Szubmoduláris függvények és alkalmazásaik

Fehér Borbála
Matematikus szak

Témavezető:
Frank András
Egyetemi tanár
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Operációkutatási Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2011

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Frank Andrásnak, hogy betekintést nyújtott a matematika eme érdekes fejezetébe és elősegítette ezen dolgozat létrejöttét.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A gráfok összefüggősége, vagy a minimális vágás mérete és egyéb tulajdonságaik régóta kutatott téma. A gráfok sok tulajdonsága kifejezhető a gráf fokszámfüggvényének segítségével. A fokszámfüggvényre mint egy $d : 2^V \to \mathbb{R}_+$ halmazfüggvényre gondolva felvetődik a kérdés, hogy gráfok némely ismert tulajdonsága, illetve az azokkal kapcsolatos hasznosnak bizonyult tételek és eljárások, nem általánosíthatóak-e bizonyos halmazfüggvényekre, amelyek valamilyen értelemben hasonlóak a gráfok fokszámfüggvényéhez. Mint később látni fogjuk, egy irányítatlan élsúlyozott gráf fokszámfüggvénye (nemnegatív élsúlyok esetén) *szimmetrikus* és *szubmoduláris* halmazfüggvény. Ez az a két tulajdonság, ami mentén megkísérelték az általánosítást, és kiderült, hogy mivel sok gráfelméleti megfigyelés és tétel valójában nem használ ki többet a fokszámfüggvény tulajdonságaiból, mint a szimmetrikusságot és szubmodularitást, számos fogalom, állítás és módszer átvihető erre függvény osztályra.

Ugyanakkor a szimmetrikus szubmoduláris függvények osztálya valójában egy bővebb függvény osztály, mint az irányítatlan élsúlyozott gráfok fokszámfüggvényei, azaz van olyan f szimmetrikus szubmoduláris függvény, melyekhez nem létezik olyan gráf, melynek f a fokszámfüggvénye. Sőt, kiderül, hogy a vizsgált állítások egy része nem is csak a szimmetrikus szubmoduláris függvények osztályában, hanem még egy ennél bővebb függvény osztályban (a szubmoduláris és pozimoduláris függvények osztályában) is teljesül. Ennek az általánosításnak az egyik jelentőségét pedig az adja, hogy sok gráfelméleti tétel bizonyítása visszavezethető szubmoduláris és pozimoduláris függvényekkel kapcsolatos kérdések megoldására. Kiderül, hogy bizonyos a gráfelméletben használt kifejezésre, mennyiségre, melyeknek egy-egy gráfelméleti probléma megoldása során például a minimális értékére vagyunk kíváncsiak, valójában gondolhatunk úgy, mint egy $f : 2^V \to \mathbb{R}$ szubmoduláris és pozimoduláris halmazfüggvényre. Így a dolgozatban ismertetett eredmények általános módszereket adnak az ilyen esetekben például a minimum megtalálására.

Szakdolgozatomban tehát azzal kapcsolatban szeretnék egy összefoglalást nyújtani, hogy melyek azok a gráfelméleti fogalmak amelyeknek konstruálható megfelelője szimmetrikus szubmoduláris vagy szubmoduláris és pozimoduláris függvények esetében is, illetve hogy milyen tételek és algoritmusok ismertek az ezekbe a függvény osztályokba tartozó függvényekkel kapcsolatos különböző problémák megoldására.

2. Jelölések és alapfogalmak

2.1. Gráfelméleti alapfogalmak

Legyen $(G = (V, E), w)$ irányítatlan, hurokmentes élsúlyozott gráf (párhuzamos élek lehetnek a gráfban), melynek V a csúcshalmaza (jelölje $n = |V|$ a csúcsok számát), $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$ az élhalmaza, és $w : E \to \mathbb{R}_+$ a nemnegatív súlyfüggvény az élhalmazon.

Jelölje $d(X, Y; G)$ az $X - Y$ és az $Y - X$ halmazok között vezető élek össz-súlyát. Amennyiben egyértelmű, hogy mely G gráfról van szó, a rövidebb $d(X, Y)$ jelölést fogjuk használni.

Legyen $d(X; G) = d(X) := d(X, V - X)$, vagyis az X halmaz foka. Az előbb definiált $d : 2^V \to \mathbb{R}$ halmazfüggvényt nevezzük a gráf fokszámfüggvényének.

Könnyű számolással belátható, hogy

$$d(X) + d(Y) = d(X \cap Y) + d(X \cup Y) + 2d(X, Y), \tag{1}$$

illetve

$$d(X) + d(Y) = d(X - Y) + d(Y - Y) + 2\bar{d}(X, Y) \tag{2}$$

teljesül minden $X, Y \subseteq V$ halmaz párra, ahol $\bar{d}(X, Y) = d(X, V - Y)$, az $X \cap Y$ és a $V - (X \cup Y)$ között vezető élek össz-súlyát jelöli.

A G gráfban az X és a $V - X$ halmazok között vezető élek halmazára az $E(X, V - X; G)$ jelölést fogjuk használni.

$\Gamma(X)$ jelöli a gráfban azon $V - X$-béli pontok halmazát, amelyek az X halmaz valamely elemével össze vannak kötve.

Egy $G = (V, E)$ gráf egy feszítő fája alatt egy olyan $T = (V; F)$ fa, ami az eredeti gráf összes csúcsát tartalmazza, és élei az eredeti gráf élei közül valók.

2.2. Halmazfüggvények

Legyen V egy véges halmaz, jelölje $n = |V|$ a halmaz elemszámát. Legyen V egy véges halmaz (akár egy gráf csúcshalmaza). Egy $X \subseteq V$ részhalmaz és egy $v \in V$ elem (vagy csúcs) esetén az $X \cup \{v\}$ halmazra az $X + v$ jelölést fogjuk használni ott, ahol ez nem okozhat félreértést.

Legyen $X, Y \subseteq V$ két részhalmaz. Azt mondjuk, hogy X és Y *metsző* halmazok, (vagyis nem diszjunktak,) ha $X \cap Y$ nem üres. X és Y *átmetsző* halmazok, (az angol nyelvű szakirodalomban *intersecting*,) ha az $X - Y$, $Y - X$ és az $X \cap Y$ halmazok egyike sem üres. Végül X és Y *keresztező* halmazok, (az angol nyelvű szakirodalomban *crossing*,) ha átmetszőek, és $V - (X \cup Y)$ sem üres.

Egy $f : 2^V \to \mathbb{R}$ függvényt a V-n értelmezett *halmazfüggvénynek* mondunk, a (V, f) párt pedig, ahol V a véges alaphalmaz, f pedig a V-n értelmezett halmazfüggvény, *rendszernek* nevezzük.

2.1. Definíció. Egy f halmazfüggvény *szimmetrikus*, ha

$$f(X) = f(V - X)$$

teljesül minden $X \subseteq V$ halmazra.

Egy $z : V \to \mathbb{R}$ függvény (vagy egy $z \in \mathbb{R}^n$ vektor), kiterjeszthető egy $\tilde{z} : 2^V \to \mathbb{R}$ halmazfüggvénnyé a következő módon: legyen $X \subseteq V$ tetszőleges részhalmaza az alaphalmaznak, ekkor $\tilde{z}(X)$ a következő mennyiséget jelöli:

$$\tilde{z}(X) = \sum_{x \in X} z(x).$$

Az előbbi $z \in \mathbb{R}^n$ vagy $z : V \to \mathbb{R}$ által definiált $\tilde{z} : 2^V \to \mathbb{R}$ halmazfüggvény *moduláris* abban az értelemben, hogy

$$\tilde{z}(X) + \tilde{z}(Y) = \tilde{z}(X \cap Y) + \tilde{z}(X \cup Y)$$

fennáll minden X, $Y \subseteq V$ halmaz párra.

Ellenőrizhető, hogy minden moduláris hallmazfüggvény, amelynek az értéke az üres halmazon 0, előáll mint egy $m : V \to \mathbb{R}$ függvény $\tilde{m}$ kiterjesztése.

2.2. Definíció. Egy f halmazfüggvény *teljesen* (illetve átmetsző, keresztező) *szubmoduláris*, ha

$$f(X) + f(Y) \geq f(X \cap Y) + f(X \cup Y)$$

teljesül minden X, $Y \subseteq V$ halmaz párra (illetve minden átmetsző, minden keresztező halmaz párra).

A teljesen szubmoduláris függvényt röviden szubmodulárisnak mondjuk.

Legyen f és g két teljesen (illetve átmetsző, keresztező) szubmoduláris halmazfüggvény, könnyű megmutatni, hogy ekkor $h = f + g$ ($h(X) = f(X) + g(X)$ $\forall X \subseteq V$) is teljesen (illetve átmetsző, keresztező) szubmoduláris.

Egy f halmazfüggvény *teljesen* (illetve átmetsző, keresztező) *szupermoduláris*, ha a $-f$ halmazfüggvény teljesen (illetve átmetsző, keresztező) szubmoduláris.

2.3. Definíció. Egy f halmazfüggvény *teljesen* (illetve átmetsző, keresztező) *pozimoduláris*, ha

$$f(X) + f(Y) \geq f(X - Y) + f(Y - X)$$

teljesül minden X, $Y \subseteq V$ halmaz párra (illetve minden átmetsző, minden keresztező halmaz párra).

A teljesen pozimoduláris függvényt röviden pozimodulárisnak mondjuk.

Egy nemnegatív $z \in \mathbb{R}^n_+$ vektorra vagy $z : V \to \mathbb{R}_+$ függvényre a $\tilde{z} : 2^V \to \mathbb{R}_+$ halmazfüggvény teljesen pozimoduláris.

Legyen f egy teljesen (illetve átmetsző, keresztező) pozimoduláris és $\tilde{z}$ egy nemnegatív moduláris hallmazfüggvény, könnyű megmutatni, hogy ekkor $h = f + \tilde{z}$ ($h(X) = f(X) + \tilde{z}(X)$ $\forall X \subseteq V$) is teljesen (illetve átmetsző, keresztező) pozimoduláris.

Egy f halmazfüggvény *teljesen* (illetve átmetsző, keresztező) *negamoduláris*, ha a $-f$ halmazfüggvény teljesen (illetve átmetsző, keresztező) pozimoduláris.

Egy irányítatlan hurokmentes élsúlyozott gráf d fokszámfüggvénye természetesen szimmetrikus, és nemnegatív élsúlyok esetén szubmoduláris és pozimoduláris, amint az a (1) és a (2) azonosságból kiolvasható. Továbbá egy $H = (V, \mathcal{E})$ hipergráfra, melynek a hiperélein adott egy $w : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$ súlyfüggvény, a

$$d(X) = \sum \{w(E) \mid E \in \mathcal{E},\ E \cap X \neq \emptyset,\ E - X \neq \emptyset\}$$

képlettel definiált halmazfüggvény is szimmetrikus és szubmoduláris.

Egy szimmetrikus teljesen (illetve keresztező) szubmoduláris függvény teljesen (illetve keresztező) pozimoduláris, hiszen az f szimmetrikusságát és szubmodularitását használva kapjuk, hogy $f(X) + f(Y) = f(V - X) + f(Y) \geq f(Y - X) + f(V - (X - Y)) = f(Y - X) + f(X - Y)$. A megfordítás azonban nem igaz, egy teljesen (illetve keresztező) szubmoduláris és teljesen (illetve keresztező) pozimoduláris halmazfüggvény nem feltétlenül szimmetrikus. Mutatunk egy példát egy ilyen függvényre. Legyen $G = (V, E)$ élsúlyozott gráf, és legyen adott egy $b : V \to \mathbb{R}_+$ egy függvény a pontokon. Ekkor a $h_G(X) = d(X) + \tilde{b}(X)$ hallmazfüggvény szubmoduláris és pozimoduláris, mivel mind d, mind $\tilde{b}$ azok. Azonban h_G nem feltétlenül szimmetrikus, illetve b megválasztható úgy, hogy ne legyen az. Például $b \equiv 1$ választás esetén egy $\tilde{b}(X) = |X|$, és így $h_G(X) \neq h_G(V - X)$ amennyiben $|X| \neq |V - X|$.

3. Minimalizálás

A fejezet úgy épül fel, hogy minden a szubmoduláris függvényekkel kapcsolatos fogalomhoz áttekintjük először a gráfelméleti megfelelőjét és az ahhoz kapcsolódó állításokat és tételeket, különös figyelemmel arra, hogy a gráfokról elmondottakban hol használunk többet mint a fokszámfüggvény szimmetrikusságát vagy szubmodularitását. Ezek után pedig bemutatjuk a szimmetrikus szubmoduláris és az ezeknél általánosabb, pozimoduláris és szubmoduláris függvényekkel kapcsolatos eredményeket és konkrét algoritmusokat.

A szubmoduláris halmazfüggvények minimalizálási problémája a következőképpen adható meg: Legyen adott $(V,\ f)$ rendszer, ahol f egy szubmoduláris halmazfüggvény V-n. Keresünk egy X nem-üres valódi részhalmazt, amely minimalizálja f-et abban az értelemben, hogy $f(X) = min\,\{f(Y) \mid \emptyset \neq Y \subset V\}$.

3.1. Definíció. A (V, f) szubmoduláris rendszerre nézve *optimális megoldásnak* nevezünk egy X halmazt, ha $\emptyset \neq X \subset V$ és X minimalizálja az f függvényt. Az X *minimális* (illetve *maximális*) *optimális megoldás*, ha optimális megoldás, és nem létezik X' nem üres valódi részhalmaz, melyre $X' \subset X$ és X' optimális megoldás (illetve nem lépetik X'' nem-üres valódi részhalmaz, melyre $X \subset X''$ és X'' optimális megoldás).

A szubmoduláris függvények minimalizálási problémája régóta kutatott kérdés. Grötschel, Lovász és Schrijver [5] mutattak egy algoritmust, melynek segítségével polinomiális időben található megoldás. Iwata [6] és Schrijver [14] pedig egymástól függetlenül találtak erősen polinomiális futás-idejű kombinatorikus algoritmust szubmoduláris függvények minimalizálására.

Arra a speciális esetre, ha az f szubmoduláris függvényről megköveteljük, hogy szimmetrikus is legyen, Queyranne [13] mutatott egy egyszerű kombinatorikus algoritmus, amely minimalizálja f-et. Ez az algoritmus a Nagamochi és Ibaraki [10] nevéhez fűződő, egy gráf minimális vágásának megkeresésére szolgáló algoritmus általánosítása. Queyranne algoritmusának leírása előtt áttekintjük a gráf minimális vágásának megkeresésével kapcsolatos fogalmakat, észrevételeket és eredményeket is, mivel ezek adták az általános esetben használható megoldás ötletét.

3.1. Minimális vágás mint optimális megoldás

Jelölje $(G = (V,\ E),\ w)$ azt az irányítatlan, hurokmentes élsúlyozott gráfot (melyben párhuzamos élek azonban lehetnek), melynek V a csúcshalmaza (jelölje $n = |V|$ a csúcsok számát), $E \subseteq \{\{u,\ v\} \mid u,\ v \in V,\ u \neq v\}$ az élhalmaza, és $w :\ E \to \mathbb{R}_+$ egy nemnegatív súlyfüggvény az élhalmazon.

3.2. Definíció. Ha X egy nem-üres, valódi részhalmaza V-nek, akkor az X és $V - X$ komplementere között futó $E(X,\ V - X)$ élhalmazt a gráf egy *vágásának* nevezzük. Egy vágás *méretén* az az X és $V - X$ között futó élek össz-súlyát, vagyis a $\sum_{e \in E(X, V-X)} w(e) = d(X; G) = d(V - X; G)$ összeget értjük. Azt mondjuk, hogy az X és a $V - X$ halmazok a vágás két *partja*.

Legyenek S, $T \subseteq V$ részhalmazok. Azt mondjuk, hogy az X halmazhoz tartozó vágás (azaz az X és $V - X$ között futó élek halmaza) *szeparálja* S-et és T-t, ha az X halmaz szeparálja S-t és T-t, azaz $S \subseteq X \subseteq V - T$ vagy $T \subseteq X \subseteq V - S$, és ekkor az $E(X, V - X)$ élhalmazt (S, T)*-vágásnak* nevezzük. Amennyiben mind S, mind T egy-elemű halmaz, azaz az $\{s\}$ és a $\{t\}$ csúcsok, akkor az őket szeparáló vágásokat (s, t)*-vágásnak* nevezzük.

3.3. Definíció. *Minimális* (s, t)*-vágáson* egy olyan $E(X, V - X)$ vágást értünk, amely szeparálja az $\{s\}$ és a $\{t\}$ csúcsokat, és amelynek a mérete az (s, t)-vágások között minimális. A minimális (s, t)-vágás méretét, amely egyenlő $d(X)$-szel (amennyiben $E(X, V - X)$ a minimális (s, t)-vágás,) az s és a t pontok *(súlyozott) lokális él-összefüggőségének* nevezzük, és $\lambda(s, t; G)$-vel, vagy amennyiben egyértelmű, hogy mely G gráfról van szó, $\lambda(s, t)$-vel jelöljük.

Két pont (súlyozott) lokális élösszefüggősége ekkor a következőképpen fejezhető ki:

$$\lambda(s, t) := min \{d(S) \mid s \in S, t \in V - S\}.$$

Konvenció szerint tetszőleges $v \in V$ csúcsra $\lambda(v, v; G) = +\infty$.

Egy G irányítatlan, (hurokmentes) élsúlyozott gráfban

$$\lambda(u, w; G) \geq min \{\lambda(u, v; G), \lambda(v, w; G)\} \quad \forall u, v, w \in V. \tag{3}$$

A fenti egyenlőtlenség azért teljesül, mert minden $E(X, V - X)$ (u, w)-vágás egyben vagy (u, v)-vágás, vagy (v, w)-vágás is, attól függően, hogy v pont X-hez vagy $V - X$-hez tartozik-e.

3.4. Definíció. A G gráf egy *minimális vágásán* egy olyan $E(X, V - X)$ vágást értünk, melynek mérete minimális a G-ben található összes vágás mérete között. A minimális vágásnak a méretét a G *(súlyozott) élősszefüggőségének* nevezzük, és $\lambda(G)$ -vel jelöljük. Azaz $\lambda(G) := min_{s, t \in V} \lambda(s, t; G)$. Másrészt a $\lambda(s, t; G)$ meghatározására adott fenti képletet behelyettesítve kapjuk, hogy:

$$\lambda(G) := min \{d(S) \mid \emptyset \subset S \subset V\}.$$

A konvenció szerint az egyetlen pontból álló gráf élösszefüggősége $+\infty$.

3.5. Megjegyzés. Bár a gráfok esetében máshogyan vezettük be a vágás fogalmát, egy (V, f) rendszer esetében, ahol f szimmetrikus halmazfüggvény, vágásnak nevezhetünk egy $\emptyset \neq X \subset V$ halmazt, ahol a vágás méretén pedig az $f(X) = f(V - X)$ mennyiséget értjük. Amennyiben az X szeparálja az s és a t elemeket, akkor azt mondjuk hogy X egy (s, t)-vágás. Egy f-minimális (s, t)-vágás ekkor egy olyan X nemüres valódi részhalmazt jelent, amely minimalizálja f-et az (s, t)-vágások között, azaz amelyre teljesül, hogy

$$f(X) = min \{f(S) \mid s \in S, t \in V - S\}.$$

f-minimális vágáson, (vagy a 3.1 definíció szerint a $(V,\, f)$ rendszer egy optimális megoldásán) pedig egy olyan X nemüres valódi részhalmazt értünk, melyre $f(X) = min\,\{f(S) \mid \emptyset \neq S \subset V\}$. Amennyiben egyértelmű, hogy melyik f függvényről van szó, röviden minimális $(s,\, t)$-vágást, illetve minimális vágást fogunk írni.

Ez a jelölés összhangban van a fent leírtakkal, amennyiben a $G = (V,\, E)$ gráfot a 2.1 részben definiál $d\,:\, 2^V \to \mathbb{R}^+$ szimmetrikus halmazfüggvénnyel egy $(V,\, d)$ rendszernek tekintünk. Ekkor a G minimális vágásainak partjai megfelelnek a $(V,\, d)$ rendszer minimális d-vágásainak, vagyis az optimális megoldásoknak.

Megjegyeznénk továbbá, hogy így egy $(V,\, f)$ szimmetrikus rendszer esetében is definiálható két $s, t \in V$ elemre $\lambda_f(s,t) = min\,\{f(S) \mid s \in S,\ t \in V - S\}$. A 4. fejezetben még kitérünk arra, hogy az így általánosabban, $(V,\, f)$ szubmoduláris szimmetrikus rendszerekben definiált λ_f milyen tulajdonságait őrzi meg a lokális élösszefüggőségnek.

A következő részekben arról lesz szó, hogy miképp található meg egy optimális megoldás (illetve minimális vágás) egy f szimmetrikus szubmoduláris függvényre (speciális esetben pedig a d fokszámfüggvényre) nézve.

3.2. A max-vissza sorrend és kapcsolt párok

Jelöljön $G = (V,\, E)$ egy irányítatlan, hurokmentes, élsúlyozott gráfot. A G gráf pontjainak egy $\sigma = (v_1,\, v_2, \ldots,\, v_n)$ sorrendjére jelölje V_i az első i elemből álló ponthalmazt.

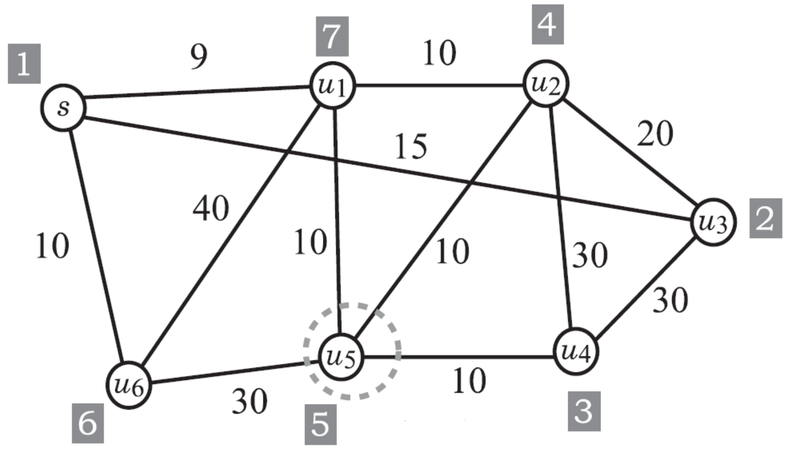
3.6. Definíció. A $\sigma = (v_1,\, v_2, \ldots,\, v_n)$ sorrend *max-vissza* vagy más néven *legális*, ha

$$d(v_i,\, V_{i-1};\, G) \geq d(v_j,\, V_{i-1};\, G)$$

fennáll minden $i,\, j$-re, melyekre $2 \leq i < j \leq n$ teljesül.

Egy ilyen sorrend kezdőpontjának, azaz v_1-nek tetszőleges gráfbeli pontot választhatunk. Miután $v_1,\, v_2, \ldots,\, v_{i-1}$-et már meghatároztuk, azt az $u \in V - V_{i-1}$-et válasszuk az i-edik pontnak, azaz v_i-nek, amelyből a legnagyobb össz-súlyú élhalmaz vezet V_{i-1}-be.

Például a következő ábrán látható G gráfban a $\sigma = (s,\, u_3, u_4\, u_2,\, u_5, u_6,\, u_1)$ sorrend egy max-vissza sorrend (a csúcsok sorrendjét a melléjük írt számok is jelzik).



A max-vissza sorrend fogalmát gráfokban Tarjan és Yannakakis [16] vezetéke be, de a gráfelméleti fogalom legjelentősebb alkalmazása Nagamochi és Ibaraki nevéhez köthető. Megmutatták, hogy a max-vissza sorrend egy hasznos tulajdonságára építve, hogyan találhatjuk meg egy gráf egy minimális vágását [11]. Az eljárást a 3.3 fejezetben mutatjuk be. A hasznos tulajdonság, amelyre algoritmusuk épül, a sorrend utolsó két pontjának „összekapcsoltságára” vonatkozik.

Tetszőleges $s,\, t \in V$ pont-párra természetesen teljesül, a következő egyenlőtlenség:

$$\lambda(s,\, t) \leq min\, \{d(s),\, d(t)\}\,,$$

és általában könnyű példát találni olyan pontpárra, melyre az egyenlőtlenség szigorú. Azokat a pontpárokat, melyekre az egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, (tehát amelyek között súlyozatlan esetben annyi éldiszjunkt út megy, "amennyi csak mehet”, súlyozott esetben pedig akkora maximális folyam található, amekkora csak elképzelhető,) ezen tulajdonságuk alapján kapcsolt pároknak (az angol nyelvű szakirodalomban pedig *pendent pair*-nek) nevezik.

3.7. Definíció. Egy $(s,\, t)$ rendezett csúcspárt *kapcsolt pár*nak nevezünk, ha $\lambda(s,\, t) = d(t)$.

Mader 1972-ben belátta [7], hogy tetszőleges (legalább két pontú) hurokmentes irányítatlan gráf tartalmaz két olyan s, t pontot, amelyekre $\lambda(s,\, t) = d(t)$ teljesül. Ilyen pont-párok találhatóak a gráf úgynevezett Gomory-Hu fájának megkonstruálásával. (A Gomory-Hu fákról a 4. fejezetben lesz szó bővebben). A következő tétel jelentősége az, hogy egy ilyen pont-párt a Gomory-Hu fa megkonstruálása nélkül, a max-vissza sorrend segítségével is találhatunk. Ibaraki és Nagamochi pedig megmutatták [11], hogy a max-vissza sorrend utolsó két pontja ilyen kapcsolt pont-párt alkot tetszőleges valós él súlyok esetén is. Azonban Nagamochi és Ibaraki technikai jellegűbb bizonyítása helyett itt elsőként Frank [2] egy egyszerű bizonyítását közöljük.

3.8. Tétel. *Ha $G = (V, E)$ élsúlyozott gráfban a $\sigma = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ egy max-vissza sorrend, akkor az utolsó két pont kapcsolt pár, azaz $\lambda(v_{n-1}, v_n) = d(v_n)$.*

Bizonyítás. Természetesen $\lambda(v_{n-1}, v_n) \leq d(v_n)$ teljesül, így elegendő a fordított irányú egyenlőtlenség, azaz $\lambda(v_{n-1}, v_n) \geq d(v_n)$ igazolása.

A gráf pontjainak száma szerinti indukcióval bizonyítjuk a tételt. A tétel automatikusan teljesül, ha $|V| = 2$. Legyen most $G = (V, E)$ egy gráf, melyre $|V| = n$ és tegyük fel, hogy a tétel teljesül minden $n'(< n)$ pontú gráfra. Legyen $\sigma = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ egy max-vissza sorrend a G gráfban. Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy v_{n-1} és v_n között nem vezet él (hiszen egy $e = \{v_{n-1}, v_n\}$él mind $\lambda(v_{n-1}, v_n)$-hez, mind pedig $d(v_n)$-hez $w(e)$-vel járul hozzá). Jelölje $G - v$ azt a gráfot, amelyet a G-ből kapunk a v csúcs, és a vele szomszédos élek törlésével.

Vegyük észre, hogy a $\sigma' = (v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$ egy max-vissza sorrend a $G - v_n$ gráfban. Így az indukciós feltevés miatt $\lambda(v_{n-2}, v_{n-1}; G - v_n) \geq d(v_{n-1}; G - v_n) = d(v_{n-1}; G)$, ahol az utolsó egyenlőség azért teljesül, mert G-ben nem vezet él v_{n-1} és v_n között.

Hasonlóan $\lambda(v_{n-2}, v_n; G - v_{n-1}) \geq d(v_n; G - v_{n-1}) = d(v_n; G)$ is teljesül, hiszen $\sigma'' = (v_1, v_2, \ldots, v_{n-2}, v_n)$ ugyancsak max-vissza sorrend a $G - v_{n-1}$ gráfban.

A fentiekből következően kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\lambda(v_{n-1}, v_n; G) &\geq min\,\{\lambda(v_{n-1}, v_{n-2}; G), \lambda(v_{n-2}, v_n; G)\} \qquad ((3)\ alapján)\\
&\geq min\,\{\lambda(v_{n-1}, v_{n-2}; G - v_n), \lambda(v_{n-2}, v_n; G - v_{n-1})\}\\
&\geq min\,\{d(v_{n-1}; G), d(v_n; G)\} = d(v_n; G)
\end{aligned}$$

Ezzel a tételt beláttuk. □

Most adunk egy másik bizonyítást is a tételre, amely ugyan hosszabb mint a fent közölt bizonyítás, de érdekességét az adja, hogy megmutatja a max-vissza sorrend egy érdekes tulajdonságát, amit a 3.9 lemmában mondunk ki. Másrészt pedig a bizonyítás során egyáltalán nem használjuk az élösszefüggőség fogalmát.

A tétel bizonyításához előbb belátjuk előbb a következő lemmát.

3.9. Lemma. *Legyen tehát $G = (V, E)$ egy élsúlyozott gráf, és $\sigma = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ egy max-vissza sorrend a G gráfban, és jelölje V_i az első i elemből álló ponthalmazt. Minden i-re $(1 \leq i \leq n - 1)$*

$$d(V_i, y) \leq d(V_i - X, X + y)$$

teljesül minden $X \subseteq V_{i-1}$ halmazra és $y \in V - V_i$ pontra.

A fenti lemma azt mondja ki, hogy a max-vissza sorrendnek megvan az a tulajdonsága, hogy minden i-re $(1 \leq i \leq n - 1)$ tetszőlegesen választott $y \in V - V_i$ pontra, bárhogy osztjuk a $V_i + y$ halmazt két, a v_i és az y pontokat elválasztó részhalmazra, (a lemma jelölését használva $v_i \in V_i - X$ és $y \in$

$X + y$ részhalmazokra), a két részhalmaz között futó élek össz-súlya akkor lesz minimális, ha az egyik részhalmazt V_i-nek, a másikat pedig $\{y\}$-nak választjuk (azaz $X = \emptyset$). A lemmának egy általánosabb szubmoduláris függvényekre vonatkozó változata Queyranne-tól származik, ő mondta ki és látta be, illetve használta fel [13]a szimmetrikus szubmoduláris függvények minimalizálására szolgáló algoritmus helyességének bizonyítására, melyet a 3.4 fejezetben ismertetünk. Az itt közölt bizonyításhoz is Queyranne bizonyítása adta az ötletet, azonban mint később látni fogjuk, nem csupán a Queyranne féle bizonyítás egy speciális esetéről van szó. Az itt következő gondolatmenet kihasználja a gráf fokszámfüggvényének olyan speciális tulajdonságait is, melyek az általánosabb szimmetrikus szubmoduláris függvényekre nem feltétlenül teljesülnek.

Bizonyítás. A lemmát i szerinti indukcióval fogjuk bizonyítani, és a bizo nyítás során a következő triviális azonosságot fogjuk kihasználni. Legyenek $A,\ B,\ C \subset V$ páronként diszjunkt halmazok. Ekkor

$$d(A \cup B,\ C) = d(A,\ C) + d(B,\ C). \tag{4}$$

Az $i = 1$ esetben a lemma állítása triviálisan teljesül. Tegyük most fel, hogy $i = 1, \ldots, k-1$-re teljesül az állítás, és megfogjuk mutatni, hogy ekkor $i = k$-ra is teljesül. Legyenek $S \subseteq V_{k-1}$ és $u \in V - V_k$ tetszőlegesen választott pont és halmaz.

1. eset: $v_{k-1} \notin S$, azaz $S \subseteq V_{k-2}$. Ekkor az indukciós feltételből $i = k-1$, $X = S \subseteq V_{k-2}$ és $y = u \in V - V_{k-1}$ választással következik, hogy

$$d(V_{k-1},\ u) \leq d(V_{k-1} - S,\ S + u) \tag{5}$$

.

Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
d(V_k - S,\ S + u) - d(V_k,\ u) &= d(V_{k-1} - S + v_k,\ S + u) - d(V_k,\ u) \\
&= d(V_{k-1} - S,\ S + u) + d(v_k,\ S + u) \\
&\quad - d(V_{k-1},\ u) - d(v_k,\ u) \\
&\geq 0 + d(v_k,\ S + u) - d(v_k,\ u) \\
&= 0 + d(v_k,\ S) \geq 0 + 0 = 0,
\end{aligned}$$

ahol az első egyenlőtlenség (5) miatt teljesül.

2. eset: $v_{k-1} \in S$. Ekkor az indukciós feltételből $i = k-1$, $X = V_{k-1} - S \subseteq V_{k-2}$ és $y = v_k \in V - V_{k-1}$ választással következik, hogy

$$d(V_{k-1},\ v_k) \leq d(V_{k-1} - X,\ X + v_k) = d(S,\ V_{k-1} - S + v_k) \tag{6}$$

Kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
d(V_k - S,\, S + u) - d(V_k,\, u) &= d(V_{k-1} - S + v_k,\, S + u) - d(V_k,\, u) \\
&= d(V_{k-1} - S + v_k,\, S) + d(V_{k-1} - S + v_k,\, u) \\
&\quad\; - d(V_{k-1},\, u) - d(v_k,\, u) \\
&\geq d(V_{k-1},\, v_k) - d(V_{k-1},\, u) \\
&\quad\; + d(V_{k-1} - S + v_k,\, u) - d(v_k,\, u) \\
&\geq 0 + d(V_{k-1} - S + v_k,\, u) - d(v_k,\, u) \\
&= 0 + d(V_{k-1} - S,\, u) \geq 0 + 0 = 0,
\end{aligned}$$

ahol az első egyenlőtlenség (6) miatt teljesül, a második pedig a max-vissza sorrend definíciójából következik.

Ezzel a lemmát beláttuk. □

A lemmából már triviálisan adódik a 3.8 tétel bizonyítása.

Bizonyítás. A fenti lemma szerint a $\sigma = (v_1,\, v_2, \ldots,\, v_n)$ max-vissza sorrend utolsó két elemére a következő teljesül:

$$d(V_{n-1},\, v_n) \leq d(Y,\, V - Y) \tag{7}$$

minden Y halmazra, amire $v_{n-1} \in Y \subseteq V - v_n$, hiszen $i = n - 1$, $y = v_n$ választással a lemma kimondja, hogy $d(V_{n-1}, v_n) \leq d(V_{n-2} - X + v_{n-1}, X + v_n)$ tetszőleges $X \subseteq V_{n-2}$ halmazra. Az $Y = V_{n-2} - X + v_{n-1}$ jelölést használva pedig kapjuk (7)-át.

Másrészt (7) pontosan azt jelenti, hogy

$$d(v_n) = d(V_{n-1},\, v_n) = min \,\{d(Y) \mid v_{n-1} \in Y \subseteq V - v_n\} = \lambda(v_{n-1},\, v_n).$$

Ezzel a 3.8 tételt bebizonyítottuk. □

Egy $G = (V,\, E)$ élsúlyozott gráfban a következő algoritmus [12] kiszámít egy max-vissza sorrendet.

Algoritmus MAO
Input: Egy $G = (V,\, E)$ élsúlyozott gráf és egy $s \in V$ pont.
Output: A G gráf egy $\sigma = (v_1 = s,\, v_2, \ldots,\, v_n)$ max-vissza sorrendje.

$r(u) := 0$ minden $v \in V$ pontra
ciklus $i = 1$-től n-ig
  válasszunk egy $u* \in V - V_{i-1}$ csúcsot, amelyre $r(u*)$ maximális
    /* az $i = 1$ esetben válasszuk s-et $u*$-nak */
  $v_i := u*$
  $r(u) := r(u) + d(v_i,\, u;\, G)$ minden $\Gamma_G(v_i) - V_i$ pontra
ciklus vége
Output: $\sigma = (v_1,\, v_2, \ldots,\, v_n)$

3.10. Lemma. *Adott $G = (V, E)$ élsúlyozott gráfhoz, és adott $s \in V$ ponthoz a* ***MAO*** *algoritmus használatával található egy olyan max-vissza sorrend a G gráf pontjain, melynek kezdőpontja s.*

Bizonyítás. Könnyen belátható, hogy $r(u) = d(u, V_i; G)$ teljesül minden $u \in V - V_i$ pontra a v_{i+1} kiválasztásakor, így a **MAO** által megkonstruált $\sigma = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sorrend tényleg egy max-vissza sorrend a G gráfban. □

Az algoritmus futási ideje $O(m + n \log n)$, ahol n $(= |V|)$a pontok számát jelöli a gráfban, m $(= |E|)$ pedig az élekét [11].

3.3. A MinCut algoritmus

Egy gráf minimális vágásának kiszámítására kézenfekvő mód a maximális folyamok keresése, hisz Menger tétele alapján tudjuk hogy a minimális vágás mérete megegyezik a maximális folyam méretével. Így $\binom{n}{2}$ maximális folyam probléma megoldásával meghatározható $\lambda(G)$. (Sőt Gomory és Hu [4] megmutatták, hogy a minimális vágás méretének meghatározásához elegendő $n - 1$ lokális-élösszefüggőségi érték meghatározása.) Ez a módszer egy $O(n^2 m \log(n^2/m))$ futási idejű algoritmust ad a maximális vágás kiszámolására.

Nagamochi és Ibaraki a 3.8 tétel eredményét és felhasználva megmutatták [10], hogy a gráf élösszefüggősége folyamok használata nélkül is számolható. Ráadásul algoritmusuk futási ideje $O(mn + n^2 \log n)$.

A minimális vágás megkeresésére szolgáló algoritmusuk a következő gondolatmeneten alapul. Legyen $\sigma = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ a $G = (V, E)$ élsúlyozott gráf egy max-vissza sorrendje. A gráf vágásai két részre oszthatóak aszerint hogy szeparálják-e az utolsó két pontot, azaz v_{n-1}-et ésv_n-t. Mivel utolsó két pontot szeparáló vágások mérete nem lehet kisebb, mint $\lambda(v_{n-1}, v_n) = d(v_n)$, ezért, ha létezik $d(v_n)$-nél kisebb mérteű vágás, akkor az nem szeparálhatja v_{n-1}-et és v_n-t, és az ilyen vágások mérte megőrződik, ha v_{n-1}-et és a v_n-et egyetlen ponttá összehúzzuk. Tehát G minimális vágásának mérete,

$$\lambda(G) = min\left\{\lambda(G/\left\{v_{n-1}, v_n\right\}, d(v_n)\right\},$$

ahol $G/\{v_{n-1}, v_n\}$ azt a gráfot jelöli, ami a G-ből keletkezik a v_{n-1} és a v_n pontok összehúzásával. (Két pont összehúzásakor a keletkező hurokéleket elhagyjuk.)

Látjuk tehát, hogy egy gráfban egy kapcsolt pár két pontját összehúzva a minimális vágás mérete nem csökken, sőt, csak akkor nőhet, ha a gráf minden minimális vágása elválasztja az összehúzott két pontot. Ezért megfelelő $(y_{i,} x_i)$ pont-párok összehúzásával, és a $\lambda(y_i, x_i)$ értékek eltárolásával (az eljárást $n-1$-szer megismételve) kiszámítható a gráf élösszefüggősége, sőt egy minimális vágás is megadható.

Nagamochi és Ibaraki [10] algoritmusa a következő:

Algoritmus MinCut

Input: Egy $G = (V, E)$ élsúlyozott gráf .

Output: Egy $X \subseteq V$ részhalmaz, melyre $\{X, V - X\}$egy minimális vágás két partja, és $\lambda = \lambda(G)$ érték.

1 $G_1 := G$,

2 **ciklus** $i = 1$-től $n - 1$-ig,

3 határozzuk meg a G_i gráf egy max-vissza sorrendjét, jelölje ennek utolsó két pontját rendre y_i és $x_i \in G_i$,

4 $\lambda_i := d(x_i; G_i)$,

5 $G_{i+1} := G_i / \{y_i, x_i\}$, a G_i-ből az y_i és a x_i pontok összehúzásával nyert gráf

6 **ciklus vége**

7 válasszunk $i^* \in argmin \{\lambda_i \mid i = 1, 2, \ldots, n - 1\}$,

8 $\lambda := \lambda_{i*}$, $X := V[x_{i*}]$, ahol egy $x \in G_i$ pontra$V[x] \subseteq V$ azokból a V-beli pontokból álló halmazt jelöli, amelyek a G_i gráf x pontjába lettek húzva, azaz az x ősképét.

9 *Output*: λ, X.

Mivel egy gráf max-vissza sorrendje $O(m + n \log n)$ időben számolható, a teljes MinCut algoritmus futási ideje $O(mn + n^2 \log n)$.

3.4. Szimmetrikus szubmoduláris vagy szubmoduláris és pozimoduláris függvények minimalizálása

Most térjünk vissza az általános esetre, azaz a szimmetrikus szubmoduláris függvények minimalizálási problémájára. Queyranne észrevette a [13] a következőt:

3.11. Tétel. *Legyen adott egy f szimmetrikus keresztező szubmoduláris függvény a V alaphalmazon, melyre teljesül, hogy $|V| = n \geq 2$. Ekkor $O(n^3 T_f)$ futási időben található $X \in 2^V - \{\emptyset, V\}$optimális megoldás, amely minimalizálja f-et, ahol T_f azt a futási időt jelöli, amennyibe egy adott $X \subseteq V$ halmazra az $f(X)$ értékének megadása telik.*

A tétel bizonyításához Queyranne bevezeti a két fent tárgyalt fogalom, a kapcsolt pár és a max-vissza sorrend egy általánosítását. Mivel a következő definíció nem csak szimmetrikus halmazfüggvényekre vonatkozik, és így abban az X és a $V - X$ halmaz szerepe nem felcserélhető, megjegyezzük, hogy $u, v \in V$ két tetszőleges az elemre az u-t és a v-t szeparáló halmazokon azokat az $X \subseteq V$ részhalmazokat értjük, melyekre teljesül, hogy $|\{u, v\} \cap X| = 1$. (A fenti megjegyzést az indokolja, hogy az eddig tárgyalt esetben elegendő volt az $\{X \mid u \in X, v \in V - X\}$ halmazokat megvizsgálni ahhoz, hogy az u-t és v-t szeparáló halmazokról ellenőrizzünk egy állítást.)

3.12. Definíció. Egy (V, f) szubmoduláris rendszerben egy (u, v) elempárt *kapcsolt párnak* nevezünk, ha minden $X \subseteq V$ részhalmazra, amely szeparálja az u és v elemeket

$$f(v) \leq f(X)$$

teljesül.

(Vegyük észre, hogy a szubmoduláris rendszerekben definiált kapcsolt pár fogalma valóban a gráfokban definiált kapcsolt pár egy általánosítása. A d fokszámfüggvényre mint szubmoduláris függvényre nézve a 3.12 definícióból az adódik, hogy u és v pontosan akkor kapcsolt pár, ha $d(v) \leq d(X)$ minden $X \subset V$ halmazra, amely szeparálja u-t és v-t, ami pont azt jelenti, hogy $d(v) = min\{d(X) \mid X \cap \{u, v\} = 1\} = \lambda(u, v)$, ahogy azt a 3.7 definícióban megköveteltük.)

Jelölje $\sigma = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ a V alaphalmaz pontjainak egy sorbarendezését. Legyen f egy a V-n értelmezett halmazfüggvény.

3.13. Definíció. A $\sigma = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sorrendet *max-vissza sorrendnek* nevezzük, ha

$$f(V_{i-1} + v_i) - f(v_i) \leq f(V_{i-1} + v_j) - f(v_j)$$

fennáll minden i, j-re, melyekre $2 \leq i < j \leq n$-re .

A V elemeinek egy ilyen sorrendje a következőképpen adható meg. Az első $v_1$elem tetszőlegesen megválasztható. Amennyiben az első i elem már adott, a még kiválasztatlan $n - i$ db elem közül azt választjuk v_{i+1}-nek, melyre az

$$r(u) = f(V_i + u) - f(u)$$

mennyiség minimális, ahol $V_i = \{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$ minden $i = 1, \ldots, n$-re.

(Figyeljük meg, hogy a 3.13 definíció is a 3.6 definíció egy általánosítása. $f = d$ választással a fenti definíció azt követeli meg v_{i+1}-től, minimalizálja a $d(V_i+u)-d(u) = d(V_i)-2*d(V_i, u)$ mennyiséget, azaz maximalizálja $d(V_i, u)$-t, vagyis a visszafelé menő élek súlyát. Ekkor a (V, d) rendszer $\sigma = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ max-vissza sorrendje a 3.6 definícióban leírt értelemben is max-vissza sorrend abban a $G = (V, E)$ gráfban, melynek d a fokszámfüggvénye .)

A (V, f) egy max-vissza sorrendje és így egy kapcsolt pár egy a **Mao**-hoz nagyon hasonló algoritmus segítségével konstruálható meg $O(n^2 T_f)$ futási időben [13], ezért azt itt most nem közöljük. (T_f annak a lépésnek a futási idejét jelzi, hogy egy adott X halmazra kiszámítjuk az $f(X)$ értéket.)

A kapcsolt pároknak és max vissza sorrendnek a 3.8 tételben leírt kapcsolata a szubmoduláris függvényekre általánosított kapcsolt pár és max-vissza sorrend fogalmakra is teljesül. Ennek igazolása hasonló módon történik, mint a gráfos esetben. Az ott megfogalmazott 3.9 lemma ugyanis ugyancsak általánosítható. Gondoljuk végig először hogy hogyan lehet a lemmában megfogalmazott összefüggést szubmoduláris függvényekre felírni. (Tehát még d szimmetrikusságát is „felejtsük el".) Két $X, Y \subseteq V$ halmazra $d(X, Y)$ a következő formában írható.

$$d(X, Y) = \frac{d(X) + d(Y) - d(V - (X \cup Y)) - d(X \cap Y)}{2}.$$

Azonban $V_i \cap \{y\} = \emptyset$ és ugyanígy $(V_i - X) \cap (X + y) = \emptyset$ így az egyenlőtlenség jobb oldalán álló összeg utolsó tagja jelen esetben elhagyható. A fenti átalakítást használva és d helyett egy általános f szubmoduláris függvényre felírva a 3.9 lemma állítását a következőt kapjuk.

$$\frac{f(V_i)+f(y)-f(V-(V_i+y))}{2} \leq$$
$$\leq \frac{f(V_i-X)+f(X+y)-d(V-((V_i-X)\cup(X+y))}{2}$$

Kiderül, hogy a fenti állítás a gráfok fokszámfüggvényénél egy sokkal bővebb függvényosztályban is teljesül. Queyranne belátta az állítást teljesen szubmoduláris függvényekre [13], Nagamochi és Ibaraki pedig észrevették, hogy a bizonyítást egy kicsit átalakítva tetszőleges keresztező szubmoduláris függvényre is igaz a lemma [12]. Nézzük tehát a 3.9 lemma és a 3.8 általános formáját.

3.14. Tétel. *Egy V véges halmazon értelmezett f szimmetrikus keresztező szubmoduláris függvényre a V egy max-vissza sorrendjének utolsó két pontja kapcsolt párt alkot.*

3.15. Lemma. *Legyen f egy (nem feltétlenül szimmetrikus) keresztező szubmoduláris függvény a V alaphalmazon, és legyen $\sigma = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ a V egy max-vissza sorrendje. Jelölje V_i az első i elemből álló ponthalmazt. Ekkor minden i-re $(1 \leq i \leq n-1)$*

$$f(V_i)+f(y) \leq f(V_i-X)+f(X+y)$$

teljesül minden $X \subseteq V_{i-1}$ halmazra és $y \in V-V_i$ pontra.

Bizonyítás. A lemma bizonyítását vázlatosan közöljük. A bizonyítás i szerinti indukcióval történik. Az $i=1$ esetben a lemma állítása triviálisan teljesül. Tegyük most fel, hogy $i=1,\dots,\ k-1$-re teljesül az állítás, és megmutatjuk, hogy ekkor $i=k$-ra is teljesül. Legyenek $S \subseteq V_{k-1}$ és $u \in V-V_k$ tetszőlegesen választott elem és halmaz. A max-vissza sorrend definíciójából v_k-ra adódik a következő:

$$f(V_{k-1}+v_k)-f(v_k) \leq f(V_{k-1}+u)-f(u) \tag{8}$$

Legyen j a legkisebb olyan egész, melyre $S \subseteq V_{j-1}$.

Elsőként tekintsük azt az esetet, amikor $j=k$. Ha $S=V_{k-1}$, akkor (8)-at használva kapjuk, hogy $f(V_k)+f(u) \leq f(V_k-S)+f(S+u)$. Amennyiben $S \subset V_{k-1}$, akkor könnyen ellenőrizhető, hogy a V_{k-1}és az $S+u$ halmazok keresztezik egymást. Az indukciós feltevést az $i=k-1$, $X=V_{k-1}-S$ és $y=v_k$ esetre, a szubmodularitás egyenlőséget pedig a V_{k-1}és az $S+u$ keresztező halmazokra felírva, továbbá a max-vissza sorrend definíciójából adódó (8) azonosságot használva könnyű számolással adódik, hogy $f(V_k)+f(u) \leq f(V_k-S)+f(S+u)$.

A $j \leq k-1$esetben meggondolható, hogy a V_k-S és V_j halmazok keresztezik egymást. Ekkor az indukciós feltevést az $i=j$, $X=S$ és $y=u$ esetre, a szubmodularitás egyenlőséget pedig a V_k-S és a V_j keresztező halmazokra felírva adódik a kívánt egyenlőtlenség.

A fenti lemmából adódóan a $\sigma=(v_1, v_2, \dots, v_n)$ max-vissza sorrend utolsó két elemére a következő teljesül:

$$f(V_{n-1}) + f(v_n) \leq f(Y) + f(V - Y) \tag{9}$$

minden Y halmazra, amire $v_{n-1} \in Y \subseteq V - v_n$, hiszen $i = n-1$, $y = v_n$ választással a lemma kimondja, hogy $f(V_{n-1}) + f(v_n) \leq f(V_{n-2} - X + v_{n-1}) + f(X + v_n)$ tetszőleges $X \subseteq V_{n-2}$ halmazra. Az $Y = V_{n-2} - X + v_{n-1}$ jelölést használva pedig kapjuk (9)-ot.

Másrészt f szimmetrikussága miatt (9) pontosan azt jelenti, hogy $f(v_n) \leq f(Y)$ minden $Y \subseteq V$ részhalmazra, amely szeparálja a v_{n-1} és a v_n elemeket, azaz v_{n-1} és v_n kapcsolt pár. Ezzel a 3.14 tétel bizonyítását befejeztük. □

3.16. Megjegyzés. Érdekes végiggondolni, hogy az általános 3.15 lemma itt leírt bizonyítási vázlata nem adódik-e a 3.9 lemma fentebb közölt bizonyításából, ha az egész bizonyítást átalakítjuk ugyanazzal a módszerrel, amelyet az általánosított lemma „kitalálásánál” használtunk. Azonban a válasz az, hogy nem. Emlékezzünk vissza, hogy ott az indukciós feltevés és a max-vissza sorrend definíciójából adódó egyenlőtlenségen kívül a d függvénynek a következő tulajdonságát használtuk ki a bizonyítás során: tetszőleges A, B, $C \subset V$ páronként diszjunkt halmazokra $d(A \cup B, C) = d(A, C) + d(BC)$ teljesül. Sőt, valójában a 3.9 lemma bizonyításánál csak a $\geq$irányt használtuk. Az azonosság a következőképpen írható, ha d-re mint $d : 2^V \to \mathbb{R}_+$szubmoduláris halmazfüggvényre tekintünk:

$$\begin{aligned}
&d(A \cup B) + d(C) - d(V - (A \cup B \cup C)) \geq \\
&\geq d(A) + d(C) - d(V - (A \cup C)) + d(B) + d(C) - d(V - (B \cup C)).
\end{aligned}$$

Azonban ez az egyenlőtlenség (d helyébe egy szubmoduláris függvényt írva) nem teljesül még minden teljesen szubmoduláris függvényre sem. Megmutatjuk, hogy sem a $\geq$ sem a $\leq$ irány nem szükségszerűen igaz egy szubmoduláris függvényre. Legyen f az elemszámfüggvény, azaz $f(X) = |X|$, (ami természetesen szubmoduláris, hiszen moduláris) és legyenek $A, B, C \subseteq$ páronként diszjunkt halmazok, és jelölje $|A| = a$, $|B| = b$, $|C| = c$ a halmazok elemszámát, $n = |V|$ pedig az alaphalmaz elemszámát. Ekkor a jobb oldalból kivonva a bal oldalt, könnyű számolással adódik, hogy a különbség $n - 2c$ amely a C halmazt alkalmasan megválasztva akár pozitív, akár negatív lehet.

A 3.14 tételre alapozva a **MinCut** algoritmus ötletéhez hasonló módon találhatunk optimális megoldást. Legyen tehát (V, f) egy szimmetrikus keresztező szubmoduláris rendszer. Elkészítjük a V egy $\sigma = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ max-vissza sorrendjét. Ekkor v_{n-1} és v_n kapcsolt párt alkotnak. Az $X \in 2^V - \{\emptyset, V\}$ halmazok két csoportba sorolhatóak aszerint, hogy szeparálják-e v_{n-1}-et és v_n-et. Tudjuk, hogy az $\left\{X \in 2^V - \{\emptyset, V\} \mid |X \cap \{v_{n-1}, v_n\}| = 1\right\}$ csoportban a $\{v_n\}$ halmaz minimalizálja f-et, ezért, ha létezik olyan nemüres $X' \subset V$, melyre $f(X') < f(v_n)$, akkor X' nem szeparálhatja v_{n-1}-et és v_n-t. Az utolsó két csúcsot nem szeparáló halmazokon viszont megőrződik az f értéke, ha a az utolsó két csúcsot összehúzzuk egy új w csúccsá, és az új alaphalmazon megfelelően adjuk mag az új f' függvényt. A v_{n-1}és a $v_n$csúcsok összehúzásával egy egyel kevesebb elemű $V' = V - \{v_{n-1},\, v_n\} + w$ alaphalmazt kapunk, és ezen az f'halmazfüggvényt, mely minden $X \subseteq V'$halmazon azt az értéket veszi fel, amit az f függvény felvett az X halmaz V-beli ősképén. Az $f' : 2^{V'} \to \mathbb{R}_+$ halmazfüggvény a következőképpen adható meg:

$$f'(X) = \begin{cases} f(X) & w \notin X \subseteq V \\ f((X - w) \cup \{v_{n-1},\, v_n\}) & w \in X \subseteq V \end{cases} \tag{10}$$

Ekkor f' is szimmetrikus keresztező szubmoduláris halmazfüggvény lesz a V' halmazon. A szimmetrikusság egyértelmű a definícióból. A keresztező szubmodularitás pedig abból adódik, hogy valóban minden v_{n-1}-et és v_n-t nem szeparáló X' részhalmazon megőrződik az eredeti f függvény értéke. Vagyis ha $A',\, B' \subset V'$ keresztező halmazok, akkor mivel $A,\, B \subset V$ ősképeik is keresztező halmazok voltak, teljesült rájuk a szubmodularitási egyenlőtlenség. Másrészt pedig $f'(X') = f(X)$ teljesül tetszőleges $X' \subseteq V'$ esetén, ahol $X \subseteq V$ az X' ősképe. Ezért ha $X' \subseteq V'$ egy optimális megoldása a $(V',\, f')$ rendszernek, akkor az eredeti $(V,\, f)$ rendszer egy X optimális megoldása a következőképpen kapható:

$$X = argmin\,\{f(S) \mid S \in \{\{v_n\}\,,\, X^*\}\}\,,$$

ahol X^*az X' ősképe, azaz $X^* = X'$, ha $w \notin X$ és $X^* = X - w \cup \{v_{n-1},\, v_n\}$ egyébként. A fenti megfontolások igazolják a következő eljárás helyességét.

Keressünk a V halmazban egy kapcsolt párt a max-vissza sorrend segítségével, majd húzzuk össze a sorrend két utolsó pontját. Ekkor eggyel kisebb elemszámú V' halmazt kapunk, és rajta a fenti módon definiált f' szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvényt. Ezt a módszert és a fenti gondolatmenetet $n-1$-szer alkalmazva megkaphatjuk a $((V^{(1)},\, f^{(1)}),\ (V^{(2)},\, f^{(2)}), \ldots,\ (V^{(n)},\, f^{(n)}))$ rendszerek sorozatát, ahol $(V^{(1)},\, f^{(1)}) = (V,\, f)$, $\left|V^{(i)}\right| = n-i+1$ és minden $(V^{(i+1)},\, f^{(i+1)})$-t a $(V^{(i)},\, f^{(i)})$ rendszerből az ott megkeresett kapcsolt pár összehúzásával kapunk. Jelölje $(x_i,\, y_i)$ a $V^{(i)}$ beli kapcsolt párt. Ekkor az eredeti $(V,\, f)$ rendszer egy X optimális megoldására

$$f(X) = min\left\{f^{(i)}(y_i) \mid i = 1,\, 2, \ldots,\, n\right\}$$

az optimum értéke, és X optimális megoldás pedig az

$$y_{i*} = argmin\left\{f^{(i)}(y_i) \mid i = 1,\, 2, \ldots,\, n\right\}$$

elem ősképeként kapható, vagyis V halmaz azon elemeit tartalmazza, amelyek a minimalizáló y_{i*}-ba lettek összehúzva az algoritmus $(V^{(i*)},\, f^{(i*)})$ rendszert megkonstruáló lépésig bezárólag.

A pontos algoritmus [13] a **MinCut** algoritmussal teljesen analóg módon adható meg, így azt itt nem közöljük. Mivel egy szubmoduláris halmazfüggvény max-vissza sorrendje $O(n^2 T_f)$ időben számolható, a teljes algoritmus futási ideje $O(n^3 T_f)$.

Queyranne tehát megmutatta, hogyan lehet szimmetrikus szubmoduláris rendszerekben optimális megoldást találni, Nagamochi és Ibaraki pedig észrevették hogy az állítás szimmetrikus és keresztező szubmoduláris rendszerekben is igaz. Ráadásul egy egyszerű észrevétel segítségével általánosították a módszert a keresztező szubmoduláris pozimoduláris függvények esetére [12].

3.17. Lemma. *Egy adott a V alaphalmazon egy keresztező szubmoduláris és pozimoduláris f függvény. Legyen f' a következő függvény a V alaphalmazon,*

$$f'(X) = min\{f(X),\ f(V - X)\} \quad \forall X \in 2^V.$$

Ekkor f' szimmetrikus és keresztező szubmoduláris.

Bizonyítás. Világos, hogy ekkor f' szimmetrikus. A keresztező szubmodularitás pedig a három adódó esetet szétválasztva (vagyis X, $Y \subset V$ keresztező halmazokra $f'(X) = f(X)$ és $f'(Y) = f(Y)$, $f'(X) = f(X)$ és $f'(Y) = f(V - Y)$, illetve $f'(X) = f(V - X)$ és $f'(Y) = f(V - Y)$) könnyű számolással adódik a keresztező pozimodularitásból. $\square$

Így adódik a következő tétel

3.18. Tétel. *Legyen adott egy f keresztező szubmoduláris és pozimoduláris függvény a V alaphalmazon, melyre teljesül, hogy $|V| = n \geq 2$. Ekkor $O(n^3 T_f)$ futási időben található $X \in 2^V - \{\emptyset,\ V\}$ optimális megoldás, amely minimalizálja f-et, aholT_f azt a futási időt jelöli, amennyibe egy adott $X \subseteq V$ halmazra az $f(X)$ értékének megadása telik.*

Bizonyítás. Az adott f függvényhez konstruáljuk meg az f' szimmetrikus keresztező szubmoduláris függvényt a 3.17 lemmában leírt módon. Ekkor a 3.11 tétel értelmében $O(n^3 T_f)$ időben található X optimális megoldása a $(V,\ f')$ rendszernek. Ekkor X és $V - X$ közül legalább az egyik optimális megoldása az eredeti $(V,\ f)$ rendszernek is, és ez a $f(X)$ és $f(V - X)$ értékek összehasonlításával $O(T_f)$ időben eldönthető. $\square$

3.5. Minimális optimális megoldás

Ebben a fejezetben Nagamochi és Ibaraki minimális optimális megoldásokkal kapcsolatos eredményit [12] foglaljuk össze. Megmutatjuk, hogy hogyan tudunk egy átmetsző szubmoduláris és pozimoduláris $(V,\ f)$ rendszerben minimális optimális megoldást találni, majd leírjuk, hogy hogyan található meg az összes minimális optimális megoldás. Vegyük észre, hogy két minimális optimális megoldás nem is tartalmazhatja (a definícióból adódóan,) és nem is metszheti egymást, hiszen akkor f pozimodularitása miatt ekkor $f(X) + f(Y) \geq f(X - Y) + f(Y - X)$ és így adódik, hogy $X - Y$ és $Y - X$ közül legalább az egyik ugyancsak optimális megoldás, ellentétben X és Y minimalitásával.

Megjegyezzük, hogy amennyiben szimmetrikus keresztező szubmoduláris rendszerekre már tudnánk, hogy hogyan találhatunk egy minimális optimális megoldást, akkor a 3.17 lemmában leírt módszer nem nyújt segítséget abban, hogy ezt az eredményt keresztező szubmoduláris és pozimoduláris rendszerekre is általánosítsuk. Hiszen legyen f egy keresztező szubmoduláris és pozimoduláris függvény a V alaphalmazon, és legyen f' a 3.17 lemmában definiált szimmetrikus keresztező szubmoduláris függvény. Legyen ennek X egy minimális optimális megoldása. Amennyiben az $f(V - X) < f(X)$ eset áll fenn, akkor egyáltalán nem biztos, hogy X a $(V,\ f)$ rendszerben is minimális optimális megoldás.

A fejezet gondolatmenete a következő lesz. Egy adott $(V,\ f)$ átmetsző szubmoduláris és pozimoduláris rendszerhez konstruálunk egy $(V + S,\ g)$ szimmetrikus és keresztező szubmoduláris rendszert (ahol $s \notin V$ egy kijelölt új elem), majd erre megmutatjuk, hogy hogyan található meg a $(V + s,\ g)$ rendszerben a $min\,\{g(X) \mid \emptyset \neq X \subset V\}$ érték, és ennek ismeretével pedig az összes tartalmazásra nézve minimális, $g(X)$-et az $X \in 2^V - \{\emptyset,\ V\}$ halmazrendszeren minimalizáló részhalmaza V-nek. Ezen halmazok családját jelöljük $\mathcal{X}$-vel. Végül pedig belátjuk, hogy $\mathcal{X}$ pontosan a $(V,\ f)$ rendszer minimális optimális megoldásait tartalmazza.

3.19. Lemma. *Legyen f egy átmetsző szubmoduláris és pozimoduláris függvény a V alaphalmazon, és legyen $s \notin V$ egy új elem. Ekkor*

$$g(X) = \begin{cases} f(X) & s \notin X \subseteq V + s \\ f(V - (X - s)) & s \in X \subseteq V + s \end{cases}$$

$V + s$ alaphalmazon értelmezett g függvény szimmetrikus és keresztező szubmoduláris.

Bizonyítás. A definícióból adódik, hogy g szimmetrikus. A keresztező szubmodularitás pedig a három adódó esetet szétválasztva (vagyis $X,\ Y \subset V$ keresztező halmazokra $(s \notin X \cap Y,\ s)$ könnyű számolással adódik az átmetsző pozimodularitásból. $\square$

Tekintsük a következő minimalizálási problémát. Legyen adott egy $(V+s,\ g)$ szimmetrikus és keresztező szubmoduláris rendszer ahol $s \notin V$ egy kijelölt új elem. Keressük azokat a $\emptyset \neq X \subset V$ halmazokat (vagyis $s \notin V$ és $\emptyset \neq X \neq V$), amelyek minimalizálják $g(X)$-et az előbb megadott halmazok körében. Most nevezzük ezeket *optimális halmazoknak.* A tartalmazásra nézve minimális optimális halmazokat pedig *minimális optimális halmazoknak.* Jelöljük a minimum értékét λ^*-gal. Egy optimális halmaz megtalálásához nem feltétlenül megoldás $(V + s,\ g)$ egy X^* optimális megoldásának megkeresése, mivel előfordulhat hogy $X^* = \{s\}$ vagy $X^* = V$ amely halmazok itt ki vannak zárva a keresett halmazok közül. Azonban az előző fejezetben leírt, az optimális megoldás keresésénél alkalmazott gondolatmenet itt is helytálló.

Mivel$(V + s,\ g)$ egy szimmetrikus és keresztező szubmoduláris rendszer, tudjuk hogy egy max-vissza sorrend utolsó két $(x,\ y)$ eleme kapcsolt párt alkot. Mivel a max-vissza sorrend első eleme tetszőlegesen megválasztható, válasszuk azt s-nek, így biztos, hogy $s \notin \{x,\ y\}$. Mivel az $\{y\}$minimalizálja g-t az x-et és y-t elválasztó halmazok között, így ha létezik olyan nemüres $X \subset V$, melyre $g(X) < g(y)$, akkor X nem szeparálhatja x-et és y-t. Húzzuk össze most x-et és y-t egyetlen z ponttá, így kapjuk az $s + V'$ halmazt, és legyen ezen a g' függvény olyan, ami megőrzi g értékét az x-et és y-t nem szeparáló halmazokon. A g függvényből a g' a (10) mintájára adható meg. Ekkor g' megőrzi g szimmetrikusságát és keresztező szubmodularitását. És amennyiben $X' \subset V'$ egy optimális halmaz a $(V' + s,\, g')$ rendszerben, akkor az eredeti $(V + s,\, g)$ rendszer egy X optimális halmaza a következőképpen kapható:

$$X = argmin\, \{g(Y) \mid Y \in \{\{y\}\,,\, X^*\}\}\,,$$

ahol $X^* = X'$, ha $z \notin X$ és $X^* = X - z \cup \{x,\, y\}$ egyébként. Az előbb leírt módszert addig ismételve, amíg legalább három eleme van az $s + V'$ halmaznak, (és a max-vissza sorrendet mindig s elemből indítva,) az optimális megoldás keresésénél leírtakkal analóg módon kapunk egy optimális halmazt. Jelölje $(x_i,\, y_i)$ az i-edik lépesben összehúzott kapcsolt párt, $(V^{(i)} + s,\, g^{(i)})$ pedig az i-edik összehúzás előtt vizsgált rendszert, és jelöljük $g^{(i)}(y_i)$-t λ_i-vel. Ekkor tetszőleges

$$i^* \in argmin\, \{\lambda_i \mid i = 1,\, 2, \ldots,\, n\}$$

választással $\lambda_{i*} = \lambda^*$, és $X^* = V\,[y_{i*}]$ pedig egy optimális halmaz, ahol $V\,[x] \subseteq V$ azokból a V beli elemekből álló halmazt jelöli, amelyek az algoritmus során x elembe lettek húzva, azaz x ősképét. Mivel az itt vázolt algoritmus $O(n)$-szer keres kapcsolt párokat, a teljes futási idő $O(n^3 T_g)$. A pontos algoritmus itt nem közöljük, mert a fent leírtak alapján az a **MinCut** algoritmus átalakított változataként kapható.

Ráadásul, ha az $argmin\, \{\lambda_i \mid i = 1,\, 2, \ldots,\, n\}$ halmazból a lehető legkisebbnek választjuk i^*-ot, akkor X^*minimális optimális halmaz lesz. Tegyük fel ugyanis indirekt, hogy $\exists \emptyset \neq Y \subset X^*$, hogy $g(Y) = g(X^*)$. Jelöljük az összes olyan $Y' \subseteq V^{(i)} + s$ halmazt Y'-vel, melynek az ősképe Y, hiszen ezekre $g^{(i)}(Y') = g(Y)$, mivel g értéke megőrződik, attól függetlenül, hogy Y-on belül összehúztunk-e már néhány elemet vagy sem. Biztos hogy Y vagy valamely Y' szeparál néhány (x_i, y_i) kapcsolt párt, jelölje (x_{i_Y}, y_{i_Y}) ezek közül az algoritmus során legelőször kiválasztottat, i_Y pedig azt, hogy hányadik összehúzás előtt tart ekkor az algoritmus. Vegyük észre, hogy ekkor $V[x_{i_Y}]$, $V[y_{i_Y}] \subseteq X^*$ és $i_Y < i^*$ máskülönben X^*, és így a teljes $Y \subset X^*$ nem húzódhatott volna egyetlen y_{i*} pontra az algoritmus futása közben. Így $\lambda_{i*} < \lambda_{i_Y}$, máskülönben i^* helyett i_Y-t kellett volna választanunk, amiből $\lambda_{i*} < \lambda_{i_Y} = g^{(i_Y)}(y_{i_Y}) \leq g^{(i_Y)}(Y') = g(Y) = g(X^*) = \lambda_{i*}$ következne, ami ellentmondás. ($g^{(i_Y)}(y_{i_Y}) \leq g^{(i_Y)}(Y')$ azért teljesül mert a $V^{(i_Y)} + s$ halmazon $(x_{i_Y},\, y_{i_Y})$ egy kapcsolt pár, Y' pedig egy ezeket szeparáló halmaz.

Most megmutatjuk, hogy hogyan lehet az összes minimális optimális halmazt megtalálni, ha már tudjuk a λ^* optimális értéket. A fent leírt algoritmust úgy módosítjuk, hogy amint megtaláltunk egy x elemet, melyre $V[x]$ minimális optimális halmaz, akkor $\{x,\, s\}$ halmazt belehúzzuk az s pontba, és így elkerüljük, hogy később egy $X' \supset X$ optimális halmazt találjunk. A g függvény egy ilyen belehúzásnál a következőképpen módosul.

$$g'(Y) = \begin{cases} g(Y) & s \notin Y \subseteq V' \\ g(Y+x) & s \in X \subseteq V' \end{cases}, \tag{11}$$

ahol V' jelöli az $x + s$ összehúzás után kapott alaphalmazt. Akárcsak a (10) konstrukció, ez is megőrzi g szimmetrikusságát és keresztező szubmodularitását.

A teljes algoritmus a következő.

Algoritmus Minimal

Input: Egy $(V + s,\ g)$ szimmetrikus és keresztező szubmoduláris rendszer (ahol $|V| \geq 2$) egy kijelölt $s \notin V$ elemmel, és a $\lambda^* = min\{g(X) \mid \emptyset \neq X \subset V\}$ érték.

Output: A minimális optimális halmazok$\mathcal{X}$ családja, azaz az összes olyan $\emptyset \neq X \subset V$ halmazok, melyekre $g(X) = \lambda^*$.

1 $V' := V + s$, $g' := g$, $\mathcal{X} = \emptyset$,

2 **ciklus** minden $v \in V$ elemre, amire $g'(v) = \lambda^*$ teljesül

3 $\mathcal{X} := \mathcal{X} \cup \{\{v\}\}$,

4 Jelölje $(V',\ g')$ azt a rendszert, amelyet a jelenlegi $(V',\ g')$ rendszerből kapunk (11) szerint a $\{v,\ s\}$halmaz s-be való belehúzásával

5 **ciklus vége**

6 **amíg** $|V'| \geq 4$

7 határozzuk meg a $(V',\ g')$ egy max-vissza sorrendjét s kezdő elemmel, jelölje ennek utolsó két elemét $(x,\ y)$, /*ekkor $s \notin \{x,\ y\}$*/

8 Jelölje $(V',\ g')$ azt a rendszert, amelyet a jelenlegi $(V',\ g')$ rendszerből kapunk (10) szerint az $\{x,\ y\}$elemeknek egy új z elembe való összehúzásával

9 **ha** $g'(z) = \lambda*$ **akkor**

10 $\mathcal{X} := \mathcal{X} \cup \{V[z]\}$, ahol$V[z] \subset V$ azokból a V beli elemekből álló halmazt jelöli, amelyek az algoritmus során eddig z elembe lettek húzva,

11 Jelölje (V', g') azt a rendszert, amelyet a jelenlegi (V', g') rendszerből kapunk (11) szerint a $\{z\ s\}$halmaz s-be való belehúzásával

12 **ha vége**

13 **amíg vége**

14 Jelöljük a jelenlegi $(V',\ g')$ rendszer alaphalmazának elemeit a következőképpen $V' = \{s,\ a,\ b\}$, /*nyilván $g'(a) > \lambda*$ és $g'(b) > \lambda*$*/

15 **ha** $g'(\{a,\ b\}) = \lambda^*$ és az algoritmus 4. vagy 11. sorát legalább egyszer végrehajtottuk (vagyis $V[\{a,\ b\}] \neq V$) **akkor**

16 $\mathcal{X} := \mathcal{X} \cup \{V[\{a,\ b\}]\}$, ahol$V[\{a,\ b\}] \subset V$ azokat a V beli elemeket jelöli, amelyek az algoritmus során eddig a vagy b elemek valamelyikébe lettek húzva

17 **ha vége.**

18 *Output*: $\mathcal{X}$.

(Először is megjegyezzük, hogy azért nem okozhat zavart egységesen g'-vel jelölni az algoritmus minden rendszerében az adott függvényt, mert minden olyan $X \subset V'$ halmazra, amely „megmarad” a két pont összehúzása után keletkező V'-ben is, (azaz nem húztuk bele s-be, és nem húztuk össze valamely x elemét egy $y \notin X$ másik elemmel,) $g'(X)$ értéke azonos a két rendszerben.)

Világos, hogy minden $X \in \mathcal{X}$ halmazra teljesül, hogy $g(X) = \lambda^*$, azaz optimális halmaz. Az is világos, hogy minden $\{v\} \in \mathcal{X}$ minimális optimális halmaz, és ekkor indukcióval adódik, hogy $\mathcal{X}$ többi eleme is minimális optimális. Hiszen tetszőleges $X \in \mathcal{X}$ halmazra a halmazok elemszámaira való meggondolással adódik, hogy ha létezne $Y \subset X$, $g(Y) = \lambda^*$ halmaz, akkor az már az előtt s-be lett volna húzva, mielőtt X egy elemmé húzódhatna, és megvizsgálnánk rajta g értékét. Ekkor viszont X halmazt nem tudtuk volna $\mathcal{X}$-hez adni, hisz nem létezne olyan $z \neq s$ eleme a halmaznak, melyre $V[\{z\}] = X$ hisz az X elemeinek egy része már s-ben lenne húzva.

Most megmutatjuk, hogy $\mathcal{X}$ minden minimális optimális halmazt tartalmaz. Tegyük fel indirekt, hogy nem, legyen $Z \notin \mathcal{X}$ minimális optimális halmaz. Jelölje a $(V' = \{s, a, b\}, g')$ a legvégül kapott rendszert az algoritmusban. Kit minimális optimális halmaz nem tartalmazhatja és nem metszheti egymást, ugyan amiatt az érvelés miatt, amit két minimális optimális megoldásra a fejezet elején leírtunk. Így Z diszjunkt a $\mathcal{X}$ minden elemétől, ezért,

$$Z \subseteq V - \bigcup_{X \in \mathcal{X} - \{V[\{a,\, b\}]\}} X = V[\{a,\, b\}],$$

ahol az egyenlőség azért áll, mert $\bigcup_{X \in \mathcal{X} - \{V[\{a,\, b\}]\}} X$ minden eleme bele lett húzva s-be mire a legvégül kapott $(V' = \{s, a, b\}, g')$ rendszerhez érünk. Mivel az algoritmus 15. sorában megvizsgáltuk, hogy $g'(\{a, b\}) = g(V[\{a, b\}])$ egyenlő-e $\lambda*$-gal, ezért $Z \neq V[\{a, b\}]$, mert különben Z-nek be kellett volna kerülni $\mathcal{X}$ -be a 16. sorban. Jelöljük az összes olyan $Z' \subseteq V'$ halmazt Z'-vel, melynek az ősképe Z, hiszen ezekre $g'(Z') = g(Z)$. Mivel $g'(a) > \lambda^*$ és $g'(b) > \lambda^*$, biztos hogy $Z \neq V[\{a\}]$ és $Z \neq V[\{b\}]$. Ekkor biztos, hogy Z vagy valamely Z' szeparál legalább egy, az algoritmus 7. sorában kiválasztott kapcsolt párt. Jelöljük (x, y)-nal a legelső ilyen párt. Ekkor $g'(y) \leq g(Z) = \lambda*$ adódik a kapcsolt pár definíciójával, ellentmondásban azzal, hogy $g'(u) > \lambda^*$ minden $u \in V' - s$ elemre a 7. sorban. (Az utóbbi állítás azért teljesül, mert nyilván a az 5. sorban szereplő V' rendszer minden $u \in V' - s$ elemére $g'(u) > \lambda^*$, ellenkező esetben u elemet a 4. sorban belehúztuk volna s-be. A 6.sortól pedig ahányszor létrejön egy új $z \in V'$ elem, mindig megvizsgáljuk $g'(z)$ értékét, és amennyiben $g'(z) = \lambda^*$, akkor z elemet belehúzzuk az s elembe, így nem marad V'-ben.)

Mivel a **Minimal** algoritmus $O(n)$-szer keres kapcsolt párokat, a teljes futási idő $O(n^3 T_g)$. Az itt leírtak alapján kapjuk a következő tétel.

3.20. Tétel. *Adott $(V+s, g)$ szimmetrikus keresztező szubmoduláris rendszerre, ahol $|V| = n \geq 2$, jelölje $\lambda^* = min\,\{g(X) \mid \emptyset \neq X \subset V\}$. Ekkor a $(V+s,\, g)$ rendszer minimális optimális halmazainak $\mathcal{X}$ családja $O(n^3 T_g)$ futási időben megtalálható.*

Legyen most (V, f) egy átmetsző szubmoduláris és pozimoduláris rendszer, és legyen $(V + s, g)$ az szimmetrikus keresztező szubmoduláris rendszer, amit a

3.19 lemmában leírt módon kapunk $(V,\, f)$-ből. Figyeljük meg, hogy $(V+s,\, g)$ rendszer minimális optimális halmazainak $\mathcal{X}$ családja pont a $(V,\, f)$ rendszer minimális optimális megoldásainak felelnek meg. Először is a két optimum értéke megegyezik, azaz

$$min\,\{g(X) \mid \emptyset \neq X \subset V\} = \lambda^* = min\,\{f(X) \mid \emptyset \neq X \subset V\}\,,$$

hiszen az $X \subseteq V$ halmazok nem tartalmazzák s-et, így azokra $g(X) = f(X)$ a g függvény definíciója alapján, tehát $\mathcal{X}$ elemei mind optimális megoldások $(V,\, f)$-ben. Másrészt pedig tartalmazásra nézve minimálisak is, hiszen ha valamelyik $X \in \mathcal{X}$ halmazhoz létezne $\emptyset \neq Y \subset V$ halmaz, melyre $g(Y) = \lambda^*$, akkor $s \notin Y$ miatt $g(Y) = f(Y) = \lambda^*$ is teljesülne, ellentétben X minimalitásával. Végül gondoljuk meg, hogy a $(V,\, f)$ rendszer minden minimális optimális megoldása fel van sorolva $\mathcal{X}$-ben. Ez nyilván teljesül, hiszen a $(V,\, f)$ rendszer minden minimális optimális megoldása definíció szerint minimális optimális halmaz $(V+s,\, g)$-ben. Az itt leírt érvelés folytán kapjuk a következő tételt.

3.21. Tétel. *Adott $(V,\, f)$ átmetsző szubmoduláris és pozimoduláris rendszerre, ahol $|V| = n \geq 2$, a rendszer minimális optimális megoldásainak $\mathcal{X}$ családja $O(n^3 T_g)$ futási időben megtalálható.*

4. A Gomory-Hu fa

Ebben a fejezetben egyrészt egy gráf minimális $(s,\, t)$-vágásainak struktúrájáról lesz szó, másrészt arról, hogy a lokális élösszefüggőség fogalmának szimmetrikus szubmoduláris függvényekre való általánosításával milyen a gráfokra ismeretes eredmények vihetőek át szimmetrikus szubmoduláris rendszerekre.

Bizonyos problémák megoldásakor nem csak a gráf egy minimális vágására vagyunk kíváncsiak, hanem az összes $u, v \in G$ pontpárra szeretnénk megadni egy minimális $(u,\, v)$-vágást, vagyis egy $X_{uv} \subseteq V$ halmazt kapni, melyre $d(X_{uv}) = min\,\{d(X) \mid u \in X,\, v \in V - X\} = \lambda(u,\, v)$. A gráf Gomory-Hu fája a gráf két pontot elválasztó minimális vágások struktúráját adja meg. A pontos definíciót alább közöljük.

Felvetődik a kérdés, hogy hányféle értéket vehet fel $\lambda(u,\, v)$ egy $G = (V,\, E)$ gráfban. A válasz az, hogy legfeljebb $n - 1$ különböző lokális élösszefüggőség érték fordulhat elő egy gráfban.

Ennek igazolásához tekintsük a $K = (V,\, E')$ teljes gráfot a V felett, ahol egy $\{u,\, v\} \in E'$ él súly legyen $w_K(\{u,\, v\}) = \lambda(u,\, v;\, G)$, és legyen $T = (V,\, F)$ a K egy maximális súlyú feszítő fája. Legyen most $\{u,\, v\} \in E'$, $\{u,\, v\} \notin F$ egy tetszőleges nem fa-él. Mivel T-nek $n - 1$ éle van, elég lenne látnunk, hogy található egy olyan $\{u',\, v'\} \in F$ fa-él, melyre $\lambda(u',\, v';\, G) = \lambda(u,\, v;\, G)$. Jelölje P_{uv} az u-t és v-t a T-ben összekötő út, és legyen $\{u',\, v'\} \in P_{uv}$ egy minimális súlyú éle az útnak. Ekkor $\lambda(u',\, v';\, G) = w_K(\{u',\, v'\}) \leq w_K(\{u,\, v\}) = \lambda(u,\, v;\, G)$, hiszen különben $T' = (V,\, (F - \{u',\, v'\}) \cup \{u,\, v\}$ egy nagyobb össz-súlyú feszítő fa lenne, ellentmondásban T maximalitásával. Másrészt (3) ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy $\lambda(u', v'; G) = w_K(\{u',\, v'\}) \geq w_K(\{u,\, v\}) = \lambda(u,\, v;\, G)$. Vagyis $\lambda(u',\, v';\, G) = \lambda(u,\, v;\, G)$ teljesül.

4.1. Definíció. Legyen adott egy $G = (V,\, E)$ élsúlyozott gráf. Egy $H = (V,\, F)$ élsúlyozott gráfot *folyam-ekvivalensnek* nevezünk G-vel, ha $\lambda(u,\, v;\, G) = \lambda(u,\, v;\, H)$ teljesül bármely $u,\, v \in V$ párra, ahol nem követeljük meg, hogy H a G egy részgráfja legyen.

A fenti definícióból adódóan egy T fa pontosan akkor folyam ekvivalens G-vel, ha bármely két $u,\, v \in V$ pontra a T-ben u-t és v-t összekötő út legkisebb súlyú élének a súlya megegyezik a $\lambda(u,\, v;\, G)$ értékkel. (Látszik, hogy a T fa élsúlyként tartalmazza mind a legfeljebb $n - 1$ lokális élösszefüggőségi értéket G-ből.)

Például az előbbi G-hez konstruált K teljes gráf T maximális feszítő fája folyam-ekvivalens G-vel, hisz bármely két $u,\, v \in V$ pontra

$$\lambda(u,\, v;\, G) = min\,\{w_K(e) \mid e \in P_{uv}\}$$

teljesül. Ford és Fulkerson [1] megmutatták, hogy minden gráfhoz létezik folyam-ekvivalens út is.

4.2. Definíció. A $G = (V,\, E)$ gráf egy $T = (V,\, F)$ folyam-ekvivalens fáját a G *Gomory-Hu fájának* nevezzük, ha bármely $e = \{u,\, v\} \in F$ fa-élre $d(X_e;\, G) = d(V - X_e;\, G) = w(e) = \lambda(u,\, v;\, G)$, ahol $X_e$és $V - X_e$ a $T - e$ két komponensét jelöli, (azaz $\{X_e,\, V - X_e\}$ egy minimális $(u,\, v)$-vágás).

Valójában a Gomory-Hu fa definíciójában elég lenne megkövetelni, hogy bármely $e = \{u,\, v\} \in F$ fa-élre az $\{X_e,\, V - X_e\}$ egy minimális $(u,\, v)$-vágás legyen a G gráfban. Ekkor az e él súlyát a

$$d(X_e;\, G) = d(V - X_e;\, G) = \lambda(u,\, v;\, G) = w(e)$$

módon definiálva $T = (V,\, F)$ fa a $w:\ F \to \mathbb{R}_+$ élsúlyokkal folyam-ekvivalens lesz a G gráffal. A bizonyítást később közöljük.

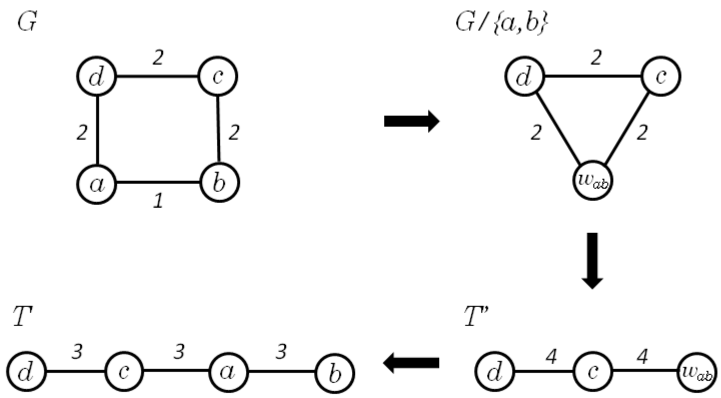
4.3. Tétel. *Minden gráfnak létezik Gomory-Hu fája.*

Mielőtt a tétel egy általánosabb változatát bizonyítanánk, teszünk néhány észrevételt.

Legyen most $u, v \in V$ két tetszőleges pontja a G-nek, T pedig a gráf Gomory-Hu fája. Ha $e = \{u,\, v\}$ fa-él, akkor $\{X_e,\, V - X_e\}$ egy minimális $(u,\, v)$-vágást határoz meg a G-ben. Ha pedig nincsen $\{u,\, v\}$ él a T-ben, akkor legyen $e' = \{u',\, v'\}$ egy minimális súlyú él P_{uv}-ben (vagyis a fában az u-t és a v-t összekötő útban) . Ekkor $\{X_{e'},\, V - X_{e'}\}$ egy minimális $(u,\, v)$-vágás G-ben. Sőt, azt is megfigyelhetjük, hogy T minden v levele és a fában vele szomszédos u pont kapcsolt pár G-ben, hiszen a fent leírtakból adódik, hogy ekkor $\{v,\, V - v\}$ egy minimális (u, v)-vágás két partja, ami pont azt jelenti, hogy $d(v; G) = \lambda(u, v; G)$ teljesül.

4.4. Megjegyzés. Az előbbi megfigyelés nyomán természetesen vetődik fel az ötlet, hogy nem lehet-e kapcsolt párok ismételt megkeresésével és összehúzásával Gomory-Hu fát konstruálni. Nem igaz-e, hogy, ha $(u,\, v)$ egy kapcsolt pár, azaz $\lambda(u, v; G) = d(v; G)$ és $T' = (V - \{u,\, v\} \cup w_{uv},\, F')$ a $G/\,\{u,\, v\}$ gráf Gomory-Hu fája (ahol $G/\,\{u,\, v\}$ jelöli az u és a v pontok összehúzásával keletkező gráfot, w_{uv} pedig az új pontot), akkor a $T = (V,\, F' - \{x,\, w_{uv}\} \cup \{x,\, u\} \cup \{u,\, v\})$ Gomory-Hu fája G-nek.

Az állítás sajnos nem igaz, az alábbiakban mutatunk egy ellenpéldát.



Az ábrán látható G gráfban (a, b) egy kapcsolt pár, $d(b; G) = \lambda(a, b; G) = 3$. A $G/\{a,\ b\}$ gráfnak nyilván $T' = (\{d,\ c,\ w_{ab}\}, \{\{d,\ c\}, \{c,\ w_{ab}\}\}$ egy Gomory-Hu fája. Azonban az $\{a,\ b\}$ él visszaragasztásával kapott $T = (\{a,\ b,\ c,\ d\}, F' - \{c,\ w_{ab}\} \cup \{c,\ a\} \cup \{a,\ b\})$ fa nyilván nem Gomory-Hu fája G-nek, mivel $4 = d(d;\ G) \neq \lambda(c,\ d;\ G) = 3$.

Most nézzük mi örökíthető át az általánosabb szimmetrikus szubmoduláris függvényekre a Gomory-Hu fáról és a lokális élösszefüggőségről az előbb leírtakból.

Mint azt a 3.5 megjegyzésben leírtuk, a lokális összefüggőség fogalma értelmezhető egy tetszőleges $(V,\ f)$ szimmetrikus rendszer esetében is. Két tetszőleges $s,\ t \in V$ elemre jelölje $\lambda_f(s,\ t)$ a következő mennyiséget.

$$\lambda_f(s,\ t) := min\{f(S) \mid s \in S,\ t \in V - S\}$$

A 3.5 megjegyzésben leírtak szerint az s és a t elemek egy vágásán egy olyan $X \subset V$ halmazt értünk, amely szeparálja az s és a t elemeket, egy $f-$minimális (s, t)-vágáson pedig egy olyan X^* nem-üres valódi részhalmazt, amely minimalizálja f -et az $(s,\ t)$-vágások között, azaz amelyre teljesül, hogy $f(X^*) = min\{f(S) \mid s \in S,\ t \in V - S\}$. Ezeknek a fogalmaknak a segítségével a 4.2 definícióval teljesen analóg módon definiálhatjuk a $(V,\ f)$ szimmetrikus rendszerhez tartozó folyam ekvivalens, illetve Gomory-Hu fákat.

4.5. Definíció. Legyen adott egy $(V,\ f)$ szimmetrikus rendszer. Egy $H = (V,\ F)$ a V alaphalmazon mint pontokon adott élsúlyozott gráfot *folyam-ekvivalensnek* nevezünk $(V,\ f)$-fel, ha $\lambda(u,\ v;\ H) = \lambda_f(u,\ v)$ teljesül bármely $u,\ v \in V$ elempárra.

A fenti definícióban szereplő $H = (V,\ F)$ folyam-ekvivalens gráf nem feltétlenül egy fa.

4.6. Definíció. A $(V,\ f)$ szimmetrikus rendszer egy $T = (V, F)$ folyam-ekvivalens fáját a $(V,\ f)$ *Gomory-Hu fájának* nevezzük, ha bármely $e = \{u,\ v\} \in F$ fa-élre $f(X_e) = f(V - X_e) = w(e) = \lambda_f(u,\ v)$, ahol $X_e$és $V - X_e$ a $T - e$ két komponensének ponthalmazát, mint V-beli halmazt jelöli. (Azaz X_e és $V - X_e$ f-minimális $(u,\ v)$-vágások).

Mint azt a 4.2 definíció után is megjegyeztük, ha csak a Gomory-Hu fa definíciójában szereplő feltételt követeljük meg egy fáról, abból már következik a folyam ekvivalencia. Ez ugyanúgy teljesül az általános esetben is.

4.7. Lemma. *Legyen f szimmetrikus halmazfüggvény a V halmazon és $T = (V, F)$ egy fa V elemein mint pontokon. Tegyük fel, hogy bármely $e = \{u,\ v\} \in F$ fa élre az X_e egy f-minimális $(u,\ v)$-vágás, (ahol X_e és $V - X_e$ a $T - e$ két komponensének ponthalmazát, mint V-beli halmazt jelöli). Ekkor a $w(e) := f(X_e) = f(V - X_e) = \lambda_f(u,\ v)$ módon definiált élsúlyozással a T Gomory-Hu fája a $(V,\ f)$ rendszernek (azaz a folyam ekvivalencia automatikusan teljesül).*

Bizonyítás. Legyen $u,\ v \in V$ tetszőleges, és $e = \{s,\ t\}$ egy minimális súlyú él a T-beli (egyértelmű) $u,\ v$ úton. Mivel X_e egy $(u,\ v)$-vágás, $\lambda_f(u,\ v) \leq f(X_e) = w(e)$, és $w(e) = \lambda(u,\ v;\ T)$, hiszen e egy minimális súlyú él volt az $u,\ v$ úton. Az egyenlőtlenség másik irányának belátásához tekintsük az $Y \subseteq V$ f-minimális $(u,\ v)$-vágást. Az T-beli $u,\ v$ út valamely $e' = \{s',\ t'\}$ élének végpontjait Y szeparálja. Tehát $\lambda_f(u,v) = f(Y) \geq \lambda_f(s',t') = w(e') \geq w(e)$, hiszen $e = \{s,\ t\}$ minimális súlyú volt az $u,\ v$ úton. Kapjuk tehát, hogy $\lambda_f(u,\ v) = w(e) = \lambda(u,\ v;\ T)$, azaz $T = (V,\ F)$ folyam-ekvivalens $(V,\ f)$ rendszerrel. □

Valójában egy a 4.3 tételnél egy sokkal általánosabb állítást fogunk belátni.

4.8. Tétel. *Ha f szimmetrikus és keresztező szubmoduláris halmazfüggvény V-n akkor létezik a $(V,\ f)$ rendszernek Gomory-Hu fája.*

Sőt minden $R \subseteq V$ részhalmaznak is eltudjuk készíteni az R $(V,\ f)$-hez tartozó Gomory-Hu fáját. (Hogy ez alatt pontosan mit értünk, azt alább definiáljuk.) Az itt leírt bizonyítás a [18]-ban leírt gondolatmenetet követi kisebb átfogalmazásokkal. Másrészt a [18]-ban leírt érvelésnek is a [15]-ban található vázlatos bizonyítás képezi a vázát. A bizonyítás ereje, hogy algoritmust is ad a fa megkonstruálására.

4.9. Definíció. Legyen f egy szimmetrikus, keresztező szubmoduláris függvény a V alaphalmazon, és legyen $\emptyset \neq R \subseteq V$ egy részhalmaza az alaphalmaznak. Az *R $(V,\ f)$-hez tartozó Gomory-Hu fáján* egy $T = (R,\ E_T)$ fából és V egy $\{C_r \mid r \in R\}$ partíciójából álló párt értünk, melyekre teljesül, hogy

$$r \in C_r\ \forall r \in R,$$

illetve, hogy minden $e = \{s, t\} \in E_T$ élre az

$$U = \bigcup_{r \in X_e} C_r$$

módon definiált $U \subseteq V$ halmaz egy f-minimális (s, t)-vágás, ahol $X_e \subseteq R$ a $T - e$ két komponense közül az egyiknek a csúcshalmazát jelöli.

Ekkor az $R = V$ esetben a 4.7 lemma miatt a $T = (V, E_T)$ a (V, f) Gomory-Hu fája.

Ahogy azt már a fenti definíció is sejteti, úgy fogjuk megkonstruálni a T fa egy r pontjához tartozó $C_r \subseteq V$ halmazt, hogy minden olyan alaphalmazbeli $v \in V$ elem C_r-hez tartozzon, amely minden az R egy tetszőleges q elemét és az r elemet elválasztó f-minimális (q, r)-vágásokban az r-el egy komponensbe kerül.

Az eljárás során rekurzívan építjük fel a R-hez tartozó Gomory-Hu fát. Minden lépésben az adott Gomory-Hu fa készítési feladatot visszavezetjük két, kisebb elemszámú R_1, R_2 halmazhoz tartozó feladatra. Mindig kiválasztunk két tetszőleges $r_1, r_2 \in R$ elemet, és tekintünk egy $W \subseteq V$ f-minimális (r_1, r_2) vágást, majd egyszer a W elemeit, egyszer pedig a $V - W$ elemeit összeragasztva egyetlen pontttá kapjuk a $V_1 = W + v_1$ és a $V_2 = V - W + v_2$ alaphalmazokon és $R_1 = R \cap W$ és $R_2 = R - W$ részhalmazokon definiált Gomory-Hu fa készítési feladatot. (Mint azt lejjebb részletezni fogjuk, az f függvény természetesen definiálható az eredeti alaphalmaz néhány elemének összeragasztásával kapott kisebb alaphalmazokon.) A két redukált $T_i = (R_i, E_{T_i})$ Gomory-Hu fákból és a hozzájuk tartozó $\left\{C_r^i \mid r \in R_i\right\}$ partíciókból ($i = 1, 2$) pedig úgy kapjuk meg az R-hez tartozó $T = (R, E_T)$ fát, hogy a T_1és a T_2 fa egy-egy alkalmas r' és r'' pontját összekötjük egy éllel. A definícióból adódóan egyrészt úgy kell megkonstruálnunk a C_r^i halmazokat, másrészt pedig úgy kell megválasztanunk az r', r'' elemeket, hogy a $W = \bigcup_{r \in R_1} C_r^1$ egy f-minimális (r', r'')-vágás legyen. Mint ki fog derülni, erre a v_1-et tartalmazó $C_{r'}^1$ és a v_2-t tartalmazó $C_{r''}^2$partíció-elemeknek megfelelő r' és r'' pont alkalmasak.

A pontos algoritmus a következő.

Algoritmus Gomory-Hu

Input: Egy $(V,\, f)$ szimmetrikus és keresztező szubmoduláris rendszer és egy $R \subseteq V$ halmaz.

Output: Egy $T = (R,\, E_T)$ fa és V egy $\{C_r \mid r \in R\}$ partíciója, melyekre teljesülnek a 4.9 definícióban leírtak.

1 **ha** $|R| = 1$ **akkor**

2 $\quad T := (\{r\}\,,\, \emptyset)$ ahol $\{r\} = R$ és $C_r := V$

3 **különben**

4 $\quad$ Legyen $r_1,\, r_2 \in R$ két tetszőleges eleme R-nek, és legyen $W \subset V$ egy f-minimális $(r_1,\, r_2)$-vágás, /*visszavezetjük két kisebb elemszámú R_1, R_2 halmazokhoz tartozó alfeladatra*/

5 $\quad$ Legyen $V_1 = W + v_1$, illetve $\rho_1 : V \to V_1$ ragasztó leképezés, melyre

$$\rho_1(u) = \begin{cases} u & ha\, u \in W \\ v_1 & ha\, u \in V - W \end{cases}$$

és $f_1$legyen az a V_1-en értelmezett halmazfüggvény, melyre $f_1(X) = f(\rho_1^{-1}(X))$. Legyen $R_1 = R \cap W$,

6 $\quad$ Legyen $V_2 = V - W + v_2$, illetve $\rho_2 : V \to V_2$ ragasztó leképezés, melyre

$$\rho_2(u) = \begin{cases} u & ha\, u \in V - W \\ v_2 & ha\, u \in W \end{cases}$$

és $f_2$legyen az a V_2-n értelmezett halmazfüggvény, melyre $f_2(X) = f(\rho_2^{-1}(X))$. Legyen $R_2 = R - W$,

7 $\quad$ Jelölje $T_i = (R_i,\, E_{T_i})$, $\left\{C_r^i \mid r \in R_i\right\}$a Gomory-Hu algoritmus *Output*-ját az $(V_i,\, f_i)$, R_i *Input* esetén $i = (1,\, 2)$-re,

8 $\quad$ Legyen $r' \in R_1$az az elem, amelyre $v_1 \in C^1_{r'}$,

9 $\quad$ Legyen $r'' \in R_2$az az elem, amelyre $v_2 \in C^2_{r''}$,

10 $\quad T := (R_1 \cup R_2,\, E_{T_1} \cup E_{T_2} \cup e = \{r',\, r''\})\,,\, \{C_r \mid r \in R\}$

$$\text{ahol } C_r = \begin{cases} C_r^1 & ha\, r \in R_1,\, r \neq r' \\ C_{r'}^1 - v_1 & ha\, r = r' \\ C_r^2 & ha\, r \in R_2,\, r \neq r'' \\ C_{r'}^2 - v_2 & ha\, r = r'' \end{cases}$$

11 **ha vége**

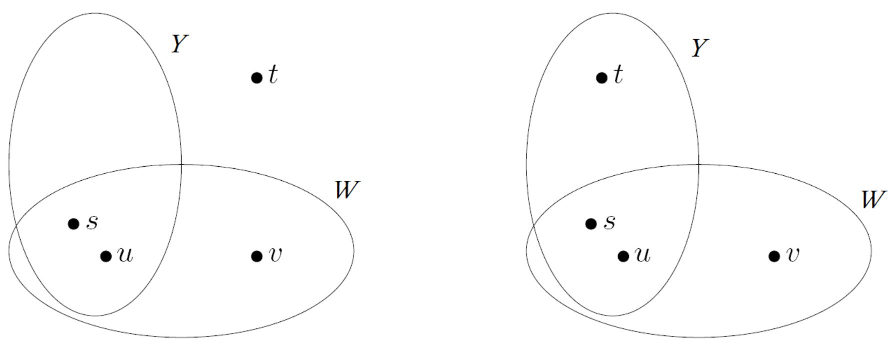
12 *Output*:T, $\{C_r \mid r \in R\}$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy ha f szimmetrikus, keresztező szubmoduláris függvény volt az eredeti V alaphalmazon, akkor a f_1 és f_2 is szimmetrikus, keresztező szubmoduláris függvények. A ragasztással keletkezett V_i alaphalmazokban lévő keresztező halmazok ősképei keresztező halmazokat alkotnak a V-ben is, továbbá $f_i(X) = f(\rho_i^{-1}(X))$, így az f-re teljesülő szubmodularitási egyenlőtlenség f_i-re is öröklődik. Világos az is, hogy szimmetrikus halmazfüggvény alaphalmazát ragasztva szimmetrikus halmazfüggvényt kapunk. Így a 7. sor valóban értelmes, valóban szimmetrikusak és keresztező szubmodulárisak az alfeladat Input-jának részeként megadott $(V_i,\, f_i)$ rendszerek.

Mielőtt igazolnánk az algoritmus helyességét, belátjuk a következő lemmát, amelynek kulcs szerepe lesz az algoritmus helyességének igazolásában.

4.10. Lemma. *Legyen f szimmetrikus keresztező szubmoduláris halmazfüggvény a V halmazon, és $W \subseteq V$ valamely $(s,\ t)$ elemekre egy f-minimális vágás. Ekkor bármely $u,\ v \in W$ elemekhez létezik olyan X f-minimális $(u,\ v)$-vágás, hogy $X \subseteq W$.*

Bizonyítás. Legyen Y tetszőleges egy olyan f-minimális $(u,\ v)$-vágás, amely átmetszi W-t. (Ellenkező esetben készen vagyunk, hiszen ekkor $X = Y \subseteq W$ vagy $X = V - Y \subseteq W$ automatikusan teljesül.) Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy pl. $s \in W$ és $u \in Y$, illetve $s \in Y$. (Amennyiben ezek közül bármelyik nem teljesül, cseréljük fel s és t, u és v vagy pedig Y és $V - Y$ szerepét a bizonyításban.)



$t \notin Y$ $\qquad$ $t \in Y$

Két eset lehetséges aszerint, hogy a t elem is Y-ban van-e vagy sem. Legyen először $t \notin Y$. Ekkor Y és W keresztezi is egymást, hisz $t \in V - (W \cup Y)$, így f keresztező szubmodularitása miatt

$$f(Y) + f(W) \geq f(Y \cap W) + f(Y \cup W)$$

teljesül. Mivel $Y \cap W$ egy $(u,\ v)$-vágás, Y pedig f-minimális $(u,\ v)$-vágás volt, $f(Y \cap W) \geq f(Y)$ teljesül. Továbbá $Y \cup W$ pedig egy $(s,\ t)$-vágás, W pedig f-minimális $(s,\ t)$-vágás volt, így $f(Y \cup W) \geq f(W)$, vagyis a fenti szubmodularitási egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, és $X = (Y \cap W) \subseteq W$ is egy f-minimális $(u,\ v)$-vágás.

Most legyen $t \in Y$. Ha $V - (W \cup Y)$ üres, akkor $V - Y \subseteq W$ és $W - Y$ pedig f-minimális $(u,\ v)$-vágás, így készen vagyunk. Tegyük fel tehát, hogy $V - (W \cup Y)$ nem üres, ekkor Y és W keresztezi is egymást. Másrészt f szimmetrikusságából és keresztező szubmodularitásából adódik, hogy f keresztező pozimoduláris, így

$$f(Y) + f(W) \geq f(W - Y) + f(Y - W)$$

teljesül. Az előző esethez hasonlóan kapjuk, hogy mivel $W - Y$ egy $(u,\ v)$-vágás, Y pedig f-minimális $(u,\ v)$-vágás volt, $f(W - Y) \geq f(Y)$ teljesül. Továbbá

$Y - W$ pedig egy $(s,\, t)$-vágás, W pedig f-minimális $(s,\, t)$-vágás volt, így $f(Y - W) \geq f(W)$, vagyis a fenti pozimodularitási egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, és $X = (W - Y) \subseteq W$ is egy f-minimális $(u,\, v)$-vágás. □

4.11. Tétel. *A Gomory-Hu algoritmus az R $(V,\, f)$-hez tartozó Gomory-Hu fáját adja eredményül.*

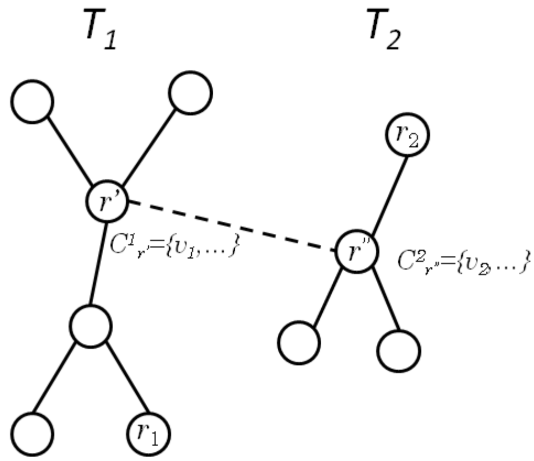
Bizonyítás. Természetesen $r \in C_r$ $\forall r \in R$ teljesül. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $e = \{u,\, v\} \in E_T$ élre a $T - e$ indukál egy f-minimális $(u,\, v)$-vágást. Az $|R| = 1$ alapesetben az állítás triviális. Az R elemszáma szerinti indukcióval bizonyítunk. Legyen most $2 \leq |R| = k$, és tegyük fel, hogy minden $k' < k$ elemű halmazra már beláttuk, hogy igaz a tétel.

Tekintsük először az $e \in T_i$ esetet, azaz amikor a vizsgált él valamelyik alfeladatból származó T_i fa egy éle. Legyen például $e \in E_{T_1}$. Ekkor az indukciós feltevésből következik, hogy a $T_1 - e$ egy f_1-minimális $(u,\, v)$-vágást határoz meg a $(V_1,\, f_1)$ rendszerre nézve. Legyen most X_e a $T_1 - e$ azon komponensének csúcshalmaza mint V-beli halmaz, amely nem tartalmazza v_1-et. Ekkor X_e egy f-minimális $(u,\, v)$-vágás a $(V,\, f)$ rendszerre nézve is. Tegyük fel ugyanis, hogy $Y \subseteq V$ egy f-minimális $(u,\, v)$-vágás, és $f(Y) < f(X_e)$. Ekkor a 4.10 lemma szerint létezik olyan X f-minimális $(u,\, v)$-vágás, hogy $X \subseteq W \subseteq V_1$, és W részhalmazain pedig $f_1(X) = f(X)$. Így viszont kapjuk, hogy $f_i(X) = f(X) = f(Y) < f(X_e) = f_1(X_e)$, ellentétben azzal, hogy X_e egy f_1-minimális $(u,\, v)$-vágás.

Tehát az egyetlen él, amelyet még ellenőriznünk kell, az új $e* = \{r',\, r''\}$ él. Ekkor az algoritmus menetéből adódóan világos, hogy

$$\bigcup_{r \in X_{e*}} C_r = W$$

amennyiben $X_{e*} \subseteq R$ a $T - e*$ két komponense közül annak a csúcshalmazát jelöli, amely r_1-et és r'-t tartalmazza. Azt kell tehát megmutatnunk, hogy $W \subset V$, melyet úgy választottunk, hogy egy f-minimális $(r_1,\, r_2)$-vágás legyen, egyben f-minimális $(r',\, r'')$-vágás is. A lenti ábra mutatja a T_1, T_2 fák, illetve az r_1, r', r_2, r'' pontok helyzetét a fákban.



Tegyük fel indirekt, hogy a $W \subseteq V$ $(r',\, r'')$-vágás nem f-minimális. Legyen $X \subseteq V$ egy f-minimális $(r',\, r'')$-vágás, ekkor $f(X) < f(W)$. Amennyiben X tartalmazza az r_1, r_2 pontok valamelyikét, úgy a másikat is tartalmaznia kell, különben X egy $(r_1,\, r_2)$-vágás lenne, melyre $f(X) < f(W)$, ellentétben W választásával. Feltehetjük, hogy $r_1, r_2 \notin X$, különben cseréljük fel X és $V - X$, szerepét a bizonyításban. Feltehetjük továbbá, hogy $r' \in X$, hiszen az $r'' \in X$ eset teljesen analóg módon bizonyítható.

Először is a 4.10 lemmában alkalmazott érveléshez hasonló módon megmutatjuk, hogy létezik egy $X' \subseteq W$ f-minimális $(r',\, r'')$-vágás is. Ha $X \subseteq W$, akkor $X = X'$ ilyen, tegyük fel tehát, hogy $X - W$ nem üres. Ekkor X és W keresztező halmazok (hiszen $r_1 \in W - X$, $r' \in W \cap X$, és $r_2,\, r'' \in V - (W \cup X)$), így f keresztező szubmodularitása miatt

$$f(X) + f(W) \geq f(X \cap W) + f(X \cup W).$$

Másrészt $X \cap W$ egy $(r',\, r'')$-vágás, X pedig f-minimális $(r',\, r'')$-vágás volt, így $f(X \cap W) \geq f(X)$ teljesül. Továbbá $X \cup W$ egy $(r_1,\, r_2)$-vágás, W pedig f-minimális (r_1, r_2)-vágás volt, így $f(X \cup W) \geq f(W)$, vagyis a fenti szubmodularitási egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, és $X' = (X \cap W) \subseteq W$ is egy f-minimális $(r',\, r'')$-vágás, és $f(X') = f(X) < f(W)$.

Tekintsük a $T_1 = (R_1,\, E_{T_1})$ fát, és abban az r', r_1 egyértelmű utat. $X' \subseteq W$ tartalmazza az $R_1 = R \cap W$ néhány elemét (például $r' \in X'$), de nem tartalmazza az egész R_1-et (például $r_1 \notin X'$), így az r', r_1 útnak van olyan $e = \{s,\, t\}$ éle, melyre X' szeparálja az s és a t elemeket. Mivel T_1az indukciós feltevésünk szerint az R_1 $(V_1,\ f_1)$-hez tartozó Gomory-Hu fája, így az

$$U = \bigcup_{r \in Y} C_r^1$$

egy f_1-minimális $(s,\ t)$-vágás V_1-ben, ahol $Y \subseteq R_1$ a $T_1 - e$ két komponense közül annak a csúcshalmazát jelöli, amelyre $r_1 \in Y$. Továbbá $X' \subseteq W \subset V_1$ is egy nem feltétlenül f_1-minimális (s, t)-vágás V_1-ben. És így $(f(X') =) \, f_1(X') \geq f_1(U) \, (= f(U))$, ahol a két egyenlőség f_1 definíciójából adódóan teljesül, hiszen $X' \subseteq W$, és $r' \notin Y$ következtében $v_1 \notin U$, tehát $U \subseteq W$. Ekkor viszont U a $(V,\ f)$ rendszerben egy olyan $(r_1,\ r_2)$-vágás lenne, melyre $f(U) \leq f(X') = f(X) < f(W)$ ellentétben azzal, hogy W egy f-minimális $(r_1,\ r_2)$-vágás. Ezzel egyrészt a 4.11 tételt bebizonyítottuk. $\square$

Tetszőleges szimmetrikus keresztező szubmoduláris (V, f) rendszerre az $R = V$ esetben a **Gomory-Hu** algoritmus során konstruált $T = (V,\ E_T)$ fa a 4.7 lemma miatt a $(V,\ f)$ rendszernek egy az eredeti értelemben vett (vagyis a 4.6 definíciónak eleget tevő) Gomory-Hu fája . Ezzel a 4.8 tételt is beláttuk.

A Gomory-Hu algoritmus futási ideje $O(n \cdot f(n))$, ahol $f(n)$ egy f-minimális $(s,\ t)$-vágás kiszámításának az idejét jelöli egy n pontú alaphalmazon adott $(V,\ f)$ szimmetrikus rendszer esetében. (Megjegyezzük, hogy egy gráf Gomory-Hu fájának megkonstruálására sem ismert $O(n \cdot F(n, m))$ futási időnél gyorsabb algoritmus [12], ahol $F(n, m)$ egy minimális (s, t)-vágás kiszámításának az idejét jelöli egy n pontú és m élű gráfban.)

5. Extrém halmazok

5.1. Definíció. Egy $G = (V,\ E)$ élsúlyozott gráfban *extrém csúcshalmaznak* nevezünk egy $\emptyset \neq X \subset V$ részhalmazt, ha

$$d(X) < d(Y)$$

teljesül $\forall \emptyset \neq Y \subset X$ halmazra.

A V egyetlen csúcsból álló $\{v\}$ részhalmazai extrém csúcshalmazok, ezeket triviális extrém csúcshalmazoknak nevezzük, a G gráf extrém csúcshalmazainak rendszerét pedig $\mathcal{X}(G)$-vel jelöljük. Az extrém halmazok elméletét Watanabe és Nakamura vezették be a gráf élösszefüggőség növelési problémájához kötődően [17]. Egy gráf extrém halmazai segítséget nyújtanak több gráfelméleti probléma megoldásában is, mint például az élösszefüggőség növelési probléma vagy a forrás telepítési probléma. Nagamochi mutatott [8] egy $O(nm + n^2 \log n)$ futási idejű algoritmust élsúlyozott irányítatlan gráfok összes extrém halmazának megtalálására. Az eljárás menete hasonló ahhoz, amit a gráf egy minimális vágásának megkeresésénél bemutattunk. Nagamochi bevezetett egy másik sorbarendezést a gráf pontjain, melynek utolsó két pontjáról belátható, hogy azokat extrém csúcshalmaz nem szeparálja. A sorbarendezést és az állítás két bizonyítását a 5.1 fejezetben ismertetjük.

Nagamochi megmutatta továbbá azt is, hogy az egész eljárás általánosítható szimmetrikus szubmoduláris illetve szubmoduláris és pozimoduláris halmazfüggvények extrém halmazainak megkeresésére is.

5.1. A min-degree sorrend és lapos párok

5.2. Definíció. A gráf pontjainak egy $\sigma = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sorrendjét *min-degree sorrendnek* nevezzük , ha

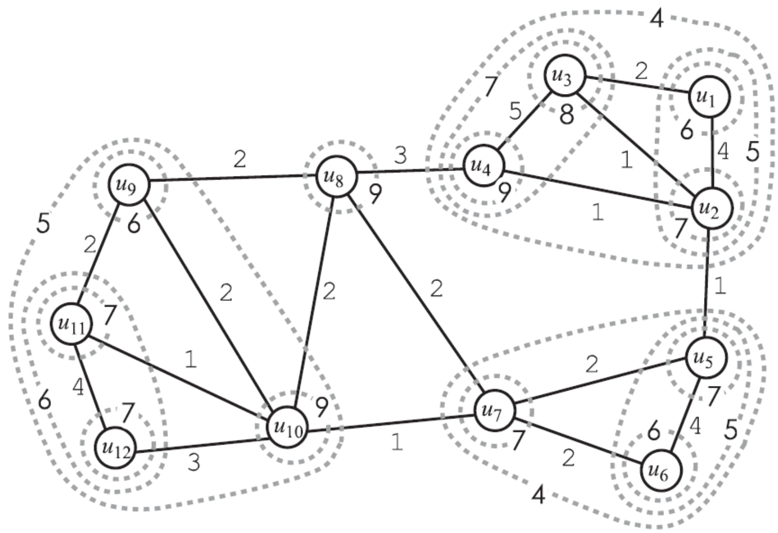
$$d(v_i;\ G - V_{i-1}) \leq d(v_j;\ G - V_{i-1})$$

fennáll minden i, j-re, melyekre $1 \leq i < j \leq n$ teljesül, ahol V_{i-1} jelöli a $\{v_1,\ v_2, \ldots,\ v_{i-1}\}$elemekből álló ponthalmazt, $G - V_{i-1}$ pedig azt a gráfot, amit G-ből kapunk, ha töröljük a gráfból a $\{v_1,\ v_2, \ldots,\ v_{i-1}\}$pontokat, és azokat az éleket, amelyek az első $i-1$ pont közül legalább eggyel szomszédosak. $G - V_0$ maga a G gráf.

Figyeljük meg, hogy egy ilyen sorrend kezdőpontjának nem választható tetszőleges gráfbeli pont, hanem csak minimális fokú, hiszen $i = 1$ re a sorrendet definiáló egyenlőtlenség pont azt mondja ki, hogy $d(v_1;\ G) \leq d(v;\ G)\ \forall\ v \in V$ pontra.

Miután $v_1,\ v_2, \ldots,\ v_{i-1}$-et már meghatároztuk, azt az $u \in V - V_{i-1}$-et válasszuk az i-edik pontnak, azaz v_i-nek, amelynek az első $i-1$ pont és a rájuk illeszkedő élek törlése után megmaradt $G - V_{i-1}$ gráfban a legalacsonyabb a foka. Adott gráfra, $O(m + n \log n)$ időben tudjuk a gráfnak egy min-degree sorrendjét kiszámítani [12], (akárcsak egy max-vissza sorrendet,) ahol $n(=|V|)$a pontok számát jelöli a gráfban, $m\ (=|E|)$ pedig az élekét.

Például a következő ábrán látható G gráf $(u_1,\ u_2, \ldots,\ u_{12})$ sorrendje egy min-degree sorrend. (A szaggatott vonallal jelölt halmazok pedig a gráf extrém csúcshalmazai.)



5.3. Definíció. Két $s,\, t \in V$ csúcsot akkor nevezünk *lapos pár*nak [12] (angolul *flat pair*-nek), ha nem-triviális (azaz legalább két-elemű) extrém csúcshalmaz nem szeparálja őket.

Másképpen, amennyiben egy $X \subseteq V$ extrém csúcshalmazra $|X \cap \{s,\, t\}| = 1$ teljesül, akkor $X = \{s\}$ vagy $X = \{t\}$. Például a fenti ábrán látható gráfban a következő csúcspárok a lapos párok: $\{u_1,\ u_2\}$, $\{u_3,\ u_4\}$, $\{u_5,\ u_6\}$, $\{u_9,\ u_{10}\}$, $\{u_{11},\ u_{12}\}$. (Megjegyezzük, hogy akár szigorúbban is definiálhatnánk a lapos pát fogalmát, a továbbiakban leírt állítások teljesülnének, és az itt következő bizonyítások is működnének a szűkebb értelemben vett fogalomra is. Azonban mivel Nagamochi egy gráf esetében így definiálta a lapos pár fogalmát, most még mi is maradunk ennél a definíciónál. A bizonyítás során ki fog derülni, hogy hogyan lehet szigorítani ezt a fogalmat.)

A következő tétel, amely óriási szerepet játszik az extrém halmazok hatékony keresésének problémájának megoldásában, Nagamochitól származik.

5.4. Tétel. *Legyen $G = (V,\, E)$ élsúlyozott gráfban a $\sigma = (v_1,\, v_2, \ldots,\, v_n)$ egy min-degree sorrend. Ekkor a sorrend utolsó két pontja, v_{n-1} és v_n lapos párt alkot, tehát nem szeparálja őket nem-triviális extrém halmaz.*

Nagamochi ezt a tételt a minimális vágások keresésénél megismert max-vissza sorrend és a kapcsolt pár fogalmának felhasználásával bizonyította. Ennek a bizonyításnak a vázlatát, a bizonyítás során kimondott állítások érdekessége miatt röviden vázoljuk, majd mutatunk egy másik bizonyítást, amelyhez Nagamochi egy szimmetrikus szubmoduláris függvényekre kimondott, a fentihez nagyon hasonló tételének a bizonyítása adta az ötletet.

Az elsőként említett Nagamochi féle bizonyítás menete a következő. A G gráfhoz mutatunk egy másik H gráfot, és annak tekintjük egy megfelelő kezdőpontból indított max-vissza sorrendjét. A H gráf max-vissza sorrendjének utolsó két pontjára be lehet látni, a H gráf speciális szerkezetének és a max-vissza sorrend ismert tulajdonságainak segítségével, hogy azokat nem-triviális extrém halmaz nem szeparálja. Másrészt pedig be fogjuk látni, hogy a H-nak ez a max-vissza sorrendje a G gráfnak pont egy min-degree sorrendjét adja.

Először bevezetünk egy definíciót.

5.5. Definíció. Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan, hurokmentes, élsúlyozott gráf, jelölje $w : E \to \mathbb{R}_+$ a nemnegatív súlyfüggvény az élhalmazon. Legyen $s \notin V$ egy új pont. A G *csillag növelésén* (vagy csillag növeltjén) egy olyan H gráfot értünk, melynek csúcshalmaza $V + s$, élhalmaza pedig a $E \cup F$, ahol F csupa olyan éleket tartalmaz, melyek az új s pontot köti össze valamely $v \in V$ ponttal.

Azt, hogy a lehetséges ilyen élek közül melyeket tartalmazza az adott H csillag növelés, és hogy mi lesz az új éleken az új gráf súlyfüggvényének értéke, egy $b \in \mathbb{R}_+^V$ vektor segítségével adjuk meg, mégpedig úgy, hogy $b(v) = w(\{s, v\})$. Azokra a $v \in V$ pontokra, melyekből nem vezet él s-be az új gráfban $b(v) = 0$. A G gráfnak a $b \in \mathbb{R}_+^V$ vektor által meghatározott csillagnövelését $H = G + b$-vel jelöljük.

Legyen $k \geq 0$ adott valós szám.

5.6. Definíció. Adott G gráfra és $b \in \mathbb{R}_+^V$ vektorra a $G+b$ gráfot akkor nevezzük a G *k-reguláris csillag növelésének*, ha $d(v;\, G + b) = max\,\{k,\, d(v;\, G)\}$ teljesül minden $v \in V$ pontra.

Másképpen, $b(v) = max\,\{0,\, k - d(v;\, G)\} \quad \forall v \in V$, vagyis pontosan azokhoz a v pontokhoz húzunk élet az új s pontból, amelyekre $d(v;\, G) < k$, és az új $\{v,\, s\}$ él súlya pont akkora lesz, hogy "kiegészítse" a v csúcs fokát k-ra az új gráfban.

5.7. Lemma. *Legyen $X \in \mathcal{X}(G)$ egy nem-triviális extrém halmaza a G gráfnak, és legyen k olyan valós szám, amelyre teljesül, hogy*

$$d(X;\, G) < k \leq min\,\{d(u;\, G) \mid u \in X\}\,.$$

(Ilyen k létezik, hiszen X extremitása miatt $d(X; G) < min\,\{d(u;\, G) \mid u \in X\}$.) Legyen $v, w \in V$ két tetszőleges pontja a G gráfnak. Amennyiben a G k-reguláris csillag növeltjében, amelyet $G + b_k$-val jelölünk, $\lambda(v,\, w;\, G + b_k) \geq k$ teljesül, akkor az X halmaz nem szeparálja v-t és w-t.

(A lemma állítása úgy is igaz, ha enyhítjük a feltételeket, és X-ről az extremitás helyett csak azt követeljük meg, hogy $d(X;\, G) < min\,\{d(u;\, G) \mid u \in X\}$, vagyis hogy minden részhalamaza helyett csupán az egypontú részhalamazinak a foka legyen szigorúan nagyobb mint az X halmaz foka. Nagamochi a lemma bizonyítása során X-ről csak ezt a tulajdonságot használta ki.)

5.8. Lemma. *Legyen adott egy $G = (V, E)$ gráf és egy $K \geq 0$ valós szám, és jelölje $G + b_K$ a G K-reguláris csillag növeltjét. Legyen $\sigma = (v_0 = s, v_1, v_2, \ldots, v_n)$ a $G + b_K$ gráf egy max-vissza sorrendje, melynek s (azaz az új csúcs) a kezdőpontja. (Ilyen max-vissza sorrend létezik, hiszen emlékezzünk vissza, hogy a max-vissza sorrendnek a kezdőpontja szabadon megválasztható.) Ekkor minden $0 \leq k \leq K$-ra*

$$\lambda(v_{n-1}, v_n; G + b_k) \geq k$$

teljesül az utolsó két csúcsra, ahol $G + b_k$ a G k-reguláris csillag növeltjét jelöli.

Legyen G egy tetszőleges élsúlyozott irányítatlan gráf, és legyen $X \in \mathcal{X}(G)$ a G egy tetszőleges nem-triviális extrém halmaza. Legyen

$$K \geq max\{d(v; G) \mid v \in V\}$$

egész szám. Jelölje továbbra is $G + b_K$ a G K-reguláris csillag növeltjét, és legyen $\sigma = (v_0 = s, v_1, v_2, \ldots, v_n)$ a $G + b_K$ gráf egy max-vissza sorrendje, melynek s (azaz az új csúcs) a kezdőpontja. Mivel X extrém halmaz, létezik egy olyan k_X valós szám, amelyre teljesül, hogy

$$d(X; G) < k_X \leq min\{d(u; G) \mid u \in X\}.$$

Ekkor $K \geq max\{d(v; G) \mid v \in V\}$ miatt $K \geq k_X$, így a 5.8 lemmából következik, hogy $\lambda(v_{n-1}, v_n; G + b_{k_X}) \geq k_X$ teljesül az utolsó két csúcsra, ahol $G + b_{k_X}$ a G k_X-reguláris csillag növeltjét jelöli. Ekkor viszont a 5.7 lemmából következik, hogy az X halmaz nem szeparálja v_{n-1}-t és v_n-t. Mivel X egy tetszőleges nem-triviális extrém halmaza volt G-nek, így kapjuk a következő állítást.

5.9. Lemma. *Legyen adott egy $G = (V, E)$ gráf és egy $K \geq 0$ valós szám, amelyre teljesül, hogy $K \geq max\{d(v; G) \mid v \in V\}$, jelölje $G + b_K$ a G K-reguláris csillag növeltjét. Legyen $\sigma = (v_0 = s, v_1, v_2, \ldots, v_n)$ a $G + b_K$ gráf egy max-vissza sorrendje, s kezdőponttal. Ekkor a G gráf egyetlen nem-triviális extrém halmaza sem szeparálja v_{n-1}-t és v_n-t.*

(Mivel az 5.7 lemma teljesül az összes olyan $X \subseteq V$ halmazra, melyre $d(X; G) < min\{d(u; G) \mid u \in X\}$, egy a 5.9 lemmában kimondottaknál egy általánosabb állítás is igaz. Mégpedig az, hogy egyetlen olyan legalább két elemű $X \subseteq V$ halmaz sem szeparálja v_{n-1}-t és v_n-t, amelyre $d(X; G) < min\{d(u; G) \mid u \in X\}$ teljesül. Ráadásul Nagamochi most vázolt bizonyítása valójában ezt az állítást is bizonyítja. Bár ő végig extrém halmazokkal dolgozik, nem használ ki többet egy extrém halmazról, mint hogy a halmaz foka kisebb, mint a halmaz pontjainak foka.)

A tétel bizonyításához, már csak annyi hiányzik, hogy megmutassuk, hogy $\sigma = (v_0 = s,\ v_1,\ v_2, \ldots,\ v_n)$ akkor és csak akkor a $G + b_K$ gráf egy max-vissza sorrendje, ha $\sigma' = (v_1,\ v_2, \ldots,\ v_n)$ pedig az eredeti G egy min-degree sorrendje.

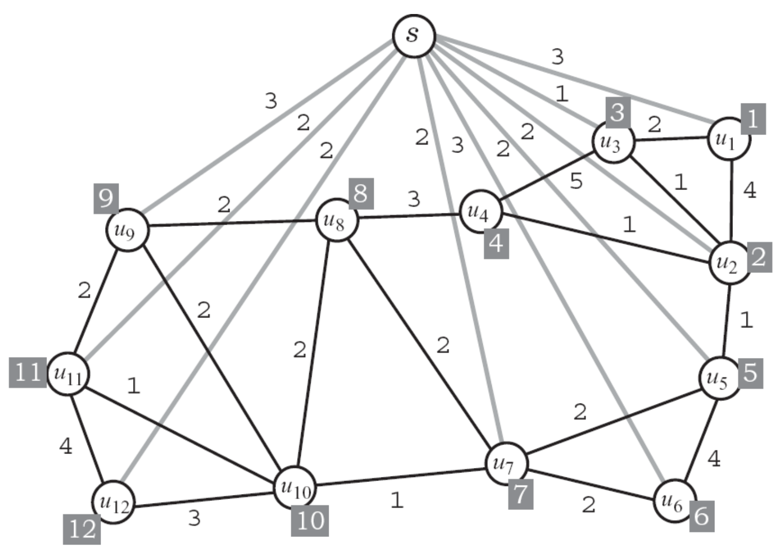
$d(v;\ G + b_K) = K$ teljesül minden $v \in V$ pontra a G K-reguláris csillag növeltjében, amennyiben $K \geq max\,\{d_G(v) \mid v \in V\}$. Így minden i, j-re, melyekre $1 \leq i \leq j \leq n$ teljesül

$$\begin{aligned} d(V_{i-1} \cup \{s\},\ v_j;\ G + b_K) &= d(v_j;\ G + b_K) - d(v_j,\ (V - V_{i-1}) - v_j;\ G + b_K) \\ &= K - d(v_j;\ G - V_{i-1}) \end{aligned}$$

A $G + b_K$ gráfhoz tartozó max-vissza sorrend első pontját s-nek választjuk. $v_1$egy olyan pont lesz, amire $d(s,\ v;\ G + b_K)$ maximális, vagyis amire a fenti egyenlőség alapján $d(v; G)$ minimális. Másrészt miután $v_0 = s,\ v_1,\ v_2, \ldots,\ v_{i-1}$-et már meghatároztuk, a max-vissza sorrend definíciójából következően azt a $u \in V - V_{i-1}$-et válasszuk az v_i-nek, amelyből a $G + b_K$ gráfban a legnagyobb összsúlyú élhalmaz vezet $\{s\} \cup V_{i-1}$-be, azaz amelyre $d(V_{i-1} \cup \{s\},\ u;\ G + b_K)$ maximális. A fenti azt mutatja, hogy ekkor $v_i \in V - V_{i-1}$ az a pont lesz, amelyre $d(u;\ G - V_{i-1})$ minimális. Így $\sigma' = (v_1,\ v_2, \ldots,\ v_n)$ pontosan akkor min-degree sorrend G-ben, ha $\sigma = (v_0 = s,\ v_1,\ v_2, \ldots,\ v_n)$ max-vissza sorrend a $G + b_K$ gráfban.

Ezzel a tételt beláttuk.

A következő ábrán egy G gráf 9-reguláris csillag növeltje látható, a gráf pontjai mellett látható számok pedig a csillag növelt egy max-vissza sorrendjének és egyben az eredeti G gráf egy min-degree sorrendjének felelnek meg.



Mint arra már többször utaltunk, egy kicsit több is igaz egy min-degree sorrend utolsó két pontjára, mint hogy nem-triviális extrém halmaz nem szeparálja őket. Most kimondjuk és belátjuk a 5.4 tétel egy erősebb változatát.

5.10. Definíció. A $G = (V,\, E)$ élsúlyozott gráfban nevezzünk *gyengén extrémnek* egy $X \subseteq V$, $|X| \geq 2$ csúcshalmazt, ha teljesül rá, hogy

$$d(X) < min\,\{d(x) \mid x \in X\}\,,$$

azaz hogy minden X-beli csúcsnak a foka szigorúan nagyobb, mint az X halmaz foka. A V egypontú részhalmazai is legyenek gyengén extrémek.

Természetesen minden extrém halmaz gyengén extrém is. (A következő tétel igazolja, hogy mint ahogy arra már többször utaltunk, a lapos pár definíciójában írhatnánk extrém halmaz helyett gyengén extrém halmazt.)

5.11. Tétel. *Legyen $G = (V,\, E)$ élsúlyozott gráfban a $\sigma = (v_1,\, v_2, \ldots,\, v_n)$ egy min-degree sorrend. Ekkor a sorrend utolsó két pontját, v_{n-1}-et és v_n-et nem szeparálja nem-triviális gyengén extrém halmaz. (Így v_{n-1} és v_n lapos párt alkot.)*

A tétel bizonyításához előbb belátjuk előbb a következő lemmát.

5.12. Lemma. *Minden i-re* $(0 \leq i \leq n-2)$

$$d(X;\, G - V_i) \geq min\,\{d(x;\, G - V_i) \mid x \in X\}$$

teljesül minden $X \subseteq V - V_i$ halmazra amelyre $|X \cap \{v_{n-1},\, v_n\}| = 1$.

A fenti lemma azt mondja ki, hogy a mind-degree sorrendnek kiszámítása közben megkonstruált $G - V_i$ gráfok mindegyikében teljesül, hogy egyetlen nem-triviális (azaz legalább két elemű) a $G - V_i$ gráfban gyengén extrém halmaz sem szeparálja v_{n-1}-et és v_n-et. Vegyük észre, hogy mivel ekkor természetesen nem-triviális extrém halmaz sem szeparálja őket, így a lemma állításából az is következik, hogy v_{n-1} és v_n lapos párt alkotnak a $G - V_i$ gráfok mindegyikében. (Sőt $\sigma_n = (v_{i+1},\, v_{i+2}, \ldots,\, v_n)$ pedig a $G - V_i$ min-degree sorrendje.)

Bizonyítás. A lemmát i szerinti indukcióval bizonyítjuk, ahol $i = n-2,\, n-3, \ldots,\, 0$. Az $i = 0$ eset pont a tétel állításával ekvivalens. Az $i = n-3$-ra, a $G - V_{n-3}$ két pontból álló gráfban természetesen igaz az állítás. Tegyük most fel, hogy $i = n-2, \ldots,\, k$-ra teljesül a lemma, és megfogjuk mutatni, hogy ekkor $i = k-1$-re is teljesül. Legyen $X \subseteq V - V_{k-1}$ egy tetszőleges halmaz, melyre $|X \cap \{v_{n-1},\, v_n\}| = 1$. A bizonyítást két esetre fogjuk bontani aszerint, hogy X tartalmazza-e a $v_k$csúcsot.

1. eset: $v_k \notin X$, vagyis $X \subseteq V - V_k$.

Legyen $x^* = argmin\,\{d(x;\, G - V_k) \mid x \in X\}$, ekkor az indukciós feltevésből $i = k$ választással következik, hogy

$$d(X;\, G - V_k) \geq min\,\{d(x;\, G - V_k) \mid x \in X\} = d(x^*;\, G - V_k). \qquad (12)$$

Megmutatjuk, hogy $d(X;\, G - V_{k-1}) \geq d(x^*;\, G - V_{k-1})$ is igaz, amiből nyilván következik, hogy $d(X;\, G - V_{k-1}) \geq min\,\{d(x;\, G - V_{k-1}) \mid x \in X\}$.

$$\begin{aligned}
d(X;\, G - V_{k-1}) - d(x^*;\, G - V_{k-1}) &= (d(X;\, G - V_k) + d(X,\, v_k;\, G)) \\
&\quad - (d(x^*;\, G - V_k) + d(x^*,\, v_k;\, G)) \\
&= (d(X;\, G - V_k) - d(x^*;\, G - V_k)) \\
&\quad + (d(X,\, v_k;\, G) - d(x^*,\, v_k;\, G)) \\
&\geq d(X;\, G - V_k) - d(x^*;\, G - V_k) \geq 0,
\end{aligned}$$

ahol először is használjuk a triviális (5) azonosságot. Az első egyenlőtlenség azért teljesül, mert nyilván az X halmazból legalább annyi él megy a $v_k \notin X$ pontba, mint az $x^* \in X$ pontból. Majd az második egyenlőtlenség (12) miatt teljesül. A $v_k \notin X$ esetet ezzel beláttuk.

2. eset: $v_k \in X$.

A v_k pont választása miatt teljesül, hogy

$$d(v_k;\, G - V_{k-1}) = min\,\{d(v;\, G - V_{k-1}) \mid v \in V - V_{k-1}\}\,, \tag{13}$$

így elég lenne belátnunk, hogy $d(X;\, G - V_{k-1}) \geq d(v_k;\, G - V_{k-1})$

Legyen $Y = V - V_{k-1} - X$. Ekkor $Y \subseteq V - V_k$, és $|Y \cap \{v_{n-1},\, v_n\}| = 1$, így az első esetben belátott eredményt az Y halmazra alkalmazva kapjuk, hogy

$$d(Y;\, G - V_{k-1}) \geq min\,\{d(y;\, G - V_{k-1}) \mid y \in Y\}\,. \tag{14}$$

Másrészt a $G - V_{k-1}$ gráfban szimmetria miatt

$$\begin{aligned}
d(X;\, G - V_{k-1}) &= d(Y;\, G - V_{k-1}) \\
&\geq min\,\{d(y;\, G - V_{k-1}) \mid y \in Y\} \\
&\geq min\,\{d(v;\, G - V_{k-1}) \mid v \in V - V_{k-1}\} \\
&= d(v_k;\, G - V_{k-1}),
\end{aligned}$$

ahol az első egyenlőtlenség (14) miatt teljesül.

Ezzel a lemmát beláttuk, és az $i = 0$ eset pedig pont a 5.11 tétel állítását adja. Így egyben a tétel bizonyításával is készen vagyunk. □

5.2. Az extrém halmazok lamináris családjának megtalálása

A 5.11 tételben kimondott eredményre alapozva $O(nm + n^2 \log n)$ időben meg tudjuk határozni egy gráf összes extrém csúcshalmazát. Mielőtt bemutatnánk az eljárást, kimondunk néhány ismert állítást extrém halmazokkal kapcsolatban.

5.13. Lemma. *Minden nem-üres $X \subset V$ halmaz tartalmaz egy $X'(\subseteq X)$ extrém halmazt, melyre $d(X') \leq d(X)$.*

Bizonyítás. Legyen X' egy tartalmazásra nézve minimális olyan részhalmaza X-nek melyre teljesül, hogy $d(X') \leq d(X)$. (Elképzelhető, hogy $X' = X$.) Ekkor X'minden valódik Y részhalmazára $d(Y) > d(X) \geq d(X')$, ami pontosan azt jelenti, hogy X' extrém halmaz. □

5.14. Lemma. *Egy gráf extrém halmazai lamináris rendszert alkotnak, azaz $\mathcal{X}(G)$ semelyik két eleme nem metszheti át egymást. Így az is adódik, hogy $|\mathcal{X}(G)| \leq 2n - 1$.*

Bizonyítás. Legyen $X, Y \subset V$ két átmetsző halmaz. Ekkor $d(X) + d(Y) \geq d(X - Y) + d(Y - X)$. Ha X extrém halmaz, akkor $d(X) < d(X - Y)$, amiből adódik, hogy $d(Y) \geq d(Y - X)$, tehát Y nem lehet extrém halmaz. Meggondolható, hogy egy n elemű V alaphalmaz részhalmazaiból álló $\mathcal{X}$ lamináris rendszernek legfeljebb $2n - 1$ eleme lehet. (Mutatja ezt például, ha felrajzoljuk a halmazrendszer elemeinek fa reprezentációját, ahol legfeljebb n levél lehet, amelyek a halmazrendszer egyelemű tagjainak felelnek meg, a gyökér pedig maga a V halmaz, és pontosan akkor vezet él két $X, Y \in \mathcal{X}$ halmaznak megfelelő pont között a fában, ha $X \subset Y$ vagy $Y \subset X$, és nem létezik $Z \in \mathcal{X}$, hogy $X \subset Z \subset Y$ vagy $Y \subset Z \subset X$.) □

Az extrém csúcshalmazok megkeresésére szolgáló algoritmusuk a következő gondolatmeneten alapul. Legyen $\sigma = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ a $G = (V, E)$ élsúlyozott gráf egy min-degree sorrendje. A V részhalmazai két részre oszthatóak aszerint hogy szeparálják-e az utolsó két pontot, azaz v_{n-1}-et ésv_n-t. Mivel utolsó két pontot szeparáló nem-triviális részhalmazok nem lehetnek extrém halmazok a 5.11 tétel miatt, ezért a gráf nem-triviális extrém halmazai (és azoknak fokszáma is) mind megőrződnek, ha v_{n-1}-et és a v_n-et egyetlen z ponttá összehúzzuk. $\mathcal{X}(G)$ a következőképpen írható.

$$\mathcal{X}(G) = \{v_{n-1}\} \cup \{v_n\} \cup \mathcal{X}'(G/\{v_{n-1}, v_n\}),$$

ahol $G/\{v_{n-1}, v_n\}$ azt a gráfot jelöli, ami a G-ből keletkezik a v_{n-1} és a v_n pontok összehúzásával, (két pont összehúzásakor a keletkező hurokéleket elhagyjuk), $\mathcal{X}'(G/\{v_{n-1}, v_n\}$ pedig a $G/\{v_{n-1}, v_n\}$ gráf extrém csúcshalmazainak ősképét. Az algoritmus először is ez összes egyetlen csúcsból álló halmazt elteszi az extrém csúcshalmaz jelöltek közé (az egypontú halmazok mind extrém halmazok), majd kiszámítja a gráfnak egy min-degree sorrendjét. Az utolsó két x, y pontot összehúzza egyetlen z ponttá, és a $V[z]$ halmazt elteszi az extrém csúcshalmaz jelöltek közé, ahol $V[z] \subseteq V$ azokból a V beli pontokból álló halmazt jelöli, amelyek az eljárás adott lépésében vizsgált gráf z pontjába lettek húzva, azaz a z ősképét. Ezt a metódust addig ismételve, amíg az összehúzás után kapott gráfnak több mint két pontja van, megkapjuk az extrém csúcshalmaz jelöltek egy $\mathcal{X}$ lamináris családját. (Az eljárás során két átmetsző halmaz nem kerülhetett az extrém csúcshalmaz jelöltek közé.) Az extrém csúcshalmazok családja a következő ellenőrző lépés végrehajtásával kapható meg:

$$\mathcal{X}(G) = \mathcal{X} - \{X \in \mathcal{X} \mid \exists Y \in \mathcal{X} : Y \subset X, d(Y) < d(X)\}.$$

Egyrészt a leírt eljárás futási ideje $O(nm + n^2 \log n)$, hiszen egy min-degree sorrendet $O(m+n\log n)$ időben tudunk számolni, az eljárás folyamán pedig ezt $n-2$-ször tesszük meg. Másrészt mivel $\mathcal{X}$ lamináris, legfeljebb $2n-1$ eleme lehet, így az ellenőrző lépés is végrehajtható ennyi időben.

Másrészt gondoljuk meg, hogy az eljárás helyes. Az világos, hogy az összes extrém csúcshalmaz az eljárás végére bekerül $\mathcal{X}$-be, és az is világos, hogy az ellenőrző lépés során kikerülő halmazok nem lehetnek extrém csúcshalmazok. Azt kell még meggondolnunk, hogy valóban elegendő-e $\mathcal{X}$ elemein ellenőrizni csupán egy $X \in \mathcal{X}$ halmaz extrémségét, azaz hogy nem maradhatott-e az ellenőrző lépés végrehajtása után olyan Z halmaz a

$$\mathcal{X} - \{X \in \mathcal{X} \mid \exists Y \in \mathcal{X} :\, Y \subset X,\, d(Y) < d(X)\}$$

családban, amely nem extrém. Tegyük fel, hogy Z ilyen. A 5.13 lemma miatt létezik $X' \subseteq Z$ extrém csúcshalmaz, melyre $d(X') \leq d(Z)$. Azonban mivel $\mathcal{X}$ már az ellenőrző lépést megelőzően is minden extrém csúcshalmazt tartalmazott, Z-t ki kellett hogy zárjuk az ellenőrző lépésben, azaz ilyen Z halmaz nem lehet $\mathcal{X} - \{X \in \mathcal{X} \mid \exists Y \in \mathcal{X} :\, Y \subset X,\, d(Y) < d(X)\}$-ben, tehát valóban a G összes extrém csúcshalmazának családját kaptuk vissza az eljárás végén. Adódik a következő tétel.

5.15. Tétel. *Egy adott $G = (V,\, E)$ élsúlyozott gráf extrém csúcshalmazainak $\mathcal{X}(G)$ lamináris családja $O(mn + n^2 \log n)$ időben megtalálható.*

5.3. Szimmetrikus szubmoduláris vagy szubmoduláris és pozimoduláris függvények extrém halmazai

5.16. Definíció. Egy $(V,\, f)$ rendszerben *extrém halmaznak* nevezünk egy $\emptyset \neq X \subset V$ részhalmazt, ha

$$f(X) < f(Y)$$

teljesül $\forall \emptyset \neq Y \subset X$ halmazra.

AV alaphalmaz egyelemű $\{v\}$ részhalmazai a triviális extrém halmazok, a $(V,\, f)$ rendszer extrém halmazainak családját pedig $\mathcal{X}(f)$-fel jelöljük. (Természetesen adott $G = (V,\, E)$ élsúlyozott gráf, és a hozzá tartozó $f(X) = d(X;\, G)$ szimmetrikus szubmoduláris függvény esetén $\mathcal{X}(f) = \mathcal{X}(G)$.) A következő lemma könnyű számolással igazolható.

5.17. Lemma. *Minden nem-üres $X \subset V$ részhalmaz tartalmaz egy $X'(\subseteq X)$ extrém halmazt, melyre $f(X') \leq f(X)$.*

Bizonyítás. Pontosan ugyanúgy bizonyítható, mint a 5.13 lemma. □

5.18. Lemma. *Legyen f egy halmazfüggvény a V alaphalmazon. Ha f átmetsző pozimoduláris vagy szimmetrikus és keresztező szubmoduláris, akkor f extrém halmazainak $\mathcal{X}(f)$ családja lamináris.*

A bizonyítás egyszerű számolásból adódik, a szimmetrikus és keresztező szubmoduláris, illetve az átmetsző pozimoduláris esetet külön-külön végiggondolva [12]. Sőt Nagamochi azt is megmutatta [9], hogy bővebb halmazcsalád esetén már nem feltétlenül alkotnak lamináris rendszert az extrém halmazok. Mutatott egy keresztező pozimoduláris g és egy nem szimmetrikus de teljesen szubmoduláris h függvényt, melyekre $\mathcal{X}(g)$ és $\mathcal{X}(h)$ nem lamináris rendszerek.

Egy (V, f) rendszer extrém halmazainak megtalálása a gráf extrém csúcshalmazaink megtalálásához hasonlóan folyik. Definiáljuk az általánosított lapos pár és min-degree sorrend fogalmakat.

5.19. Definíció. Egy (V, f) szubmoduláris rendszerben egy $\{u, v\}$ rendezetlen elempárt *lapos párnak* nevezünk, ha minden $X \subseteq V$ részhalmazra, amely szeparálja az u és v elemeket

$$min\{f(x) \mid x \in X\} \leq f(X)$$

teljesül. (Az ilyen tulajdonságú halmazokat nevezzük gyengén extrémnek.)

(Vegyük észre, hogy a szubmoduláris rendszerekben a lapos pár definíciója szigorúbb a gráfokban definiált lapos pár egy általánosításánál. A d fokszámfüggvényre mint szubmoduláris függvényre nézve a 5.19 definícióból az adódik, hogy u és v pontosan akkor lapos pár, ha $d(X) < min\{d(x) \mid x \in X\}$ minden $X \subset V$ halmazra, amely szeparálja u-t és v-t, vagyis másképp gyengén extrém halmaz nem szeparálja őket. Az ilyen pontpárok halmaza természetesen szűkebb lehet, mint azoké, amelyekről csak annyit követelünk meg, hogy extrém halmaz nem szeparálja őket. Azonban az eltérés azért nem igazán fontos, mert a lapos pároknak mindössze azt a tulajdonságát használjuk ki, hogy extrém halmaz nem szeparálja őket, megtalálásukra pedig mind a gráfokban, mind a szubmoduláris rendszerekben olyan eljárást használunk, ami csupa, a szigorúbb definíciónak is megfelelő pont- illetve elempárt talál.)

Jelölje $\sigma = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ a V alaphalmaz pontjainak egy sorbarendezését. Legyen f egy a V-n értelmezett halmazfüggvény.

5.20. Definíció. A $\sigma = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sorrendet *min-degree sorrendnek* nevezzük, ha

$$f(V_{i-1} + v_i) + f(v_i) \leq f(V_{i-1} + v_j) + f(v_j)$$

fennáll minden i, j-re, melyekre $1 \leq i < j \leq n$-re , ahol $V_0 = \emptyset$, és $V_i = \{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$.

A V elemeinek egy ilyen sorrendje a következőképpen adható meg. Amenynyiben az első $i-1$ elem már adott $(1 \leq i \leq n-1)$, a még kiválasztatlan $n-i+1$ db elem közül azt választjuk v_i-nek, melyre az

$$r(u) = f(V_{i-1} + u) + f(u)$$

mennyiség minimális az össze $u \in V - V_{i-1}$ elem között. Egy (V, f) rendszer min-degree sorrendje $O(n^2 T_f)$ futási időben számítható ki [12].

(Figyeljük meg, hogy az előbbi definíció a 5.2 definíció egy általánosítása. $f = d$ választással a fenti definíció azt követeli meg v_i-től, hogy minimalizálja a

$$d(V_{i-1} + u;\, G) + d(u;\, G) = d(V_{i-1};\, G) + 2 \cdot d(u;\, G - V_{i-1})$$

mennyiséget, azaz minimalizálja $d(u;\, G - V_{i-1})$-t, vagyis az első $i - 1$ pont és a rájuk illeszkedő élek törlése után megmaradt $G - V_{i-1}$ gráfban az u fokát. Ekkor a $(V,\, d)$ rendszer $\sigma = (v_1,\, v_2, \ldots,\, v_n)$ min-degree sorrendje a 5.2 definícióban leírt értelemben is min-degree sorrend abban a $G = (V,\, E)$ gráfban, melynek d a fokszámfüggvénye.)

Természetesen az előbb bevezetett lapos pár és min-degree fogalmakra is igaz a már a gráfok esetéből ismert összefüggés.

5.21. Tétel. *Legyen f egy szimmetrikus keresztező szubmoduláris függvény a V alaphalmazon. És legyen $\sigma = (v_1,\, v_2, \ldots,\, v_n)$ az alaphalmaz pontjainak egy min-degree sorrendje. Ekkor v_{n-1} és v_n lapos párt alkotnak.*

Az 5.11 tétel bizonyítását segítő 5.12 lemmának itt is megvan a megfelelője. Azonban még az 5.12 lemmánál egyértelmű volt, hogy azokat a gráfokat kell megvizsgálnunk, amelyeket a min-degree sorrend megkonstruálása közben kaptunk, a mostani esetben definiálni kell a $(V - V_i,\, f_i)$ rendszereket, és be kell látni, hogy azok is szimmetrikusak keresztező szubmodulárisak. Ehhez először is közlünk egy technikai lemmát.

5.22. Lemma. *Legyen f egy szimmetrikus keresztező szubmoduláris függvény a V alaphalmazon. Legyen adott egy $Z \subset V$ halmaz. A $g(X) = f(X) + f(Z \cup X)$ $\forall X \subseteq V - Z$ halmazfüggvény a $V - Z$ alaphalmazon szimmetrikus és keresztező szubmoduláris.*

Az 5.22 lemma egyszerű számolással adódik.

5.23. Lemma. *Legyen $i = 0,\, 1, \ldots,\, n-2$ esetben a $V - V_i$ alaphalmazon adott f_i függvény a következő.*

$$f_i(X) = f(X) + f(V_i \cup X).$$

Ekkor minden i-re $(0 \leq i \leq n-2)$

$$f_i(X) \geq min\, \{f_i(x) \mid x \in X\}$$

teljesül minden $X \subseteq V - V_i$ halmazra amelyre $|X \cap \{v_{n-1},\, v_n\}| = 1$.

A fenti lemma tehát azt mondja ki, hogy $(V - V_i,\, f_i)$ rendszerek mindegyikében teljesül, hogy egyetlen nem-triviális (azaz legalább két elemű) gyengén extrém halmaz sem szeparálja v_{n-1}-et és v_n-et, azaz lapos párt alkotnak a $(V - V_i,\, f_i)$ rendszerek mindegyikében. (Figyeljük meg, hogy a fent definiált f_i függvényekkel a $(V - V_i,\, f_i)$ rendszerek azonosíthatóak a $G - V_i$ gráfokkal és az azokon természetesen adódó fokszámfüggvényekkel, hiszen $d_i(X) = d(X) + d(V_i \cup X) = d(V_i) + 2 \cdot d(X;\, G - V_i)$.) A lemma bizonyítása a 5.12 lemma bizonyításához hasonlóan zajlik, így itt csak nagyon vázlatosan közöljük.

Bizonyítás. $i = n-2, n-3, \ldots, 1, 0$ szerinti indukciót alkalmazunk. Az $i = n-2$ esetben természetesen igaz az állítás, hiszen $V - V_{n-2} = \{v_{n-1},\, v_{n-2}\}$. Sőt mivel $|V| = n = 2$ esetben ezzel a tételt is bebizonyítottuk, tegyük fel, hogy $n \geq 3$. Megmutatjuk, hogy amennyiben $i = k$-ra teljesül az állítás, akkor $i = k-1$-re is teljesül. Legyen $X \subseteq V - V_{k-1}$ tetszőleges részhalmaz, amely szeparálja a v_{n-1}és a v_n elemeket. Két eset van, aszerint hogy X tartalmazza-e a v_k elemet.

Elsőként tekintsük azt az esetet, amikor $v_k \notin X$, vagyis $X \subseteq V - V_k$. Legyen $x^* = argmin\,\{f_k(x) \mid x \in X\}$. Az indukciós hipotézisből adódóan $f_k(X) \geq f_k(x^*)$ teljesül. Meg fogjuk mutatni, hogy $f_{k-1}(X) \geq f_{k-1}(x^*)$, amiből nyilván adódik a lemma állítása a $v_k \notin X$ esetben. Az f_k szimmetrikussága miatt feltehető, hogy $|X| \geq 2$, (amennyiben $X = \{x^*\}$, akkor legyen $X := (V - V_{k-1}) - X$, és legyen x^* az az elem, amely az új X halmazon minimalizálja $f_k(X)$-et). Ekkor $V_{k-1} \cup X$ és $V_k + x^*$ keresztező halmazok, ezért rájuk a szubmodularitási egyenlőtlenséget felírva kapjuk, hogy

$$f(V_{k-1} \cup X) - f(V_{k-1} + x^*) \geq f(V_k \cup X) - f(V_k + x^*). \tag{15}$$

Az f_k függvény definícióját és (15)-at felhasználva adódik, hogy $f_{k-1}(X) - f_{k-1}(x^*) \geq 0$. Ezzel az első esetben beláttuk a lemma állítását.

A $v_k \in X$ esetben a v_k elem (min-degree sorrendbeli) választása miatt teljesül, hogy

$$\begin{aligned} f_{k-1}(v_k) = f(v_k) + f(V_{k-1} + v_k) &= min\,\{f(u) + f(V_{k-1} + u) \mid u \in V - V_{k-1}\} \\ &= min\,\{f_{k-1}(u) \mid u \in V - V_{k-1}\} \end{aligned}$$

így elég lenne belátnunk, hogy $f_{k-1}(X) \geq f_{k-1}(v_k)$. Legyen $Y = (V - V_{k-1}) - X$. Ekkor $Y \subseteq V - V_{k-1}$, $v_k \notin Y$ és $|Y \cap \{v_{n-1},\, v_n\}| = 1$, így az első esetben belátott eredményt az Y halmazra alkalmazva kapjuk, hogy $f_{k-1}(Y) \geq min\,\{f_{k-1}(y) \mid y \in Y\}$. Az eddig kapott két egyenlőtlenséget és f_{k-1} szimmetriáját felhasználva pedig adódik, hogy

$$\begin{aligned} f_{k-1}(X) = f_{k-1}(Y) &\geq min\,\{f_{k-1}(y) \mid y \in Y\} \\ &\geq min\,\{f_{k-1}(u) \mid u \in V - V_{k-1}\} \\ &= f_{k-1}(v_k). \end{aligned}$$

Ezzel a második esetben is beláttuk a lemmát. □

Mivel az $n = 0$ eset pont a 5.21 tétel állítását adja, a tétel bizonyításával is készen vagyunk.

A fenti tétel szimmetrikus és keresztező szubmoduláris függvény esetében nyújt segítséget egy lapos pár megtalálásában. A (V, f) egy min-degree sorrendjének utolsó két pontja lapos pár, és egy min-degree sorrend pedig $O(n^2 T_f)$ időben található meg a (V, f) rendszerben. Egy ügyes átalakítással, amelyet már minimális optimális megoldás keresésénél is használtunk, egy $(V,\, f)$ átmetsző szubmoduláris és pozimoduláris rendszerben is ugyanekkora futási idővel található lapos pár. Legyen tehát most f egy tetszőleges átmetsző szubmoduláris és pozimoduláris halmazfüggvény a V alaphalmazon, és legyen $s \notin V$ egy új elem. Legyen $f(\emptyset) = f(V) = -\infty$. Ez az átalakítás természetesen nem rontja el az f átmetsző szubmodularitását és pozimodularitását. Ekkor, ahogy azt a 3.19 lemmában már kimondtuk,

$$g(X) = \begin{cases} f(X) & s \notin X \subseteq V + s \\ f(V - (X - s)) & s \in X \subseteq V + s \end{cases}$$

$V + s$ alaphalmazon értelmezett g függvény szimmetrikus és keresztező szubmoduláris. Ennek az új g függvénynek a segítségével pedig tudunk lapos párt találni a $(V,\, f)$ átmetsző szubmoduláris és pozimoduláris rendszerben is. Legyen $\pi_g = (v_0,\, v_1, \ldots,\, v_n)$ a $(V + s,\, g)$ rendszer egy min-degree sorrendje. $g(s) = f(V) = -\infty$ miatt $v_0 = s$. Ekkor $s \notin \{v_{n-1},\, v_n\}$, és v_{n-1} és v_n lapos párt alkotnak a a $(V + s,\, g)$ rendszerben. Figyeljük meg, hogy ekkor és $\{v_{n-1},\, v_n\}$ lapos pár a $(V,\, f)$ rendszerben is. Hiszen legyen $X \subset V$ egy tetszőleges v_{n-1}-et és v_n-et szeparáló halmaz. Ekkor $min\,\{f(x) \mid x \in X\} = min\,\{g(x) \mid x \in X\} \leq g(X) = f(X)$, vagyis $\{v_{n-1},\, v_n\}$ lapos pár $(V,\, f)$-ben. Így megkaptuk a következő lemmát.

5.24. Lemma. *Legyen f halmazfüggvény a V alaphalmazon, (ahol $|V| \geq 2$). Amennyiben f szimmetrikus és keresztező szubmoduláris, vagy átmetsző szubmoduláris és pozimoduláris, akkor $O(n^2 T_f)$ időben megtalálható egy lapos pár a $(V,\, f)$ rendszerben.*

Ez a lemma teszi majd lehetővé, hogy a $(V,\, f)$ átmetsző szubmoduláris és pozimoduláris rendszer extrém halmazait is megtalálhassuk ugyanúgy, ahogyan egy szimmetrikus keresztező szubmoduláris rendszer összes extrém halmazát meg tudjuk találni. A módszert a következőkben ismertetjük.

Tudjuk, hogy minden nem-üres $Y \subset V$ halmaz tartalmaz egy $Z(\subseteq Y)$ extrém halmazt, melyre $d(Z) \leq d(Y)$. Így pontosan akkor teljesül egy $X \subset V$ halmazra, hogy $f(X) < f(Y)$ minden $Y \subset X$ nem-üres valódi részhalmazára (tehát hogy X extrém), amikor hogy $f(X) < f(Z)$ minden $Z \subset X$ extrém halmazra. A következő algoritmus helyességét ez a meggondolás adja, illetve az az eredmény, hogy nem-triviális extrém halmaz nem szeparál lapos párt. Az algoritmus nagyban hasonlít az előző fejezetben leírt, extrém csúcshalmazok megtalálására használható eljáráshoz, azonban a fenti meggondolás segítségével rögtön a $\mathcal{X}(f)$ extrém halmazok családját keressük csak meg, és nem az összes extrém halmaz jelöltet. Akárcsak az előbb említett algoritmusban, $n-2$-ször fogunk az eljárás során az aktuális rendszer egy lapos párt alkotó elempárját megkeresni, és a két elemet pedig összehúzni egyetlen elemmé. Kezdetben a $V^{(1)} = V$ és a $f^{(1)} = f$ alaphalmazból és függvényből indulunk ki, és mindig V^i jelöli az $i-1$ darab lapos pár összehúzása után kapott $n-i+1$ elemű alaphalmazt, és $f^{(i)}$ a $V^{(i)}$ alaphalmazon adott függvényt, $x^{(i)}$ és $y^{(i)}$ pedig a $(V^{(i)},\, f^{(i)})$ rendszerben talált lapos pár elemeit. A $(V^{(i)},\, f^{(i)})$ rendszerből a következőképpen kapjuk meg a $(V^{(i+1)},\, f^{(i+1)})$ rendszert. $V^{(i+1)} := V^{(i)} - \left\{x^{(i)},\, y^{(i)}\right\} \cup z^{(i)}$, (ahol $z^{(i)}$ jelöli az $x^{(i)}$ és $y^{(i)}$ elemek összehúzása során kapott új elemet), és ezen az $f^{(i+1)}$

halmazfüggvény a következő:

$$f^{(i+1)}(X) = \begin{cases} f^{(i)}(X) & z^{(i)} \notin X \subseteq V^{(i+1)} \\ f^{(i)}((X - z^{(i)}) \cup \left\{x^{(i)},\, y^{(i)}\right\}) & z^{(i)} \in X \subseteq V^{(i+1)} \end{cases} \tag{16}$$

Mint azt (10) után beláttuk, amennyiben $f^{(i)}$ szimmetrikus keresztező szubmoduláris függvény, akkor $f^{(i+1)}$ is az. Az ott közölt gondolatmenettel igazolható az is, hogy amennyiben $f^{(i)}$ átmetsző szubmoduláris és pozimoduláris függvény, akkor $f^{(i+1)}$ is az. Tehát mindkét esetben a $(V^{(i)},\, f^{(i)})$ rendszerek mindegyikében teljesül, hogy $O(n^2 T_f)$ időben található $\left\{x^{(i)},\, y^{(i)}\right\}$ lapos pár, melyet nem-triviális extrém halmaz nem választ el.

Legyen először is $\mathcal{X} := \{\{v\} \mid v \in V\}$ $(\subseteq \mathcal{X}(f))$, hiszen az egyelemű halmazok mind extrém halmazok. Továbbá minden lépésben megvizsgáljuk, hogy $V\left[z^{(i)}\right]$ extrém halmaz-e, és ha igen, akkor $\mathcal{X}$-hez adjuk. (Itt természetesen $V\left[z^{(i)}\right]$ azokból a V-beli elemekből álló halmazt jelöli, amelyek az eljárás első i lépése során a $z^{(i)}$ elembe lettek húzva, azaz $z^{(i)}$ ősképét.) Azt már láttuk, hogy ahhoz hogy eldöntsük egy $X = V\left[z^{(i)}\right] \subset V$ halmazról, hogy extrém-e, elegendő ellenőrizni, hogy $f(X) < f(Z)$ minden $Z \subset X,\, Z \in \mathcal{X}(f)$ halmazra. Azonban mivel $\mathcal{X}$-re minden lépésben teljesül, hogy pontosan azokból a $Z \in \mathcal{X}(f)$ halmazokból áll, melyekre $Z \subseteq V[u]$ valamely $u \in V^{(i)}$ elemre, $V\left[z^{(i)}\right]$ extremitásának eldöntéséhez elegendő megvizsgálni, hogy

$$f(V\left[z^{(i)}\right]) < min\left\{f(Z) \mid Z \in \mathcal{X},\, Z \subset V\left[z^{(i)}\right]\right\}$$

teljesül-e. A teljes algoritmus a következő.

Algoritmus ExtremSubsets

Input: Egy $(V,\, f)$ szimmetrikus és keresztező szubmoduláris rendszer (ahol $|V| \geq 2$).

Output: Az f extrém halmazainak $\mathcal{X} \subseteq 2^V - \{\emptyset,\, V\}$ lamináris családja.

$\mathcal{X} := \{\{v\} \mid v \in V\}$,

Legyen $\mu(v) := f(v)$ minden $v \in V$ elemre,

Legyen $V^{(1)} := V$ és $f^{(1)} := f$,

ciklus $i = 1$-től $n-2$-ig

Keressük meg a $(V^{(i)},\, f^{(i)})$ egy lapos párját, jelölje ezeket $\left\{x^{(i)},\, y^{(i)}\right\}$,

Jelölje $(V^{(i+1)},\, f^{(i+1)})$ azt a rendszert, amelyet a jelenlegi $(V^{(i)},\, f^{(i)})$ rendszerből kapunk az $\left\{x^{(i)},\, y^{(i)}\right\}$ elemek összehúzásával a $z^{(i)}$ elembe,

Jelölje $V\left[z^{(i)}\right]$ azokból a V-beli elemekből álló halmazt, amelyek az eljárás eddigi lépései során a $z^{(i)}$ elembe lettek húzva, /* ekkor $f^{(i+1)}(z^{(i)}) = f(V\left[z^{(i)}\right])$*/

ha $f^{(i+1)}(z^{(i)}) < min\left\{\mu(x^{(i)}),\, \mu(y^{(i)})\right\}$ **akkor**

$\mathcal{X} := \mathcal{X} \cup \left\{V[z^{(i)}]\right\}$és $\mu(z^{(i)}) := f^{(i+1)}(z^{(i)})$

különben

$\mu(z^{(i)}) := min\left\{\mu(x^{(i)}),\, \mu(y^{(i)})\right\}$

ha vége

13 **ciklus vége.**
14 *Output*: $\mathcal{X}$.

Az 5.2 fejezetben és az algoritmus előtt leírtak alapján egyértelmű az algoritmus helyessége. Mivel az algoritmusban $n-2$-ször kerestünk lapos párt, és a 5.24 lemmában leírtak szerint mind szimmetrikus keresztező szubmoduláris, mind átmetsző szubmoduláris és pozimoduláris rendszerekben $O(n^2T_f)$ időben tudunk lapos párt keresni, a következő tétel adódik.

5.25. Tétel. *Legyen f halmazfüggvény a V alaphalmazon, (ahol $|V| \geq 2$). Amennyiben f szimmetrikus és keresztező szubmoduláris, vagy átmetsző szubmoduláris és pozimoduláris, akkor a $(V,\, f)$ rendszer extrém halmazainak $\mathcal{X}$ lamináris családja $O(n^3T_g)$ futási időben megtalálható.*

5.4. Lambda-komponensek

Az itt következő gondolatmenet sok ponton az irányítatlan gráfokban definiált λ-komponensekről [3]-ben leírtakat követi. Azonban megmutatjuk, lépésről lépésre, hogy hogyan általánosítható ez a téma-kör irányítatlan gráfokról szimmetrikus és keresztező szubmoduláris függvényekre. Az alábbiakban legyen f egy szimmetrikus és keresztező szubmoduláris függvény a V alaphalmazon. Emlékeztetünk arra, hogy ekkor f keresztező pozimoduláris is, azaz tetszőleges keresztező X, Y halmaz párra $f(X)+f(Y) \geq f(X-Y)+f(Y-X)$.

5.26. Definíció. A $K \subseteq V$ halmazt az f szimmetrikus halmazfüggvényhez tartozó λ-*komponensnek* nevezzük amennyiben

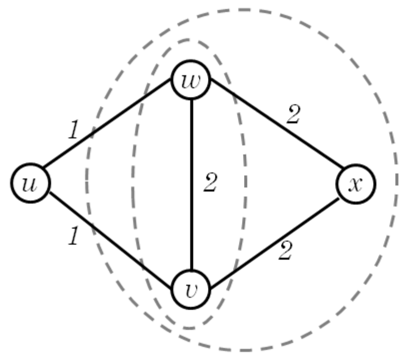
$$min\{\lambda_f(u,\, v) \mid u,\, v \in K\} > max\{\lambda_f(u,\, v) \mid u \in K,\, v \in V-K\}.$$

Minden egy-elemű $\{v\} \subseteq V$ halmazt is λ-komponensnek tekintünk. A $(V,\, f)$ rendszer λ-komponenseinek családját $\mathcal{L}_f$-el jelöljük.

5.27. Lemma. Legyen f szimmetrikus halmazfüggvény a V alaphalmazon. Ekkor $\mathcal{L}_f$ *lamináris halmazrendszer.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy $X,\, Y \in \mathcal{L}_f$ átmetsző halmazok. Legyen $x \in X-Y$, $y \in Y-X$ és $z \in X \cap Y$. Ekkor $\lambda_f(x,\, z) > \lambda_f(z,\, y)$, mivel X egy λ-komponens, másrészt $\lambda_f(x,\, z) < \lambda_f(z,\, y)$, mivel Y is λ-komponens, vagyis ellentmondásra jutottunk. □

Ráadásul, mint lentebb bebizonyítjuk, az is igaz, hogy a $(V,\, f)$ rendszer extrém halmazaink lamináris családja része a $(V,\, f)$ λ-komponenseinek családjának, vagyis minden extrém halmaz egyben λ-komponens is. Felvetődik a gondolat, hogy nem lehet-e a min-degree sorrend segítségével λ-komponenseket keresni. Azaz, hogy vajon nem igaz-e, hogy egy min-degree sorrend utolsó két pontját még nem-triviális λ-komponens sem szeparálja. Azonban ez nem igaz, még a gráfok által adott speciális esetben sem. A következő ábrán látható gráfban a $\sigma = (u,\, v,\, w,\, x)$ egy min-degree sorrendet alkot, a szürke vonallal körülhatárolt csúcs-halmazok pedig a λ-komponensek. Vagyis a $\{v,\, w\}$ λ-komponens szeparálja a σ utolsó két pontját.



A $(V,\ f)$ párhoz tartozó λ-komponensek megtalálhatóak $(V,\ f)$ egy T Gomory-Hu fájának segítségével, melyet az 4. fejezetben definiáltunk, és beláttuk, hogy minden szimmetrikus és keresztező szubmoduláris függvénynek létezik Gomory-Hu fája. Legyenek $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_t$ a T élein felvétetett különböző él-súlyok. $1 \le i \le t$-re, legyen $\mathcal{P}_i$ a V-nek az a partíciója mely T komponenseinek a csúcshalmazának felel meg miután töröltük belőle a λ_i-nél szigorúan kisebb súlyú éleket. Ekkor $\mathcal{P}_1 = \{V\}$. világos, hogy $i \neq j$ esetén $\mathcal{P}_i$ és $\mathcal{P}_j$ diszjunktak. Legyen $\mathcal{L} = \bigcup_{i=1}^{t} \mathcal{P}_i$.

5.28. Tétel. *$(V,\ f)$ λ-komponensei pontosan azok a halmazok, melyek elemei a fent definiált P_i partíciók valamelyikének, azaz $\mathcal{L}_f = \mathcal{L}$.*

Bizonyítás. Legyen $K \in \mathcal{P}_i$ valamely $1 \le i \le t$-re. Mivel a Gomory-Hu fa folyam ekvivalens a $(V,\ f)$ rendszerrel, $\lambda_f(u,\ v) \ge \lambda_i$ minden $u,\ v \in K$-ra és $\lambda_f(u,\ v) < \lambda_i$ minden $u \in K$ és $v \in V - K$ elempárra. Tehát K λ-komponens. Fordítva, legyen K λ-komponens és $min\{\lambda_f(u,\ v)\ :\ u,\ v \in K\} = \lambda_i$. Ekkor $K \in P_i$ megint csak a Gomory-Hu fa szerkezetére tett előbbi megfontolások miatt. $\square$

5.29. Tétel. *$\mathcal{X}(f) \subseteq \mathcal{L}_f$, vagyis minden extrém halmaz λ-komponens. Egy K λ-komponens pedig pontosan akkor extrém halmaz, ha $f(K') > f(K)$ minden $K' \subset K$ λ-komponensre.*

Bizonyítás. Legyen $Z \in \mathcal{X}(f)$ extrém halmaz. Legyen

$$l := min\left\{\lambda_f(u,\ v) \mid u,\ v \in Z\right\}.$$

Ha $l > f(Z)$ akkor minden $u \in Z$, $v \in V - Z$-re $\lambda_f(u,\ v) \le f(Z) < l$, tehát Z egy λ-komponens. Tegyük fel, hogy $l \le f(Z)$ és legyen $u_1 \in V - Z$ egy tetszőleges elem. Legyen X egy Z-t elvágó halmaz, melyre $f(X) = l$. X helyett esetleg a komplementerét választva, feltehetjük, hogy $u_1 \in X$. Ekkor $Z - X$, $X - Z$ és $X \cap Z$ nem üres, azaz Z és X átmetsző halmazok. Másrészt nem lehet, hogy $Z \cup X = V$, mert ekkor $V - X \subset Z$ és $f(V - X) = f(X) = l \le f(Z)$

ellentétben Z extremitásával. Tehát Z és X keresztező halmazok, így teljesül rájuk a pozimodularitási egyenlőtlenség. Másrészt $Z - X$ a Z extrém halmaz egy valódi részhalmaza, tehát $f(Z - X) > f(Z)$. Az előbbi két megállapítást felhasználva kapjuk, hogy

$$f(X) + f(Z) \geq f(X - Z) + f(Z - X) > f(X - Z) + f(Z),$$

tehát $l = f(X) > f(X - Z)$. Azaz minden $u_1 \in V - Z$-hez lehet találni egy $u_1 \in (X - Z =) \, Y \subseteq V - Z$ halmazt melyre $f(Y) < l$, így Z egy λ-komponens.

A másik irányhoz bizonyításához tegyük fel először, hogy K egy λ-komponens, ami extrém halmaz. Ekkor minden $K' \subset K$ halmazra $f(K') > f(K)$ tehát ez speciálisan a λ-komponensekre is teljesül. Másrészről ha K egy λ-komponens ami nem extrém halmaz akkor létezik nem-üres X valódi részhalmaza melyre $f(X) \leq f(K)$. Ekkor 5.17 szerint van egy $K' \subseteq X$ extrém halmaz melyre $f(K') \leq f(X)$, tehát $f(K') \leq f(K)$ és a tétel első fele szerint K' λ-komponens. $\square$

Az itt leírtak újabb algoritmust szolgáltatnak tetszőleges szimmetrikus és keresztező szubmoduláris (V, f) rendszer extrém halmazainak megtalálására. Bár az itt közöltek alapján adható, a rendszer Gomory-Hu fájának megkonstruálását is magába foglaló algoritmus lassabb futási idejű, mint Nagamochinak a 5.3 fejezetben ismertetett algoritmusa.

6. A max-vissza és a min-degree sorrend kapcsolata

Dolgozatom befejezésképp bemutatom, hogy milyen kapcsolatban van egymással a dolgozat során használt max-vissza és min-degree sorrend. Nézzük először a gráfok esetét. Mint az a 5.4 tétel bizonyításának a végén beláttuk, egy tetszőleges $G = (V,\ E)$ irányítatlan élsúlyozott gráf esetén a $G + b_K$ gráf egy s kezdőpontú $\sigma = (v_0 = s,\ v_1,\ v_2, \ldots,\ v_n)$ max-vissza sorrendje megadja az eredeti G gráf egy $\sigma' = (v_1,\ v_2, \ldots,\ v_n)$ min-degree sorrendjét, ahol $K \geq max\,\{d(v;\ G) \mid v \in V\}$ tetszőleges egész szám, $G + b_K$ a G K-reguláris csillag növeltjét jelöli. Ennek analógiájára, megmutatjuk, hogy hogyan lehet a min-degree sorrend segítségével megadni egy tetszőleges$G = (V,\ E)$ irányítatlan élsúlyozott gráf max-vissza sorrendjét.

6.1. Lemma. *Legyen tehát $G = (V,\ E)$ egy tetszőleges irányítatlan élsúlyozott gráf (amire $n = |V| \geq 2$) és legyen $K = max\,\{d(v;\ G) \mid v \in V\}$ és $M > 2 \cdot K$ tetszőleges egész szám. Jelölje $H = G + b_M$ a G M-reguláris csillag növeltjét. Ekkor a H egy $\pi = (v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1})$ min-degree sorrendjében szükségszerűen $t \in \{v_n,\ v_{n+1}\}$ lesz, ahol t jelöli a csillag növeltben a V-hez hozzávett új pontot, és $\pi' = (v_1,\ v_2, \ldots,\ v_n = V - \{v_1,\ v_2, \ldots,\ v_{n-1}\})$ pedig az eredeti G egy max-vissza sorrendjét adja.*

Bizonyítás. Először is belátjuk, hogy $t \in \{v_n,\ v_{n+1}\}$. Jelölje $i = 1, \ldots,\ n-1$ esetén a V_{i-1} a $\{v_1,\ v_2, \ldots,\ v_{i-1}\}$elemekből álló ponthalmazt, $H - V_{i-1}$ pedig azt a gráfot, amit H-ból kapunk, ha töröljük a gráfból a $\{v_1,\ v_2, \ldots,\ v_{i-1}\}$pontokat, és azokat az éleket, amelyek az első $i-1$ pont közül legalább eggyel szomszédosak. $i = 1$ esetén a $H - V_0$ maga a H gráf. H gráfban minden $v \in V$ pontra $d(v;\ H) = M$, továbbá $d(t;\ H) = \sum_{v \in V}(M - d(v;\ G))$, ahol K és M definíciójából adódóan $M - d(v;\ G) \geq M - K$ minden $v \in V$ pontra, tehát $n = |V| \geq 2$ esetén $d(t;\ H) \geq 2(M - K) > M = d(v;\ H)$, így biztos, hogy $v_1 \neq t$. Most tegyük fel, hogy az első $i-1$ pontot már kiválasztottuk, és $t \notin \{v_1,\ v_2, \ldots,\ v_{i-1}\}$. Az első $i-1$ pont kiválasztása után kapott $H - V_{i-1}$ gráfban a $v \in V$ pontok foka biztos hogy nem nőtt (esetleg csökkenhetett, ez most minket nem érdekel), így $d(v;\ H - V_{i-1}) \leq M$, és $d(t;\ H - V_{i-1}) = \sum_{v \in V_{i-1}}(M - d(v; G)) \geq (n-i+1) \cdot (M-K)$, ugyanis az új t csúcs és a $H - V_{i-1}$ pontjai között húzódó élekből eddig egyetlen egyet sem töröltünk. Így $i \leq n-1$ esetén ugyancsak fennáll a $d(t;\ H - V_{i-1}) \geq 2(M - K) > M \geq d(v;\ H - V_{i-1})$ azonosság, $v_i \neq t$, minden $i \leq n-1$-re, vagyis $t \in \{v_n,\ v_{n+1}\}$.

Most belátjuk, hogy a $H = G + b_M$ gráfhoz tartozó min-degree sorrend valójában a G egy max-vissza sorrendjét adja. A H-ban minden $v \in V$ foka minimális, így tetszőleges $v_1 \in V$ választható a min-degree sorrend kezdőpontjának. Másrészt $i \leq n-1$ esetén miután a $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}$-et már meghatároztuk, a min-degree sorrend definíciójából következően azt az $u \in V - V_{i-1}$-et válasszuk az v_i-nek (azért elegendő a $V - V_i$-beli pontok között keresni, mert azt már beláttuk, hogy $t \in \{v_n,\ v_{n+1}\}$), amelynek a legkisebb a foka a $H - V_{i-1}$gráfban, azaz amelyre

$$d(u;\ H - V_{i-1}) = d(u;\ H) - d(u, V_{i-1};\ H) = M - d(u, V_{i-1};\ G) \tag{17}$$

minimális. Az utolsó egyenlőség azért teljesül, mert $u \in V$ és így $E(u, V_{i-1};\ H)$, vagyis az eddig törölt élek mind G-beliek voltak. Másrészt (17) azt mutatja, hogy ekkor v_i az az $u \in V - V_{i-1}$ pont lesz, amelyre $d(u, V_{i-1};\ G)$ maximális. Így $\pi' = (v_1,\ v_2, \ldots,\ v_n = V - \{v_1,\ v_2, \ldots,\ v_{n-1}\})$ egy max-vissza sorrend G-ben. $\square$

Most megvizsgáljuk a $(V,\ f)$ rendszerekben értelmezett max-vissza és min-degree sorrend kapcsolatát. Természetesen az itt bemutatott példákhoz az ötletet a gráfos esetek adták.

6.2. Lemma. *Legyen f egy szimmetrikus teljesen szubmoduláris halmazfüggvény a V alaphalmazon (amire $n = |V| \geq 2$), $s \notin V$ pedig egy új elem. Legyen $K = max\,\{f(v) \mid v \in V\}$. Legyen tetszőleges $X \subseteq V + s$ halmazra*

$$g(X) = \begin{cases} f(X - s) + \sum_{v \in V - X}(K - f(v)) & ha\ s \in X \\ f(X) + \sum_{v \in X}(K - f(v)) & ha\ s \notin X \end{cases}.$$

Legyen a $(V + s,\ g)$ rendszer egy s kezdőelemű max-vissza sorrendje $\sigma = (v_0 = s,\ v_1,\ v_2, \ldots,\ v_n)$. Ekkor a $\sigma' = (v_1,\ v_2, \ldots,\ v_n)$ az eredeti $(V,\ f)$ rendszer egy min-degree sorrendje. Ráadásul amennyiben az f szimmetrikus és teljesen szubmoduláris, akkor a g is az.

Bizonyítás. Először is figyeljük meg, hogy minden $v \in V$ elemre $g(v) = K$. Egy max-vissza sorrendben a kezdő elem tetszőlegesen kiválasztható, így legyen $s = v_0$. Másrészt $1 \leq i \leq n - 1$ esetén miután a $v_1,\ v_2, \ldots,\ v_{i-1}$ elemeket már kiválasztottuk, azt az $u \in V - V_{i-1}$ elemet választjuk v_i-nek a max-vissza sorrend definíciója szerint, amelyre $g(s + V_{i-1} + u) - g(u)$ minimális. A g definíciójába behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} g(s + V_{i-1} + u) - g(u) &= f(V_{i-1} + u) + \sum_{v \in V - (V_{i-1} + u)} (K - f(v)) - K \\ &= f(V_{i-1} + u) + f(u) + \sum_{v \in V - V_{i-1}} (K - f(v)) - 2K \end{aligned}$$

ahol a $\sum_{y \in V - V_{i-1}}(K - f(y)) - 2K$ értéke nem függ u választásától, így $g(s + V_{i-1} + u) - g(u)$ pontosan akkor minimális amikor a $f(V_{i-1} + u) + f(u)$ összeg minimális, tehát a $\sigma' = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ valóban a (V, f) rendszer egy min-degree sorrendje.

Tegyük fel, hogy f szimmetrikus és teljesen szubmoduláris. Megmutatjuk, hogy g is az. Természetesen g szimmetrikus, hiszen tetszőleges $s \in X \subseteq V + s$,

$Y = (V + s) - X$ halmazokra

$$\begin{aligned} g(X) &= f(X - s) + \sum_{v \in V - X} (K - f(v)) \\ &= f(Y) + \sum_{v \in Y} (K - f(v)) \\ &= g(Y) \end{aligned}$$

ahol f szimmetrikusságát használtuk csak ki. Legyen most $X,\ Y \subseteq V + s$ két tetszőleges részhalmaz. A szubmodularitás belátásához külön megvizsgáljuk az $s \in X \cap Y$, az $s \in X - Y$ és az $s \notin X \cup Y$ eseteket. (Szimmetria miatt a $s \in Y - X$ eset kihagyható.)

Legyen $s \in X \cap Y$. Ekkor

$$\begin{aligned} g(X) + g(Y) &= f(X - s) + \sum_{v \in V - X} (K - f(v)) + f(Y - s) + \sum_{v \in Y} (K - f(v)) \\ &\geq f(X \cup Y - s) + f(X \cap Y - s) + \\ &\quad + \sum_{v \in V - (X \cup Y)} (K - f(v)) + \sum_{v \in V - (X \cap Y)} (K - f(v)) \\ &= g(X \cup Y) + g(X \cap Y). \end{aligned}$$

Legyen most $X,\ Y \subseteq V + s$ olyan, hogy $s \in X - Y$. Ekkor

$$\begin{aligned} g(X) + g(Y) &= f(X - s) + \sum_{v \in V - X} (K - f(v)) + f(Y) + \sum_{v \in Y} (K - f(v)) \\ &\geq f(X \cup Y - s) + f(X \cap Y) + \\ &\quad + \sum_{v \in V - (X \cup Y)} (K - f(v)) + \sum_{v \in X \cap Y} (K - f(v)) \\ &= g(X \cup Y) + g(X \cap Y). \end{aligned}$$

Végül legyen $X,\ Y \subseteq V \subset V + s$ olyan, hogy $s \notin X \cup Y$. Ekkor

$$\begin{aligned} g(X) + g(Y) &= f(X) + \sum_{v \in X} (K - f(v)) + f(Y) + \sum_{v \in Y} (K - f(v)) \\ &\geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y) + \\ &\quad + \sum_{v \in X \cup Y} (K - f(v)) + \sum_{v \in X \cap Y} (K - f(v)) \\ &= g(X \cup Y) + g(X \cap Y). \end{aligned}$$

Végül nézzük meg a $(V,\ f)$ rendszerekben értelmezett max-vissza és min-degree sorrend másik irányú kapcsolatát. $\square$

6.3. Lemma. *Legyen f egy nemnegatív szimmetrikus teljesen szubmoduláris rendszer a V alaphalmazon (amire $n = |V| \geq 2$), $t \notin V$ pedig egy új elem.*

Legyen $K = max\{f(v) \mid v \in V\}$ és $M > 2 \cdot K$. Legyen tetszőleges $X \subseteq V + t$ halmazra

$$g(X) = \begin{cases} f(X-t) + \sum_{v \in V-X}(M - f(v)) & ha\, t \in X \\ f(X) + \sum_{x \in X}(M - f(x)) & ha\, t \notin X \end{cases}.$$

Ekkor a $(V+t,\, g)$ rendszer egy $\pi = (v_1,\, v_2, \ldots,\, v_n,\, v_{n+1})$ min-degree sorrendjében szükségszerűen $t \in \{v_n,\, v_{n+1}\}$ lesz, és a $\pi' = (v_1,\, v_2, \ldots,\, v_n = V - \{v_1,\, v_2, \ldots,\, v_{n-1}\})$ pedig az eredeti $(V,\, f)$ egy max-vissza sorrendjét adja. Ráadásul amennyiben az f szimmetrikus és teljesen szubmoduláris, akkor a g is az.

Bizonyítás. Elsőként belátjuk, hogy $t \in \{v_n,\, v_{n+1}\}$. Figyeljük meg, hogy minden $v \in V$ elemre $g(v) = M$, és $g(t) = f(\emptyset) + \sum_{v \in V}(M - f(v)) \geq n \cdot (M-K) \geq 2 \cdot (M-K) > M$, ahol az első egyenlőtlenségnél az f nemnegativitását használtuk ki. Tehát $g \neq v_1$. Legyen $i \leq n-1$ és tegyük fel, hogy ez első $i-1$ elemet már kiválasztottuk, és $t \notin \{v_1,\, v_2, \ldots,\, v_{i-1}\}$. Legyen $u \in V - V_{i-1}$tetszőleges. f szubmodularitásából és nemnegativitásából adódik, hogy

$$f(V_{i-1}) + f(u) \geq f(V_{i-1} + u) + f(\emptyset) \geq f(V_{i-1} + u). \tag{18}$$

A min-degree sorrendben a még kiválasztatlan $n - i + 2$ db elem közül azt választjuk v_i-nek, melyre az

$$r_i(x) = g(V_{i-1} + x) + g(x)$$

mennyiség minimális az összes $x \in (V+t) - V_{i-1}$ elem között. Megmutatjuk, hogy $g(V_{i-1} + u) + g(u) \leq g(V_{i-1} + t) + g(t)$ minden $u \in V - V_{i-1}$ elemre.

$$\begin{aligned} g(V_{i-1} + t) + g(t) &= f(V_{i-1}) + \sum_{v \in V - V_{i-1}}(M - f(v)) + f(\emptyset) + \sum_{v \in V}(M - f(v)) \\ &\geq f(V_{i-1} + u) - f(u) + \sum_{v \in V_{i-1}}(M - f(v)) + \\ &\quad + \sum_{v \in V - V_{i-1}} 2 \cdot (M - f(v)) \\ &> f(V_{i-1} + u) - f(u) + \sum_{v \in V_{i-1}}(M - f(v)) + 2M \\ &= f(V_{i-1} + u) + \sum_{v \in V_{i-1} + u}(M - f(v)) + M \\ &= g(V_{i-1} + u) + g(u) \end{aligned}$$

ahol a szigorú egyenlőtlenség azért teljesül, mert $i \leq n-1$ miatt $\sum_{v \in V - V_{i-1}} 2 \cdot (M - f(v)) \geq 4 \cdot (M - K) > 2M$. Azt kaptuk tehát, hogy $v_i \neq t$, minden $i \leq n-1$-re, vagyis $t \in \{v_n,\, v_{n+1}\}$.

Most pedig belátjuk, hogy a $(V+t, g)$ rendszer egy $\pi = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1})$ min-degree sorrendjére a $\pi' = (v_1,\ v_2, \dots,\ v_n = V - \{v_1,\ v_2, \dots,\ v_{n-1}\})$ egy max-vissza sorrendje. Mint már beláttuk minden $v \in V$-re $g(v) = M < g(t)$ tehát tetszőleges $v \in V$ választható v_1-nek. Másrészt $i \leq n-1$ esetén miután a $v_1,\ v_2, \dots,\ v_{i-1}$-et már meghatároztuk, a min-degree sorrend definíciójából következően azt az $u \in V - V_{i-1}$ elemet választjuk az v_i-nek, amely minimalizálja az $r_i(u) = g(V_{i-1} + u) + g(u)$ kifejezést. (Azért elegendő a $V - V_i$-beli elemek között vizsgálni $r_i(u)$ értékét, mert azt már beláttuk, hogy $i \leq n-1$ esetén $r_i(t) < r(u)$ minden $u \in V - V_{i-1}$ elemre.)

$$
\begin{aligned}
g(V_{i-1} + u) + g(u) &= f(V_{i-1} + u) + \sum_{v \in V_{i-1} + u} (M - f(v)) + M \\
&= f(V_{i-1} + u) - f(u) + \sum_{v \in V_{i-1}} (M - f(v)) + 2M
\end{aligned}
$$

ahol a $\sum_{v \in V_{i-1}} (M - f(v)) + 2M$ értéke nem függ u választásától, így $g(V_{i-1} + u) + g(u)$ pontosan akkor minimális, amikor a $f(V_{i-1}+u) - f(u)$ összeg minimális, tehát a $(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ valóban a (V, f) rendszer egy max-vissza sorrendjének első $n-1$ eleme, így $\pi' = (v_1,\ v_2, \dots,\ v_n = V - \{v_1,\ v_2, \dots,\ v_{n-1}\})$ pedig a $(V,\ f)$ egy max-vissza sorrendje.

Végül tegyük fel, hogy f szimmetrikus és teljesen szubmoduláris. Ekkor g is szimmetrikus és teljesen szubmoduláris, aminek a bizonyítása (s helyett t-t írva) pontosan ugyanúgy meg, mint az előző tételben, így azt itt nem írjuk le még egyszer.

$\square$

Hivatkozások

[1] L. R. Ford, D. R. Fulkerson, Maximal flow through a network, Can. J. Math. 8 (1956), 399-404.

[2] A. Frank, On the Edge-Connectivity Algorithm of Nagamochi and Ibaraki, Egres Quick-Proof No. 2009-01

[3] A. Frank, Connections in Combinatorial Optimization, Oxford University Press, 2011

[4] R. Gomory, T. Hu, Multi-terminal network flows, SIAM J. Appl. Math., 9 (1961), 551-570.

[5] M. Grötschel, L. Lovász, A. Schrijver, Geometric Algorithms and Combinatorical Optimization, Springer, Berlin, 1988.

[6] S. Iwata, L. Fleischer, S. Fujishige, A combinatorical strongly polinomial algorithm for minimizing submodular functions, J. ACM 48:4 (2001), 761-777.

[7] W. Mader, Über minimal n-fach zusammenhangende, unendliche Graphen und ein Extremalproblem. Arch. Math. 23 (1972), 553–560

[8] H. Nagamochi, Graph algoritms for network connectivity problems, J. Oper. Res. Soc. J. 47 (2004), 199-223.

[9] H. Nagamochi, Minimum degree orderings, Algorithmica, 56 (2010), 17-34.

[10] H. Nagamochi, T. Ibaraki, A linear-time algorithm for finding a sparse k-connected spanning subgraph of a k-connected graph, Algorithmica 7 (1992) 583-596.

[11] H. Nagamochi, T. Ibaraki, Computing edge-connectivity of multigraphs and capacited graphs, SIAM J. Discrete Math. 5 (1992), 54-66.

[12] H. Nagamochi, T. Ibaraki, Algorithmis Aspects of Graph Connectivity, Cambridge University Press, 2008

[13] M. Queyranne, Minimizing symetric submodular functions, Math. Progr. 82 (1998), 3-12.

[14] A. Schrijver, A combinatorical algorithm minimizing submodular function in strongly polinomial time, J. Comb. Theory B-80 (2000), 346-355.

[15] A. Schrijver, Combinatorial Optimization, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003

[16] R. E. Tarjan, M. Yannakakis, Simple linear-time algorithms to test chordality of graphs, test acyclicity of hypergraphs, and selectively reduce acyclic hypergraphs, SIAM J. Comput, 13 (1984), 566-579

[17] T. Watanabe, A. Nakamura, Edge-connectivity augmentation problems, J. Comput. Syst. Sci. 35 (1987), 96-144.

[18] Az Interneten nyilvánosan elérhető előadásjegyzet az UIUS Topics in Combinatorical Optimization című kurzusához, forrás: www.cs.illinois.edu/class/sp10/cs598csc/Lectures/Lecture6.pdf