adatoktól, így a jobboldaltól is. Olyan numerikus módszert mutatunk, amivel gyorsan megtalálható a kritikus görbe. Ezt úgy érjük el, hogy a paraméterter csak azon pontjait keressük meg, melyekre az együtthatómátrix legnagyobb sajátértéke nulla. Rögzített α paraméterre a Newton-Raphson módszerrel keressük megfelelő Reynolds számot. Ezt követően egy egyszerű görbekövető prediktor-korrektor módszerrel, az úgynevezett Pszeudó ívhossz (Pseudo arclength) módszerrel lekövetjük a kritikus görbét a 2 dimenziós paraméter tartományban.

3.1. Newton-Raphson módszer

A Newton-Raphson módszerrel függvények zérushelyét kereshetjük meg. Adott egy $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ függvény és tegyük fel hogy $f'(x) \neq 0$ ha $x \in [a, b]$. Az x_0 kezdőpontból indulva az $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $n = 1, 2, \dots$ iteráció konvergál f zérushelyéhez, azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$, $f(x^*) = 0$. A módszer úgy származtatható, hogy ha már előállítottuk az x_1, \dots, x_n értékeket, akkor az x_n helyen vesszük az f függvény elsőrendű Taylor közelítést és annak a zérushelyét keressük meg. Szokás a módszert érintőmódszernek is nevezni.

$$f(x) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

$$f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0 \Rightarrow x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

A Newton-Raphson iterációra teljesül, hogy $|x_{n+1} - x^*| \leq c|x_n - x^*|^2$ valamely $c \geq \varepsilon > 0$. A másodrendű konvergencia egy ún. lokális konvergencia, azaz ha x_0 kezdőpont az x^* megoldás bizonyos környezetében van, akkor teljesül. $f \in C^2[a, b]$ és $f'(x) \neq 0$ esetén explicit megadható x^* egy ilyen környezete.

A mi feladatunkban első lépésként rögzített α paraméterértékekre keressük meg azt a Re Reynolds számot, amelyre az

$$f(\alpha, Re) = \max(\Re(\lambda)) = 0, \lambda \in \text{eig}(L) \tag{3.1}$$

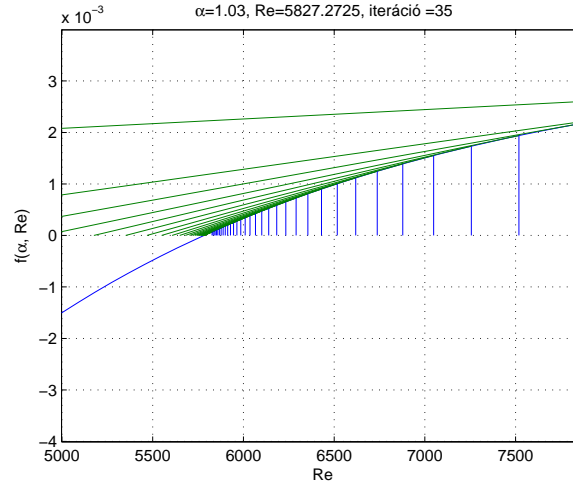
egyenlet teljesül. Minden iterációban két függvénykiértékelés szükséges: $f(Re_n)$ és $f(Re_n + h)$, $h = 1$ a $Re \in [1000, 10000]$ intervallumon.

$$\frac{\partial f}{\partial Re}(Re_n) \approx \frac{f(Re_n + h) - f(Re_n)}{h},$$

a deriváltakat elsőrendű osztott differenciákkal számoljuk. Az iteráció $Re_0 = 10000$ -ból indul. Ezen a helyen pozitív a függvényérték és az iteráció során egy monoton csökkenő sorozatot kapunk. Célszerű bevezetni egy relaxáló konstansot, mert azt tapasztaljuk, hogy a függvény meredeksége igen kicsi magas Re értékeknél és az érintők zérushelyei távol lehetnek a függvény zérushelyétől.

$$Re_{n+1} := cRe_{n+1} + (1 - c)Re_n \quad \text{Relax} = c \in (0, 1)$$

korrekcióval gyorsabb konvergenciát biztosítunk. Ez a tulajdonság más szóval azt jelenti, hogy a rendszert meghatározó együtthatómátrix legnagyobb valósrésű sajátértékei közel vannak 0-hoz és kevéssel térnek el egymástól nagy Reynolds számokra. A 3.1 ábra az $\alpha = 1.03$ nál történő kritikus Reynolds-szám keresését illusztrálja. 8000 körüli, nagy Reynolds számról indul a keresés, ahol pozitív a függvényérték. Leolvasható, hogy itt lineárisan instabil a differenciálegyenlet $y=0$ egyensúlyi pontja.



3.1. ábra. Newton-Raphson módszer $\alpha = 1.03$ paraméterre

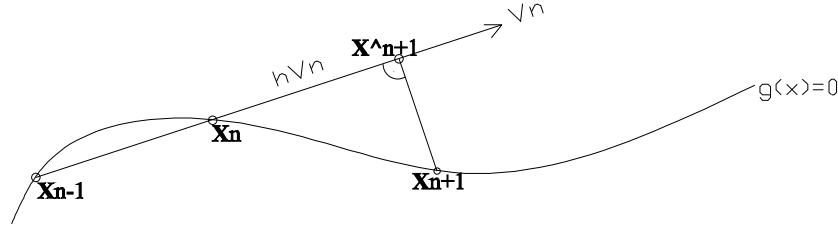
Ezzel a módszerrel rövid idő alatt találunk rögzített α -ra az $f(\alpha, Re) = \max(\Reig(L))$ függvénynek egy zérushelyét. Ez a zérushely olyan Re_{krit} szám, hogy $Re < Re_{krit}$ paraméterekre stabil, $Re > Re_{krit}$ értékekre instabil a rendszer.

A teljes paramétertartomány megvizsgálása a célunk. Azt tapasztaljuk, hogy a módszerünk nem minden (α, Re) párra működik, emellett semmi sem garantálja, hogy nem létezik olyan $f(., Re)$ vagy $f(\alpha, .)$ függvény, aminek nincs zérushelye vagy egynél több zérushelye van. Ezek az esetek megnehezítik vagy lehetetlenné tehetik a Newton-Raphson módszer alkalmazását. Minket az összes kritikus érték megkeresése vezényel, és a feltevés, hogy $f(., Re) \neq 0$ elég kicsi Re áramlási sebesség esetén helyénvaló, illetve létezhet $Re : f(., Re) = 0$ α_1 és α_2 esetén is teljesülhet ugyanis fizikailag megmagyarázható az a jelenség, hogy minden $[\alpha_1, \alpha_2]$ amplitúdójú zavarás a rendszert instabillá teszi, de az α_1 -nél kisebb vagy a túl nagy, α_2 -nél magasabb amplitúdójú zavarásokra érzéketlen a rendszer, olyan értelemben, hogy az áramlás visszanyeri a stacionárius áramlási profilt egy idő után.

3.2. Pszeudó ívhossz módszer

Ezen nehézségek megoldását segíti a pszeudó ívhossz módszer, amellyel egy felület szintalizát lehet meghatározni, így speciálisan az $f(\alpha, Re)$ kétváltozós valós függvény zérushelyei is megkereshetőek vele. A módszer ötlete, hogy egyszerűen lineárisan becsüljük a görbe következő pontját, így mindössze két korábban kapott pont és egy megfelelő irány szükséges a jósláshoz.

Egy (α_0, Re_0) és egy (α_1, Re_1) egymáshoz elég közel levő, $f(\alpha_i, Re_i) = 0$ $i = 0, 1$ kezdőpontokat megadva, minden lépésben egy az utolsótól rögzített távolságra lévő zérushelyet találunk. Ezzel a technikával a bifurkációs görbe tetszőleges közelítése megkapható a grafikon töröttvonalakkal való közelítésével.



3.2. ábra. Pszeudó ívhossz módszer

Keressünk egy $x_0 = (\alpha_0, Re_0)$ és egy $x_1 = (\alpha_1, Re_1)$ gyököt lefeljebb h távolságra a síkon a Newton-Rapson módszerrel, itt az α lehet ugyanaz.

Az n -edik lépésben egy h hosszú lépést tegyünk a $v_n = x_n - x_{n-1}$ előző két pont által meghatározott irányba és legyen a v_n -ek hossza 1. $\hat{x}_{n+1} = x_n + hv_n$ a becsült új pont. Ezután \hat{x}_{n+1} -ből keresünk egy hozzá közel levő és az $\{x : f(x) = 0\}$ vonalon levő pontot, úgy hogy merőlegest állítunk v_n -re és elmetszük a görbét. Így kapjuk $x_{n+1} = (\alpha_{n+1}, Re_{n+1})$ -et. $\langle x_{n+1} - \hat{x}_{n+1}, v_n \rangle = 0$ egyenletet átalakítjuk, a skaláris szorzás tulajdonságait felhasználva kapjuk a $\langle x_{n+1} - x_n, v_n \rangle = h$ egyenletet x_{n+1} -re. Ezzel definiálhatunk egy $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ függvényt:

$$\begin{aligned} G_1 &= f(x_{n+1}) \\ G_2 &= \langle x_{n+1} - x_n, v_n \rangle - h. \end{aligned}$$

$G(x_{n+1}) = 0$ egy kétdimenziós nemlineáris egyenletrendszer eredményez. Ezt az egyenletrendszert meg tudjuk oldani a Newton-Raphson módszer többdimenziós változatával. G Jacobi mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial G_1}{\partial Re} \\ \frac{\partial G_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial G_2}{\partial Re} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \alpha} & \frac{\partial f}{\partial Re} \\ v(1) & v(2) \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

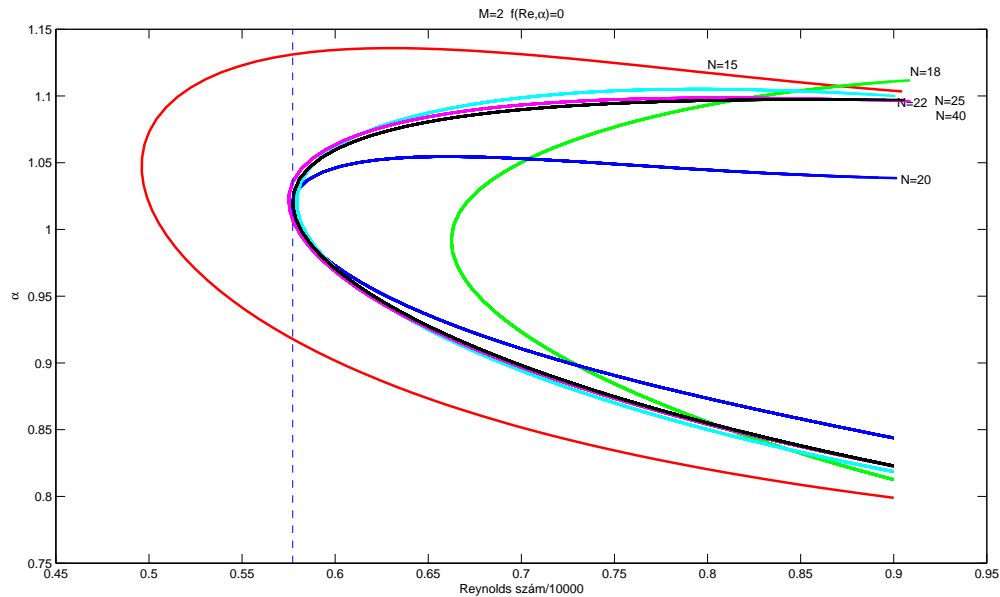
Az

$$x^{l+1} = x^l - J^{-1}f(x^l) \quad l = 0, 1, \dots, \text{maxit}$$

iterációt elvégezzük, $x^0 = x_n$ választással és ha $\det(J) \neq 0$, akkor konvergens sorozatot kapunk. $x_{n+1} := x^{maxit}$ érték a pszeudó ívhossz módszer következő iteráltja, amire $f(x_{n+1}) = 0$ teljesül. A közelítés nagysága:

A vizsgálat fontos része, hogy mekkorák legyenek a Galjorkin vetítésnél megválasztott M és N számok. Más szóval hány dimenziós legyen a $\hat{\Psi}$ közelítése az egyes koordinátafüggvényeken? Ennek eldöntésére több szimulációt végezzünk, és az eredményeket összevetjük egymással. Azt tapasztaljuk, hogy N -re, az η irányú bázisfüggvények számára érzékenyebb a közelítés, míg M -re, a ξ irányú bázisok számára kevésbé. Nyilván minél magasabbak ezek a számok annál pontosabb eredményeket kapunk, azonban a számítási idő erősen növekszik. $N = 40$ -ig és $M = 20$ -ig vizsgáltuk a lineáris rendszert. Azt látjuk, hogy $N = 25$ fölött már nem változik az eredmény. $M = 2$ választás elég, nagyobb M -ekre ugyanolyan eredmények születnek.

A pszeudó ívhossz módszerrel előállítható a $(Re, \alpha) = [0, 10000] \times [0.6, 1.2]$ paramétertartomány kritikus görbéje. Így minden (Re, α) párra megállapítható, hogy az $\dot{\phi} = L\phi$ lineáris rendszer stabil vagy instabil. A görbe bal oldalán helyezkednek el azok az értékek, amikre az áramlás stabil és a jobb oldalán amikre instabil megoldásokat kapunk. A keresés a 3.3 ábrán látható tartomány jobb alsó sarkából indul egy 1-nél kisebb α -ra és 9000 körüli Re -re, ezért a görbén innen haladva értjük a bal és jobb oldalt. Megfigyelhető, hogy a legkisebb Reynolds szám, amire elveszti a rendszer stabilitását $Re = 5772$, ami $\alpha = 1.0205$ -nél keletezik a Poisseuille áramlásban. Ez egy univerzális küszöb, mert minden α paraméterérték esetén lineárisan stabil a rendszer ennél kisebb Reynolds számra.



3.3. ábra. Kritikus görbék különböző dimenziós numerikus közelítésekre

4. fejezet

Nemlineáris vizsgálat

A dolgozat utolsó részében a két dimenziós Poiseuille áramlás nemtriviális megoldásait vizsgáljuk. Kísérletek mutatják számunkra, hogy csatornaszerű tartományban a nagy sebességű áramlások elvesztik a lamináris áramvonalakat és örvények keletkeznek a folyadékban. Víz megszínezésével már szabad szemmel is tapasztalatokat nyerhetünk. Ezt a jelenséget már a 19. század közepétől vizsgálják tudományos eszközökkel. A különbözően örvénylő és rendszertelen áramlások matematikai leírása mindmáig nehéz feladat. Egyes tulajdonságait jól tudjuk mérni, megfigyelni, azonban maga a természeti jelenség sem ismert teljesen, ezért a matematikai módszerek sem képesek turbulens áramlások viselkedésének precíz leírására. A Poiseuille áramlás trajektóriái kaotikus pályák a fázistéren. Ez kézenfekvő következménye az örvénylő folyadékáramlásnak. Nemtriviális kaotikus megoldások jellemzők a Poiseuille áramlásra mint nemlineáris egyenletre. Ezen megoldások úgy viselkednek mint a periodikus megoldások, mert nem tartanak végtelenhez mint a lineáris rendszer instabil megoldásai, hanem valamilyen módon stabilizálódnak, ezért úgy tekintünk rájuk, mintha periodikus megoldások volnának. Most olyan numerikus módszereket alkalmazunk, melyek rögzített paraméter értékekre megmutatják, hogy van-e periodikus megoldása a rendszernek. Számunkra érdekes kérdések, hogy hány periodikus megoldás van? Ezek a periodikus megoldások stabil vagy instabil periodikus pályák a fázistéren? Mekkora a periódusidő, azaz mennyi idő telik el, míg egy megoldás visszatér önmagába. Definiáljuk egy fázistérbeli pont pályáját, a megoldás stabilitást és a periodikus pályát, ismét [4] alapján.

Definíció: A $p \in M$ pont *pályája* a $\{\phi(t, p) : t \in \mathbb{R}\}$ görbe. A fázistér pontjai között ekvivalencia reláció vezethető be: két pont M -ben ekvivalens, ha pályájuk megegyezik. Ezért a dinamikai rendszer pályái egy ekvivalencia reláció ekvivalencia osztályai, és ezek a görbék nem metszik egymást a fázistéren.

Definíció: Egy $p \in M$ pont *periodikus pont*, ha $\phi(t + T, p) = \phi(t, p)$, minden $t \in \mathbb{R}$. T -t periódusidőnek hívjuk.

Definíció: A dinamikai rendszer egy $t \rightarrow \phi(t, p)$ megoldását *stabilisnak* nevezzük, ha minden $\epsilon > 0$ számhoz létezik $\delta > 0$, hogy $|p - q| < \delta$ estén $|\phi(t, p) - \phi(t, q)| < \epsilon$ teljesül $t \geq 0$ esetén. A megoldás instabil, ha nem stabilis.

Vizsgálatunk során a rendszer hosszútávú viselkedéseit, vagy más néven aszimptotikus viselkedését kutatjuk. Egy megoldás aszimptotikusan stabilis, ha stabilis és $|\phi(t, q) - \phi(t, p)| \rightarrow 0$, ha $t \rightarrow \infty$. Periodikus pályák keresésekor fontos, hogy hosszú ideig szimuláljunk, ugyanis hagyni kell hogy a

trajektória rátaláljon a periodikus pályára. Kezdeti fáziskép változatos lehet amíg nem áll be a pálya. Ennek a kezdeti tranziensnek a hossza nagyban függ a rendszer numerikus közelítésének mértékétől és attól, hogy milyen kezdeti feltétellel indítjuk a megoldást. Amikor a szimulálás során elérünk egy periodikus pályát arról kell meggyőződnünk, hogy a megoldás ezen a pályán marad-e. Számítógépes szimulációval oly módon keressük a periodikus megoldásokat, hogy a megoldás pályáját követve a transzverzális metszetek origótól, mint egyetlen egyensúlyi ponttól való távolságait rögzítjük a fázistéren és ezeket összegyűjtve egy t_{max} ideig, megfigyeljük hogy milyen messze helyezkednek el egymástól. Amennyiben ezek a metszetek ugyanolyan távol vannak az egyensúlyi ponttól egy idő után, azt mondjuk, hogy találtunk egy stabil periodikus pályát.

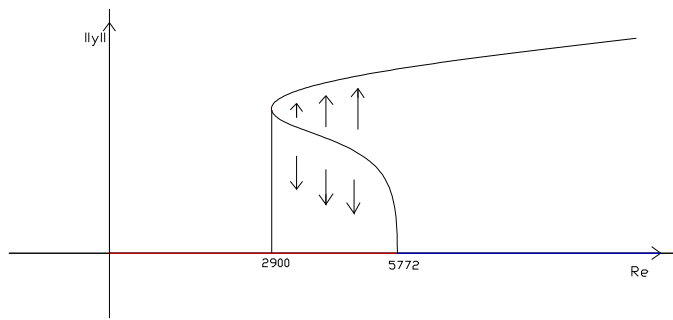
Definíció:

Egy $\chi \subset M$ szakaszt *transzverzális metszetnek* nevezünk, ha $\langle \nu, \partial_t \phi(0, p) \rangle \neq 0$ minden $p \in \chi$, ahol ν a χ normálvektora. Ez szavakkal kifejezve olyan alacsonyabb dimenziós szakasz a fázistérben, amit nem érint a megoldás pályája hanem átmetszi.

A vizsgálat célja, hogy a Reynolds számot, mint paraméterértéket folytonosan változtatva figyeljük a periodikus pályák megjelenésének helyét és elhelyezkedését. Azt a jelenséget, amikor periodikus pálya vagy periodikus pályák keletkeznek a paraméter változtatása során Hopf bifurkációnak hívjuk. Olyan kritikus paraméter értékeknél kapunk ilyen bifurkációt, ahol tisztán képzetes sajátértékek keletkeznek. A Hopf bifurkáció szuperkritikus, ha egy stabil egyensúlyi pont elveszti stabilitását, instabillá válik és egy stabil határciklus keletkezik körülötte. Szubkritikus a Hopf bifurkáció, ha a stabil egyensúlyi pont körül kettő periodikus pálya jön létre, egy instabil és egy stabil határciklus. Mi rögzített α paraméterértékre változtatjuk a *Re* Reynolds számot és lejegyezzük a periodikus pályák transzverzális metszeteinek helyeit.

Kiindulási alapunk ismét a (2.11)-ben leírt $F(\hat{\Psi}) = 0$ parciális differenciálegyenlet. A Galjorkin vetítéssel megkapjuk a neki megfelelő $\dot{y}(\tau) = Ly(\tau) + y(\tau)^T N Ly(\tau)$ nemlineáris jobboldalú közönséges differenciálegyenlet-rendszert. A vetítés előkészítésekor a bázist úgy választottuk, hogy az áramlást leíró peremfeltételek érvényben maradjanak. Ezt követően megválasztjuk a közelítő alter dimenzióját M és N értékeket. Munkánk során $M = 2, 3, 4$ és $N = 40$ választással dolgozunk. M a vízszintes irányú bázisfüggvények, a sinus-cosinus rendszer elemszáma, így $M = 2$ esetén 4 bázisfüggvény szerepel. Elegendő ilyen kevés dimenziót választani, ugyanis az $x - \xi$ irányú bázisok feladata a periodicitás biztosítása, így már egyetlen sinus-cosinus pár is elvégzi ezt a feladatot. Amekkorára választjuk M értékét, annyi egyenlő részre osztjuk vízszintes irányban Ω tartományt. $M = 1$ eset a nemlineáris rendszernél érdektelen, ugyanis a Galjorkin vetítés esetén az összes skaláris szorzat értéke nulla, melyekben a szorzattagokat vetítjük az alterre. A vetítés $M = 1$ esetben tehát visszaadja a lineáris rendszert, így erre a vizsgálatra nem alkalmas ez a függvényközelítő technika ebben a konkrét feladatban. Lényegesebb N értéke, az $y - \eta$ irányú bázisok elemszáma. N növelésével érhető el a megoldásfüggvény egyre pontosabb közelítése. Felső korlátot többnyire a számítógépek kapacitása jelent. A Csebisev polinomokból készített rendszer skaláris szorzatait N^3 nagyságrendű integrálás elvégzésével lehet megkapni, ezeket az integrálokat szimbolikusan számoljuk ki. A bázis szám növelésével a differenciálegyenletet megoldó program futásideje is lényegesen megnő. Ilyen szempontok mellett kell választanunk egy optimális báziselemszámot.

Adott a rögzített dimenziós közönséges differenciálegyenlet-rendszer. A megoldás meghatározása ismét a `Matlab` program `ode45` parancsával megy végbe. Kell adnunk egy y_0 kezdeti értékeket



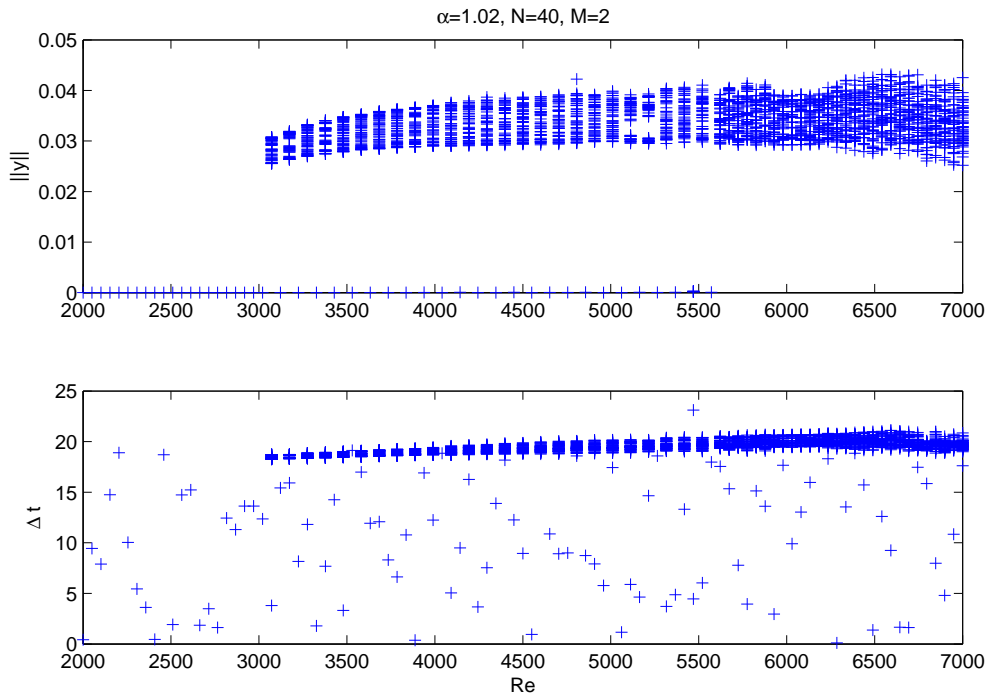
4.1. ábra. Szubkritikus Hopf bifurkáció

tartalmazó $2MN$ dimenziós vektort és egy t_{max} számot, ami a maximális időt jelöli, ameddig kiintegráljuk a megoldást. További lehetőségeink vannak a megoldás vizsgálatára. Az odeset opciókkal transzverzális metszeteket keresünk. Definiálhatunk eseményeket, melyek előfordulási helyeit rögzítjük. Így adott kezdeti értékhez tartozó és az eseményt teljesítő megoldás helyét és idejét feljegyezzük. Az esemény itt az általunk definiált transzverzális metszet. Ennek Matlab kódja az alábbi.

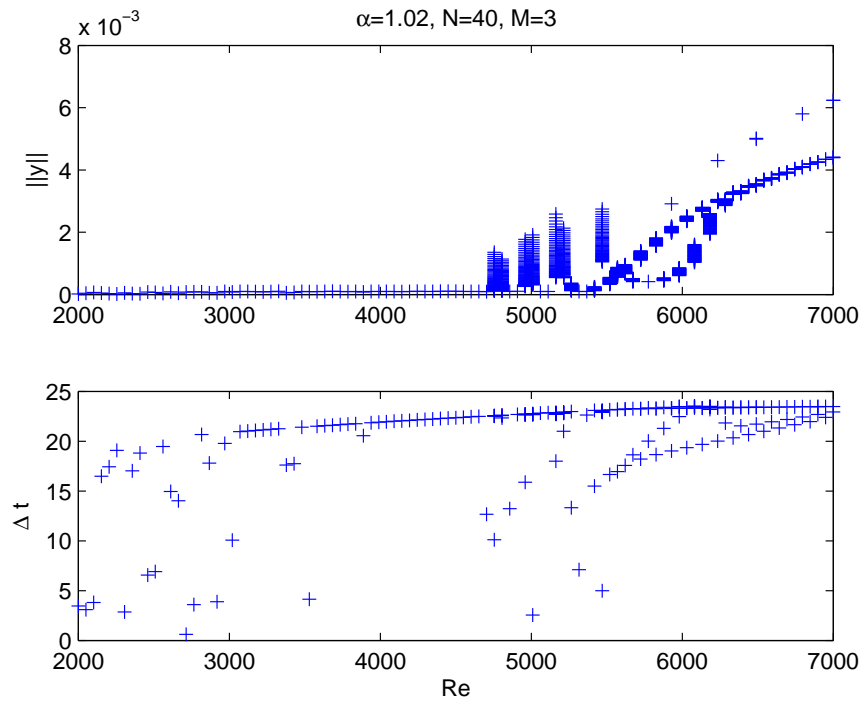
```
options=odeset('events',@metszet)
function [val,ter,dir]=metszet(t,y)
    val=y(1)
    ter=0
    dir=-1
```

Megadjuk azt a hipersíkot, amelyre vonatkozó átmetszéseket vizsgáljuk, itt $val=y(1)$ azt jelenti, hogy a megoldás függvény első koordinátájának zérushelyeit keressük. A ter bináris változóval be tudjuk állítani, hogy megálljon-e a keresés az első pont megtalálásakor. dir értékét 1-re állítva az y függvény növekvő értékeit gyűjtjük, -1 esetén a csökkenő értékeit, 0 esetén mindkettőt. Az output öt tömböt tartalmaz, a szokásos t időpontok és y megoldás mellett megkapjuk a TE események időpontjait, YE események koordinátáit, és IE események indexeit. Különböző Re és rögzített α paraméterekre vizsgáljuk a rendszer periodikus megoldásait. Ekkor a nemlineáris differenciálegyenlet $\dot{y}(\tau) = f(y(\tau), Re)$ alakú, a jobboldal függ a Reynolds számtól. Az $y = 0$ pont egy $\varepsilon = 10^{-3}$ sugarú környezetében véletlenszerűen választott kezdeti értékkel indítjuk a megoldást. Kezdetben $Re = 2000$ értékre számolunk, minden következő lépésben kettővel növeljük a Re paraméter értékét egészen $Re = 7000$ -ig. A transzverzális metszetek euklideszi normáját kiszámoljuk, amivel megkapjuk, hogy milyen távol van a metszet az $y = 0$ ponttól a fázistérben. Amennyiben a transzverzális metszetek egy ponthoz konvergálnak, megállapíthatjuk, hogy periodikus pályát találtunk. Speciálisan a metszetek euklideszi normája éppen a periodikus pálya sugara, hiszen az $y = 0$ egyensúlyi ponttól vett távolságot kapjuk. Azt látjuk, hogy $Re < 5572$ esetén nincs periodikus pálya, a metszetesemények normája kisebb mint 10^{-6} . $Re = 5572$ -nél, ahol a lineáris rendszer elveszti a stabilitását, egy stabil határciklus keletkezik 0.035 távolságra az origótól. Ezen a paraméter értéken lényegesen megváltozik a rendszer dinamikája. Tovább növelve a Reynolds számot, megmarad a stabil határciklus, a normája nem változik lényegesen. Elérve a legnagyobb vizsgált Reynolds számot, elvégezzük ugyanezt a kísérletet úgy, hogy csökkentjük a

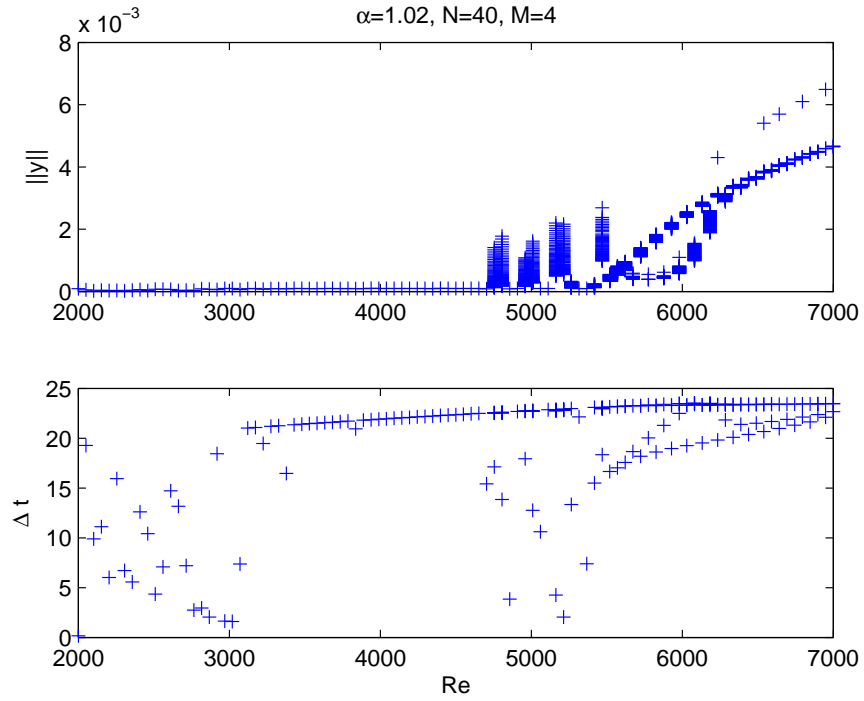
paraméter értékét iterációnként. A kezdeti értéknek mindig a korábban megkapott megoldás utolsó meghatározott pontját választjuk. Ezzel érhető el, hogy a periodikus pálya környezetéből indítsunk megoldásokat. A paramétert csökkentve azt látjuk, hogy 5572 nél kisebb Reynolds számra nem szűnik meg a határciklus. Egészen $Re \approx 2900$ -ig jelen van egy 0.03 körüli sugarú határciklus, amihez a megoldás közeledik. $Re = 2900$ -nál kisebb értékekre ez eltűnik és újra a 0 ponthoz tartanak a megoldások. $Re \in [2900, 5772]$ értékekre van egy stabil egyensúlyi pontunk, és körülötte egy stabil határciklus. Az egyensúlyi pont környezetéből indított megoldások az egyensúlyi ponthoz tartanak, a stabil határciklus környezetéből indított megoldások pedig rácsavarodnak a stabil határciklusra. Az ilyen paramétertartományt bistabil tartománynak nevezzük. Létezik egy instabil határciklus a két stabil határhalmaz között a fázistéren. Az instabil perióduson belül levő pontból induló trajektóriák az egyensúlyi ponthoz tartanak, az instabil perióduson kívülről indított megoldások pedig a stabil határciklushoz tartanak. Az instabil periódus megkeresése nem lehetséges vagy nagyon költséges olyan numerikus módszerrel, amiben a differenciálegyenlet megoldását t növelésével határozzuk meg. Poiseuille áramlás dinamikai rendszerében tehát szubkritikus Hopf bifurkáció van jelen a $Re \approx 2900$ paraméternél, amikor $\alpha = 1.0205$ az a rögzített szignifikáns zavaró paraméterérték, amelyiknél a kritikus $Re = 5772$ -nél történő stabilitásvesztés bekövetkezik a lineáris rendszernél. A (4.2), (4.3) és (4.4)-es ábrákon láthatjuk a szimuláció eredményeit $N = 40$ és $M = 2, 3, 4$ esetekben. Az első kép minden esetben a megoldás normáját jelöli különböző Reynolds számokra, a második kép pedig azokat a "periódusidőket", amik két átmetszés között feljegyeztünk. A (4.5)-ös kép a sebességvektor normáját mutatja az áramlási tartományban egy periódus között.



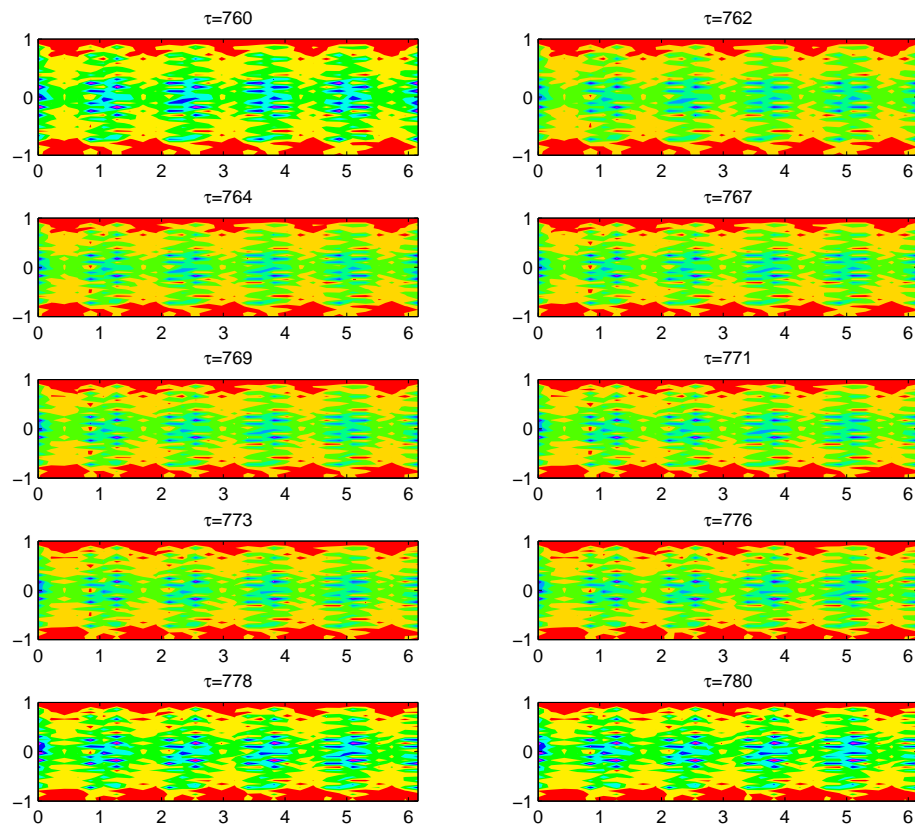
4.2. ábra. Bifurkációs diagramm $N=40, M=2$



4.3. ábra. Bifurkációs diagramm $N=40, M=3$



4.4. ábra. Bifurkációs diagramm $N=40, M=4$



4.5. ábra. Áramlási sebesség egy perióduson $Re=5800$ -nál

5. fejezet

Utószó

A dolgozat elkészítésének a célja az volt, hogy egy feladaton keresztül bemutassuk miként lehet egy áramlási jelenséget modellezni és a kapott dinamikai rendszer tulajdonságait hogyan tudjuk számítógépes módszerekkel megvizsgálni. A Poiseuille áramlás parciális differenciálegyenlettel írható le. Két dimenziós esetben az egyenlet két paramétert tartalmaz, az egyik a Reynolds szám, ami a folyadék állandó viszkozitása mellett és azon feltétel mellett, hogy a tartomány geometriáját jellemző mennyiség fix szám, megfeleltethető a sebesség dimenziótlan mérőszámának. A második paraméter a periodikus áramlást jellemző α hullámhossz.

Áramlások tanulmányozásakor az egy érdekes kérdés, hogy egy állandó és lamináris helyzettől elváló áramlás a későbbiekben visszatér-e önmagába, vagy egy új, esetleg szabályos de nem lamináris áramlás marad. Innen származik az ötlet, hogy egy állandósult megoldástól való eltérést mérjünk, és ennek az instabilitását tekintsük turbulens jelenségnek.

Modellalkotásnál azt az utat választottuk, hogy a megoldás függvényt végtelen sor alakban keressük. A megoldás alakjának megválasztása sarkalatos pontja a feladatnak. Az általunk használt függvény a Csebisev polinomok és a trigonometrikus függvények szorzataiból készült, hogy a periodicitást biztosítani tudjuk. Az α paramétert így a megoldás értelmezési tartománya tartalmazza implicit módon. Olyan véges dimenziós közelítő technikát használtunk, aminek eredményeként egy közönséges differenciálegyenlet rendszert kaptunk. Ez a módszer a Galjorkin vetítés, aminek az a jó tulajdonsága, hogy olyan véges altérbeli közelítő megoldást ad, aminek a hibája merőleges az altérre. A KDE rendszer lineáris stabilitását klasszikus módon vizsgáltuk a sajátértékek módszerével, nemlineáris esetben pedig a megoldás trajektóriájának nyomon követésével kerestünk kaotikus megoldásokat. A közelítés jóságát természetesen korlátozza a számítógépek kapacitása és gyorsasága, ugyanis a vetítésnél választott altér dimenziója szabja meg a KDE rendszer méretét. Magának az együtthatóknak a kiszámolása $O(N^2)$ a lineáris és $O(N^3)$ darab integrálás a nemlineáris esetben. Láthattuk, hogyan valósítható meg a paramétertartomány felosztása stabilitási szempontból. Pszeudó ívhossz módszerrel a bifurkációs görbe meghatározása $N = 40$ méretű közelítésre is gyorsan előállítható a lineáris rendszernél. Ennek segítségével előállítható a $(Re, \alpha) = (5772, 1.02)$ ismert stabilitási határ a paraméterterben. Nemlineáris esetben a transzverzális metszetek figyelésével kaptunk jellemzést a periodikus pályákról. Egy szuperkritikus Hopf bifurkációt találtunk aminek bistabil tartományát körülbelül 2950 és 5772 közötti Reynolds számokra becsültük. Sajnos a ξ irányú bázisfüggvények számának (M) növelésével a bifurkációs diagramm

drasztikusan megváltozott, ami további vizsgálatokat igényel.

Az eredmények előállítása a Matlab programmal történt, amiben nagy segítséget nyújtott az ötleteivel és javaslataival témavezetőm, Hős Csaba, amiért ezúton is szeretnék köszönetet mondani. A Poiseuille áramlás kutatása persze nem ér véget itt, lehet vizsgálni és folynak is kísérletek három dimenziós áramlás numerikus előállításáról. Keresni lehet például másik bázist amiben előállítjuk a megoldást, tovább tesztelhető a számítások futamidejei különböző közelítésekre vagy az együtthatómátrix más előállításaira.

Budapest, 2010. január

Maksó Róbert

Irodalomjegyzék

- [1] Lajos Tamás: Az áramlástan alapjai, Műegyetem kiadó 2008.
- [2] Stoyan Gisbert - Takó Galina: Numerikus módszerek 3. Typotex kiadó 2004.
- [3] Burkhard Heer-Alfred Maussner: Projection methods and the curse of dimensionality 2004.
- [4] Simon Péter : Közönséges differenciálegyenletek, ELTE előadásjegyzet 2005.
- [5] Grillet-Bogaerds-Peters-Baaijens-Bulters : Numerical analysis of flow mark surface defects in injection molding flow, 2002.

Függelék

A vizsgált egyenlet:

$$F(\hat{\Psi}) := \frac{\partial}{\partial \tau} \Delta \hat{\Psi} + (1 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta \hat{\Psi} - 2 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \xi} - \frac{1}{Re} \Delta^2 \hat{\Psi} - \{\hat{\Psi}, \Delta \hat{\Psi}\} = 0$$

A perturbált áramfüggvény a választott bázisban:

$$\hat{\Psi}(\tau, \xi, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} [a_{ij}(\tau) \cos(i\alpha\xi) + b_{ij}(\tau) \sin(i\alpha\xi)] L_j(\eta) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} C_{ij} + b_{ij} S_{ij}$$

$$C_{ij} = \cos(i\alpha\xi) L_j(\eta), \quad S_{ij} = \sin(i\alpha\xi) L_j(\eta)$$

$$\sin_i := \sin(i\alpha\xi), \quad \cos_i := \cos(i\alpha\xi), \quad L_j := L_j(\eta)$$

Lineáris tagok:

$$(1) = \frac{\partial}{\partial \tau} \Delta \hat{\Psi} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [-(i\alpha)^2 (a_{ij}(\tau) \cos_i + \dot{b}_{ij}(\tau) \sin_i) L_j + [\dot{a}_{ij}(\tau) \cos_i + \dot{b}_{ij}(\tau) \sin_i] L_j]''$$

$$(2) = (1 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta \hat{\Psi} = (1 - \eta^2) \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [-(i\alpha)^3 (a_{ij}(\tau) \sin_i + b_{ij}(\tau) \cos_i) L_j +$$

$$+ [-(i\alpha)(a_{ij}(\tau) \sin_i - b_{ij}(\tau) \cos_i)] L_j]''$$

$$(3) = (1 - \eta^2)'' \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \xi} = -2 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N -(i\alpha) [a_{ij}(\tau) \sin_i - b_{ij}(\tau) \cos_i] L_j$$

$$(4) = \frac{1}{Re} \Delta^2 \hat{\Psi} = \frac{1}{Re} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [(i\alpha)^4 (a_{ij}(\tau) \cos_i + b_{ij}(\tau) \sin_i)] L_j -$$

$$-2[(i\alpha)^2 (a_{ij}(\tau) \cos_i + b_{ij}(\tau) \sin_i)] L_j'' + [a_{ij}(\tau) \cos_i + b_{ij}(\tau) \sin_i] L_j^{(4)}$$

Nemlineáris tagok: $\{\hat{\Psi}, \Delta\hat{\Psi}\}$ négy tagja

$$(5) = -\frac{\partial\hat{\Psi}}{\partial\xi}\frac{\partial^3\hat{\Psi}}{\partial\xi^2\partial\eta} = -\left(\sum_{i=1}^M\sum_{j=1}^N(-i\alpha)[a_{ij}\sin_i - b_{ij}\cos_i]L_j\right)\left(\sum_{k=1}^M\sum_{l=1}^N(-k\alpha)^2[a_{kl}\cos_k + b_{kl}\sin_k]L_l\right)$$

$$(6) = -\frac{\partial\hat{\Psi}}{\partial\xi}\frac{\partial^3\hat{\Psi}}{\partial\eta^3} = \left(\sum_{i=1}^M\sum_{j=1}^N(-i\alpha)[a_{ij}\sin_i - b_{ij}\cos_i]L_j\right)\left(\sum_{k=1}^M\sum_{l=1}^N[a_{kl}\cos_k + b_{kl}\sin_k]L_l^{(3)}\right)$$

$$(7) = \frac{\partial\hat{\Psi}}{\partial\eta}\frac{\partial^3\hat{\Psi}}{\partial\xi^3} = \left(\sum_{i=1}^M\sum_{j=1}^N[a_{ij}\cos_i + b_{ij}\sin_i]L_j'\right)\left(\sum_{k=1}^M\sum_{l=1}^N(k\alpha)^3[a_{kl}\sin_k - b_{kl}\cos_k]L_l\right)$$

$$(8) = \frac{\partial\hat{\Psi}}{\partial\eta}\frac{\partial^3\hat{\Psi}}{\partial\xi\partial\eta^2} = \left(\sum_{i=1}^M\sum_{j=1}^N[a_{ij}\cos_i + b_{ij}\sin_i]L_j'\right)\left(\sum_{k=1}^M\sum_{l=1}^N(-k\alpha)[a_{kl}\sin_k - b_{kl}\cos_k]L_l''\right)$$

Galjorkin vetítés az egyenlet lineáris tagjain:

$$\begin{aligned} \langle(1), S_{m,n}\rangle &= \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\left\langle\frac{\partial^2\hat{\Psi}}{\partial\xi^2}, S_{m,n}\right\rangle + \left\langle\frac{\partial^2\hat{\Psi}}{\partial\eta^2}, S_{m,n}\right\rangle\right) = \\ &= -\left\langle\sum_{i=1}^M\sum_{j=1}^N i^2\alpha^2 [\dot{a}_{ij}(\tau)\cos_i + \dot{b}_{ij}(\tau)\sin_i] L_j, \sin_m L_n\right\rangle + \\ &\quad + \left\langle\sum_{i=1}^M\sum_{j=1}^N [\dot{a}_{ij}(\tau)\cos_i + \dot{b}_{ij}(\tau)\sin_i] L_j'', \sin_m L_n\right\rangle \\ &= -\sum_{i=1}^M\sum_{j=1}^N i^2\alpha^2 [\dot{a}_{ij}(\tau)\langle\cos_i, \sin_m\rangle + \dot{b}_{ij}(\tau)\langle\sin_i, \sin_m\rangle] \langle L_j, L_n\rangle \\ &\quad + \sum_{i=1}^M\sum_{j=1}^N [\dot{a}_{ij}(\tau)\langle\cos_i, \sin_m\rangle + \dot{b}_{ij}(\tau)\langle\sin_i, \sin_m\rangle] \langle L_j'', L_n\rangle \\ &= -\sum_{j=1}^N m^2\alpha^2\frac{\pi}{\alpha}\dot{b}_{mj}(\tau)\langle L_j, L_n\rangle + \sum_{j=1}^N m^2\alpha^2\frac{\pi}{\alpha}\dot{b}_{mj}(\tau)\langle L_j'', L_n\rangle \\ &= \frac{\pi}{\alpha}\sum_{j=1}^N \dot{b}_{mj}(\tau)\left(\langle L_j'', L_n\rangle - m^2\alpha^2\langle L_j, L_n\rangle\right) \\ \langle(1), C_{m,n}\rangle &= \frac{\pi}{\alpha}\sum_{j=1}^N \dot{a}_{mj}(\tau)\left(\langle L_j'', L_n\rangle - m^2\alpha^2\langle L_j, L_n\rangle\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle (2), S_{m,n} \rangle &= \left\langle (1 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta \hat{\Psi}, S_{m,n} \right\rangle = \\
&= - \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N i^2 \alpha^2 [a_{ij}(\tau) \cos_i + b_{ij}(\tau) \sin_i] (1 - \eta^2) L_j, \sin_m L_n \right\rangle + \\
&\quad + \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [a_{ij}(\tau) \cos_i + b_{ij}(\tau) \sin_i] (1 - \eta^2) L_j'', \sin_m L_n \right\rangle \\
&= - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N i^3 \alpha^3 [-a_{ij}(\tau) \langle \sin_i, \sin_m \rangle + b_{ij}(\tau) \langle \cos_i, \sin_m \rangle] \langle (1 - \eta^2) L_j, L_n \rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N i \alpha [-a_{ij}(\tau) \langle \sin_i, \sin_m \rangle + b_{ij}(\tau) \langle \cos_i, \sin_m \rangle] \langle (1 - \eta^2) L_j'', L_n \rangle \\
&= \frac{\pi}{\alpha} \sum_{j=1}^N m^3 \alpha^3 a_{mj}(\tau) \langle (1 - \eta^2) L_j, L_n \rangle - \frac{\pi}{\alpha} \sum_{j=1}^N m \alpha a_{mj}(\tau) \langle (1 - \eta^2) L_j'', L_n \rangle \\
&= m\pi \sum_{j=1}^N a_{mj}(\tau) \left(m^2 \alpha^2 \langle (1 - \eta^2) L_j, L_n \rangle - \langle (1 - \eta^2) L_j'', L_n \rangle \right) \\
\langle (2), C_{m,n} \rangle &= -m\pi \sum_{j=1}^N b_{mj}(\tau) \left(m^2 \alpha^2 \langle (1 - \eta^2) L_j, L_n \rangle - \langle (1 - \eta^2) L_j'', L_n \rangle \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle (3), S_{m,n} \rangle &= \left\langle (1 - \eta^2)'' \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \xi}, S_{m,n} \right\rangle = \\
&= -2 \left\langle \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N i \alpha [-a_{ij}(\tau) \sin_i + b_{ij}(\tau) \cos_i] L_j, \sin_m L_n \right\rangle \\
&= -2 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N i \alpha [-a_{ij}(\tau) \langle \sin_i, \sin_m \rangle + b_{ij}(\tau) \langle \cos_i, \sin_m \rangle] \langle L_j, L_n \rangle \\
&= 2\pi \sum_{j=1}^N m a_{mj}(\tau) \langle L_j, L_n \rangle \\
\langle (3), C_{m,n} \rangle &= -2\pi \sum_{j=1}^N m b_{mj}(\tau) \langle L_j, L_n \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle (4), S_{m,n} \rangle &= \left\langle \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^4 \hat{\Psi}}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 \hat{\Psi}}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 \hat{\Psi}}{\partial \eta^4} \right), S_{m,n} \right\rangle = \\
&= \frac{1}{Re} \left\langle \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N i^4 \alpha^4 [a_{ij}(\tau) \cos_i + b_{ij} \sin_i] L_j, \sin_m L_n \right\rangle \\
&\quad - \frac{2}{Re} \left\langle \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N i^2 \alpha^2 [a_{ij}(\tau) \cos_i + b_{ij} \sin_i] L_j'', \sin_m L_n \right\rangle \\
&\quad + \frac{1}{Re} \left\langle \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [a_{ij}(\tau) \cos_i + b_{ij} \sin_i] L_j^{(4)}, \sin_m L_n \right\rangle = \\
&= \frac{1}{Re} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N i^4 \alpha^4 [a_{ij}(\tau) \langle \cos_i, \sin_m \rangle + b_{ij} \langle \sin_i, \sin_m \rangle] \langle L_j, L_n \rangle \\
&\quad - \frac{2}{Re} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N i^2 \alpha^2 [a_{ij}(\tau) \langle \cos_i, \sin_m \rangle + b_{ij} \langle \sin_i, \sin_m \rangle] \langle L_j'', L_n \rangle \\
&\quad + \frac{1}{Re} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [a_{ij}(\tau) \langle \cos_i, \sin_m \rangle + b_{ij} \langle \sin_i, \sin_m \rangle] \langle L_j^{(4)}, L_n \rangle = \\
&= \frac{\pi}{\alpha Re} \sum_{j=1}^N b_{mj}(\tau) (m^4 \alpha^4 \langle L_j, L_n \rangle - 2m^2 \alpha^2 \langle L_j'', L_n \rangle + \langle L_j^{(4)}, L_n \rangle)
\end{aligned}$$

$$\langle (4), C_{m,n} \rangle = \frac{\pi}{\alpha Re} \sum_{j=1}^N a_{mj}(\tau) (m^4 \alpha^4 \langle L_j, L_n \rangle - 2m^2 \alpha^2 \langle L_j'', L_n \rangle + \langle L_j^{(4)}, L_n \rangle)$$

Galjorkin vetítés a nemlineáris tagokon:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \sin(i\xi\alpha) \sin(k\xi\alpha) \sin(m\xi\alpha) d\xi = 0, \quad \forall i, k, m \in \mathbf{N}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \sin(i\xi\alpha) \cos(k\xi\alpha) \sin(m\xi\alpha) d\xi = \begin{cases} \frac{\pi}{2\alpha} & \text{ha } m = k + i \text{ vagy } m = k - i \\ -\frac{\pi}{2\alpha} & \text{ha } m = i - k \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \cos(i\xi\alpha) \cos(k\xi\alpha) \sin(m\xi\alpha) d\xi = 0, \quad \forall i, k, m \in \mathbf{N}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \cos(i\xi\alpha) \cos(k\xi\alpha) \cos(m\xi\alpha) d\xi = \begin{cases} \frac{\pi}{2\alpha} & \text{ha } m = k + i \text{ vagy } m = k - i \\ -\frac{\pi}{2\alpha} & \text{ha } m = i - k \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \langle (5), S_{m,n} \rangle &= \left\langle \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \xi} \frac{\partial^3 \hat{\Psi}}{\partial \xi^2 \partial \eta}, S_{m,n} \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [a_{ij}(\tau) \cos_i + b_{ij}(\tau) \sin_i] L_j * \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \eta} \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N [a_{kl}(\tau) \cos_k + b_{kl}(\tau) \sin_k] L_l, \sin_m L_n \right\rangle = \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N i\alpha [-a_{ij}(\tau) \sin_i + b_{ij}(\tau) \cos_i] L_j * \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N k^2 \alpha^2 [-a_{kl}(\tau) \cos_k - b_{kl}(\tau) \sin_k] L'_l, \sin_m L_n \right\rangle = \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N ik^2 \alpha^3 [a_{ij}(\tau) \sin_i - b_{ij}(\tau) \cos_i] L_j * [a_{kl}(\tau) \cos_k + b_{kl}(\tau) \sin_k] L'_l, \sin_m L_n \right\rangle = \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N ik^2 \alpha^3 (a_{ij}(\tau) a_{kl}(\tau) \langle \sin_i \cos_k, \sin_m \rangle + b_{ij}(\tau) b_{kl}(\tau) \langle \cos_i \sin_k, \sin_m \rangle) \langle L_j L'_l, L_n \rangle \end{aligned}$$

$$\langle (5), C_{m,n} \rangle =$$

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N -ik^2 \alpha^3 (b_{ij}(\tau) a_{kl}(\tau) \langle \cos_i \cos_k, \cos_m \rangle + a_{ij}(\tau) b_{kl}(\tau) \langle \sin_i \sin_k, \sin_m \rangle) \langle L_j L'_l, L_n \rangle$$

$$\begin{aligned}
\langle (6), S_{m,n} \rangle &= \left\langle \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \xi} \frac{\partial^3 \hat{\Psi}}{\partial \eta^3}, S_{m,n} \right\rangle = \\
&= \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [a_{ij}(\tau) \cos_i + b_{ij}(\tau) \sin_i] L_j * \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N [a_{kl}(\tau) \cos_k + b_{kl}(\tau) \sin_k] L_l, \sin_m L_n \right\rangle = \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N i \alpha [-a_{ij}(\tau) \sin_i + b_{ij}(\tau) \cos_i] L_j * \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N [a_{kl}(\tau) \cos_k + b_{kl}(\tau) \sin_k] L_l''', \sin_m L_n \right\rangle = \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N i \alpha [-a_{ij}(\tau) \sin_i + b_{ij}(\tau) \cos_i] L_j * [a_{kl}(\tau) \cos_k + b_{kl}(\tau) \sin_k] L_l''', \sin_m L_n \right\rangle = \\
&= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N i \alpha (-a_{ij}(\tau) a_{kl}(\tau) \langle \sin_i \cos_k, \sin_m \rangle + b_{ij}(\tau) b_{kl}(\tau) \langle \cos_i \sin_k, \sin_m \rangle) \langle L_j L_l''', L_n \rangle
\end{aligned}$$

$$\langle (6), C_{m,n} \rangle =$$

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N i k \alpha (b_{ij}(\tau) a_{kl}(\tau) \langle \cos_i \cos_k, \cos_m \rangle - a_{ij}(\tau) b_{kl}(\tau) \langle \sin_i \sin_k, \cos_m \rangle) \langle L_j L_l''', L_n \rangle$$

$$\begin{aligned}
\langle (7), S_{m,n} \rangle &= \left\langle \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \eta} \frac{\partial^3 \hat{\Psi}}{\partial \xi^3}, S_{m,n} \right\rangle = \\
&= \left\langle \frac{\partial}{\partial \eta} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [a_{ij}(\tau) \cos_i + b_{ij}(\tau) \sin_i] L_j * \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N [a_{kl}(\tau) \cos_k + b_{kl}(\tau) \sin_k] L_l, \sin_m L_n \right\rangle = \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [a_{ij}(\tau) \cos_i + b_{ij}(\tau) \sin_i] L_j' * \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N k^3 \alpha^3 [a_{kl}(\tau) \sin_k - b_{kl}(\tau) \cos_k] L_l, \sin_m L_n \right\rangle = \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N k^3 \alpha^3 [a_{ij}(\tau) \cos_i + b_{ij}(\tau) \sin_i] L_j' * [a_{kl}(\tau) \sin_k - b_{kl}(\tau) \cos_k] L_l, \sin_m L_n \right\rangle = \\
&= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N k^3 \alpha^3 (a_{ij}(\tau) a_{kl}(\tau) \langle \cos_i \sin_k, \sin_m \rangle - b_{ij}(\tau) b_{kl}(\tau) \langle \sin_i \cos_k, \sin_m \rangle) \langle L_j' L_l, L_n \rangle
\end{aligned}$$

$$\langle (7), C_{m,n} \rangle =$$

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N k^3 \alpha^3 (b_{ij}(\tau) a_{kl}(\tau) \langle \sin_i \sin_k, \cos_m \rangle - a_{ij}(\tau) b_{kl}(\tau) \langle \cos_i \cos_k, \cos_m \rangle) \langle L'_j L_l, L_n \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle (8), S_{m,n} \rangle &= \left\langle \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \eta} \frac{\partial^3 \hat{\Psi}}{\partial \xi \partial \eta^2}, S_{m,n} \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial \eta} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [a_{ij}(\tau) \cos_i + b_{ij}(\tau) \sin_i] L_j * \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial \eta^2} \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N [a_{kl}(\tau) \cos_k + b_{kl}(\tau) \sin_k] L_l, \sin_m L_n \right\rangle = \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [a_{ij}(\tau) \cos_i + b_{ij}(\tau) \sin_i] L'_j * \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N k \alpha [-a_{kl}(\tau) \sin_k + b_{kl}(\tau) \cos_k] L''_l, \sin_m L_n \right\rangle = \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N k \alpha [a_{ij}(\tau) \cos_i + b_{ij}(\tau) \sin_i] L'_j * [-a_{kl}(\tau) \sin_k + b_{kl}(\tau) \cos_k] L''_l, \sin_m L_n \right\rangle = \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N k \alpha (-a_{ij}(\tau) a_{kl}(\tau) \langle \cos_i \sin_k, \sin_m \rangle + b_{ij}(\tau) b_{kl}(\tau) \langle \sin_i \cos_k, \sin_m \rangle) \langle L'_j L''_l, L_n \rangle \end{aligned}$$

$$\langle (8), C_{m,n} \rangle =$$

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N k \alpha (-b_{ij}(\tau) a_{kl}(\tau) \langle \sin_i \sin_k, \cos_m \rangle + a_{ij}(\tau) b_{kl}(\tau) \langle \cos_i \cos_k, \cos_m \rangle) \langle L'_j L''_l, L_n \rangle$$

A dolgozatban látható képeket Matlabban készítettem. A fontosabb kódokat letöltheti az érdeklődő az alábbi címről:

<http://www.cs.elte.hu/~mrobbie/index.html/>