Túlélési kockázatok fedezése longevity bond segítségével

Diplomamunka

Írta: Komáromi Réka

Alkalmazott matematikus szak

Külső Témavezető:

Bozsó Dávid

Risk Management, ING Insurance Central Europe

Belső konzulens:

Arató Miklós

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2011

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Az utóbbi évtizedekben sokat fejlődött az orvostudomány, kisebb a csecsemőhalandóság, egyre több betegségnek ismert az ellenszere, megelőzési módja. Az emberek szemlélete is formálódott, nagyobb figyelmet fordítunk a higiéniára, egészségmegőrzésre. Kényelmesebb otthonokban élünk, a munkahelyi adottságok javultak, általánosságban elmondható, hogy jobbak az életkörülmények, mint a korábban. A pozitív változások jótékony hatással vannak az emberek egészségi állapotára, és ezáltal magasabb életkort érnek el. Az élettartam növekedése kihívást jelent a biztosítók, magánnyugdíjpénztárak számára a járadékfizetés tekintetében. A túlélési kockázat, vagyis annak a veszélye, hogy a tényleges élettartam hosszabb a feltételezettnél, fontos kockázati tényező a járadékszolgáltatók szempontjából. Amennyiben a biztosítottak az előrejelzettnél magasabb életkort érnek el, akkor ezek a szerződések akár veszteségessé is válhatnak, hiszen a járadékfizetés időszaka ezáltal kitolódik, a biztosító kötelezettségvállalása a tervezettnél tovább tart. Ez a jelenség a világ nagy részén megfigyelhető, a túlélési kockázat fedezését szolgáló pénzügyi megoldásokkal indokolttá vált foglalkozni. A biztosítók a nem várt kockázatokat a befektetőkkel szeretnék megosztani, ebből a célból már különböző konstrukciók születtek. A természeti katasztrófákból eredő kockázatok fedezésére már az 1990-es évek közepén vezettek be úgy nevezett katasztrófa kötvényeket (angol rövid megfelelője: cat-bond). Ezeknek az a lényege, hogy bizonyos típusú katasztrófa bekövetkezése esetén a kötvényből vásárló befektetők elvesztik a befizetett tőkét, amit a biztosító a kárkifizetésre fordít, ellenben, ha nem következik be olyan típusú katasztrófa, amire a kötvényt kibocsátották, akkor a befektetők a tőkén felül magas kuponfizetést is kapnak. Ezek a kötvények nagyon kockázatosak a befektetők számára, viszont a futamidő viszonylag rövid, a hozam pedig átlagon felüli. Az ilyen ügyletek népszerűek, évről évre bocsátanak ki cat-bondokat. A cat-bondokhoz hasonló konstrukció született extrém halandóságra is, a Swiss Re 2003-ban bocsátott ki egy 4 éves futamidejű kötvényt US LIBOR+135bps kuponnal. A tőke itt sem volt garantált, viszont a magas kuponfizetés meggyőzte a befektetőket, a kibocsátott 400m USD mind elkelt a jegyzés során. A sikeres kibocsátások ösztönzőleg hatottak a biztosítókra, mintájukra gyorsan elkészült az ellenkező irányú kockázat, vagyis a túlélés fedezését célzó eszköz, a longevity bond. Az első longevity bondot az EIB/BNP alkotta meg, 2004-ben jelentették be a kibocsátását 25 éves futamidővel (részletesebben a 3. fejezetben írok a konstrukcióról), de a kibocsátás nem valósult meg. A későbbi longevity bondok sem váltották be a hozzájuk fűzött reményeket. Ennek oka az lehetett, hogy a halandósági kockázatnak hiányzik a likvid piaca, a mortalitási adatok nehezen hozzáférhetők, ritkán, és késve kommunikálják őket. Nem utolsó sorban a befektetők számára kevésbé átlátható konstrukciókról beszélünk. Ezek a tényezők állhatnak amögött, hogy a befektetők egyelőre nem kedvelik az ilyen típusú ügyleteket. Kiemelt kockázatról lévén szó a biztosítók viszont továbbra is bíznak abban, hogy népszerűbbé válnak a jövőben ezek a megoldások, és működőképes konstrukciókat tudnak majd alkotni. Véleményem szerint a longevity bondok fogadtatása változni fog, mert alapjaiban jó megoldást kínál a biztosítók problémájára, és úgy gondolom, hogy megfelelő módosításokkal vonzóbbá tehető a befektetők számára is. Ez motivált abban, hogy megvizsgáljam, miként működne magyar környezetben egy longevity bond. Diplomamunkám célja, hogy egy könnyen áttekinthető mintát mutassak a magyar longevity bondra, amely akár a biztosító menedzsmentjének tájékoztatására is alkalmas. Kezdetben az élettartam növekedő tendenciáját szemléltem, majd a halandósági kockázatok fedezési lehetőségeit ismertetem. A 4. fejezetben részletesen bemutatok egy longevity bond konstrukciót, majd a 6. fejezetben Wang [7] által kifejlesztett módszerrel a halandóság piaci árának kiszámítását vezetem le Lin és Cox [9] ötletét is felhasználva. Ezt követően az ismertetett longevity bond lehetséges árazását mutatom be. Végül magyar adatokkal gyakorlatba is megvalósítom a fentieket, beárazom a longevity bondot, és végül érzékenységvizsgálatot végzek.

2. Növekvő élettartam problémája

A bevezetésben említésre került, hogy a járadékszolgáltatók, magánnyugdíjpénztárak szempontjából fontos kockázati tényező az, hogy az élettartam a vártnál nagyobb. Ezt a kockázatot nevezik magyarul túlélési kockázatnak, angol szakirodalomban longevity risk néven találkozhatunk vele. A túléléssel az a probléma, hogy ilyen esetekben a biztosító a kötelezettségeit szerződéskötéskor alulbecsüli, és ez a termékek árazásánál azt eredményezi, hogy a szükségesnél alacsonyabb árat állapítanak meg. Ebben a fejezetben főként 1949-2006 időszakra vonatkozó magyar halandósági adatokkal végzett számítások segítségével bizonyítást nyer, hogy valóban emelkedés figyelhető meg a várható élettartam tekintetében. Ehhez az annuitás szempontjál fontos értékek meghatározásának módszereit, és a magyar esetben kapott eredményeket is szemléltetem. Tanulmányozásra kerülnek a rendelkezésemre álló halandósági adatok, várható életkor és a várható hátralévő élettartam növekedése. A múlt vizsgálatát követően a jövőről ejtek néhány szót, az Economic Policy Comittee (AWG) és Directorate-General for Economic and Financial Affairs publikációja [5] alapján az élettartamra vonatkozó előrejelzések is olvashatók ebben a részben.

2.1. Jelölések

A levezetésre kerülő képletek könnyebb követhetősége céljából szükség van egy egységes jelölésrendszerre:

- X valószínűségi változó jelöli egy egyén élettartamát.
- q_x jelöli a halandósági rátát x életkorban, vagyis$P(X < x+1 \big| X \geq x)$ valószínűséget.
- p_x jelöli a túlélési rátát x életkorban, vagyis $P(X \geqq x+1 \big| X \geqq x)$ valószínűséget.

$$p_x \quad = \quad 1 - q_x$$

- tp_x jelöli annak a valószínűségét, hogy x életkorú ember legalább további t évig életben marad, vagyis $P(X \geqq x+t \big| X \geq x)$ valószínűséget.

$$0p_x = 1$$

$$tp_x \quad = \quad p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+t-1}$$

- tq_x jelöli annak a valószínűségét, hogy x életkorú nem éli meg $x+t$ életkort, vagyis $P(X < x + t \big| X \geq x)$ valószínűséget.

$$\begin{aligned} 0q_x &= 0 \\ tq_x &= 1 - tp_x \end{aligned}$$

- l_x a túlélési rend, vagyis x életkor elérésének a valószínűsége.

$$P(X \geqq x) = P(X \geqq x \big| X \geqq x-1) \cdot P(X \geqq x-1) = p_{x-1} \cdot l_{x-1} = \prod_{i=0}^{x-1} p_i$$

- $\mu(t,x)$ jelöli a halálozási intenzitást, ez a mennyiség azt fejezi ki, hogy kis dt hosszú intervallumon mekkora az időegységre jutó halandósági valószínűség, ebből következik, hogy t és $t+dt$ között bekövetkező halandóság valószínűsége $\mu(t,x) \cdot dt$. Egy adott t évben a halandóság és $\mu(t,x)$ között az alábbi összefüggés teljesül:

$$q(t,x) = 1 - e^{[-\int_0^t \mu(s,x)ds]}$$

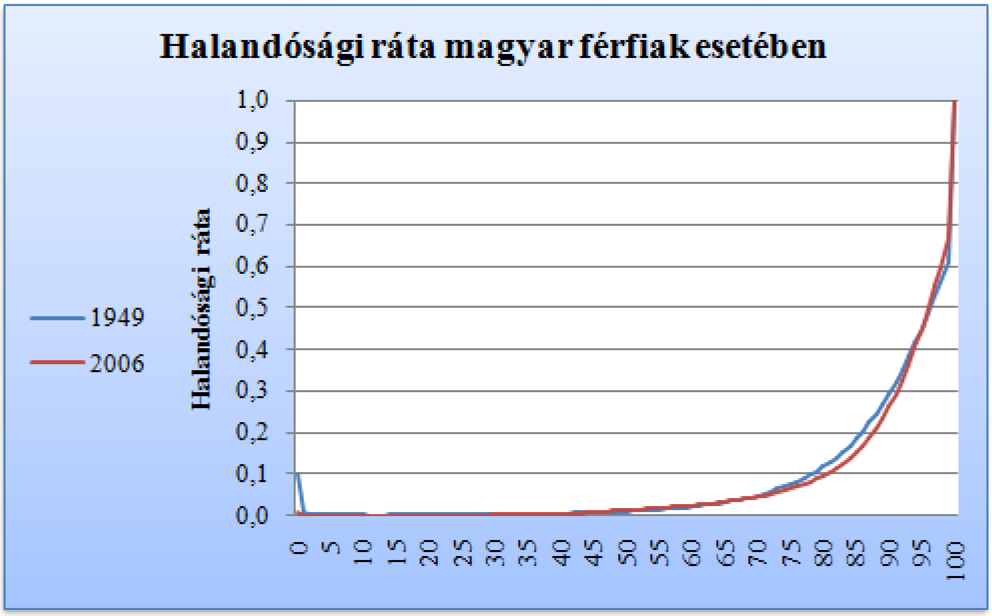
- $d(0,t)$ diszkont faktor, vagyis éves r kamat esetén $\frac{1}{(1+r)^t}$, ezzel tudunk a 0 időpillanatra visszadiszkontálni egységnyi értéket.

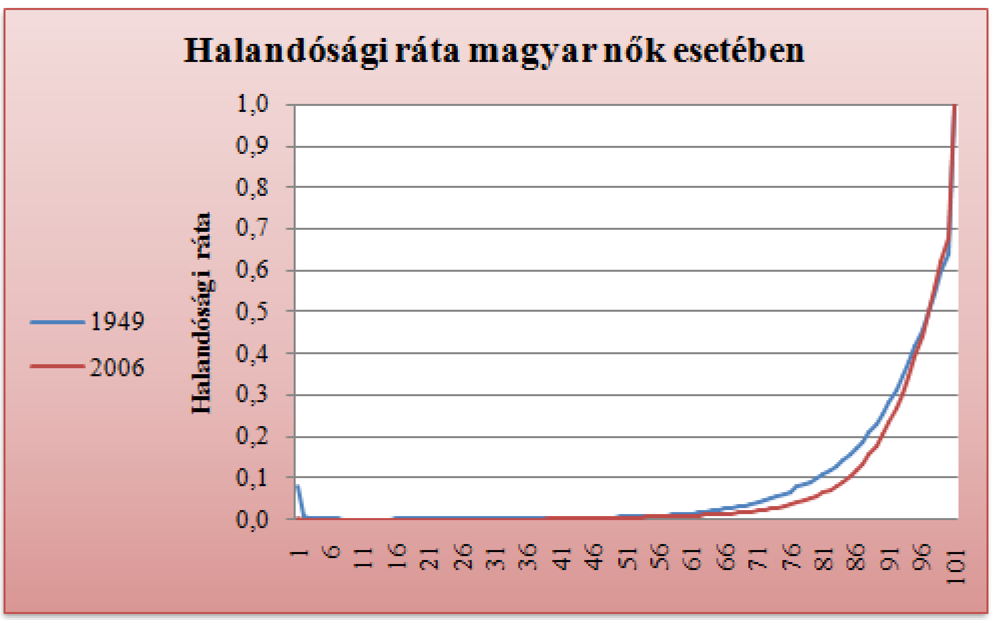
- q_x adatokat az ún. halandósági tábla tartalmazza, jelen esetben az 1949-2006 évekre vonatkozó magyar halandósági táblát használom.

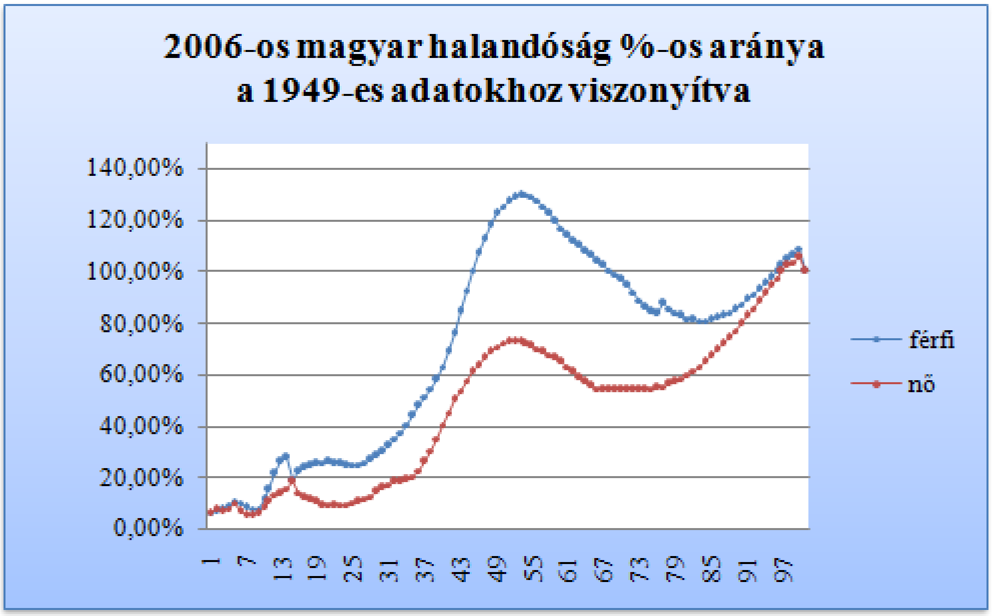
2.2. Halandósági ráta csökkenése

2.2.1. A magyar halandósági arány változása 1949-2006-ig

Az élettartam növekedését legkönnyebben úgy láthatjuk be, ha a rendelkezésünkre álló halandósági rátákat megvizsgáljuk. A magyar halandóság 1949-es adatait vetem össze a legfrissebb rendelkezésemre álló, vagyis a 2006-os adatokkal. A nők és férfiak esetében is az olvasható le a görbékről, hogy az 1949-es halandósági arány szinte minden életkorban magasabb volt a 2006-os értékeknél. A változás mértékét viszont az egyes életkorokra vonatkozó adatok százalékos aránya még jobban szemlélteti. Kevesebb mint 60 év alatt annyit fejlődött a halandóság, hogy bizonyos életkorok tekintetében a 2006-os ráta nem éri el az 1949-es halandósági arány 20%-át sem.

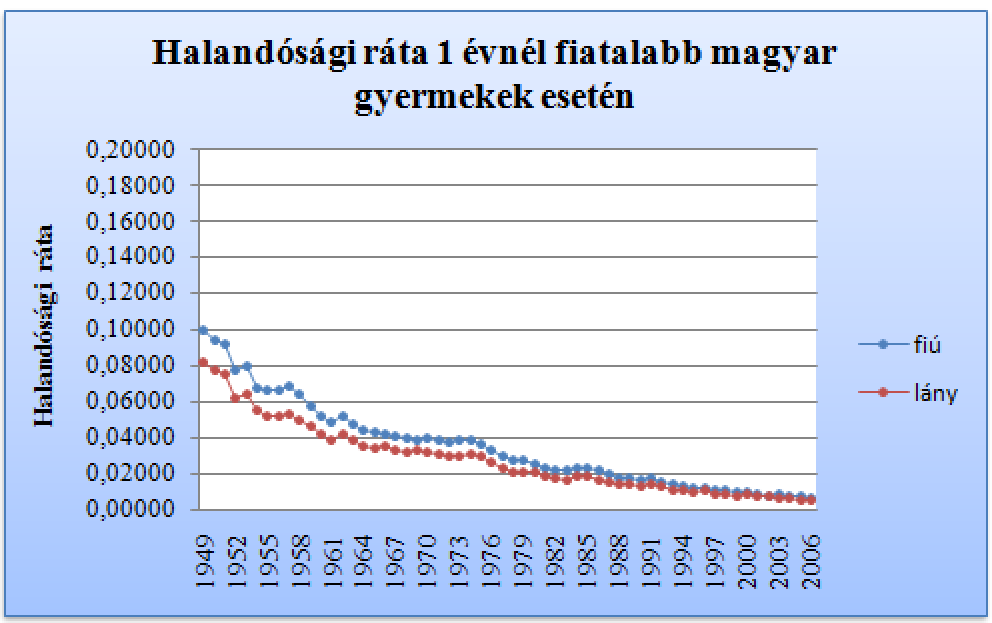

Halandósági ráta magyar férfiak esetében
1949
2006
Halandósági ráta
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
75
80
85
90
95
100


Halandósági ráta magyar nők esetében
1949
2006
Halandósági ráta
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
1
6
11
16
21
26
31
36
41
46
51
56
61
66
71
76
81
86
91
96
101



2.2.2. Csecsemőhalandóság

Az átlagos életkor emelkedéséhez nagymértékben hozzájárult, hogy az orvostudomány fejlődésével a csecsemőhalandóság jelentősen lecsökkent az utóbbi évtizedekben. A következő diagramon a magyar csecsemők halandósági adatai láthatók, megfigyelhető, hogy 2006-ra szinte 0-ra csökkent a halandósági arány 1 éves kor alatt, és ez az érték 1949-ben még 0,1 körül mozgott.

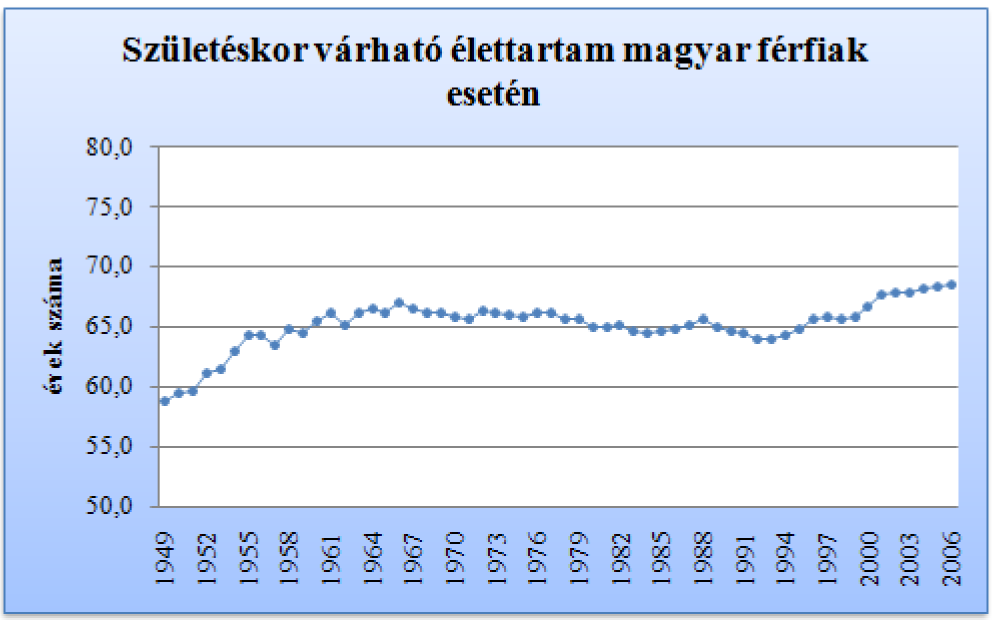


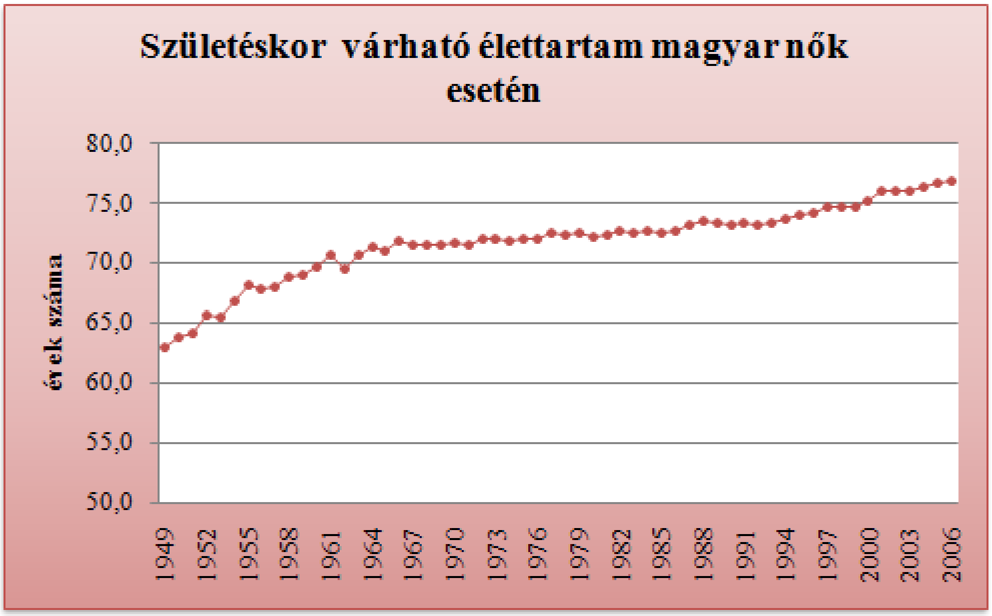
2.3. Születéskor várható élettartam meghatározása

A születéskor várható élettartam kiszámítása az alábbi képlet alapján történik:

$$E(X) \;=\; \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot P(X = i) = \sum_{i=0}^{\infty} P(X \geqq i) = \sum_{i=0}^{\infty} l_i$$

Ezt a számítást magyar halandósági adatokkal elvégezve a következő ábrákon látható eredményeket kapjuk. Férfiak és nők esetében is könnyen leolvasható, hogy a legmagasabb várható életkor a 2006-os évhez tartozik, és a 2006-os értékek jelentősen magasabbak, mint 1949-es adatokból számítottak. Férfiaknál kb. 10 év, nőknél kb. 14 év az eltérés. A férfiak esetében az élettartam növekedése nem volt monoton, a nők esetében viszont szinte folyamatos emelkedést figyelhetünk meg évről évre.





2.4. Várható hátralévő élettartam meghatározása

Járadékfizetés szempontjából nagyon fontos a várható hátralévő élettartam kiszámítása. Ennek ismeretében képes a biztosító meghatározni az egy hónapra jutó járadékot adott kezdeti befizetés mellett. A várható hátralévő élettartamot két módon is kalkulálhatjuk. Az egyik megközelítésben valóban a hátralevő évek számának várható értékét írjuk fel az alábbiak szerint:

$$
\begin{aligned}
E_x(rX) \quad = \quad & \sum_{t=0}^{\infty} t \cdot tp_x \cdot q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\infty} t \cdot tp_x \cdot (1 - p_{x+t}) = \sum_{t=0}^{\infty} t \cdot p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+t-1} - \\
& \sum_{t=0}^{\infty} t \cdot p_x \cdot \ldots \cdot p_{x+t} = \sum_{t=1}^{\infty} tp_x = p_x + p_x \cdot p_{x+1} + p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} + \ldots
\end{aligned}
$$

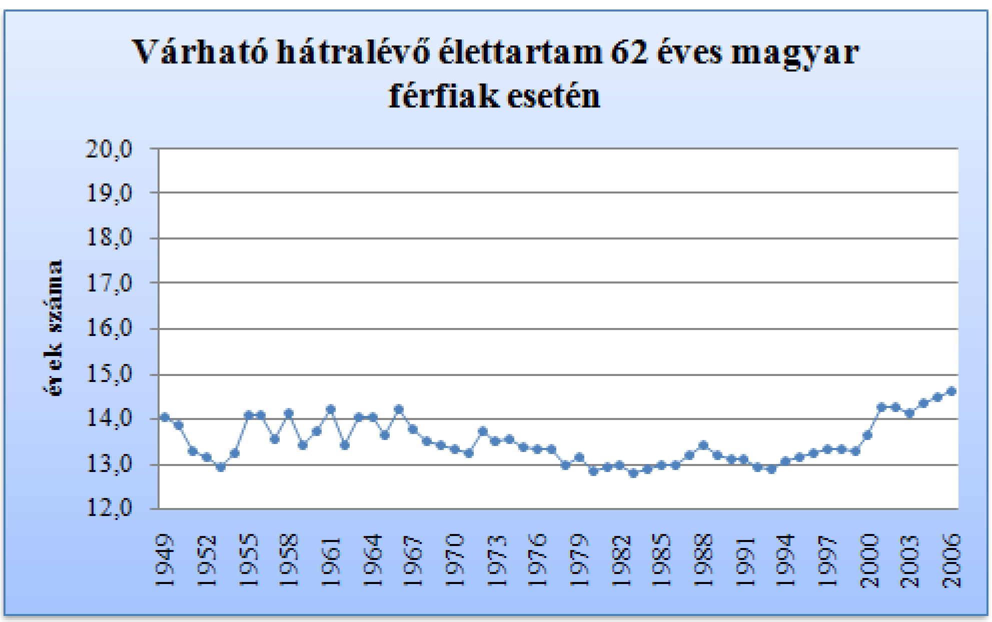
Másik megközelítésben feltételes várható életkort számolunk, majd a kapott értéket csökkentjük a feltett életkorral, és így kapjuk meg a várható hátralévő élettartamot

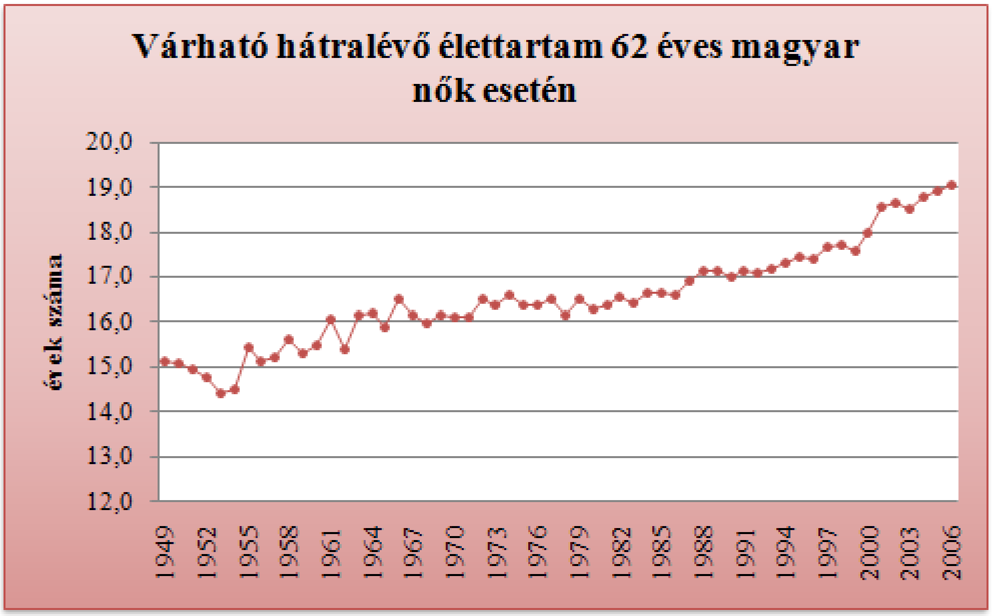
$$\begin{aligned}
E(X \big| X \geqq x) &= \sum_{i=x}^{\infty} i \cdot P(X = i) \\
&= x \cdot P(X = x) + (x+1) \cdot P(X = x+1) + (x+2) \cdot P(X = x+2) + \ldots \\
&= (x-1) \cdot [P(X = x) + P(X = x+1) + P(X = x+2) + \ldots] \\
&+ P(X = x) + \sum_{i=x+1}^{\infty} P(X \geqq i \big| X \geqq x) = (x-1) + 1 + \sum_{t=1}^{\infty} tp_x \\
&= x + \sum_{t=1}^{\infty} tp_x
\end{aligned}$$

Így a várható hátralévő élettartam a következőképpen számolható:

$$E(X \big| X \geqq x) - x = \sum_{t=1}^{\infty} tp_x$$

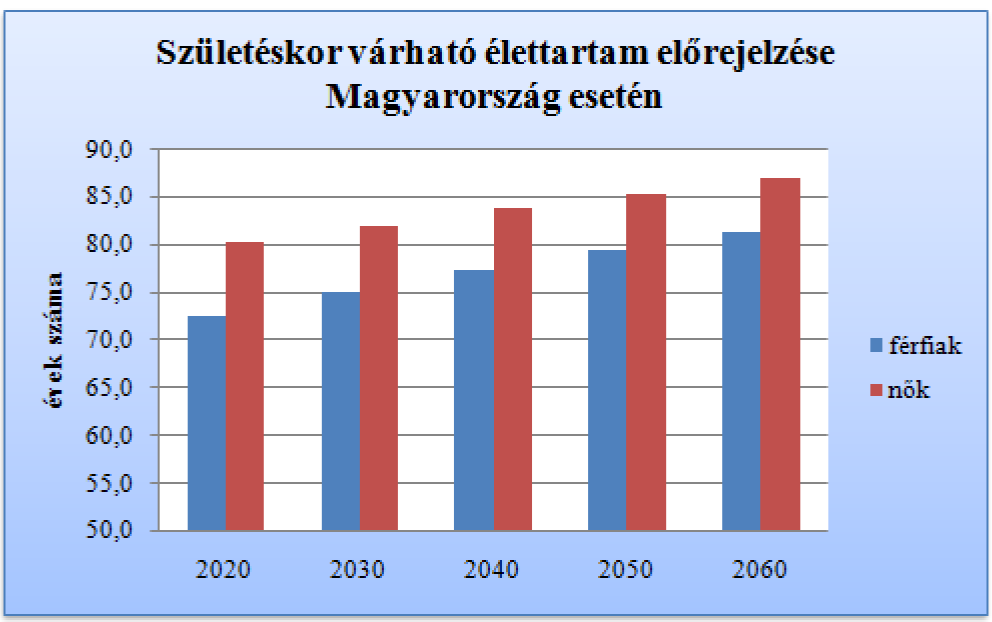
Alkalmazva az előbbieket 62 éves magyar nőkre és férfiakra, az eredmények a következők:



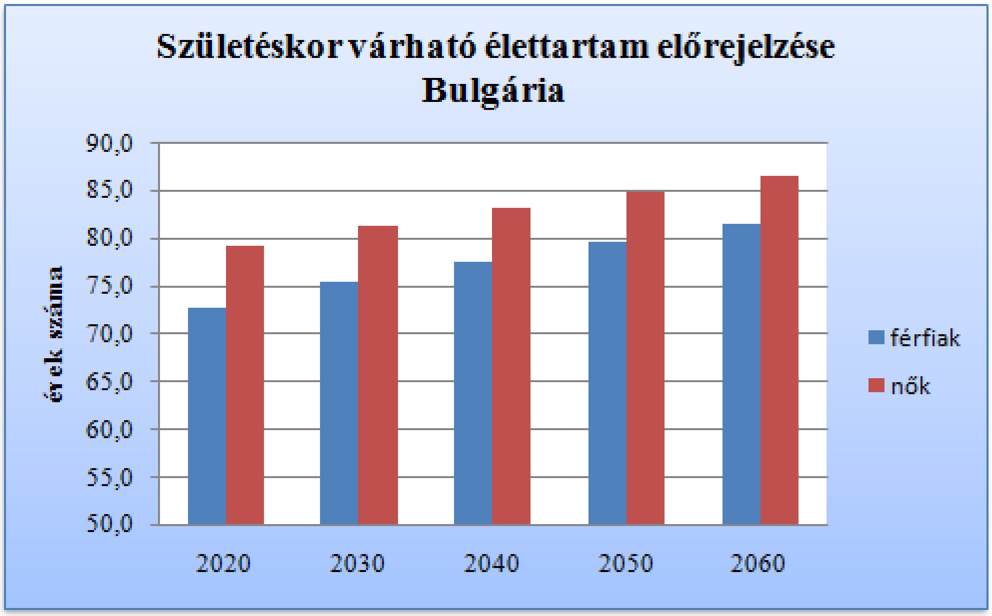


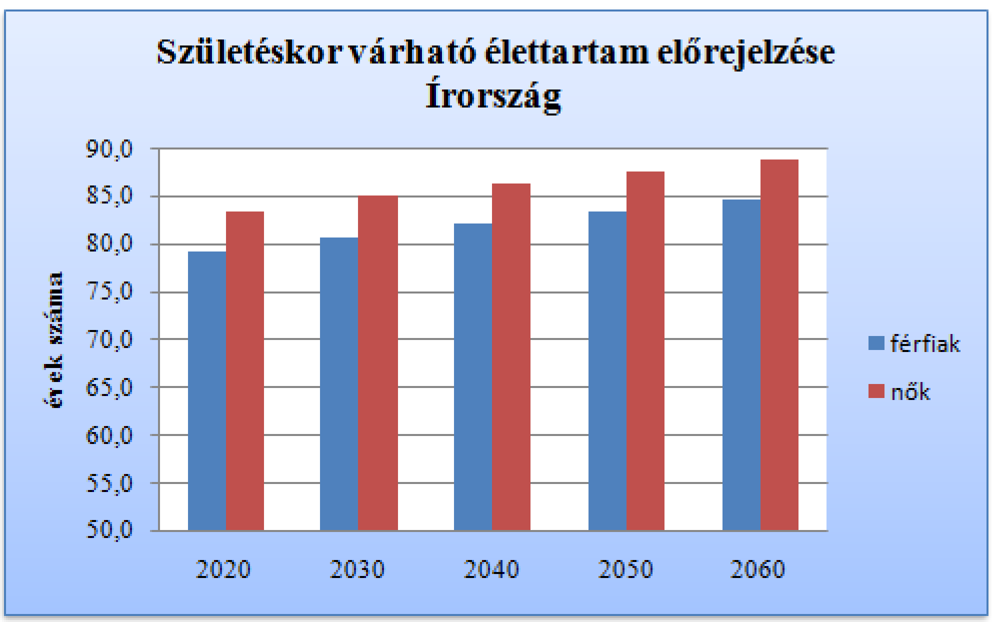
2.5. Előrejelzések

Érdekességképpen a [5] forrásból lássunk néhány előrejelzést. A magyar halandósági adatok alapján képet kaptunk a múltról, a jövőre nézve további növekedésre számítanak Magyarországon 2020-2060 időszakra vonatkozóan a szerzők.



A [5] publikáció hasonló előrejelzést tartalmaz Bulgáriára és Írországra vonatkozóan is, összehasonlításképpen tekintsük az alábbi ábrákat.





3. Halandósági kockázatok az életbiztosításban

Az életbiztosítók halandósági kockázatait 2 fő csoportba szokták sorolni, a szisztematikus, és a nem szisztematikus csoportba. A nem szisztematikus, vagy egyedi kockázat az, ami valamilyen sajátos tényezőből (terület, ügyfélkör,stb.) ered, pl.: a halandóság a biztosító társaság adott csoportjában eltér a területen megfigyelttől. Az ilyen egyedi kockázatok diverzifikálással porlaszthatók. A szisztematikus kockázatok azok, amiket a halandóság nem várt változása okoz általánosságban. Tehát ezek nem kifejezetten egy-egy biztosítóhoz, területhez vagy termékhez kapcsolódnak, hanem inkább a biztosítók által elfogadott feltételezéseket döntik meg. Az ilyen kockázatok természetükből adódóan diverzifikálással nem kivédhetők. Ilyen kockázat a túlélési kockázat is, aminek kezelésére más eszközök állnak rendelkezésére.

3.1. Túlélési kockázatok kezelése

A túlélési kockázatok kezelésére több lehetőség is ismert napjainkban, ebben a fejezetben ismertetek néhányat az alkalmazott eszközök közül.

3.1.1. Tevékenységek összehangolása

Azon biztosítók, akik egyszerre foglalkoznak kockázati életbiztosítással és járadékszolgáltatással, egyszerűbben tudják kezelni a túlélési kockázatot. A vártnál hosszabb élettartam a kockázati életbiztosítások szempontjából kedvező, viszont a járadékfizetési időszak tovább tart, és ez fordított esetben is működik, korrelációjuk negatív. Az egyes szerződéstípusokból eredő kötelezettségek mennyiségét összehangolva a biztosító bizonyos mértékben képes fedezni a túlélési kockázatát.

3.1.2. Viszontbiztosítás

A túlélési kockázat fedezése kapcsán eszünkbe juthat a viszontbiztosítás lehetősége is, de a viszontbiztosítók nem szívesen vállalnak át túlélési kockázatokat, hiszen ez egy szisztematikus kockázat, így itt a diverzifikáció nem hatásos. Valószínűleg drága is lenne ez a megoldás, ráadásul a hosszútávú viszontbiztosításokat a biztosító társaságok sem kedvelik, mert nagyobb a nemteljesítés kockázata.

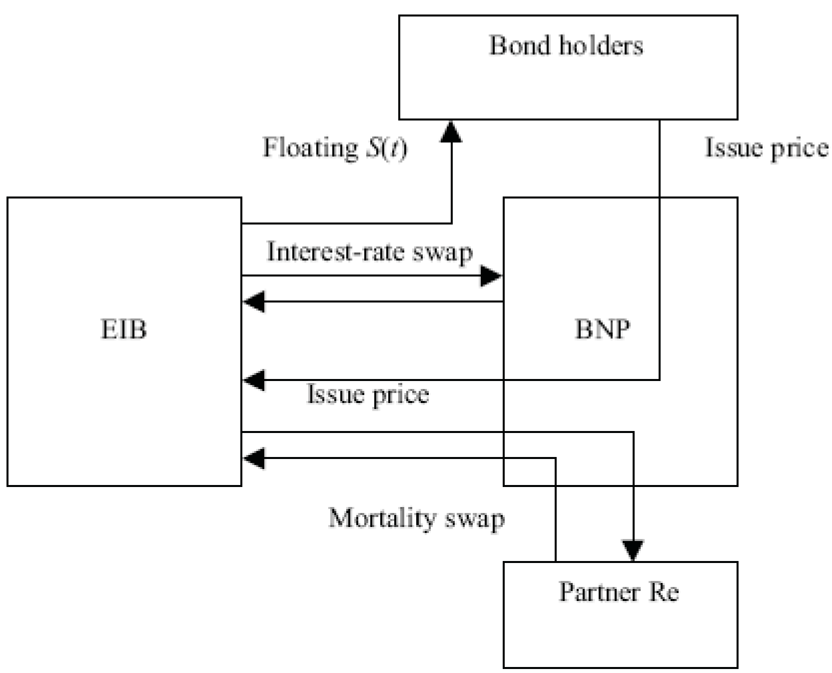
3.1.3. Longevity bond (EIB/BNP)

A longevity bondok részletes tárgyalása a 4. fejezetben olvasható, ehelyett most a bevezetésben említett, az EIB/BNP 2004-ben bejelentett longevity bondját ismertetem.

Az EIB/BNP longevity bondot 25 éves futamidőre tervezték. A kibocsátás értéke: 540 millió GBP. Célja az volt, hogy a járadékszolgáltatóknak védelmet nyújtson a 65-90 évesek túlélési indexének nem várt emelkedéséből származó kockázatok ellen. A kötvény éves kuponfizetést ígért a biztosítóknak, minden kuponfizetés az induláskor 65 éves angol és walesi populáció százalékos túlélésétől függően került megállapításra.
A kupon induló összege 50millió GBP.

Túlélési index S_t:
$S_0 = 1$
$S_1 = S_0 \cdot (1 - q_{65}(2003))$
$S_t = S_0 \cdot (1 - q_{65}(2003)) \cdot (1 - q_{66}(2004)) \cdot \ldots \cdot (1 - q_{64+t}(2002 + t))$
Éves kuponfizetés: 50 millió GBP * S_t, ahol S_t a túlélési index $t = 1, 2..., 25$ évekre.

Tehát a biztosítók vesznek a kötvényből a BNP-n keresztül, az EIB megkapja a kötvények ellenértékét. Az EIB ezért évente S_t kupont fizet a biztosítóknak. EIB változó kuponfizetésének biztosítására a BNP-vel köt kamatswap megállapodást.
A Partner Re pedig a viszontbiztosító az ügyletben, rendszeres díj ellenében, halandóság függvényében kap kupont az EIB tőle.
Az EIB/BNP longevity bond kibocsátása meghiúsult, ennek elsődleges oka az volt, hogy a biztosítók, magánnyugdíjpénztárak drágának találták ezt a fajta védelmet. A következő ábra mutatja az EIB/BNP longevity bond pénzáramlását, az ábra [4] forrásból származik:



4. Longevity bond

A longevity bond, amit magyarra élettartamkötvényként lehetne fordítani, tulajdonképpen nem más, mint a korábban vázolt, élettartam-növekedésből eredő kockázat fedezését szolgáló speciális értékpapír. Egy olyan kötvény, amelynek éves kuponfizetését halandósági adatok befolyásolják. Három szereplője van a longevity bonddal kapcsolatos üzleti helyzetnek. Az első szereplő a biztosító, aki szeretné kockázatait megosztani a befektetőkkel, ebből a célból kezdeményezi longevity bond szerződés kötését a második szereplővel, mondhatjuk a forgalmazóval. Adózási, illetve tartalékképzési megfontolásból a biztosítók egy ilyen kötvény kibocsátásával, forgalmazásával, a kapcsolódó pénzmozgás lebonyolításával egy másik céget bíznak meg. Az erre felkért vállalkozás lehet a biztosító által kifejezetten ebből a célból létrehozott társaság, vagy hasonló igények kiszolgálására specializálódott egyéb érdekeltségű cég is. Mivel Special purpose company néven találkozhatunk velük a külföldi szakirodalomban, ezért a továbbiakban az ebből származó SPC rövidítést alkalmazom. Az SPC célja, hogy a biztosítótól kapott díj, és a kötvényjegyzésből keletkezett tőke ellenében a fent említett teendőket a szerződésben foglaltak szerint teljesítse. A harmadik szereplő a befektető, aki vásárol a kötvényből, részesedik a biztosító kockázatból, viszont ennek fejében nagyobb hozamra számít. Most nézzük meg konkrétabban egy ilyen longevity bondnak a feltételeit, és a hozzátartozó pénzmozgást Lin és Cox [9] munkája alapján.

Tegyük fel, hogy adott egy biztosító, akinek l_x számú biztosítottja van, és mindegyikre évente 1000 egységnyi járadék jut átlagosan. Korábbi jelöléseink alapján t év múlva l_{x+t} életben maradó ügyfél lesz a kezdeti portfólióból. A kötvény futamideje T év, minden évre vonatkozóan rögzítésre kerülnek túlélési szintek, jelöljük ezeket X_t-vel $t = 1, 2, 3, ..., T$ évekre. X_t és l_{x+t} viszonya határozza meg, hogy az SPC mekkora összeget fizet a biztosítónak, és a befektetőknek. Az SPC éves kifizetését 1000C-ben rögzítik. A biztosító a futamidő kezdetén P összeget fizet az SPC-nek az ügylet lebonyolításáért, a befektetők pedig a jegyzés során V értékben vásárolnak a kötvényből. Az SPC pedig minden évben a biztosítónak B_t, a befektetőknek pedig D_t összeget fizet, a futamidő végén pedig a befektetőknek kötvényenként visszajár a névérték. A szerződés alapján az SPC által fizetendő összegek a következők:

B_t azon összeg, amit a biztosító kap az SPC-től t évben

$$B_t = \begin{cases} 1000 \cdot C & ha \;\; l_{x+t} > X_t + C \\ 1000 \cdot (l_{x+t} - X_t) & ha \;\; X_t < l_{x+t} \leqq X_t + C \\ 0 & ha \;\; l_{x+t} \leqq X_t \end{cases}$$

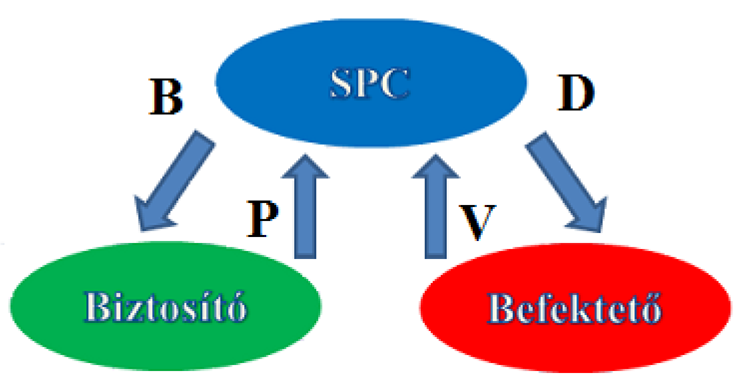
A biztosító nettó cash flowja a longevity bondnak köszönhetően minden évben a következő módon alakul

$$1000 \cdot l_{x+t} - B_t = \begin{cases} 1000 \cdot (l_{x+t} - C) & ha \;\; l_{x+t} > X_t + C \\ 1000 \cdot X_t & ha \;\; X_t < l_{x+t} \leqq X_t + C \\ 1000 \cdot l_{x+t} & ha \;\; l_{x+t} \leqq X_t \end{cases}$$

D_t éves kuponfizetés a befektetőknek

$$D_t = \begin{cases} 0 & ha \;\; l_{x+t} > X_t + C \\ 1000 \cdot C - B_t = 1000 \cdot (C + X_t - l_{x+t}) & ha \;\; X_t < l_{x+t} \leqq X_t + C \\ 1000 \cdot C & ha \;\; l_{x+t} \leqq X_t \end{cases}$$

Az SPC éves kifizetése $B_t + D_t = 1000C$. Világos, hogy $1000C$ a maximum, amit a biztosító évente kaphat az SPC-től, és a befektetők számára elérhető legmagasabb kupon is $1000C$.
A longevity bondhoz kapcsolódó pénzáramlás így ábrázolható, az ábrát Lin és Cox [9] nyomán készítettem:



Láttuk, hogy az SPC-nek minden évben $1000C$-t kell kifizetnie, illetve az össznévértéket, $1000F$-et a futamidő végén. Kötelezettségeit SPC úgy tudja megoldani, hogy vesz egy kockázatmentes $1000F$ névértékű kötvényt éves $1000C$ kuponnal, T futamidővel, ezzel a szükséges tőke mindig időben rendelkezésre áll. Természetesen mindezt akkor érdemes az SPC-nek megtennie, ha a biztosítótól kapott díj, és a jegyzésből szerzett bevétel legalább annyi, mint az előbb említett kockázatmentes kötvény ára.

Vagyis: $P + V \geqq W = 1000F \cdot d(0,T) + \sum_{k=1}^{T} 1000C \cdot d(0,k)$

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy esetünkben $P + V = W$.

Megjegyzés: a kockázat fedezését swap ügylettel is meg lehet valósítani hasonló módon, itt a futamidő végén nincs tőkefizetés. Két fontos különbség van a kötvényes megoldáshoz képest. Az egyik az, hogy a biztosító az SPC-nek fizetendő P díjat $t = 0$ időpont helyett évente egyenlő x részletekben fizeti meg, természetesen úgy, hogy azok jelenértéke P a futamidő kezdetén:$P = x \cdot \sum_{k=1}^{T} d(0,k)$. A másik eltérés az, hogy a befektetőknek nem kell a futamidő elején a tőkét rendelkezésre bocsátani, ugyanazon kupont kaphatják minden évben, ha évente egyenlő y részleteket fizetnek, ahol $y \cdot \sum_{k=1}^{T} \cdot d(0,k) = \sum_{k=1}^{T} E[D_t] \cdot d(0,k)$. A tőkefizetés elkerülése tranzakciós költségek csökkenését eredményezi, ez viszont kockázatosabb változat, hiszen itt nem kapja meg az SPC előre a szükséges fedezetet a kötelezettségeire.

5. Arbitrázsmentes árazás

A longevity bond árazását úgy kellene megvalósítani, hogy arbitrázsmentes legyen, vagyis ne nyíljon lehetőség kockázatmentesen hozamra szert tenni a longevity bond kapcsán. A biztosítási kockázatok terén elfogadott nézet, hogy a nem szisztematikus kockázatok nem kapnak szerepet az árképzésben. Ennek elsődleges oka az, hogy az ilyen kockázatok diverzifikálhatók, és éppen ebből következik az is, hogy a nagyobb ügyfélkörrel rendelkező biztosítótársaságok alacsonyabban tudnák árazni a nem szisztematikus kockázatokat, ezáltal kiszorítva a kisebb társaságokat. Ebből következik, hogy a nem szisztematikus halandóságot sem árazzák. Más a helyzet a szisztematikus halandósági kockázatokkal, ez nem diverzifikálható, így szükséges árazni. Értelemszerű, hogy a halandóság ára, éppen a szisztematikus halandósági kockázat árával egyezik meg.

Cairns, Blake és Dowd [2] munkájában definiálta a longevity bondok építőkövének is nevezett (T, x)-kötvényt. Az ilyen kötvény nem fizet kupont, a futamidő végén, vagyis T. évben $S(T, x)$ összeget fizet, ahol $S(T, x) = Tp_x$, vagyis azoknak a túlélési aránya, akik $t = 0$-ban x évesek voltak, és T-ben még mindig életben maradtak. Ezzel az egyszerű longevity bonddal lássunk egy példát Daniel Bauer és Jochen Ruß [3] munkája alapján. Tegyük fel, hogy egy biztosító a termékek árazásában az alábbi kockázatadjusztált továbbéléssel számol:$tp_x^{\sim bizt}$. K x éves ügyfélnek 1 éves futamidővel elérési biztosítást ad el, ahol a biztosítási összeg 1.

A biztosító várható kifizetésének jelenértéke: $K \cdot P(0,1) \cdot 1p_x^{\sim bizt}$

A kockázatok fedezése céljából egy befektetőtől vásárol K db (1,x)-kötvényt, aminek lényege, hogy 1 év múlva $1 \cdot p_x$összeget fizet neki a tényleges halandóság alapján. Tegyük fel, hogy az (1,x)-kötvény árazásakor a befektető $1p_x^{\sim bef}$ halandósággal kalkulált, így a biztosító által fizetett összeg:$K \cdot P(0,1) \cdot 1p_x^{\sim bef}$.

1.eset $1p_x^{\sim bizt} > 1p_x^{\sim bef}$, ekkor a biztosító az alábbi kockázatmentes hozamra tesz szert:$K \cdot P(0,T)(1p_x^{\sim bizt} - 1p_x^{\sim bef})$

2.eset $1p_x^{\sim bizt} < 1p_x^{\sim bef}$, ekkor a befektető megveheti az ügyfelek elérési biztosításait egy magasabb áron, pl.: $K \cdot P(0,1) \cdot \frac{1p_x^{\sim bizt} + 1p_x^{\sim bef}}{2}$-ért, a biztosítók felé pedig értékesít K db (1,x)-kötvényt $K \cdot P(0,1) \cdot 1p_x^{\sim bef}$ összegért, így a befektető a következő kockázatmentes hozamra tesz szert:$K \cdot P(0,T)(\frac{1p_x^{\sim bef} - 1p_x^{\sim bizt}}{2})$

Következésképpen ahhoz, hogy a piac arbitrázsmentes legyen $1p_x^{\sim bizt} = 1p_x^{\sim bef}$.

Mivel a túlélési valószínűségek fontos szerepet töltenek be a 4. fejezetben bemutatott longevity bond konstrukcióban is, ezért arbitrázsmentes árazáshoz elengedhetetlen, hogy piaci árat találjunk a halandósági kockázatra.

6. A halandósági kockázat piaci ára

Ahhoz, hogy egy longevity bondot árazni tudjunk valamilyen módon áraznunk kell a halandósági kockázatot. Lin és Cox [9] ötlete az volt, hogy a piacon megfigyelt járadékárazásból következtessük ki a halandóság piaci árát. A Wang transzformáció segítségével felírhatjuk a járadék igazságos árát, amiben paraméterként szerepel a kockázat ára is, így a piaci ár ismeretében meg tudjuk becsülni λ-t, vagyis a halandóság piac árát.

6.1. Wang transzformált

A halandósági kockázat piaci árának kiszámításához Wang 2002-ben [7] közölt eredményeit hívom segítségül. Wang a pénzügyi és biztosítási kockázatok árazására javasolt általános módszert. Adott egy kummulatív eloszlásfüggvénnyel ($F(x)$) rendelkező eszköz a [0,T] időintervallumon, ennek árazása az alábbi transzformált (Wang transzformált néven ismert) segítségével kalkulálható:

$$F^*(x) \;\; = \;\; \phi[\phi^{-1}(F(x)) - \lambda],$$

ahol ϕ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét, λ pedig a kockázat piaci árát jelöli. $F^*(x)$ egy kockázattal adjusztált eloszlásfüggvénye lesz a vizsgált eszköznek, az ezzel számolt $E^*(X)$ pedig egy igazságos, kockázattal korrigált értéket ad T időpontra, ahonnan könnyen visszadiszkontálható a 0 időpillanatra. A transzformációt elvégeztem a 2006-os magyar adatokon, a piacról szerzett információkból becsült λ-val, amiről részletesebben a 8. fejezetben írok.

6.2. Wang transzformált alkalmazása a járadékszolgáltatásban

Legyen a_x egy évente K összeget fizető annuitás értéke, ahol x jelöli a biztosított életkorát. Lin és Cox [9] ötlete szerint a piacon megfigyelt árazás alapján becsülöm meg a halandóság piaci árát. Az előző fejezetben levezetett, Wang[7] által kifejlesztett módszer szerint a járadékhoz igazságos értéket az alábbi várható érték kiszámításával kapjuk:

$$E^*(X) \;=\; \int_0^\infty x dF^*(x)$$

Tekintve, hogy diszkrét időben dolgozunk, az éves K összegű járadékot fizető annuitás ára a következő képlettel kalkulálható:

$$a_x \;=\; K \cdot \sum_{t=1}^{\infty} tp_x \cdot P(0,t)$$

Wang transzformálttal tp_x helyett $tp_x^{\sim adj} = 1 - \phi[\phi^{-1}(tq_x) - \lambda]$ formulát helyettesítve a képletbe, megkapjuk az annuitás igazságos piaci árát:

$$a_x(\lambda) \;=\; K \cdot \sum_{t=1}^{\infty} tp_x^{\sim adj} \cdot P(0,t) = K \cdot \sum_{t=1}^{\infty} (1 - \phi[\phi^{-1}(tq_x) - \lambda]) \cdot P(0,t)$$

Az $a_x(\lambda)$ számítógéppel könnyen számítható λ ismeretében, most viszont éppen $a_x(\lambda)$ áll rendelkezésünkre, ezt figyeltük meg a piacon, és ebből pl.: célértékkereséssel megbecsülhetjük λ-t.

7. Longevity bond árazása

A piacon megfigyelt árból megbecsülhető a halandóság piaci ára, ennek segítségével kiszámítható a Wang transzformált. A módosított eloszlásfüggvény szerint árazom a kötvényt Lin és Cox [9] módszere szerint.

Kötvény piaci ára: $\frac{P_T}{(1+r)^T} + \sum_{t=1}^{T} \frac{C}{(1+r)^t}$ $t = 1, 2..., T$, ahol P_T a T futamidő végén fizetendő tőke, C az évente fizetendő kupon, r pedig a kamat

Ezt alkalmazom a longevity bond árának kiszámításánál is, azzal a különbséggel, hogy a kuponfizetés itt előre nem ismert, a tényleges érték helyett a várható kuponfizetést helyettesítem a képletbe a 4. fejezet jelölései alapján:

$$V = 1000F \cdot d(0,T) + \sum_{t=1}^{T} E^*[D_t] \cdot d(0,t)$$

A tőke jelenértéke könnyen számítható, az $E^*[D_t]$ érték kiszámítása a tényleges feladat. Emlékeztetőül D_t, vagyis a befektetőknek évente fizetendő kupon meghatározás a következő képlet alapján történik:

$$D_t = \begin{cases} 0 & ha \;\; l_{x+t} > X_t + C \\ 1000 \cdot (C + X_t - l_{x+t}) & ha \;\; X_t < l_{x+t} \leqq X_t + C \\ 1000 \cdot C & ha \;\; l_{x+t} \leqq X_t \end{cases}$$

$$\frac{1}{1000} D_t = C - max(l_{x+t} - X_t, 0) + max(l_{x+t} - X_t - C, 0)$$
$$\frac{1}{1000} D_t = C - (l_{x+t} - X_t)_+ + (l_{x+t} - X_t - C)_+$$

Így $\frac{1}{1000} E^*[D_t] = C - E^*(l_{x+t} - X_t)_+ + E^*(l_{x+t} - X_t - C)_+$
A kupon mértéke az életben maradó biztosítottak számától függ. Az életben maradók

számának eloszlása binomiális eloszlású l_x és tp_x^* paraméterekkel. Elég nagy l_x-re közelíthető normális eloszlással, melynek várható értéke $m_t = l_x \cdot tp_x$, szórásnégyzete pedig $\sigma^2 = l_x \cdot tp_x^* \cdot (1 - tp_x^*)$ lesz.

Következő kérdés, hogy miként számolható $E^*(l_{x+t} - X_t)_+$?
Standard normális X valószínűségi változó esetében:

$$E(X-k)_+ \quad = \quad \int_k^\infty [1-\Phi(t)]dt$$

Jelölje $\phi(t)$ a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényét , vagyis $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$.
$\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \phi(u)du$, alkalmazom a parciális integrálást $\phi^{'}(t) = -t \cdot \phi(t)$ összefüggést felhasználva, így

$$E(X-k)_+ \quad = \quad \int_k^\infty [1-\Phi(t)]dt = \phi(k) - k \cdot [1-\Phi(k)]$$

Jelölje ezt a formulát $\Psi(k)$!
Ahhoz, hogy ezt tudjam alkalmazni l_{x+t}-t normalizálni szükséges, így

$$\begin{aligned} E^*(l_{x+t} - X_t)_+ &= E^*(l_{x+t} - m_t - (X_t - m_t))_+ \\ &= \sigma_t E^*(\frac{l_{x+t} - m_t}{\sigma_t} - \frac{X_t - m_t}{\sigma_t})_+ \\ E^*(l_{x+t} - X_t)_+ &= \sigma_t \cdot \Psi(k_t) \end{aligned}$$

A rövidítés kedvéért legyen $k_t = \frac{X_t - m_t}{\sigma_t}$!

$$\begin{aligned} E^*(l_{x+t} - X_t - C)_+ &= E^*(l_{x+t} - m_t - (X_t - m_t) - C)_+ \\ &= \sigma_t E^*(\frac{l_{x+t} - m_t}{\sigma_t} - (\frac{X_t - m_t}{\sigma_t} + \frac{C}{\sigma_t}))_+ \\ E^*(l_{x+t} - X_t - C)_+ &= \sigma_t \cdot \Psi(k_t + \frac{C}{\sigma_t}) \end{aligned}$$

Ebből $E^*[D_t] = 1000 \cdot [C - \sigma_t \Psi(k_t) + \sigma_t \cdot \Psi(k_t + \frac{C}{\sigma_t})]$ amiből már könnyedén eljutunk a longevity bond árához:

$$\begin{aligned} V &= 1000F \cdot d(0,T) + \sum_{t=1}^{T} E^*[D_t] \cdot d(0,t) \\ &= 1000F \cdot d(0,T) + \sum_{t=1}^{T} 1000 \cdot [C - \sigma_t \Psi(k_t) + \sigma_t \cdot \Psi(k_t + \frac{C}{\sigma_t})] \end{aligned}$$

8. Alkalmazás magyar halandósági adatokon

Az elméleti rész gyakorlati megvalósítása következik ebben a fejezetben, a számításokat 62 éves biztosítottakra végzem el.

8.1. Halandóság piaci ára Magyarországon

A piacon megfigyelt árazás:

62 éves életkorban	férfi	nő
befizetendő összeg	212290,-Ft	231747,-Ft
járadék/év	12000Ft	12000Ft

Használva a 6. fejezetben leírtakat a következő egyenleteket kell megoldani. A λ értékeket célértékkereséssel kaptam, 2%-os technikai kamattal.
Férfiak esetében:

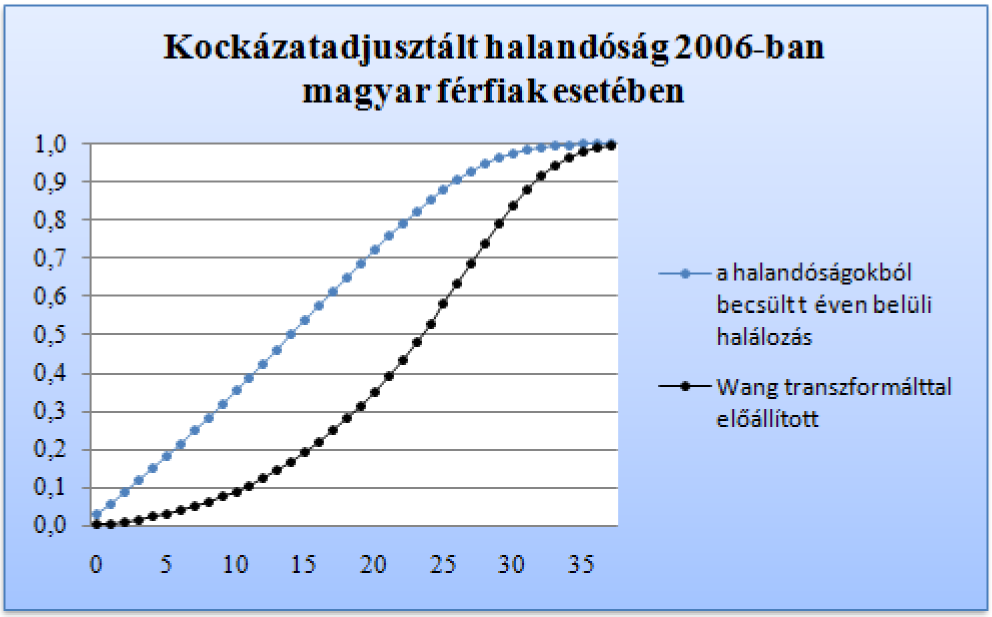
$$\frac{12000}{212290} = \sum_{t=1}^{\infty} (1 - \phi[\phi^{-1}(tq_x) - \lambda]) \cdot P(0,t)$$

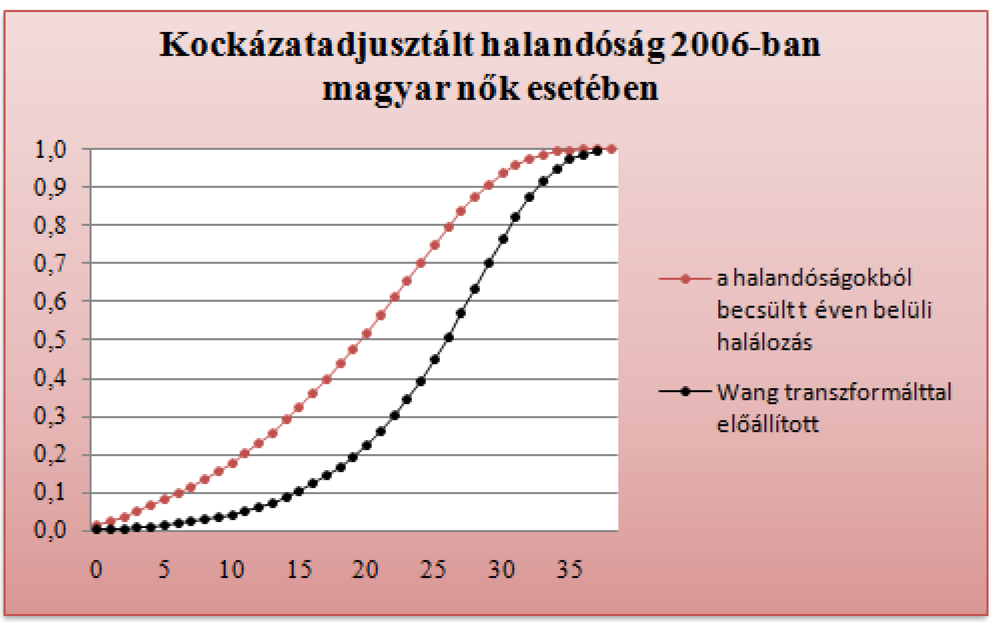
Nők esetében:

$$\frac{12000}{231747} = \sum_{t=1}^{\infty} (1 - \phi[\phi^{-1}(tq_x) - \lambda]) \cdot P(0,t)$$

Halandóság piaci ára	férfi	nő	technikai kamat
λ	0.972115395	0.804567636	2%

Most, hogy a λ rendelkezésre áll elkészíthető a Wang transzformált mindkét nemre 62 éves korra. Az alábbi grafikonok mutatják, hogy a Wang transzformációval készített kockázatadjusztált $tq_x^{\sim adj}$ értékekek hogyan viszonyulnak a halandósági adatokból következtetett tq_xértékekhez képest.
Jól látható, hogy a torzított halandóság sokkal alacsonyabb mindkét esetben:





8.2. Magyar longevity bond árazása

Most a 7. fejezetben ismertetett számítást végzem el Lin és Cox [9] által megjelölt paraméterekkel, hogy az árazás könnyen összevethető legyen az amerikai példával.
Az annuitásban részesülő ügyfelek száma a kötvény indulásakor (l_x):10.000
Átlagosan évente biztosítottanként fizetendő járadék: 1.000
Diszkontfaktor a legfrissebb államkötvényekre vonatkozó hozamgörbe[10] szerint jelenleg: 7,05%
Futamidő: 34 év
Az X_t szinteket minden évre meghatároztam. Az X_t kiszámításához a múltbéli adatokon vettem a halandóság fejlődését 34 év alatt.
Három korcsoportot jelöltem ki, az egyes csoportokban megfigyelt átlagos fejlődést használtam, ezek a következők:

Halandóság fejlődése	férfi	nő
62-74 éves	-0.006	-0.014
75-85 éves	-0.014	-0.018
86-95 éves	-0.009	-0.03

Ezeket a halandósági fejlődéseket alkalmazva évről évre megállapítottam az X_t szinteket a [9] cikk nyomán.

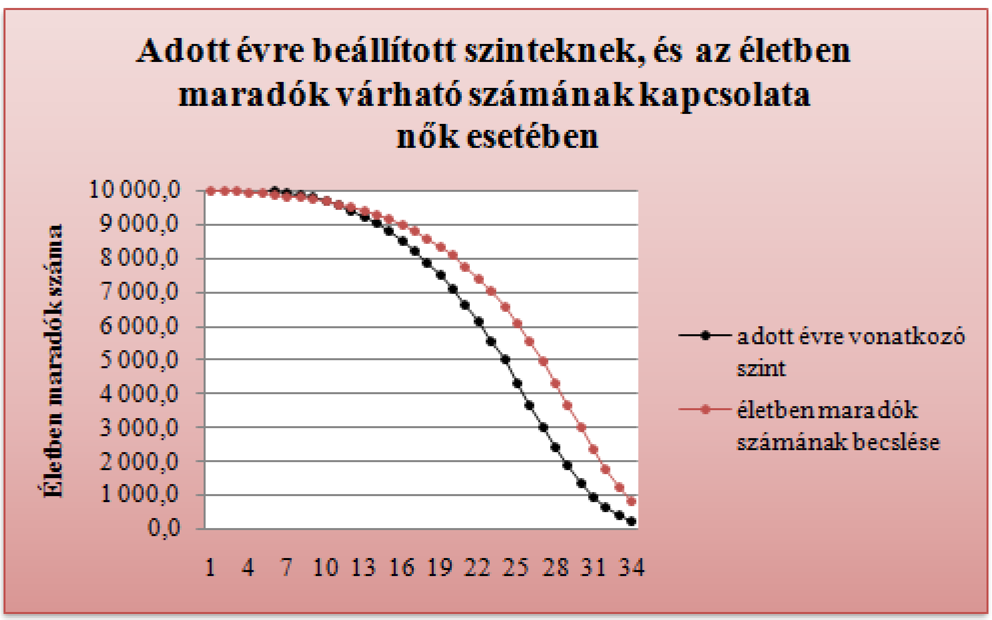
Férfiakra:

$$X_t = \begin{cases} l_x \cdot tp_x \cdot e^{0.006t} & t = 1, \ldots, 13 \\ l_x \cdot tp_x \cdot e^{0.006 \cdot 13} \cdot e^{0.014 \cdot (t-13)} & t = 14, \ldots, 24 \\ l_x \cdot tp_x \cdot e^{0.006 \cdot 13} \cdot e^{0.014 \cdot 11} \cdot e^{0.009 \cdot (t-24)} & t = 25, \ldots, 35 \end{cases}$$

Nőkre:

$$X_t = \begin{cases} l_x \cdot tp_x \cdot e^{0.014t} & t = 1, \ldots, 13 \\ l_x \cdot tp_x \cdot e^{0.014 \cdot 13} \cdot e^{0.018 \cdot (t-13)} & t = 14, \ldots, 24 \\ l_x \cdot tp_x \cdot e^{0.014 \cdot 13} \cdot e^{0.018 \cdot 11} \cdot e^{0.03 \cdot (t-24)} & t = 25, \ldots, 35 \end{cases}$$

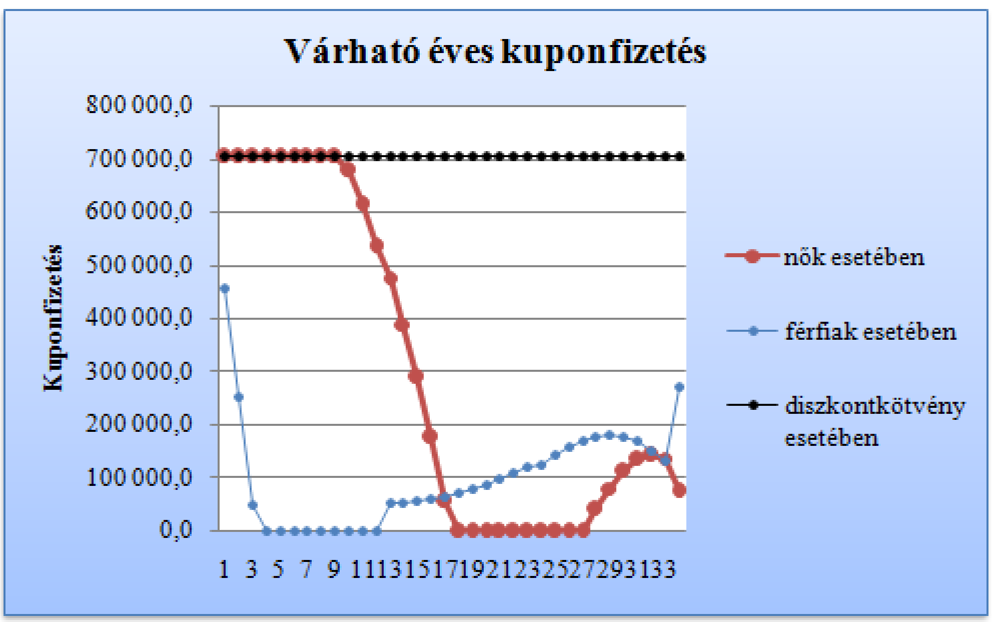
A kapott szinteket érdemes grafikonon ábrázolni, hogy könnyen látható legyen miként viszonyulnak egymáshoz.



Most, már minden adott ahhoz, hogy a longevity bondot beárazzam, a számításokra kapott eredményt a következő táblázat foglalja össze:

Longevity bond árazása	férfi	nő
λ	0.972115395	0.804567636
diszkontfaktor	0.0705	0.0705
Diszkont kötvény ára	10.000.000	10.000.000
Diszkont kötvény kupon	705000	705000
Futamidő végén fizetett tőke	10.000.000	10.000.000
Longevity bond ára	**2.165.230**	**7.049.344**
Longevity bond kupon maximuma	705000	705000
Futamidő végén fizetett tőke	10.000.000	10.000.000
Zérókupon ára	986.400	986.400

Látható, hogy a nők esetében sokkal drágább a kötvény, ennek az az oka, hogy ebben az esetben az X_t szintek a kezdeti években alacsonyabbak, mint az életbenmaradók várható száma. Tehát nők esetén a kuponfizetés várható értéke sokkal magasabb. Szemléltetésképpen készítettem egy grafikont, amin a diszkontkötvény, és a mindkét nemre elkészített longevity bond kuponfizetésének várható értékét lehet megvizsgálni:



9. Érzékenységvizsgálat

9.1. Halandóság piaci árának érzékenysége a technikai kamatra, és a halandóságra

8..1 fejezet eredményeit 2% technikai kamat mellett, és a 2006-os halandósági adatokból számolt $tp^{\sim adj}$ értékeiből kaptuk. Felmerül a kérdés, hogy miként reagál a λ a halandóságban, vagy a technikai kamatban bekövetkező változásokra.
Először a halandóságot változtatjuk $\pm 5\%$-kal:

λ változása a halandóság függvényében	nő	férfi
Halandóság csökken 5%-kal	0.749697807	0.912982319
Halandóság nem változik	0.804567636	0.972115395
Halandóság nő 5%-kal	0.857818553	1.029524996

Most pedig lássuk, hogy a különböző technikai kamatok miként mozgatják a halandóság piaci árát:

λ változása a technikai kamat függvényében	nő	férfi
technikai kamat 0%	0.033213807	0.362239177
technikai kamat 1%	0.35504323	0.627776472
technikai kamat 2%	0.804567636	0.972115455
technikai kamat 2,25%	0.952017862	1.077557205
technikai kamat 3%	1.563378793	1.472494542
technikai kamat 4%	4.585188567	2.418764083

9.2. Longevity bond árának érzékenysége

Ebben a részben azt vizsgálom meg, hogy a longevity bond ára milyen érzékeny a diszkontfaktornak, a halandóságnak, és a halandóság piaci árának változására.
A 7,05%-os kamatból indulva változtatom a kamatot, az ebből eredő eltéréseket a következő táblázat foglalja össze:
A longevity bondra LB rövidítést alkalmazok

LB árának változása a kamat függvényében	nő	férfi
-300bps	6.541.556	3.669.429
-200bps	6.592.520	2.903.167
-100bps	6.781.108	2.431.549
7.05%	**7.049.344**	**2.165.230**
+100bps	7.345.370	2.062.498
+200bps	7.647.663	2.071.299
+300bps	7.940.897	2.172.160

A torzított eloszlásfüggvényben nagyon fontos szerepe van λ -nak, így azt feltétlenül érdemes megvizsgálni, hogyan hat a megváltozása a kötvényünk árára:

LB árának változása λ függvényében	nő	férfi
λ 10%-kal nő	6.759.062	2.262.338
λ nem változik	**7.049.344**	**2.165.230**
λ 10%-kal csökken	7.417.071	2.254.752

Most pedig lássuk, hogy a halandóság ±10%-os változása mit okoz:

LB árának változása a halandóság függvényében	nő	férfi
Halandóság 10%-kal nő	6.191.628	2.158.656
Halandóság változatlan	**7.049.344**	**2.165.230**
Halandóság 10%-kal csökken	8.019.272	2.201.779

10. Konklúzió

A magyar longevity bond árazásával kapcsolatban arra a megállapításra jutottam, hogy Lin és Cox [9] amerikai adatokon történt számításához képest nagy az eltérés a longevity bond árában, főként a férfiak esetében. Az egyik ok az, hogy a magyar adatokból becsült λ értéke is sokszorosa a [9] cikkben szereplőnek, ami miatt a torzított eloszlásfüggvény nagyobb mértékben tér el a ténylegestől. Ez egyrészt amiatt lehet, mert Magyarországon nincs akkora verseny, és nem olyan népszerűek a járadékbiztosítások az ügyfelek körében. Az annuitások ára is nehezen hozzáférhető, az interneten nem találtam ilyen célú kalkulátorokat, így az ügyfeleknek nehezebb a különböző biztosítók termékeit összehasonlítani. Ebből az következik, hogy a biztosítók magasabb árakat is megengedhetnek. Amerikában valószínűleg sokkal nagyobb a verseny, több biztosító foglalkozik ilyen szolgáltatással, és az ügyfélkör is szélesebb, ami alacsonyabb árakhoz vezet. A Wang transzformációval torzított továbbélés sok évben annyira magas, hogy az éves kupon várható értéke csak töredéke a diszkontkötvény kuponjának, és többször előfordul 0 várható kuponfizetés is. Számításaim alapján a kötvények ára nők és férfiak esetében nagy eltérést mutat. Láthattuk, hogy a nőkre számított λ alacsonyabb lett, így tq_x^* közelebb van tq_x-hez, mint a férfiak esetében. A kevésbé szigorú torzítás eredményezi azt, hogy a kuponfizetés várhatóan magasabb lesz ebben az esetben. A befektetők szempontjából nézve, ez a kötvény magyar környezetben nem kifejezetten attraktív. A kuponkötvényekhez képest jóval kisebb kuponra számíthatnak, és ráadásul kockázatosabb is. Amennyiben egy magyar biztosító szeretne longevity bondot kibocsátani, akkor érdemes lenne a piaci árazásokból nagyobb mintát gyűjtenie, hogy pontosabban megbecsülje halandóság piaci árát. A kuponfizetéshez megállapított X_t szintek elkészítéséhez pedig alkalmazhatna halandósági előrejelzéseket, hogy ezen X_t szinteket úgy tudja megállapítani, hogy vonzóbb kuponokat jelentsen a befektetők számára.

11. Hivatkozások

[1] Andrew Cairns, LONGEVITY BONDS AND MORTALITY-LINKED SECURITIES, 2005

[2] Cairns, A.J., Blake, D., Dowd, K., Pricing Death: Frameworks for the Valuation and Securitization of Mortality Risk,
ASTIN Bulletin, 2005b

[3] Daniel Bauer, Jochen Ruß Pricing Longevity Bonds using Implied Survival Probabilities, 2006

[4] D. Blake, A. J. G. Cairns and K. Dowd,
LIVING WITH MORTALITY: LONGEVITY BONDS
AND OTHER MORTALITY-LINKED SECURITIES (2006)

[5] Economic Policy Comittee (AWG) and Directorate-General for Economic and Financial Affairs,Pension schemes and pension projections in the EU-27 Member States -2008-2060,Volume II.-Annex, Occasional Papers 56 (October 2009)

[6] Matias Leppisaari Managing Longevity Risk with Longevity Bonds (2008)

[7] Shaun S. WANG, A UNIVERSAL FRAMEWORK FOR PRICING FINANCIAL AND INSURANCE RISKS
(ASTIN Bulletin, Vol. 32, No. 2, 2002)

[8] Szabó László, Viharos László Az életbiztosítás alapjai,
SZTE Bolyai Intézet (2001)

[9] Yija Lin, Samuel H. Cox,
Securitization of Mortality Risks in Life Annuities(2004)

[10] www.akk.hu

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani külső témavezetőmnek Bozsó Dávidnak, aki biztosította számomra a diplomamunkám megírásához szükséges adatokat, segítségemre volt a témával kapcsolatos irodalmak gyűjtésében, és mindig időt szakított rám, amikor kérdés, vagy probléma merült fel. Továbbá szeretném megköszönni Arató Miklós belső konzulensemnek, hogy figyelmembe ajánlotta a témát, segített külső témavezetőt találni, és szakmai tanácsokkal látott el.

12. Mellékletek

12.1. Várható hátralévő élettartam kiszámítása 62 éves férfiak esetén

qx <- read.csv2(”D:/mort.csv”, header = FALSE, sep = ”;”) # halandósági adatok beolvasása
a<-seq(0,100)
b<-seq(1949,2006)
row.names(qx)<-a
colnames(qx)<-a # oszlopok, sorok elnevezése
ftpx<-matrix(0,nrow=39,ncol=58) #nullmátrix létrehozása
ftpx[1,]=0
row.names(ftpx)<-a[63:101]
colnames(ftpx)<-b # oszlopok,sorok elnevezése
for(i in 2:39)for(j in 1:58) ftpx[i,j]<-prod(1-qx[63:(i+61),j]) # minden oszlopba beírja 62 éves kortól a t évig történő továbbélési valószínűségeket
Eftpx<-matrix(0, nrow=1,ncol=58) colnames(Eftpx)<-b for(j in 1:58)
Eftpx[1,j]<-sum(l62[,j]) # kiszámolja egyes évekre a várható hátralevő élettartamot
plot(b,Eftpx, xlab=””, ylab=””, main=” Várható hátralevő élettartam 62 éves magyar férfiak esetén”, type=”o”, pch=21, col=73, lwd=1.5) # eredményeket kirajzolja

12.2. Várható hátralévő élettartam kiszámítása 62 éves nők esetén

qn <- read.csv2(”D:/mortno.csv”, header = FALSE, sep = ”;”) # halandósági adatok beolvasása
a<-seq(0,100)
b<-seq(1949,2006)
row.names(qn)<-a
colnames(qn)<-a # oszlopok, sorok elnevezése
ntpx<-matrix(0,nrow=39,ncol=58)#nullmátrix létrehozása
ntpx[1,]=0
row.names(ntpx)<-a[63:101]
colnames(ntpx)<-b# oszlopok, sorok elnevezése
for(i in 2:39)for(j in 1:58) ntpx[i,j]<-prod(1-qn[63:(i+61),j])# minden oszlopba beírja 62 éves kortól a t évig történő továbbélési valószínűségeket

Entpx<-matrix(0, nrow=1,ncol=58) colnames(Entpx)<-b for(j in 1:58)
Entpx[1,j]<-sum(l62[,j]) #kiszámolja egyes évekre a várható hátralévő élettartamot
plot(b,Entpx, xlab="", ylab="", main=" Várható hátralevő élettartam 62 éves magyar nők esetén", type="o", pch=21, col=73, lwd=1.5) #eredmények kirajzolása

12.3. Születéskor várható élettartam kiszámítása férfiak esetén

f0<-matrix(0,nrow=101,ncol=58)f0[1,]=0 #nullmátrix létrehozása
row.names(f0)<-a[1:101] colnames(f0)<-b #oszlopok, sorok elnevezése
for(i in 2:101) for(j in 1:58) f0[i,j]<-prod(1-qx[1:(i-1),j]) #minden oszlopba beírja 62 éves kortól a t évig történő továbbélési valószínűségeket
Erf0<-matrix(0, nrow=1,ncol=58) colnames(Erf0)<-bfor(j in 1:58)
Erf0[1,j]<-sum(f0[,j]) #kiszámolja a várható élettartamot
plot(b,Erf0, xlab="", ylab="", main=" Születéskor várható élettartam férfiak esetén", type="o", pch=21, col=73, lwd=1.5) #kirajzolja az eredményt

12.4. Születéskor várható élettartam kiszámítása nők esetén

n0<-matrix(0,nrow=101,ncol=58)n0[1,]=0 #nullmátrix létrehozása
row.names(n0)<-a[1:101] colnames(n0)<-b #oszlopok, sorok elnevezése
for(i in 2:101) for(j in 1:58) n0[i,j]<-prod(1-qx[1:(i-1),j]) #minden oszlopba beírja 62 éves kortól a t évig történő továbbélési valószínűségeket
Ern0<-matrix(0, nrow=1,ncol=58) colnames(Ern0)<-bfor(j in 1:58)
Ern0[1,j]<-sum(n0[,j]) #kiszámolja a várható élettartamot
plot(b,Ern0, xlab="", ylab="", main=" Születéskor várható élettartam nők esetén", type="o", pch=21, col=73, lwd=1.5) #kirajzolja az eredményt