A lakásért életjáradék termék konstrukciója és kockázatai

Diplomamunka

Írta: Péter Katalin

alkalmazott matematikus szak

Témavezetők:

Mályusz Károly, vezető aktuárius

Cardif Életbiztosító Zrt.

és

Arató Miklós, belső konzulens

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2010

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **3**

2. Longevity kockázat **5**

2.1. Bevezetés 5

2.2. Hasonlósági mutatók 6

2.3. Hipotézisvizsgálat 10

2.4. Halandósági adatok jövőbeni fejlődése 12

3 Ingatlanárak sztochasztikus modellje **20**

3.1. Bevezetés 20

3.2 A modell 21

4. Az életjáradék kiszámítása **25**

5. Összefoglalás **31**

1. fejezet - Bevezetés

A lakásért életjáradék konstrukció a nyugdíjas korosztálynak szóló, egyszerűen működő termék. Adott egy pénzügyi intézmény, amely gyakorlatilag megvásárolja az idős emberek tulajdonában lévő ingatlanokat, de a vételárat nem egyösszegben fizeti ki, hanem az eladó haláláig minden hónapban egy bizonyos összegű életjáradékot folyósít, továbbá a futamidő kezdetén egy nagyobb összeget is kifizet az eladónak, aki haláláig az ingatlanban maradhat. Így aki leszerződik egy ilyen intézménnyel a tulajdonjogát átadja, de használati joga marad a lakásra élete végéig.

A lakásért életjáradék üzletág viszont egyáltalán nem rizikómentes. Igen nagy tőkét kell befektetni, és igen hosszútávú befektetésről van szó, hiszen áltagosan több, mint 10 év is eltelik, mire el lehet adni a lakásokat. A konstrukcióban rejlő kockázat onnan is látható, hogy az eddig ezzel kísérletező magyar vállalatok jelentős része csődbe ment, vagy felhagyott a tevékenységgel. A problémát az is okozza, hogy ez a konstrukció nem minősül sem pénzügyi szolgáltatásnak, sem biztosítási tevékenységnek, így egyelőre nincsen állami felügyelete.

Ezért gondoltam, hogy szakdolgozatomban a termékben rejlő fő rizikókkal foglalkozom. Először az úgynevezett longevity kockázatot vizsgálom, mely esetén a veszély abban rejlik, hogy az ügyfelek jelentősen tovább élnek, mint ahogyan azt a jelenlegi halandósági táblázatok alapján várnánk. Rengeteg publikáció megjelent ezzel a témakörrel kapcsolatban. Az általam is olvasott cikkek egy része az úgynevezett Lee-Carter módszer segítségével jelzi előre a halandósági adatok alakulását. Ez a módszer viszont elég összetett, ezért döntöttem úgy, hogy [1] alapján egy könnyen érthető, szemléletes módját választom az adatok előrejelzésének.

Így első lépésként olyan múltbéli külföldi halandósági táblákat keresek, melyek valamilyen szempont szerint hasonlítanak a jelenlegi magyar táblázatokhoz, majd [1] alapján felteszem, hogy a magyar adatok jövőbeni fejlődése ezen múltbéli táblák fejlődésével lesz analóg. Ezután megvizsgálom, hogy az ily módon előrejelzett adatok milyen hatással lennének a terméket igénybevevő emberek várható hátralévő élettartamára nézve, illetve, hogy ezen emberek közül az idő előrehaladtával az egyes években hányan lennének még életben.

A másik kockázat, amivel foglalkozom, az ingatlanok értékváltozásának kockázata, hiszen ahogy azt említettem hosszú évek telnek el az értékesítésig, mely idő alatt jelentősen csökkenhet az ingatlan értéke. Ezzel kapcsolatban először olyan publikációt próbáltam keresni, mely egyszerre modellezi a ingatlanár és az infláció változását. Viszont az összes cikk, amit ezzel kapcsolatban olvastam, több tucat tényezőt figyelembe vesz az ingatlan értékének előrejelzésekor, jelentősen megbonyolítva azt. Így ezután olyan irodalmat kerestem, amelyben az ingatlanárakat az infláció változásától függetlenül modellezik. Az általam olvasott cikkek egy része geometriai Brown-mozgások segítségével írja le az ingatlanok árváltozását, másik részük különböző bonyolultabb sztochasztikus modellek figyelembevételével. Végül a választásom [2] alapján ARIMA és GARCH folyamatok segítségével való modellezésre esett.

Ennek a modellnek a segítségével szimulálok az ingatlanárak jövőbeni fejlődésére vonatkozó idősorokat. Ezután bemutatom a járadék egy lehetséges számítási módját, és ennek segítségével megvizsgálom, hogy a szimulált ingatlanárak, illetve a terméket igénybevevő emberek elhalálozási időpontjának véletlenítése milyen hatással vannak a kiinduláskori járadék értékére nézve. Majd megvizsgálom, hogy az így kapott eredmények menynyiben térnek el attól, amit akkor kapok, ha nem számolok az ingatlanárak változásával, illetve a halandóság javulásával.

2.fejezet - Longevity kockázat

2.1. fejezet - Bevezetés

Az aktuáriusok gyakran találkoznak azzal a feladattal, hogy életjáradékok mértékét kell meghatározniuk, viszont a pontos értékek jövőbeli halandósági adatokból határozhatók csak meg. Ez mostanában egyre nagyobb gondot okoz, mivel a változásoknak köszönhetően a halandósági táblák értékei évről-évre módosulnak. Mivel az egészségügy és az egészségtudatosság terén Magyarország a jelenlegi amerikai állapotokhoz képest lemaradottnak számít, így feltételezzük, hogy az ott megfigyelt múltbéli fejlődéssel analóg lesz az itthon megfigyelhető.

A használt módszer Arató et al (2008) cikke alapján a következő ötleten alapul:

- Találni kell egy múltbéli külföldi halandósági táblát, amely hasonlít a jelenlegi magyar táblázathoz.
- A magyar adatok jövőbeni fejlődéséről feltesszük, hogy a múltbéli táblázat fejlődésével analóg lesz, amely rendelkezésünkre áll egy bizonyos időszakra előre nézve.

A következő fejezetekben szó lesz arról, hogy hogyan mérhetjük halandósági táblázatok hasonlóságát, majd ezeken a hasonlóságokon alapuló hipotézisvizsgálat kerül bemutatásra, végül szó lesz magáról az előrejelzésről.

2.2 fejezet - Hasonlósági mutatók

Számos honlap létezik manapság, ahol halandósági táblák adatbázisát érhetjük el. Ebben a fejezetben arra a kérdésre keressük a választ, hogy vajon milyen módon hasonlíthatunk össze ilyen táblákat.

[1] alapján jelölje q_1 azt a táblát, melyet becsülni szeretnénk, ennek elemeit pedig q_{i1}. Ezzel analóg módon jelölje q_0 a bázis táblát, elemeit pedig q_{i0}. Az egyik alternatíva a hasonlóság mérésére az úgynevezett A/E statisztika, mely a következőképpen van definiálva:

$$A/E = 100 \cdot \frac{\sum\limits_{i=K}^{N} l_{i0} q_{i1}}{\sum\limits_{i=K}^{N} l_{i0} q_{i0}},$$

ahol K a kezdeti, N pedig a végső életkor, l_{i0} pedig annak a valószínűsége, hogy i éves korban valaki még életben van a bázis tábla szerint, így $l_{(i+1,0)} = l_{i0}(1 - q_{i0})$ és $l_{K0} = 1$. Így a nevezőben lévő összeg megfelel a populációnkban adott évben bekövetkező halálesetek becsült számának, míg a számlálóban hasonló értéket kapunk azzal a kivétellel, hogy itt a halálozási valószínűségek a vizsgált táblából valók.

Egy másik mérőszám az ERL (Expected Remainig Lifetime) statisztika, mely a következőképpen deifiniálható:

$$ERL = 100 \cdot \frac{\sum\limits_{i=K}^{N} l_{i1} - 0.5}{\sum\limits_{i=K}^{N} l_{i0} - 0.5},$$

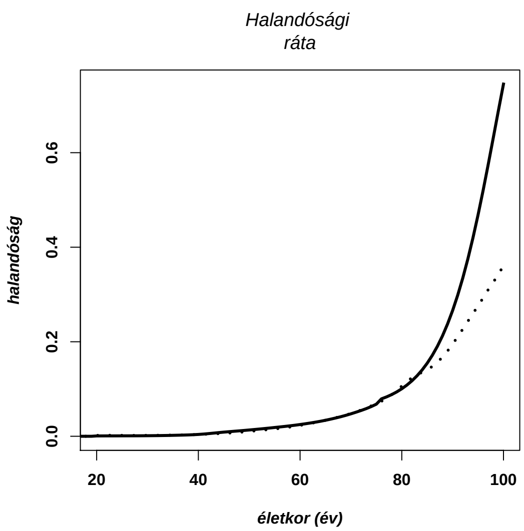
ahol $l_{K0} = l_{K1} = 1$. Ez a kifejezés a K és N kor közötti várható élettartamok arányát adja meg a két tábla esetén.

A szereplő számításokban K-t 30-nak, N-et pedig 70-nek választottam, mert feltehető, hogy a biztosító társaságnak nagyrészt ebből az intervallumból vannak megfigyeléseik. A bázis táblának a 2005-ös magyar halandósági táblát választottam.

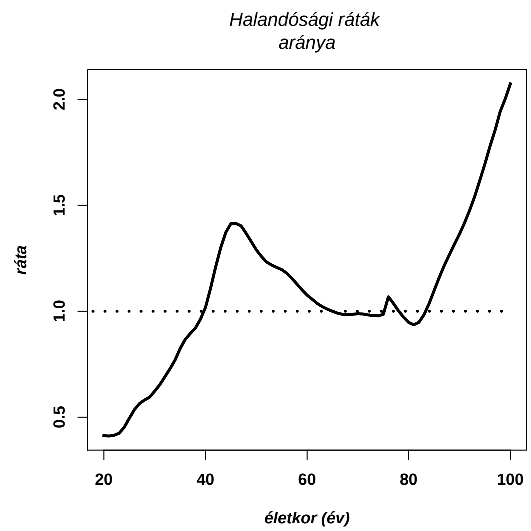
2.1. táblázat

magyar tábla	USA-beli tábla	A/E (30,70)	ERL (30,70)
Férfi, 2005	Férfi, 1955	91,883	101,665
Női, 2005	Női, 1973	109,550	99,127

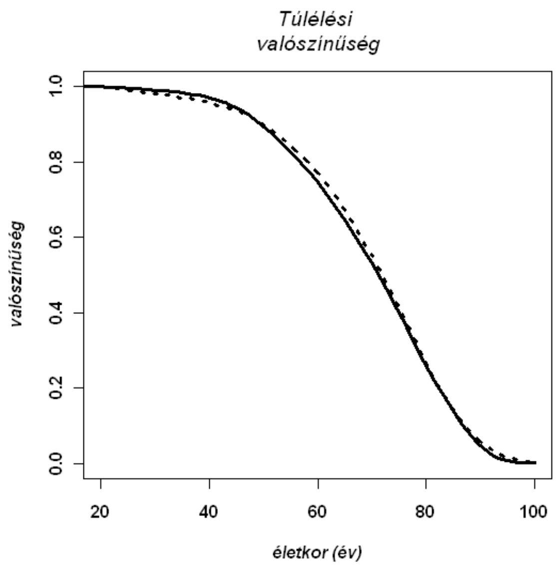
A 2.1. táblázat tartalmazza a különböző statisztikák értékeit, összehasonlítva a 2005-ös magyar halandósági táblát múltbéli USA-beli táblákkal. A statisztikák neve utáni zárójelben szereplő számok K és N értékét jelzik.



2.2. ábra



2.3.ábra

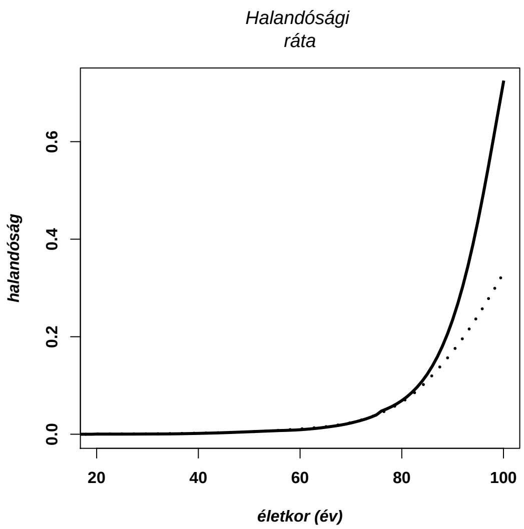


2.4. ábra

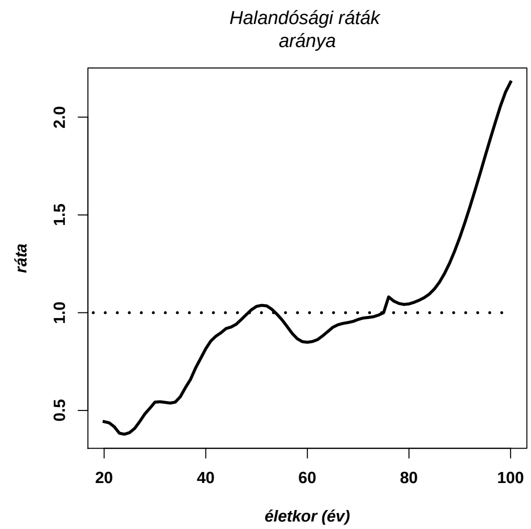
A fenti ábrákon a 2005-ös magyar és 1955-ös USA-beli férfi halandósági táblák összehasonlítását láthatjuk. A 2.3 ábrán látható, hogy Magyarországon alacsonyabb halandóság figyelhető meg 40 éves korig, 40 és 60 éves kor között az amerikai halandóság mutat alacsonyabb értékeket, viszont 60 és 90 éves kor között az illeszkedés elég jó, és számunkra ez a fontos most, mert a lakásért életjáradék termék főleg ezen korosztálynak szól.

Hasonló értékek figyelhetőek meg a következő ábrákon, ahol a 2005-ös magyar női tábla és a hozzá legjobban illeszkedő 1973-as női amerikai táblázatok összehasonlítása található.

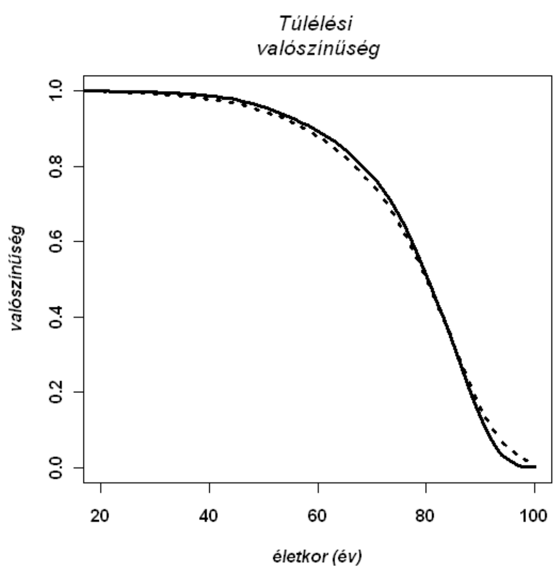
Az ábrák alapján elmondható, hogy ugyan nem tökéletes, de elfogadható illeszkedést kapunk.



2.5. ábra



2.6.ábra



2.7. ábra

2.3 fejezet - Hipotézisvizsgálat

Ebben a fejezetben, az [1]-ben szereplő, előbb bevezetett statisztikákra vonatkozó egyfajta hipotézisvizsgálati feladat kerül bemutatásra. Az eljárás lényege, hogy feltették, a valós halandósági adatok a q_0 referencia táblázat alapján adottak. Egy adott mintában szereplő adatokról azt szerették volna eldönteni, hogy a benne lévő értékek származhatnak-e ebből a táblázatból. Ennek érdekében létrehoztak egy empirikus tesztet, mely során ugyanabból a populációból 10 000-szer vettek szimulációs értékeket. Az 10 000 értéknek köszönhetően pedig meg tudták állapítani a kritikus értékeket egész nagy pontossággal.

Annak érdekében, hogy látható legyen, a koreloszlás és a populáció mérete milyen hatással van az egyes statisztikákra a 95%-os konfidenciaintervallumokat kiszámolták mindkét statisztika esetén egyenletes eloszlást valamint az egyik létező biztosító biztosítottainak koreloszlását feltételezve is. A biztosítottak életkorának eloszlása a 2.9. ábrán látható. Továbbá a populáció méretét egyik esetben 50 000-nek, másik esetben 500 000-nek választották.

Az ezzel a módszerrel általuk kapott adatokat, mely esetén a referencia tábla a 2000-es magyar férfi halandósági tábla volt, a következő táblázat tartalmazza:

2.8. táblázat

	biztosítottak koreloszlása		egyenletes eloszlás	
Statisztikák	alsó	felső	alsó	felső
50 000 ember 30-70 éves kor között				
A/E	67,11	142,36	91,13	108,77
ERL	98,45	101,49	98,90	101,07
500 000 ember 30-70 éves kor között				
A/E	88,59	112,28	97,26	102,79
ERL	99,53	100,48	99,65	100,34

A táblázatból jól látható, hogy a konfidenciaintervallumok rövidebbek abban az esetben, amikor a biztosítottak koreloszlását használták fel, illetve amikor a nagyobb populációméretet vették alapul.

[1]-ben, a 2.1. táblázatban található értékekhez hasonló, csak a 2000-es magyar férfi, illetve az 1950-es USA-beli férfi adatokra kiszámolt statisztikák értékeit összevetették a 2.8. táblázatban található konfidenciaintervallumok végpontjaival, és megállapították, hogy mindkét statisztika használata egészen pontos eredményekhez vezet. Mi ezt a módszert most a halandósági táblákra fogjuk alkalmazni, így természetesen a konfidenciaintervallumok még szűkebbek, mint a fent említett esetekben.

2.9. ábra

2.4 fejezet - Halandósági adatok jövőbeni fejlődése

Most, hogy már láttuk, a 2005-ös magyar férfi tábla és az 1955-ös USA-beli férfi tábla, valamint a 2005-ös magyar női adatok és az 1973-as USA-beli női adatok hasonlósága elfogadható, előrejelezhetjük a jövőbeni fejlődését a halandósági értékeknek.

A lényege az [1]-en alapuló eljárásnak, hogy feltesszük, a magyar halálozási valószínűségek a jövőben olyan módon fognak fejlődni, mint ahogyan azt a velük hasonló külföldi értékek tették. Vagyis a feltételezésünk szerint a 2010-es magyar férfi halandósági tábla az 1960-as, a női pedig az 1978-as USA-beli táblákkal, majd egy év múlva az 1961-es férfi és az 1979-es női halandósági táblákkal egyezik meg és így tovább.

A következő számítások során az egyszerűség kedvéért azzal a feltételezéssel élek, hogy a lakásért életjáradék terméket 2010-ben 2000 ember veszi igénybe, mégpedig a következő nemenkénti és koronkénti megosztásban:

2.11. táblázat

	65 év	**68 év**	**70 év**
nő	500	320	250
férfi	500	280	150

Feltételezéseim szerint azért a 65 éves korosztály az, amelyik legnagyobb számban igénybe veszi a szolgáltatást, mert Magyarországon ez az a kor, amely alatt a lakásért életjáradék termék csak egy-két esetben vehető igénybe. A fent említett módszer segítségével meghatároztam az egyes csoportokhoz tartozó halálozási valószínűségek feltételezett jövőbeli fejlődését feltéve azt, hogy 100 éves kornál nem él senki tovább. Ezek az értékek az alábbi táblázatokban láthatók, ahol összehasonlításképpen megtalálhatjuk a 2005-ös magyar értékeket is.

2.12. táblázat

2010-ben 65 éves férfiakra illetve nőkre vonatkozó adatok fejlődése összehasonlítva a 2005-ös magyar értékekkel

életkor	**magyar férfi tábla**	**előrejelzett férfi tábla**
65	0,03388	0,0352
66	0,03621	0,0375
67	0,03868	0,0410
68	0,04136	0,0445
69	0,04430	0,0458
70	0,04753	0,0493
71	0,05096	0,0537
72	0,05454	0,0576
73	0,05845	0,0634
74	0,06285	0,0663
75	0,06791	0,0704
76	0,07917	0,0758
77	0,08330	0,0826
78	0,08815	0,0878
79	0,09383	0,0908
80	0,10049	0,0955
81	0,10828	0,1018
82	0,11737	0,1075
83	0,12797	0,1160
84	0,14031	0,1214
85	0,15463	0,1349
86	0,17122	0,1410
87	0,19035	0,1458
88	0,21235	0,1616
89	0,23752	0,1733
90	0,26617	0,1884
91	0,29857	0,1983
92	0,33494	0,2079
93	0,37540	0,2415
94	0,41997	0,2481
95	0,46845	0,2638
96	0,52043	0,2736
97	0,57523	0,2934
98	0,63186	0,3174
99	0,68901	0,3553
100	1,00000	1,00000

életkor	**magyar női tábla**	**előrejelzett női tábla**
65	0,01434	0,01446
66	0,01574	0,01530
67	0,01722	0,01720
68	0,01888	0,01828
69	0,02081	0,01957
70	0,02312	0,02164
71	0,02570	0,02353
72	0,02849	0,02577
73	0,03163	0,02807
74	0,03530	0,03026
75	0,03964	0,03284
76	0,04760	0,03550
77	0,05174	0,03827
78	0,05659	0,04145
79	0,06228	0,04503
80	0,06894	0,05094
81	0,07673	0,05608
82	0,08583	0,06198
83	0,09643	0,06877
84	0,10877	0,07594
85	0,12309	0,08516
86	0,13968	0,09696
87	0,15882	0,10620
88	0,18084	0,11191
89	0,20604	0,12203
90	0,23476	0,12851
91	0,26726	0,14428
92	0,30380	0,16233
93	0,34453	0,18280
94	0,38949	0,20577
95	0,43852	0,23065
96	0,49128	0,25686
97	0,54712	0,28359
98	0,60512	0,30287
99	0,66401	0,32105
100	1,00000	1,00000

2.13. táblázat

2010-ben 68 éves férfiakra illetve nőkre vonatkozó adatok fejlődése összehasonlítva a 2005-ös magyar értékekkel

életkor	**magyar férfi tábla**	**előrejelzett férfi tábla**
68	0,04136	0,04348
69	0,04430	0,04545
70	0,04753	0,04920
71	0,05096	0,05411
72	0,05454	0,05647
73	0,05845	0,06121
74	0,06285	0,06724
75	0,06791	0,07186
76	0,07917	0,07930
77	0,08330	0,08285
78	0,08815	0,08805
79	0,09383	0,09503
80	0,10049	0,10355
81	0,10828	0,11047
82	0,11737	0,11392
83	0,12797	0,11931
84	0,14031	0,12828
85	0,15463	0,13481
86	0,17122	0,14545
87	0,19035	0,15090
88	0,21235	0,16788
89	0,23752	0,17389
90	0,26617	0,17827
91	0,29857	0,19734
92	0,33494	0,21143
93	0,37540	0,23024
94	0,41997	0,24008
95	0,46845	0,24798
96	0,52043	0,29391
97	0,57523	0,29743
98	0,63186	0,31297
99	0,68901	0,31965
100	1,00000	1,00000

életkor	**magyar női tábla**	**előrejelzett női tábla**
68	0,01888	0,01830
69	0,02081	0,01951
70	0,02312	0,02193
71	0,02570	0,02345
72	0,02849	0,02529
73	0,03163	0,02809
74	0,03530	0,03057
75	0,03964	0,03347
76	0,04760	0,03654
77	0,05174	0,03990
78	0,05659	0,04365
79	0,06228	0,04708
80	0,06894	0,05072
81	0,07673	0,05508
82	0,08583	0,06041
83	0,09643	0,06892
84	0,10877	0,07585
85	0,12309	0,08466
86	0,13968	0,09391
87	0,15882	0,10383
88	0,18084	0,11632
89	0,20604	0,13285
90	0,23476	0,13958
91	0,26726	0,14579
92	0,30380	0,15753
93	0,34453	0,16807
94	0,38949	0,18886
95	0,43852	0,21190
96	0,49128	0,23672
97	0,54712	0,26268
98	0,60512	0,28891
99	0,66401	0,31436
100	1,00000	1,00000

2.14. táblázat

2010-ben 68 éves férfiakra illetve nőkre vonatkozó adatok fejlődése összehasonlítva a 2005-ös magyar értékekkel

életkor	magyar férfi tábla	előrejelzett férfi tábla
70	0,04753	0,05019
71	0,05096	0,05176
72	0,05454	0,05627
73	0,05845	0,06254
74	0,06285	0,06575
75	0,06791	0,07215
76	0,07917	0,07882
77	0,08330	0,08333
78	0,08815	0,09208
79	0,09383	0,09677
80	0,10049	0,10225
81	0,10828	0,11053
82	0,11737	0,12015
83	0,12797	0,12847
84	0,14031	0,13301
85	0,15463	0,13807
86	0,17122	0,14947
87	0,19035	0,15594
88	0,21235	0,16767
89	0,23752	0,17337
90	0,26617	0,19224
91	0,29857	0,19859
92	0,33494	0,20281
93	0,37540	0,22392
94	0,41997	0,24002
95	0,46845	0,26117
96	0,52043	0,26971
97	0,57523	0,27627
98	0,63186	0,32732
99	0,68901	0,32853
100	1,00000	1,00000

életkor	magyar női tábla	előrejelzett női tábla
70	0,02312	0,02173
71	0,02570	0,02328
72	0,02849	0,02615
73	0,03163	0,02788
74	0,03530	0,03008
75	0,03964	0,03335
76	0,04760	0,03684
77	0,05174	0,04036
78	0,05659	0,04402
79	0,06228	0,04798
80	0,06894	0,05307
81	0,07673	0,05732
82	0,08583	0,06185
83	0,09643	0,06724
84	0,10877	0,07365
85	0,12309	0,08461
86	0,13968	0,09289
87	0,15882	0,10405
88	0,18084	0,11526
89	0,20604	0,12764
90	0,23476	0,14255
91	0,26726	0,16246
92	0,30380	0,16503
93	0,34453	0,17126
94	0,38949	0,18399
95	0,43852	0,19939
96	0,49128	0,22329
97	0,54712	0,24873
98	0,60512	0,27494
99	0,66401	0,30097
100	1,00000	1,00000

A fenti táblázatokban található értékeket felhasználva meghatároztam, hogy a 2010-ben adott korú, nemű és számú egyed közül melyik életkorban átlagosan hányan lesznek még életben. A kapott adatok a 2.16-2.18 táblázatokban találhatók, amelyben összehasonlításképpen láthatjuk a 2005-ös magyar táblából kiszámolt értékeket is. Megfigyelhető, hogy mindhárom korosztály esetén a férfiaknál a szimulált értékek 80-85 éves korig nagyobb, még utána kisebb halálozási intenzitást mutatnak, mint a magyar értékek. A nők esetében a szimulált értékek mindhárom korosztály esetében sokkal kedvezőbbek.

Ezen értékek felhasználásával kiszámoltam a 2010-ben belépő emberek várható hátralévő élettartamát, melyet az alábbi képlet segítségével lehet meghatározni:

$$e_x = \frac{l_x + l_{x+1} + ... + l_{100}}{l_x} - \frac{1}{2} \,,$$

ahol e_x jelöli az x éves egyén várható hátralévő élettartamát, l_x pedig az x életkort elért egyedek számát.

2.15. táblázat

2010-ben belépők várható hátralévő élettartama a különböző korosztályok és nemek esetében

	magyar tábla	**előrejelzett tábla**
65 éves férfi	13,11	13,23
65 éves nő	16,89	18,80
68 éves férfi	11,50	11,58
68 éves nő	14,63	16,58
70 éves férfi	10,42	10,54
70 éves nő	13,12	15,16

Jól látható, hogy a várható hátralévő élettartam minden esetben magasabb az előrejelzett értékek esetében. Az eltérés főleg a nőknél szembetűnő. Azzal, hogy ez az eltérés mennyivel több járadék kifizetését eredményezi a 4. fejezetben fogok foglalkozni.

2.16. táblázat

2010-ben 65 éves férfiak illetve nők elhalálozásának ütemére vonatkozó adatok fejlődése összehasonlítva a 2005-ös magyar értékekkel

életkor	magyar férfi tábla	előrejelzett férfi tábla
65	500	500
66	483	482
67	466	464
68	448	445
69	429	425
70	410	406
71	391	386
72	371	365
73	350	344
74	330	322
75	309	301
76	288	280
77	265	259
78	243	237
79	222	216
80	201	197
81	181	178
82	161	160
83	142	143
84	124	126
85	107	111
86	90	96
87	75	82
88	61	70
89	48	59
90	36	49
91	27	40
92	19	32
93	12	25
94	8	19
95	5	14
96	2	11
97	1	8
98	0	5
99	0	4
100	0	2

életkor	magyar női tábla	előrejelzett női tábla
65	500	500
66	493	493
67	485	485
68	477	477
69	468	468
70	458	459
71	447	449
72	436	439
73	423	427
74	410	415
75	396	403
76	380	389
77	362	376
78	343	361
79	324	346
80	304	331
81	283	314
82	261	296
83	239	278
84	216	259
85	192	239
86	168	219
87	145	197
88	122	176
89	100	157
90	79	138
91	61	120
92	44	103
93	31	86
94	20	70
95	12	56
96	7	43
97	4	32
98	2	23
99	1	16
100	0	11

2.17. táblázat

2010-ben 68 éves férfiak illetve nők elhalálozásának ütemére vonatkozó adatok fejlődése összehasonlítva a 2005-ös magyar értékekkel

életkor	**magyar férfi tábla**	**előrejelzett férfi tábla**
68	280	280
69	268	268
70	257	256
71	244	243
72	232	230
73	219	217
74	206	204
75	193	190
76	180	176
77	166	162
78	152	149
79	139	136
80	126	123
81	123	110
82	101	98
83	89	87
84	78	77
85	67	67
86	56	58
87	47	49
88	38	42
89	30	35
90	23	29
91	17	24
92	12	19
93	8	15
94	5	12
95	3	9
96	1	7
97	1	5
98	0	3
99	0	2
100	0	1

életkor	**magyar női tábla**	**előrejelzett női tábla**
68	320	320
69	314	314
70	307	308
71	300	301
72	293	294
73	284	287
74	275	279
75	266	270
76	255	261
77	243	251
78	230	241
79	217	231
80	204	220
81	190	209
82	175	197
83	160	185
84	145	173
85	129	160
86	113	143
87	97	132
88	82	119
89	67	105
90	53	91
91	41	78
92	30	67
93	21	56
94	14	47
95	8	38
96	5	30
97	2	23
98	1	17
99	0	12
100	0	8

2.18. táblázat

2010-ben 70 éves férfiak illetve nők elhalálozásának ütemére vonatkozó adatok fejlődése összehasonlítva a 2005-ös magyar értékekkel

életkor	**magyar férfi tábla**	**előrejelzett férfi tábla**
70	150	150
71	143	142
72	136	135
73	128	128
74	121	120
75	113	112
76	105	104
77	97	96
78	89	88
79	81	80
80	74	72
81	66	64
82	59	57
83	52	51
84	45	44
85	39	38
86	33	33
87	27	28
88	22	24
89	17	20
90	13	16
91	10	13
92	7	11
93	5	8
94	3	6
95	2	5
96	1	4
97	0	3
98	0	2
99	0	1
100	0	1

életkor	**magyar női tábla**	**előrejelzett női tábla**
70	250	250
71	244	245
72	238	239
73	231	233
74	224	226
75	216	219
76	207	212
77	198	204
78	187	196
79	177	187
80	166	178
81	154	169
82	142	159
83	130	149
84	118	139
85	105	129
86	92	118
87	79	107
88	67	96
89	55	85
90	43	74
91	33	63
92	24	53
93	17	44
94	11	37
95	7	30
96	4	24
97	2	19
98	1	14
99	0	10
100	0	7

3. fejezet - Ingatlanárak sztochasztikus modellje

3.1. fejezet - Bevezetés

A lakásért életjáradék termék másik jelentős kockázata az ingatlanárak változása, hiszen az életjáradék folyósításának kezdete és az értékesítés időpontja között 15-20 év is eltelhet, amely során az ingatlanárak nagymértékű változáson mehetnek keresztül. Emiatt gondoltam, hogy az ingatlanár változásának előrejelzésével is foglalkozom. Természetesen az ingatlanok értékének alakulását számos tényező befolyásolja, mint például az infláció mértéke, a munkanélküliségi ráta, az átagjövedelem. Egy minden külső hatást figyelembevevő modell használata túlnőlne a szakdolgozat keretein, ezért az előrejelzést Chen et al (2009) cikke alapján egy ennél egyszerűbb módon, mégpedig ARIMA és GARCH folyamatok segítségével valósítom meg.

Mivel magyar adatokat nem sikerült szereznem, ezért az USA-beli, úgynevezett House Price Index (HPI) 1980 első negyedévétől 2009 negyedik negyedévéig történő változását vettem alapul. A felhasznált HPI negyedévente került meghatározásra, és az ingatlanok átlagárának változását jelzi, mégpedig az 1980 első negyedéves értéket tekinti 100 egységnek és ehhez képest határozza meg a további adatokat. A következő eljárás magyar adatokra is hasonlóképpen alkalmazható lenne.

3.2. fejezet - A modell

1.lépés:

Jelölje X_t a House Price Indexek negyedévente adott idősorát. Ezek log-return sorozata legyen $Y_t = ln\, X_t - ln\, X_{t-1}$, amely a 3.1. ábrán látható. Első lépésben Y_t-re [2] alapján egy ARIMA folyamatot illesztek . Az ARIMA el-nevezés a következőt takarja:

Az ε_t folyamatot fehér zajnak nevezzü, ha $E(\varepsilon_t) = 0$, ε_t azonos eloszlású minden t-re és korrelálatlanok. Vagyis definíció szerint nem feltétlenül teljesül a függetlenség, de a továbbiakban fehér zaj alatt független értékű folyamatot fogok érteni. A folyamat autokovariancia-függvénye $R(0) = \sigma^2$, $R(t) = 0$ $(t \geq 1)$.

Az $X = \{X_t\}_t$ folyamatot p-edrendű autoregresszív folyamatnak nevezzük és $AR(p)$-vel jelöljük, amennyiben teljesíti a következő összefüggést:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + ... + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t \ ,$$

ahol ϕ_i-k a valós együtthatók, ϵ_t pedig fehér zaj. Az AR modellek igen közkedveltek egyszerűségük és a létező hatékony modellillesztési algoritmus miatt.

Az $X = \{X_t\}_t$ folyamatot q-adrendű mozgóátlag folyamatnak nevezzük és $MA(q)$-val jelöljük, amennyiben teljesül rá a következő összefüggés:

$$X_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + ... + \theta_q \varepsilon_{t-q} \ ,$$

ahol θ_i-k a valós együtthatók, ϵ_t pedig fehér zaj. Látható, hogy amíg az AR folyamat definíciója rekurzív, addig a MA folyamat definíciója explicit, melynek következtében néhány tulajdonsága, mint példál, hogy az autokovariancia és autokorrelációs függvényeknek pontosan az első q tagja nem nulla könnyen belátható.

Az $X = \{X_t\}_t$ folyamatot p és q rendű autoregresszív mozgóátlag folyamatnak nevezzük, ha létezik olyan $\epsilon = \{\varepsilon_t\}_t$ fehér zaj folyamat, melyre fennáll a következő:

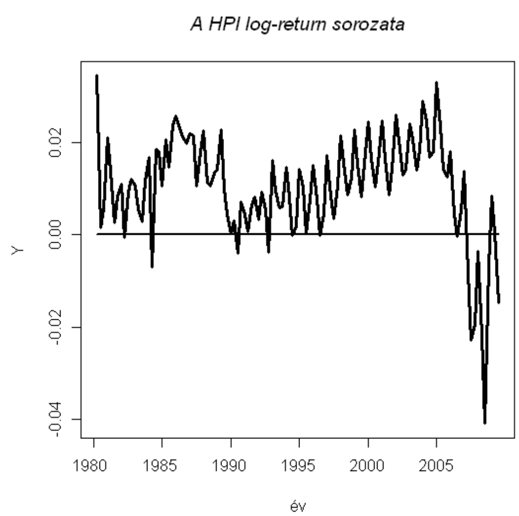
$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - ... - \phi_p X_{t-p} = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + ... + \theta_q \varepsilon_{t-q} \ ,$$

ahol ϕ_i-k és θ_j-k a valós együtthatók. Ezt a folyamatot $ARMA(p,q)$-val jelölük.

Az $\{X_t\}_t$ folyamatot $ARIMA(p,d,q)$ folyamatnak nevezzük, ha d-szeres differenciáltja ARMA folyamat. Ahogy azt fent említettem, első lépésben Y_t-re [2] alapján egy $ARIMA(2,1,0)$ folyamatot illesztek. Így dY_t -re a következő összefüggés áll fenn:

$$dY_t = \phi_1 dY_{t-1} + \phi_2 dY_{t-2} + \varepsilon_t \ ,$$

ahol ϕ_1 és ϕ_2 valós együtthatók, ε_t fehér zaj, mégpedig $\varepsilon_t \mid \Phi_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$, ahol Φ_{t-1} a $t-1$ időpontig összegyűlt információk halmaza.



3.1. ábra

2.lépés:

Második lépésben az előbb bevezetett ε_t -re egy GARCH folyamatot illesztek. A GARCH elnevezés a következőt takarja:

Az $\{X_t\}_t$ folyamatot $GARCH(p,q)$ folyamatnak nevezzük, ha előáll $X_t = \sigma_t \mu_t$ alakban, ahol $\{\mu_t\}_t$ független, azonos eloszlás valószínűségi változó nulla várható értékkel, és

$$\sigma_t^2 = d + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2.$$

ε_t-re tehát egy $GARCH(1,1)$ folyamatot illesztek második lépésben, ami a fent bevezetett σ_t^2-re nézve a következőt jelenti:

$$\sigma_t^2 = d + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

Az illesztéseket az R programnyelv segítségével végeztem. A kapott együtthatókat a következő táblázat tartalmazza:

3.2. táblázat

paraméter	érték
ϕ_1	-0,2789
ϕ_2	-0,6679
d	1.5264e-05
α_1	0,2337
β_1	0,4735

3.lépés:

Harmadik lépésben az R programnyelv segítségével szimuláltam 10 000 darab GARCH folyamatot, amely a fent kiszámolt együtthatókkal rendelkezik, majd a kapott folyamatokat felhasználva szimuláltam 10 000 darab, a fent meghatározott együtthatókkal és az előbb megkapott GARCH reziduálisokkal rendelkező ARIMA folyamatot. Mivel a kapott ARIMA folyamatok negyedévenkénti értékeket tartalmaznak és nekem évenkénti értékekre van szükségem, így minden negyedik elemet véve ezen folyamatokból, a ritkított folyamatot használtam fel, mint előrejelzést az ingatlanárak jövőbeni fejlődésére vonatkozóan. Azért választottam ezt az eljárást, mert ha előrejelezném első lépésben a GARCH folyamat fejlődését, majd előrejelzést adnék a kapott reziduálisokkal az ARIMA folyamat jövőbeni fejlődésére, akkor a kapott értékek elég gyorsan a várható értékhez konvergálnának, és azt adnák eredményül pár lépés után. Természetesen itt is használhattam volna egy bonyolultabb módszert, mint ahogyan azt a halandósági adatok előrejelzésénél tettem, mégpedig, hogy véletlenítem az ingatlanárak fejlődését.

A 10 000 darab szimulált Y_t log-return sorozat segítségével meghatároztam egyesével a 10 000 darab HPI alakulását a következő módon:

$$HPI_t = e^{\sum_{i=1}^{t} Y_i}$$

A szimuláció és egyéb számítások a függelékben megtalálhatóak.

4. fejezet - Az életjáradék kiszámítása

Amint arról már szó volt a bevezetésben, lakásért életjáradék termék lényege, hogy a lakóingatlan tulajdonjogának átruházása fejében a volt tulajdonos (nevezzük őt innentől kezdve átruházónak) élete végéig havonta előleges életjáradékot kap, melynek értéke inflációkövető. Ebben a fejezetben ennek az életjáradéknak egy lehetséges számítási módját mutatom be.

A folyósító cég számára a bevételt a lakásnak az - átruházó halála utáni - értékesítése hozza. Így a bevétel várható értéke:

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i_t)^t} \cdot H_t \cdot q_{x,t} \ ,$$

ahol H_t az ingatlan előrejelzett értéke a t időpontban
i_t = a t időpontban használt diszkonttényező
$q_{x,t}$= annak a valószínűsége, hogy az x éves átruházó meghal $x+t-1$ és $x+t$ éves kora között

Jelölje H_1 az ingatlan átruházáskori értékét, melyet egy értékbecslő meghatároz. Feltettem az egyszerűség kedvéért, hogy a 2010-ben csatlakozó 2 000 szerződő ember ingatlana kezdetben 10 millió forintot ér. Majd az előző fejezetben előrejezett HPI segítségével meghatároztam, hogy az elkövetkező években H_t értéke eszerint hogyan alakul.

Az i_t értékének alapjául a Pénzügyminisztérium által 2010. március 29-én nyilvánosságra hozott 35 éves időszakra terjedő diszkontrátasort használtam. Ezen értékek az alábbi táblázatban láthatóak:

4.1. táblázat

év	diszkontráta
2011	5,52%
2012	5,73%
2013	6,05%
2014	6,21%
2015	6,38%
2016	6,33%
2017	6,26%
2018	6,18%
2019	6,11%
2020	6,03%
2021	5,87%
2022	5,66%
2023	5,48%
2024	5,32%
2025	5,19%
2026	5,07%
2027	4,96%
2028	4,87%
2029	4,78%
2030	4,70%
2031	4,63%
2032	4,57%
2033	4,51%
2034	4,46%
2035	4,41%
2036	4,37%
2037	4,32%
2038	4,28%
2039	4,25%
2040	4,21%
2041	4,18%
2042	4,15%
2043	4,12%
2044	4,10%

A kiadás oldalon a kifzetett járadékok állnak. Így a kiadás várható értéke:

$$J \cdot \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{(1+m)^t}{(1+i_t)^t} \cdot p_{x,t} \right),$$

ahol $J =$ a járadék kiinduláskori értéke

$m =$ az indexálás mértéke

i_t a fent bevezetett diszkontrátasor

$p_{x,t}=$ annak a valószínűsége, hogy az x éves átruházó megéli az $x+t$ életkort, erre $p_{x,0} = 1$, hiszen a szerződéskötéskor biztosan életben van az átruházó.

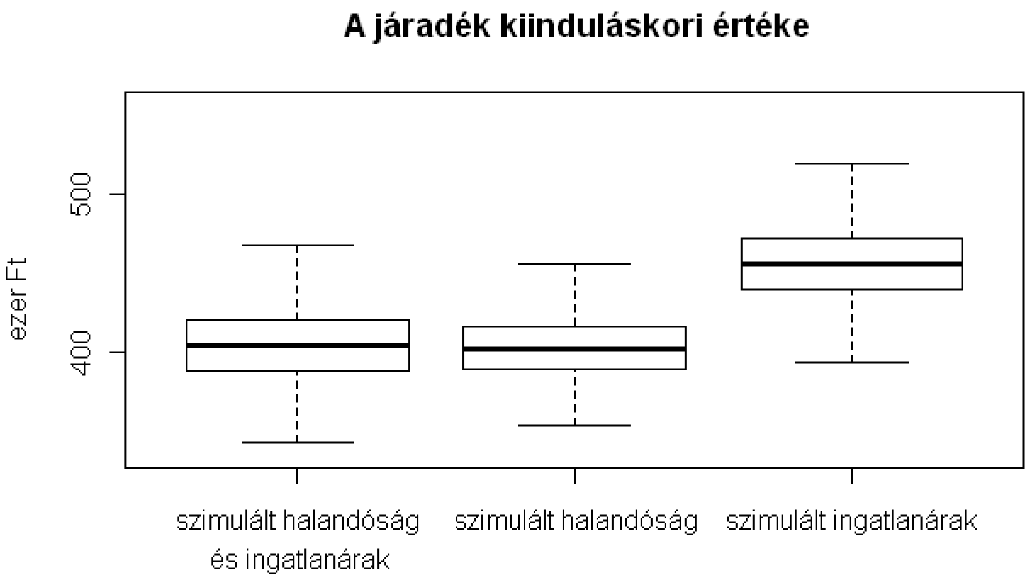
Magyarországon az átruházónak kifizetett életjáradék értéke évenként indexálódik az infláció mértékével. Természetesen az infláció előrejelzésére is számos sztochasztikus modellt megalkottak már, én most az egyszerűség kedvéért nem teszem fel a járadékról, hogy inflációkövető, hanem ehelyett m értékét 5%-nak választva meghatározom, mekkora lehet J értéke, hogy 95%-os valószínűséggel elegendő legyen a bevétel a kiadások teljesítésére.

Ennek érdekében a 2.16-2.18 táblázatokban található értékeket felhasználva véletlenítettem azt az időpontot, amikor a 2 000 ember elhalálozik. A véletlenítést korosztályonként és nemenként 10 000-szer végeztem el a függelékben található program segítségével. Ehhez hozzávéve a 10 000 szimulált ingatlanár fejlődését leíró adatot és felhasználva, hogy J értéke a következő egyenletből meghatározható:

$$J = \frac{\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i_t)^t} \cdot H_t \cdot q_{x,t}}{\sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{(1+m)^t}{(1+i_t)^t} \cdot p_{x,t} \right)}$$

kaptam 10 000 különböző értéket a kiinduláskori járadék értékére vonatkozóan. A képletben szereplő p-ket és q-kat nem- és korcsoportonként különkülön becsültem vissza minden egyes szimuláció esetén.

Annak érdekében, hogy látható legyen a szimulált ingatlanárak hatása a kiinduláskori járadék értékére nézve, készítettem példaképp a következő, 4.3. ábrán található box-plotot, mely a belépéskor 65 éves nőkre vonakozik. Teljesen hasonló ábra adódik a férfiak, illetve a többi korosztály esetén is.



4.2.ábra

A fenti ábra jobb oldali box-plotján látható, hogy ha csak az ingatlanárakat szimulálom és a halandóság változásával nem foglalkozom, akkor magasabb lesz a kiinduláskori járadék értéke, hiszen nem veszem figyelembe azt, hogy a halandósági adatok javulnak a jövőben. A bal oldali, illetve középső ábra alapján pedig az mondható, hogy ha a halandóság javulása mellé az ingatlanárak változását is hozzáveszem a szimuláció során, akkor a járadék szórása nagyobb. Ugyanez mondható a medián értékére is, tehát a szimulált ingatlanárak az ingatlanok értékének növekedésével számolnak.

Annak érdekében, hogy látható legyen, a halandóság javulása milyen hatással van a kifizetett járadékok várható értékére készítettem a következő 4.4. és 4.5. táblázatot, ahol azt láthatjuk, hogy 1 Ft kiinduláskori járadék esetén 5%-os indexálás figyelembevételével mekkora lesz a különböző nemek és korcsoportok esetén a várható kifizetés nagysága.

4.3. táblázat

A várható kifizetés nagysága a halandóság javulásának figyelembevételével

	65 év	68 év	70 év
férfi	32,04	28,38	26,05
nő	33,41	29,77	27,42

4.4. táblázat

A várható kifizetés nagysága a 2005-ös halandósági tábla alapján

	65 év	68 év	70 év
férfi	29,65	26,13	23,89
nő	30,70	27,08	24,78

A fenti táblázatokból jól látható, hogy a halandóság javulása jelentős hatással van a várható kifizetés nagyságára.

Következő lépésként a fentiekben szimulált ingatlanárak és véletlenített elhalálozások által meghatározott 10 000 darab kiinduláskori járadék közül vettem az 500. legkisebbet, hogy teljesüljön amit feltettem, mégpedig, hogy 95% valószínűséggel elég legyen a bevétel a kiadások teljesítésére. Ezt a folyamatot mindhárom korosztályra és nemre elvégeztem, és a következő J értékeket kaptam:

4.5. táblázat

A kiinduláskori járadék értéke koronként és nemenként szimuláció alkalmazásával

	65 év	68 év	70 év
férfi	535 873	626 712	679 278
nő	366 905	431 836	482 371

Fontos, hogy a számítások egyszerűsítése érdekében a kvantiliseket különkülön határoztam meg az egyes nem- és korcsoportokra. Látható, hogy a férfiak esetében a kiinduláskori járadék értéke minden esetben több, hiszen ők várhatóan rövidebb ideig fognak élni. Ugyanez a jelenség figyelhető meg a kor előrehaladtával is.

A következő táblázatban található J értékeket úgy határoztam meg, hogy ugyanúgy 5%-os éves indexálással számoltam, viszont nem használtam szimulációt, a halandósági adatokat a 2005-ös magyar halandósági táblázatból vettem, továbbá az ingatlan értékének esetleges változásával sem számoltam, ahogyan azt az életjáradékot folyósító vállalatok többsége teszi.

4.6. táblázat

A kiinduláskori járadék értéke koronként és nemenként szimuláció alkalmazása nélkül.

	65 év	68 év	70 év
férfi	839 146	1 018 034	1 161 196
nő	663 896	816 762	940 904

Az adatok között ugyanazok az összefüggések fedezhetőek fel, mint az előző esetben, viszont látható, hogy majdnem duplája minden esetben a kiinduláskori járadék értéke az előrejelzések segítségével kapott értékeknek. Így láthatóan jóval nagyobb járadékot határoz meg az az életjáradékot folyósító cég, amelyik nem számol a halandóság javulásával, az ingatlanárak változásával, illetve várható érték elvvel kalkulál.

Ebből is látszik, hogy ezek fontos tényezők, melyeket számításba kell venni a járadék meghatározásakor, hiszen jelentősen hatással vannak az összkifizetésre. Ezért az lakásért életjáradékot kínáló vállalatoknak mindenképpen figyelembe kellene vennie ezeket a tényezőket is a kalkulációjuk során, mert könnyen a csőd szélére kerülhetnek, ha nem számolnak velük.

5. fejezet - Összefoglalás

A szakdolgozat célja az volt, hogy megmutassuk, a halandóság javulása, illetve az ingatlanárak változása milyen hatással van a lakásért életjáradék terméket igénybevevőknek kifizetett járadék értékére.

Ennek érdekében első lépésként kerestünk olyan múltbéli külföldi halandósági táblákat, melyek „hasonlítanak" a jelenlegi magyar táblázatokhoz. Majd a magyar adatok jövőbeni fejlődéséről feltettük, hogy a múltbéli táblázat fejlődésével analóg lesz. Feltettük továbbá, hogy 2010-ben 2 000 ember igénybeveszi a lakásért életjáradék terméket. Ezen embereket 6 különböző csoportba osztottuk korosztályok és nemek alapján, majd a különböző csoportokra külön-külön összehasonlítottuk a 2005-ös magyar halandósági táblában szereplő, illetve és az előrejelzett tábla alapján meghatározott halandósági valószínűségeket. Ennek segítségével meghatároztuk, hogy az előrejelzett adatok milyen hatással vannak a várható hátralévő élettartamra, és azt találtuk, hogy az előrejelzett adatok esetén a hátralévő élettartam mind a hat csoport esetén nagyobb lett.

Majd ezek segítségével kiszámoltuk, hogy a 2010-ben induló 2 000 ember közül az előrejelzések szerint hány éves korban mennyi marad életben. Ezt szintén összehasonlítottuk a 2005-ös magyar halandósági táblákból kiszámolt értékekkel.

Következő lépésként az ingatlanárak változását szimuláltuk ARIMA és GARCH folyamatok segítségével, mégpedig úgy, hogy múltbéli ingatlanárak változásával kapcsolatos adatokból kapott sorozatra első lépésként ARIMA folyamatot illesztettünk, majd az így kapott folyamat reziduálisait pedig GARCH folyamattal modelleztük. Az illesztések során adódó együtthatók segítségével szimuláltunk 10 000 különböző ingatlanár jövőbeli fejlődésére vonatkozó idősort.

Majd véletlenítettük azt az időpontot, amikor a 2 000 ember elhalálozik. Ezt a véletlenítést korosztályonként és nemenként végeztük el.

Azután bemutattuk az életjáradék egy lehetséges számítási módját, és ennek segítségével megvizsgáltuk, hogy a szimulált ingatlanárak milyen hatással vannak a kiinduláskori járadék értékére nézve. Azt találtuk, hogy ha csak az ingatlanárakat szimuláltuk és a halandóság változásával nem foglalkoztunk, akkor magasabb lett a kiinduláskori járadék értéke, hiszen nem vettük figyelembe azt, hogy a halandósági adatok javulnak a jövőben. Továbbá, ha a halandóság javulása mellé az ingatlanárak változását is hozzávettük a szimuláció során, akkor a járadék szórása nagyobb lett, ugyanígy a medián értéke is, tehát azt tapasztaltuk, hogy a szimulált ingatlanárak az ingatlanok értékének növekedésével számoltak.

Annak érdekében, hogy látható legyen, az előrejelzett halandósági adatok milyen hatással vannak a kifizetett járadékok várható értékére készítettünk egy összehasonlítást, melyben az látható, hogy 1 Ft kiinduláskori járadék esetén 5%-os indexálás figyelembevételével mekkora lett a különböző nemek és korcsoportok esetén a várható kifizetés nagysága. Ebből levontuk azt a következtetést, hogy a halandóság javulásának hatására a várható kifizetés igencsak megnőtt.

Utolsó lépésként pedig a fentiekben említett szimulált ingatlanárak és véletlenített elhalálozások által meghatározott 10 000 darab kiinduláskori járadék közül vettük az 500. legkisebbet, hogy teljesüljön az a reális feltétel, hogy 95% valószínűséggel elég legyen a bevétel a kiadások teljesítésére. Ezt is minden csoportra elvégeztük és azt kaptuk, hogy ha nem számoltunk a halandóság javulásával, az ingatlanárak változásával, és várható érték elvvel kalkuláltunk, akkor majdnem duplája lett minden esetben a kiinduláskori járadék értéke az előrejelzések segítségével kapott értékeknek, így jelentősen több lenne az összkifizetés a portfólión.

Következtetésképpen elmondható, hogy a vizsgált tényezők valóban jelentős hatással vannak a kifizetésekre, így semmiképp nem szabadna őket figyelmen kívül hagynia az olyan vállalatoknak, akik a lakásért életjáradék termék értékesítésével foglalkoznak.

Hivatkozások

[1] Arató Miklós, Zempléni András, Bozsó Dávid, Elek Péter (2008), *Forecasting and simulating mortality tables, Mathematical and Computer Modelling 49 (2009) 805-813*

[2] Hua Chen, Samuel H. Cox, Shaun S. Wang (2009), *Is the Home Equity Conversion Mortgage in the United States sustainable? Evidence from pricing mortgage insurance premiums and non-recourse provisions using the conditional Esscher transform, Mathematics and Economics 46 (2010) 371-384*

[3] Márkus László, *Az ELTE-n elhangzott Idősorok című előadásának anyaga*

[4] René A. Carmona (2004), *Statistical Analysis of Financial Data in S-Plus, Springer-Verlang New-York*

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani Arató Miklósnak, aki szakmai tanácsokkal, segédanyagokkal látott el engem, és mindig szakított rám időt, ahányszor csak segítségre volt szükségem.

Köszönöm továbbá Mályusz Károlynak, hogy elvárta rendszeres bemutatását eredményeimnek, ezzel ösztönözve arra, hogy időben elkészüljek a szakdolgozat megírásával.

Függelék

ARIMA illetve GARCH folyamat illesztése, előrejelzett ingatlanárak szimulálása

```
y<-ts(HPI)
m<-arima(y,order=c(2,1,0))
szigman<-m$residuals
g<-garch(szigman,order=c(1,1))
MIN<-65 # minimális életkor
MAX<-100 #maximális életkor
ITERATIONS<-5000
CUT<-100
FREK<-4
SAMPLESIZE<-(MAX-MIN+1)*4+CUT

garch<-matrix(nrow=SAMPLESIZE,ncol=ITERATIONS)
for (i in 1:ITERATIONS)
garch[,i]<-garch.sim(n=SAMPLESIZE,alpha=c(g$coef[1],g$coef[2]),beta=g$coef[3])

arima<-matrix(nrow=SAMPLESIZE,ncol=ITERATIONS)
for (i in 1:ITERATIONS)
arima[,i]<-arima.sim(n=SAMPLESIZE, list(ar = c(m$coef[1], m$coef[2]),
ma = c(0,0)),innov=garch[,i])
cutarima<-matrix(nrow=(MAX-MIN+1)*4,ncol=ITERATIONS)
for (i in 1:ITERATIONS)
cutarima[,i]<-arima[,i][(CUT+1):SAMPLESIZE]

ingatlan<-matrix(nrow=(MAX-MIN+1)*4,ncol=ITERATIONS)
for (i in 1:((MAX-MIN+1)*4))
for (j in 1:ITERATIONS)
ingatlan[i,j]<-exp(sum(cutarima[,j][1:i]))

ritkingatlan<-matrix(nrow=(MAX-MIN+1),ncol=ITERATIONS)
for (i in 1:ITERATIONS)
ritkingatlan[,i]<-ingatlan[,i][1:(((MAX-MIN+1)*4)/FREK)*FREK]
```

előrejelzett halandósági adatok szimulálása

```
SAMPLESIZE<-500 # az adott korú és nemű egyedből
hány darab van jelen a portfólióban
sumq<-vector()
for(i in 1:(MAX-MIN+1))
sumq[i]<-sum(q65m[1:i])

rminta<-matrix(nrow=SAMPLESIZE,ncol=ITERATIONS)
for (j in 1:ITERATIONS)
rminta[,j]<-runif(SAMPLESIZE,0,1)

a<-matrix(nrow=(MAX-MIN+1),ncol=ITERATIONS)
for(i in 1:(MAX-MIN+1))
for (j in 1:ITERATIONS)
a[i,j]<-sum(rminta[,j]<sumq[i])

c<-matrix(nrow=(MAX-MIN),ncol=ITERATIONS)
for (i in 1:(MAX-MIN))
for (j in 1:ITERATIONS)
c[i,j]<-a[i+1,j]-a[i,j]

velhal<-matrix(nrow=(MAX-MIN+1),ncol=ITERATIONS)
for (j in 1:ITERATIONS)
velhal[,j]<-c(a[1,j],c[,j])  # megadja, hogy a mintában szereplő (min és max életkor
közötti) egyedek közül melyik hány évesen fog meghalni

d<-matrix(nrow=(MAX-MIN+1),ncol=ITERATIONS)
for (j in 1:ITERATIONS)
d[1,j]<-SAMPLESIZE
for (i in 2:(MAX-MIN+1))
for (j in 1:ITERATIONS)
d[i,j]<-d[i-1,j]-velhal[i-1,j]  #megadja, hogy az adott számú és korú egyed közül
hány éves korban mennyi marad életben
```

```
q<-matrix(nrow=(MAX-MIN+1),ncol=ITERATIONS)
for (i in 2:(MAX-MIN))
for (j in 1:ITERATIONS)
q[i,j]<-(d[i-1,j]-d[i,j])/d[i-1,j]
for (j in 1:ITERATIONS)
q[MAX-MIN+1,j]<-1
for (j in 1:ITERATIONS)
q[1,j]<-0

p<-matrix(nrow=(MAX-MIN+1),ncol=ITERATIONS)
for (i in 1:(MAX-MIN+1))
for (j in 1:ITERATIONS)
p[i,j]<-1-q[i,j]
```

kiinduláskori járadék értékének meghatározása az előre-jelzett halandósági adatok és szimulált ingatlanárak segítségével

```
PRICE<-10 000 000
bevetel<-matrix(nrow=(MAX-MIN+1),ncol=ITERATIONS)
for (i in 1:(MAX-MIN+1))
for (j in 1:ITERATIONS)
bevetel[i,j]<-(ritkingatlan[i,j]*q[i,j])/(1+hozam[i])^(i-1)

osszbevetel<-vector()
for (i in 1:ITERATIONS)
osszbevetel[i]<-sum(bevetel[,i])*PRICE

m<-0.05
kiadas<-matrix(nrow=(MAX-MIN+1),ncol=ITERATIONS)
for (i in 1:(MAX-MIN+1))
for (j in 1:ITERATIONS)
kiadas[i,j]<-(p[i,j]*(1+m)^(i-1))/(1+hozam[i])^(i-1)
```

```
osszkiadas<-vector()
for (i in 1:ITERATIONS)
osszkiadas[i]<-sum(kiadas[,i])

jaradek<-vector()
for (i in 1:ITERATIONS)
jaradek[i]<-osszbevetel[i]/osszkiadas[i]
sort(jaradek)[ITERATIONS*0.05]
```