

# Sztochasztikus módszerek nagy volatilitású piacokon

Diplomamunka

Írta: Mályusz Miklós Tivadar

Alkalmazott matematikus szak

Témavezető: Márkus László, egyetemi docens

Valószínűségelméleti és statisztika tanszék

Eötvös Lóránd Tudományegyetem



Eötvös Lóránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2011

# Bevezetés

A pénzügyi matematika egyik legjelentősebb színtere már hosszú ideje a részvényt-piacok elemzése. Természetes dolog egy részvény árára sztochasztikus folyamatként gondolni, ezzel a megfontolással pedig matematikailag formalizálhatóak a mindennaposan felmerülő kérdések.

Ezen kérdések közül az opciók árazása kiemelt fontosságú. Black és Scholes 1973-as formulája közgazdasági Nobel-díjat hozott kidolgozójának, és mindmáig alapvető viszonyítási pontja az opcióárazásnak, elméleti és gyakorlati téren egyaránt. A későbbi kutatások során azonban számos probléma merült fel a Black-Scholes formulával kapcsolatban. A részvényárakat exponenciális Brown-mozgásnak tekinti, azaz a véletlen szerepe egy normális eloszlású valószínűségi változón keresztül jelenik meg. Az empirikus adatok azonban egy vastagfarkú, és nem feltétlenül szimmetrikus eloszlás meglétét sejtetik. Ez motiválta a normális helyett először  $\alpha$ -stabilis eloszlások használatát későbbi modellekben, ezek azonban túlságosan is vastagfarkúnak bizonyultak. Ennek enyhítésére születtek meg a temperált stabilis eloszlások, melyek a normálisnál vastagabb, az  $\alpha$ -stabilisoknál pedig vékonyabb farokvastagsággal rendelkeznek. A temperált stabilis eloszlás ugyan nem stabilis, viszont korlátlanul osztható, így segítségével tudunk sztochasztikus folyamatot generálni.

A temperált stabilis eloszlás használatával Brown-mozgás helyett már a jóval általánosabb Lévy folyamat lesz a meghajtófolyamat a részvényárban, azonban ezzel kapcsolatban is felmerülnek problémák.

Az árfolyamokban megfigyelhető, hogy nagy eséseket általában nagy emelkedések, vagy további nagy esések követnek. Azaz, ha egy adott időszakban a szokásosnál nagyobb volt a részvényár volatilitása, akkor egy darabig továbbra is nagyobb volatilitásra lehet számítani (volatility clustering). Azonban a Lévy-folyamatok egyik alapvető tulajdonságuk, nevezetesen a független növekményűség miatt, ezt nem tudják visszaadni. Ez inspirálta olyan modellek megalkotását, melyekben a véletlen szerepe megnő, ha a korábbi időszakban az átlagosnál nagyobb ingadozások voltak. Az ilyen elgondolással készített modellek közül a Bollerslev által bevezetett GARCH modellek a legelterjedtebbek és legjobban alkalmazhatóak, azonban ezekben is normális eloszlású változókon keresztül értelmezzük a véletlen szerepét.

Kim és Rachev munkái a témakörben mérföldkönek tekinthetők. Egyfelől általánosítják a temperált stabilis eloszlásokat (MTS), másfelől egy jól körülhatárolható alosztályt definiálnak, amellyel komplex folyamatokat lehet felépíteni úgy, hogy a belőlük

származó implicit volatilitás jól közelítse a valós piaci árból számítottat. Ismert, hogy ezeket a modelleket sikerrel alkalmazták valódi piaci szereplők számára is. Szakdolgozatom célja ezen kutatások elméleti háttérének felvázolása, és az eredmények bemutatása. Végül egy Monte Carlo módszeres opcióárazással magam is megvizsgálom a modell hatékonyságát az implicit volatilitás szempontjából.

A dolgozatom első részében általános tételek és definíciók találhatóak a Lévy-folyamatokról és a temperált stabilis eloszlásokról. A második fejezetben bemutatom azokat a speciális eloszlásokat, amelyek a modellek felépítésében szerepet játszanak. A harmadik részben folytonos, a negyedikben diszkrét piaci modellekről lesz szó. Végül az ötödik részben a felmerülő véletlen számok szimulációjára térek ki, és egy konkrét példán keresztül megmutatom az opciók árazását.

# 1.1 A folytonos piac és a Lévy folyamatok

Adjuk meg a folytonos piac matematikai definícióját. Legyen adott egy  $T > 0$  időhorizont, jelölje  $\Omega$  a  $[0, T] \mapsto \mathbb{R}$  cadlag függvények halmazát. Legyen  $(X_t)_{t \in [0, T]}$  kanonikus folyamat  $\Omega$ -n, azaz  $X_t(\omega) = \omega(t)$ ,  $\omega \in \Omega$ .

Az  $(\Omega, F_T, (F_t)_{0 \leq t < T}, \mathbb{P})$  filtrált valószínűségi mezőt fogjuk használni, itt  $F_T = \sigma\{X_s; 0 \leq s \leq T\}$ ,  $F_t = \bigcap_{t < s \leq T} \sigma\{X_u; u \leq s\}$ ,  $\mathbb{P}$  pedig a piaci mérték.

A részvényárfolyamatot  $S_t = S_0 e^{X_t}$  alakúnak tekintjük.  $S_0$  a kezdeti ár,  $X_t$  pedig a meghajtófolyamat. Legyen  $r > 0$  a kockázatmentes kamatrátá, és tegyük fel, hogy a részvény birtokosa folyamatosan  $d > 0$  osztalékot kap. Ebben az esetben a  $\mathbb{Q}$  valószínűségi mértéket ekvivalens martingál mértéknek nevezzük, ha ekvivalens  $\mathbb{P}$ -vel, és az  $\hat{S}_t = S_t e^{-(r-d)t}$  folyamat  $\mathbb{Q}$ -martingál.

Az  $X_t$  sztochasztikus folyamat Lévy-folyamat, ha független, stacionárius növekményű, nullából induló és 1 valószínűséggel balról folytonos, jobbról határértékkel rendelkező (cadlag) trajektóriájú. Egy Lévy folyamat természetes kapcsolatban áll a korlátlanul osztható valószínűségi változókkal.

*Definíció: Egy  $X$  valószínűségi változót korlátlanul oszthatónak nevezünk, ha tetszőlegesen választott  $n$  esetén  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  alakban írható, ahol  $X_i$  független és azonos eloszlású.*

Mivel tetszőlegesen  $n$  esetén  $X_t = X_{t/n} + (X_{2t/n} - X_{t/n}) + \dots + (X_{nt/n} - X_{(n-1)t/n})$ , és  $X_{t/n}, (X_{2t/n} - X_{t/n}), \dots, (X_{nt/n} - X_{(n-1)t/n})$  független azonos eloszlásúak, így  $X_t$  korlátlanul osztható eloszlású minden  $t$ -re. Emiatt egy korlátlanul osztható valószínűségi változón keresztül tudunk definiálni Lévy-folyamatot; egyszerűen  $X_1$  eloszlása legyen  $X$  eloszlásával megegyező. Ezután a folyamat eloszlása minden  $t$ -re meg van határozva.

*Definíció: Egy  $X$  valószínűségi változót  $\alpha$ -stabilis eloszlású, ha tetszőleges  $X_1, X_2, \dots, X_n$  független,  $X$  eloszlású valószínűségi változók esetén létezik  $c_n$  és  $d_n$  konstans, hogy  $X_1 + \dots + X_n$  eloszlása  $c_n X + d_n$  eloszlásával egyezik meg, és  $c_n = n^{1/\alpha}$ .*

A definícióból következik, hogy egy stabilis eloszlású változó egyben korlátlanul osztható is, így ugyanúgy létrehozhatunk segítségével Lévy-folyamatokat.

Nézzük meg, hogyan épül fel egy Lévy folyamat! Az alábbi tétel megmutatja, mi szükséges egy Lévy folyamat, vagy ekvivalensen, egy korlátlanul osztható eloszlás karakterizációjához.

*Lévy-Hincsin reprezentáció: Egy korlátlanul osztható valószínűségi változó karakterisztikus exponense, vagyis azon  $\psi(z)$ , melyre  $E[e^{izX}] = e^{\psi(z)}$ ,  $z \in \mathbb{R}$ , a következő alakot ölti:*

$$\psi(z) = iza - \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} (e^{izx} - 1 - izx1_{|x| \leq 1}) \nu(dx)$$

ahol  $a \in \mathbb{R}, \sigma \geq 0, \nu$  pedig egy mérték  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ -n, melyre teljesül, hogy  $\int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} (1 \wedge x^2) \nu(dx) < \infty$ . Ezt a mértéket az eloszlás vagy folyamat Lévy-mértékének nevezzük.

A képletből látszik, hogy az  $(a, \nu, \sigma)$  paraméterhármas határoz meg egy korlátlanul osztható eloszlást. Ezt a paraméterhármaszt Lévy-tripletnek nevezzük.

Ennek a reprezentációnak egyfajta kiterjesztését is használni fogjuk, bár több cikkben is rögtön ezen a módon hivatkoznak rá: a képletben szereplő  $x1_{|x| \leq 1}$  függvényt kicserélhetjük tetszőleges olyan  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mérhető függvényre, melyre  $\int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} |e^{izx} - 1 - izh(x)| \nu(dx) < \infty$ . Ebben az esetben  $\nu$  és  $\sigma$  nem változik, az a paraméter viszon igen;  $a_h = a + \int_{-\infty}^{\infty} (h(x) - x1_{|x| \leq 1}) \nu(dx)$

A karakterisztikus exponens alakjából következtethetünk arra, mikből is áll egy Lévy-folyamat. Intuitíven,  $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4$

$\psi_1 = iza$  egy lineáris drift karakterisztikus exponensével egyezik meg

$\psi_2 = -\frac{1}{2}\sigma^2 z^2$  egy Brown-mozgás  $\sigma^2$  együtthatóval

$\psi_3 = \int_{|x| \geq 1} (e^{izx} - 1) \nu(dx)$

pedig egy compound Poisson folyamat  $\nu(\mathbb{R} \setminus (-1, 1))$  intenzitással.

Megmutatható, hogy fennmaradó rész,  $\psi_4$  egy négyzetesen integrálható tiszta ugró-martingál lesz, így kapjuk a következő tételt:

Lévy-Ito dekompozíció: Ha  $X_t$  Lévy folyamat, akkor

$$X_t = ta + \sigma^2 W_t + \int_{|x| > 1} xN([0, t], dx) + \int_{|x| \leq 1} x[N([0, t], dx) - t\nu(dx)]$$

tehát egy Lévy folyamat felírható egy lineáris sodrás, egy Brown-mozgás, egy compound Poisson folyamat, és egy négyzetesen integrálható ugrómartingál összegeként.

A negyedik tag megkapható compound Poisson folyamatok határértékeként, így nincs gond az integrál létezésével.

A formulából látszik, hogy a véletlen szerepét két irányból is jól meg tudja fogni egy Lévy-folyamat: egyrészt egy Wiener folyamat van benne, melyhez sodrást és néhány nagyobb ugrást hozzáadva kellően gazdag struktúrájú folyamatokat kaphatunk, másrészt a negyedik tag segítségével végtelen sok, végtelenül kicsi ugrást is felhasználhatunk, így akár a Wieneres tagot elhagyva is megfelelően részletes modelleket készíthetünk; az általam a későbbi fejezetekben bemutatásra kerülő modellek is ez utóbbiba tartoznak.

A Lévy-mértéket úgy is lehet tekinteni, mint az adott halmazba eső nagyságú ugrások várható számát egységnyi idő alatt. Azaz

$$\nu(A) = E |\{t : \Delta X_t \in A \setminus \{0\}, 0 \leq t \leq 1\}|$$

Így nem meglepő, hogy a Lévy-mértéken keresztül feltételt kapunk a folyamat totális variációjára és ugrásainak számára:

Állítás: *Ha  $\nu(\mathbb{R}) < \infty$ , akkor a folyamat trajektóriái 1 valószínűséggel csak véges sok ugrást tartalmaznak minden kompakt intervallumon. Ebben az esetben a folyamatot véges aktivitásúnak nevezzük.*

*$\nu(\mathbb{R}) = \infty$  esetén a trajektóriák 1 valószínűséggel végtelen sok ugrást fognak minden kompakt intervallumon tartalmazni. Ilyenkor végtelen aktivitású folyamatról beszélünk.*

Állítás: *Ha  $\sigma = 0$  és  $\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) < \infty$ , akkor a trajektóriák 1 valószínűséggel korlátos variációjúak. Ha valamelyik feltétel nem teljesül, akkor a trajektóriák 1 valószínűséggel nem korlátos variációjúak lesznek.*

Azaz ha a folyamatnak nincs Brown-mozgás része, az ugrások száma pedig lehet akár végtelen, de együttes összegük egy korlát alatt marad, akkor korlátos lesz a variáció.

A Lévy-folyamatokat használó modelleknek két fő csoportja van, ahogy azt feljebb felvázoltuk. Az első csoport tagjai sodródó Wiener folyamatból és néhány ugrásból állnak, ezeket ugró diffúzióknak nevezzük. A második csoport, amely a végtelen sok kicsi ugrással operáló folyamatot tartalmazza, a végtelen aktivitású modellek. Lássunk néhány alapvető példát:

Merton modell:

$$X_t = \mu t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \text{ ahol } Y_i \text{ normális eloszlású.}$$

Kou-modell: hasonló az előzőhöz, csak itt az ugrások asszimmetrikus duplaexponenciális eloszlásúak:  $f(x) = p\lambda_+ e^{-\lambda_+ x} \mathbf{1}_{x>0} + (1-p)\lambda_- e^{\lambda_- x}$ . Az asszimetriát az a tőzsdei tapasztalat indokolja, hogy zuhanás esetén a keletkező pánik további eladásra ösztönzi az embereket, míg emelkedésnél nem növekszik akkora mértékben a vásárlási hajlandóság.

Bates-modell:

$$dX_t = (r - \lambda k - \frac{1}{2}V_t) dt + \sqrt{V_t}dW_t + dZ_t$$

itt  $V_t$  a sztochasztikus volatilitás, azaz nem állandónak tekintjük a folyamat ingadozását.  $Z_t$  pedig compound-Poisson folyamat  $\lambda$  intenzitással és normális ugrásnagyságokkal.

Ez a három modell ugró diffúzió volt, azaz az ugrások száma véges volt, az ugrások nagysága pedig ismert eloszlású, így szimulálni is nagyon könnyű őket.

A végtelen aktivitású modelleknél a kicsi ugrások miatt nehezebb a dolgunk, ezért fontos tény, hogy egyes esetekben Brown mozgások átskálázásával megkaphatjuk őket.

Variance Gamma folyamat: tekintsünk egy  $X_t$  Lévy-folyamatot, amelynek növekményei gamma eloszlásúak  $\kappa$  szórásnégyzettel. A  $\mu X_t + \sigma W_{X_t}$  átskálázott Brown mozgást variance gamma folyamatnak nevezzük. Ez a folyamat korlátos variációjú, de végtelen aktivitású.

Normál Inverz Gauss folyamat: ezúttal egy inverz Gauss eloszlásból készített Lévy folyamattal skálázzuk át a Brown mozgást. Ez a folyamat szintén végtelen aktivitású, ráadásul a totális variációja is végtelen.

A következő fejezetben bemutatásra kerülő CGMY-folyamat a Variance Gamma kiterjesztése. Mielőtt azonban rátérnénk ennek ismertetésére, tegyünk egy általános betekintést a temperált stabilis eloszlások elméletébe, hiszen a dolgozatban ezután bemutatásra kerülő modellek ezeken az eloszlásokon alapulnak.

## 1.2 A Temperált stabilis eloszlások

Ebben a fejezetben a temperált stabilis eloszlások alapvető elméletéről lesz szó. A felépítés Rosinski[2] munkáját igyekszik követni, a tételek és állítások bizonyításai is megtalálhatóak nála. Temperált stabilis eloszlások korábban több néven is előfordultak, például Koponen[5], vagy Carr et al[6], viszont Rosinskihoz kötődik a temperálás folyamatának szemléletes matematikai definíciója.

A temperálás műveletét a Lévy-mértéken keresztül definiáljuk. Tudjuk, hogy egy  $\mathbb{R}^d$ -n  $\alpha$ -stabilis eloszlás  $\nu$  Lévy-mértéke a következő képpen írható fel polárkoordinátás alakban:

$$\nu(dr, du) = r^{-\alpha-1} dr \sigma(du)$$

A temperált stabilis eloszlásokat eredetileg Koponen[5] a következő definícióval vezette be: *X temperált stabilis eloszlású, ha korlátlanul osztható, és  $(a, \nu, \sigma)$  Lévy tripletjére teljesül, hogy  $\sigma = 0$ , és*

$$\nu(dx) = \frac{C_1 e^{-\lambda_+ x}}{x^{1+\alpha}} 1_{x>0} + \frac{C_2 e^{-\lambda_- |x|}}{|x|^{1+\alpha}} 1_{x<0}$$

ahol  $0 < \alpha < 2$ ,  $C_1, C_2, \lambda_+, \lambda_- > 0$  konstansok.

Ezt az eloszláscsaládot ma klasszikus temperált stabilis eloszlásnak nevezzük. Az átnevezést Rosinski munkái indokolták, aki olyan definíciót adott, melyből rögtön látszik, hogyan történik a temperálás művelete. Ezzel egy némileg szélesebb osztályt adott meg, azonban ez a bővítés nem vált az előnyös tulajdonságok rovására.

Rosinski definíciója szerint: *X (általánosított) temperált stabilis eloszlású, ha korlátlanul osztható Gauss komponens nélkül, Lévy mértéke pedig*

$$\nu(dr, du) = r^{-\alpha-1} q(r, u) dr \sigma(du),$$

ahol  $q : (0, \infty) \times S^{d-1} \mapsto (0, \infty)$  Borel-mérhető, és  $u \in S^{d-1}$  -re  $q(\infty, u) = 0$ , továbbá  $q(\cdot, u)$  teljesen monoton, azaz  $(-1)^n \frac{\delta^n}{\delta r^n} q(r, u) > 0$  minden  $r > 0$ ,  $u \in S^{d-1}$  és  $n=0, 1, 2, \dots$  esetén.

Azaz a temperálás matematikailag egy monoton csökkenő konvex függvénnyel való szorzása a Lévy-sűrűségfüggvénynek, emiatt a farokvastagságok kisebbek lesznek, mint egy ugyanolyan paraméterű stabilis eloszlásnál.

Jelöljük a valószínűségi változók ezen osztályát  $T\alpha S$  -sel.



A  $\beta$ -stabilis eloszlások beletartoznak  $T\alpha S$ -be minden  $\beta > \alpha$ -ra, hiszen  $q(r, u) = r^{\alpha-\beta}$  választással  $r^{-\alpha-1}q(r, u) dr\sigma(du) = r^{-\beta-1}dr\sigma(du)$ , azaz pont a  $\beta$ -stabilisok Lévy-mértékét kapjuk.

Az is látszik, hogy ha nem  $r^{\alpha-\beta}$ -val temperálunk, akkor a keletkező Lévy-mérték nem olyan alakú lesz, mint amilyen a stabilis eloszlásoké, azaz általában a temperálás elveszi az eloszlás stabilitási tulajdonságait. Tehát egy temperált stabilis eloszlás általában nem stabilis.

Állítás:  $q(r, u) = \int_0^\infty e^{-rs}Q(ds | u)$ , itt  $\{Q(\cdot | u)\}_{u \in S^{d-1}}$  mérhető családja  $(0, \infty)$ -en értelmezett Borel-mértékeknek.

Definiáljuk a következő két  $\mathbb{R}^d$ -n értelmezett mértéket:

$$Q(A) := \int_{S^{d-1}} \int_0^\infty I_A(ru) Q(dr | u) \sigma(du)$$

$$R(A) := \int_{\mathbb{R}^d} I_A\left(\frac{x}{\|x\|^2}\right) \|x\|^\alpha Q(dx)$$

Ez a két mérték ekvivalens, és látszik, hogy  $R(\{0\}) = Q(\{0\}) = 0$

Tetszőleges Borel-mérhető  $F$  függvény esetén fennáll a következő egyenlőség:

$$\int_{\mathbb{R}^d} F(x) R(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} F\left(\frac{x}{\|x\|^2}\right) \|x\|^\alpha Q(dx)$$

Emiatt  $F(x) = I_A\left(\frac{x}{\|x\|^2}\right) \|x\|^\alpha$  választással látszik, hogy

$$Q(A) = \int_{\mathbb{R}^d} I_A\left(\frac{x}{\|x\|^2}\right) \|x\|^\alpha R(dx)$$

Nézzük mi a kapcsolat  $R$  és a Lévy-mérték között.

Tétel: *Egy temperált stabilis eloszlás  $M$  Lévy-mértéke felírható*

$$M(A) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^\infty I_A(tx) t^{-\alpha-1} e^{-t} dt R(dx)$$

*alakban. Az itt szereplő  $\mathbb{R}^d$ -beli  $R$  mérték egyértelmű azon mértékek közül, melyekre teljesül, hogy*

$$R(\{0\}) = 0, \text{ és } \int_{\mathbb{R}^d} (\|x\|^2 \wedge \|x\|^\alpha) R(dx) < \infty$$

*Ha  $M \nu(dr, du) = r^{-\alpha-1}q(r, u) dr\sigma(du)$  alakú, akkor  $R$  innen egyértelműen megkapható a fentiek alapján  $Q$ -n keresztül, míg a tételben lévő feltételeknek eleget tevő  $R$ -en keresztül definiált  $M$  egy temperált stabilis valószínűségi változó eloszlása lesz.*

Az egyértelmű  $R$  mértéket az eloszlás spektrál, vagy Rosinski-mértékének nevezzük.

Az  $\alpha$ -stabilis eloszlásokkal ellentétben a temperált stabilisoknak bármelyik momentumuk lehet véges, sőt, néhány exponenciális momentumuk is. Hogy mely momentumok lesznek végesek, az a Rosinski-mértéktől függ.

Tétel: *Legyen  $\mu$  temperált stabilis eloszlású,  $R$  Rosinski mértékkel.*

*Ekkor a momentumokra a következők teljesülnek:*

1.  $\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^p \mu(dx) < \infty$  , ha  $p < \alpha$
2.  $\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^\alpha \mu(dx) < \infty$  pontosan akkor, ha  $\int_{\|x\| \geq 1} \|x\|^\alpha \log \|x\| R(dx) < \infty$
3.  $p > \alpha$  esetén  $\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^p \mu(dx) < \infty$  pontosan akkor, ha  $\int_{\|x\| \geq 1} \|x\|^p R(dx) < \infty$
4.  $\int_{\mathbb{R}^d} \exp(c \|x\|) \mu(dx) < \infty$  pontosan akkor, ha  $R(\{x : \|x\| > c^{-1}\}) = 0$ , tetszőleges  $c > 0$  esetén

$R$  segítségével explicit alakot kaphatunk a karakterisztikus függvényre.

Tétel: Legyen  $\mu$   $TS_\alpha$  eloszlású,  $0 < \alpha < 2$ , és teljesüljön, hogy  $\int_{\mathbb{R}^d} \|x\| \mu(dx) < \infty$ .

Ekkor a karakterisztikus függvény a következő alakban írható fel:

$$\phi(y) = \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} \psi_\alpha(\langle y, x \rangle) R(dx) + i \langle y, b \rangle\right), \text{ ahol}$$

$$\psi_\alpha(s) = \begin{cases} \Gamma(-\alpha) [(1 - is)^\alpha - 1 + i\alpha s] & \text{ha } \alpha \neq 1 \\ (1 - is) \log(1 - is) + is & \text{ha } \alpha = 1 \end{cases}, \text{ és}$$

$$b = \int_{\mathbb{R}^d} x \mu(dx)$$

Ha  $0 < \alpha < 1$ , és  $\int_{\|x\| \leq 1} \|x\| R(dx) < \infty$  , akkor az alak a következő:

$$\phi(y) = \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} \psi_\alpha^0(\langle y, x \rangle) R(dx) + i \langle y, b_0 \rangle\right), \text{ ahol}$$

$$\psi_\alpha^0(s) = \Gamma(-\alpha) [(1 - is)^\alpha - 1], \text{ } b_0 \text{ pedig a drift.}$$

A fentiekből látszik, hogy egy temperált stabilis eloszlást karakterizál a Rosinski-mérték,  $\alpha$ , és a várható érték, vagy a drift. Így van értelme a következő írásmódnak:  $X \sim TS_\alpha^0(R, b_0)$  , ha  $0 < \alpha < 1$ , illetve  $X \sim TS_\alpha(R, b)$ , amennyiben  $0 < \alpha < 2$ , és teljesülnek a szükséges feltételek.

Ha  $0 < \alpha < 1$ , és  $\int_{\mathbb{R}^d} \|x\| R(dx) < \infty$  , akkor mindkét felírás használható, és  $b = b_0 + \Gamma(1 - \alpha) \int_{\mathbb{R}^d} x R(dx)$ .

Tehát egy temperált stabilis eloszlást nem csak a Lévy tripleten keresztül tudunk meghatározni, hanem a Rosinski mérték segítségével is, ez utóbbi megközelítéssel rögtön megadhatjuk a „stabilitási paramétert” is.

A karakterisztikus függvény felírásából kiolvasható a következő tulajdonság: Legyenek  $X_1 \sim TS_\alpha(R_1, b_1)$ ,  $X_2 \sim TS_\alpha(R_2, b_2)$  függetlenek. Ekkor  $X_1 + X_2 \sim TS_\alpha(R_1 + R_2, b_1 + b_2)$

Nézzük most néhány tételt, amelyek a temperált stabilis eloszlásokból készített Lévy-folyamatokra vonatkoznak.

A korlátos variációra vonatkozó feltétel is megkapható a Rosinski-mérték segítségével.

Állítás:  $\int_{\|x\| \leq 1} \|x\| M(dx) < \infty$  pontosan akkor, ha  $\alpha \in (0, 1)$ , és  $\int_{\|x\| \leq 1} \|x\| R(dx) < \infty$

Ebből az is látszik, hogy  $\alpha \geq 1$  esetén a folyamat nem lehet korlátos variációjú.

Egy temperált stabilis folyamat aszimptotikus viselkedéséről a következőt tudjuk mondani:

Állítás: Legyen  $X_h$  az átskálázott folyamat, azaz  $X_h(t) = X(ht)$ . Ekkor

$h^{-1/\alpha} X_h \xrightarrow{d} Y$ , ha  $h \rightarrow 0$ , ahol  $Y$  egy  $\alpha$ -stabilis Lévy folyamat

$h^{-1/2} X_h \xrightarrow{d} B$ , ha  $h \rightarrow \infty$ , ahol  $B$  Brown mozgás

Tehát a temperált stabilis folyamatok képesek reprodukálni azt a tapasztalati tényt, hogy a részvényhozamok hosszútávon normális eloszlás szerint viselkednek, azaz az időskálát növelve, amin keresztül a hozamokat nézzük, egyre inkább egy normálisra hasonlító eloszlást jelenlétét mutatja a folyamat. Rövidtávon viszont a vastagfarkú, speciálisan a stabilis eloszlások tűnnek reálisnak.

## 2.1 A CTS eloszlás

A klasszikus temperált stabilis eloszlású valószínűségi változó karakterisztikus függvénye az alábbi alakú:

$$\phi_X(u, \alpha, C_1, C_2, \lambda_+, \lambda_-, m) = \exp(ium + C_1 \Gamma(-\alpha) ((\lambda_+ - iu)^\alpha - \lambda_+^\alpha) + C_2 \Gamma(-\alpha) ((\lambda_- - iu)^\alpha - \lambda_-^\alpha))$$

Jelöljük ezt az eloszláscsaládot  $CTS(\alpha, C_1, C_2, \lambda_+, \lambda_-, m)$ -el.

Ha  $C_1 = C_2$ , akkor CGMY eloszlásról beszélünk, ez az alosztály kiemelt szerepet tölt be. Megjegyezzük, hogy a CGMY eloszlásokat C,G,M,Y paraméterekkel is megszokták adni,  $\alpha = Y$ ,  $\lambda_+ = M$ ,  $\lambda_- = G$  szereposztással. Tehát például a CGMY eloszlás Lévy-mértéke a következő módon is felírható:

$$\nu_{CGMY}(dx) = C \left( \frac{e^{-Mx}}{x^{1+Y}} 1_{x>0} + \frac{e^{-G|x|}}{|x|^{1+Y}} 1_{x<0} \right)$$

Meg tudjuk határozni egy CTS eloszlás kumulánsait, mégpedig a következő módon: Állítás:

$$c_n(X) = \begin{cases} m + \Gamma(1 - \alpha) (C_1 \lambda_+^{\alpha-1} - C_2 \lambda_-^{\alpha-1}) & \text{ha } n = 1 \\ \Gamma(n - \alpha) (C_1 \lambda_+^{\alpha-n} + (-1)^n C_2 \lambda_-^{\alpha-n}) & \text{ha } n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Amennyiben teljesül, hogy

$$C = C_1 = C_2 = \frac{1}{(\Gamma(2-\alpha)(\lambda_+^{\alpha-2} + \lambda_-^{\alpha-2}))}, \text{ és}$$

$$m = -\Gamma(1 - \alpha) (C_1 \lambda_+^{\alpha-1} - C_2 \lambda_-^{\alpha-1})$$

akkor az eloszlásunk 0 várható értékű és 1 szórású lesz. Ebben az esetben standard CTS eloszlásnak nevezzük, ez a fenti összefüggések miatt már csak egy 3 paraméteres eloszláscsalád lesz; jelölése:  $stdCTS(\alpha, \lambda_+, \lambda_-)$

Az opciók árazásánál egy kockázatmentes mértéken végezzük a számításokat, ezért tudnunk kell, hogy mikor tudunk egy adott eloszlásból generált Lévy-folyamat esetén ekvivalens martingálmértéket találni. Következő tételünk ebben kulcsfontosságú, lévén az ekvivalens mérték létezésére mond szükséges és elégséges feltételt. A tétel Sato[1] könyvének 33.1-es tétele; ezt a tételt használjuk az MTS és a KR eloszlások esetén is az ekvivalens mérték létezésének kérdéséhez.

Tétel: Legyen  $(X, P)$  és  $(X, Q)$  két korlátlanul osztható valószínűségi változó  $(a, \nu, \sigma)$  és  $(\tilde{a}, \tilde{\nu}, \tilde{\sigma})$  Lévy-tripletekkel.  $P$  és  $Q$  pontosan akkor ekvivalensek, ha  $\sigma = \tilde{\sigma}$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \exp\left(\frac{1}{2} \log\left(\frac{\tilde{\nu}(dx)}{\nu(dx)}\right)\right) - 1 \right)^2 \nu(dx) < \infty, \text{ és } \sigma = 0 \text{ esetén } \tilde{a} - a = \int_{|x| \leq 1} x (\tilde{\nu} - \nu)(dx)$$

A CTS Lévy-folyamatok esetén a tétel a következőt jelenti:

Állítás: Legyen  $X_t$  egy CTS  $(\alpha, C_1, C_2, \lambda_+, \lambda_-, m)$  folyamat  $P$  alatt, és CTS  $(\tilde{\alpha}, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{\lambda}_+, \tilde{\lambda}_-, \tilde{m})$   $Q$  alatt.  $P$  és  $Q$  pontosan akkor ekvivalensek, ha  $\alpha = \tilde{\alpha}$ ,  $C_1 = \tilde{C}_1$ ,  $C_2 = \tilde{C}_2$ , és  $m = \tilde{m}$

Standard CTS eloszlásokra alkalmazva az előző tételt, a következő feltételt kapjuk az ekvivalenciára:

Állítás: Legyen  $k$  valós konstans, és legyen  $X \sim \text{stdCTS}(\alpha, \lambda_+, \lambda_-)$   $P$  alatt, és  $(X + k) \sim \text{stdCTS}(\tilde{\alpha}, \tilde{\lambda}_+, \tilde{\lambda}_-)$   $Q$  alatt. Ez esetben  $P$  és  $Q$  pontosan akkor ekvivalensek, ha  $\alpha = \tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\lambda}_+^{\alpha-2} + \tilde{\lambda}_-^{\alpha-2} = \lambda_+^{\alpha-2} + \lambda_-^{\alpha-2}$ , és  $k = \frac{\lambda_+^{\alpha-1} - \lambda_-^{\alpha-1} - (\tilde{\lambda}_+^{\alpha-1} - \tilde{\lambda}_-^{\alpha-1})}{(1-\alpha)(\lambda_+^{\alpha-2} - \lambda_-^{\alpha-2})}$

## 2.2 Az MTS eloszlás

Definíció: A módosított temperált stabilis eloszlás egy olyan  $X$  korlátlanul osztható egydimenziós eloszlás, melynek  $(a, \nu, \sigma)$  Lévy-tripletje a következő tulajdonságokkal bír:

$$\sigma = 0$$

$$\nu(dx) = C \left( \frac{\lambda_+^{\frac{\alpha+1}{2}} K_{\frac{\alpha+1}{2}}(\lambda_+ x)}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}} \mathbf{1}_{x>0} + \frac{\lambda_-^{\frac{\alpha+1}{2}} K_{\frac{\alpha+1}{2}}(\lambda_- |x|)}{|x|^{\frac{\alpha+1}{2}}} \mathbf{1}_{x<0} \right) dx$$

$$a = \mu + C \left( \frac{\Gamma(\frac{1-\alpha}{2})}{2^{\frac{\alpha+1}{2}}} (\lambda_+^{\alpha-1} - \lambda_-^{\alpha-1}) - \lambda_+^{\frac{\alpha-1}{2}} K_{\frac{\alpha-1}{2}}(\lambda_+) + \lambda_-^{\frac{\alpha-1}{2}} K_{\frac{\alpha-1}{2}}(\lambda_-) \right)$$

$C > 0, \lambda_+, \lambda_- > 0, \mu \in \mathbb{R}, \alpha \in (-\infty, 2) \setminus \{1\}$ ,  $K_p(x)$  pedig a másodfajú módosított Bessel (más néven MacDonaldd) függvény, azaz

$$K_p(x) = \frac{\pi}{2 \sin p\pi} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k-p}}{2^{2k-p} k! \Gamma(k-p+1)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+p}}{2^{2k-p} k! \Gamma(k+p+1)} \right)$$

$X$ -et ezentúl  $MTS(\alpha, C, \lambda_+, \lambda_-, \mu)$ -vel jelöljük.

$X$  Lévy-mértékének polárkoordinátás felírásából kiderül, hogy a most definiált eloszlás nem tartozik a Rosinski-féle temperált stabilis eloszlások közé:

$$\nu(dx) = r^{-\alpha-1} q_{MTS}(r, u) dr \sigma(du),$$

ahol  $\sigma$  egy véges mérték  $S^0 = \{-1, 1\}$ -en, melyre  $\sigma(\{1\}) = \sigma(\{-1\}) = 2^{\frac{\alpha-1}{2}} C\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$ ,  $q_{MTS}$  pedig Borel-mérhető,  $(0, \infty) \times S^0 \mapsto (0, \infty)$  függvény, és

$$q_{MTS}(r, u) = \begin{cases} 2^{\frac{1-\alpha}{2}} \left(\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\right)^{-1} (\lambda_+ r)^{\frac{\alpha+1}{2}} K_{\frac{\alpha+1}{2}}(\lambda_+ r) & \text{ha } u = 1 \\ 2^{\frac{1-\alpha}{2}} \left(\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\right)^{-1} (\lambda_- r)^{\frac{\alpha+1}{2}} K_{\frac{\alpha+1}{2}}(\lambda_- r) & \text{ha } u = -1 \end{cases}$$

Megmutatható, hogy például  $\frac{\delta^2}{\delta r^2} q_{MTS}\left(\frac{1}{2}, 1\right) < 0$ , azaz  $q_{MTS}$  nem teljesen monoton, márpedig Rosinski definíciója ezt megkövetelné.

Az MTS eloszlás Lévy mértékének aszimptotikájáról fontos tudni a következőket:

$$\nu(x) \sim 2^{\frac{\alpha-1}{2}} C\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \frac{1}{x^{\alpha+1}}, x \rightarrow 0$$

$$\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} C \lambda_+^{\frac{\alpha}{2}} \frac{e^{-\lambda_+ x}}{x^{\frac{\alpha}{2}+1}}, x \rightarrow \infty$$

$$\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} C \lambda_-^{\frac{\alpha}{2}} \frac{e^{-\lambda_- x}}{x^{\frac{\alpha}{2}+1}}, x \rightarrow -\infty$$

Ez azt jelenti, hogy egy MTS eloszlás Lévy-mértéke a nulla körül úgy viselkedik, mint egy  $\alpha$ -stabilis eloszlás, végtelenbe tartva pedig exponenciálisan csökken,  $\lambda_+$  illetve  $\lambda_-$  paraméterekkel. a farokvastagság.

X karakterisztikus függvénye a következő:

$$\phi_X(u; \alpha, C, \lambda_+, \lambda_-, \mu) = \exp(iu\mu + G_R(u; \alpha, C, \lambda_+, \lambda_-) + G_I(u; \alpha, C, \lambda_+, \lambda_-)), \text{ ahol}$$

$$G_R(u; \alpha, C, \lambda_+, \lambda_-) = \begin{cases} \sqrt{\pi} 2^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{2}} C\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right) \left((\lambda_+^2 + u^2)^{\frac{\alpha}{2}} - \lambda_+^\alpha + (\lambda_-^2 + u^2)^{\frac{\alpha}{2}} - \lambda_-^\alpha\right) & \text{ha } \alpha \neq 0 \\ \sqrt{\pi} 2^{-\frac{3}{2}} C \left(\log\left(\frac{\lambda_+^2}{\lambda_+^2 + u^2}\right) + \log\left(\frac{\lambda_-^2}{\lambda_-^2 + u^2}\right)\right) & \text{ha } \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\text{és } G_I(u; \alpha, C, \lambda_+, \lambda_-, \mu) = \frac{i\mu C\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}{2^{\frac{\alpha+1}{2}}} \left(\lambda_+^{\alpha-1} F\left(1, \frac{1-\alpha}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{u^2}{\lambda_+^2}\right) - \lambda_-^{\alpha-1} F\left(1, \frac{1-\alpha}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{u^2}{\lambda_-^2}\right)\right)$$

Az F függvény a hipergeometriai függvény, azaz

$$F(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}, |x| < 1; (a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}, n=0, 1, 2, \dots$$

Állítás: X kumulánsai a következők, ha  $\alpha \in (-\infty, 1) \setminus \{\frac{1}{2}\}$ :

$$c_m(X) = \begin{cases} \mu + 2^{-\frac{\alpha+1}{2}} C\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) (\lambda_+^{\alpha-1} - \lambda_-^{\alpha-1}) & \text{if } m = 1 \\ 2^{m-\frac{\alpha+3}{2}} \left(\frac{m-1}{2}\right)! C\Gamma\left(\frac{m-\alpha}{2}\right) (\lambda_+^{\alpha-m} - \lambda_-^{\alpha-m}) & \text{if } m = 3, 5, 7, \dots \\ 2^{-\frac{\alpha+3}{2}} \sqrt{\pi} \left(\frac{m}{2}\right)! C\Gamma\left(\frac{m-\alpha}{2}\right) (\lambda_+^{\alpha-m} + \lambda_-^{\alpha-m}) & \text{if } m = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

Ezek segítségével meghatározhatjuk X várható értékét, szórásnégyzetét, ferdeségét és lapultságát:

$$E(X) = c_1(X) = \mu + 2^{-\frac{\alpha+1}{2}} C \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) (\lambda_+^{\alpha-1} - \lambda_-^{\alpha-1})$$

$$D^2(X) = c_2(X) = 2^{-\frac{\alpha+1}{2}} \sqrt{\pi} C \Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) (\lambda_+^{\alpha-2} + \lambda_-^{\alpha-2})$$

$$s(X) = \frac{c_3(X)}{c_2(X)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2^{\frac{\alpha+9}{4}} \Gamma\left(\frac{3-\alpha}{2}\right) (\lambda_+^{\alpha-3} - \lambda_-^{\alpha-3})}{\pi^{\frac{3}{4}} C^{\frac{1}{2}} \left(\Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) (\lambda_+^{\alpha-2} + \lambda_-^{\alpha-2})\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$k(X) = \frac{c_4(X)}{c_2(X)^2} = \frac{3 \cdot 2^{\frac{\alpha+3}{2}} \Gamma\left(2 - \frac{\alpha}{2}\right) (\lambda_+^{\alpha-4} + \lambda_-^{\alpha-4})}{\sqrt{\pi} C \left(\Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) (\lambda_+^{\alpha-2} + \lambda_-^{\alpha-2})\right)^2}$$

$\lambda_+$  és  $\lambda_-$  az eloszlás farokvastagságát befolyásolják a jobb és bal oldalon, így  $\lambda_+ = \lambda_-$  esetén az eloszlás szimmetrikus.  $C$  az eloszlás lapultságáért felel; minél kisebb  $C$ , annál csúcsosabb

A fentiekből látható, hogy adott  $\alpha$  és  $\lambda_+, \lambda_-$ -ok esetén a szórásnégyzetet már csak a  $C$  paraméter, a várható értéket pedig csak a  $\mu$  paraméter befolyásolja. Tehát rögzített  $\alpha, \lambda_+, \lambda_-$  esetén tetszőleges  $(x,y)$ -ra választhatunk olyan  $C$ -t és  $\mu$ -t, hogy a várható érték  $x$ , a szórásnégyzet pedig  $y$  legyen. Speciálisan, ha adott  $\alpha, \lambda_+, \lambda_-$  mellett

$$C = 2^{\frac{\alpha+1}{2}} \sqrt{\pi} \Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) (\lambda_+^{\alpha-2} + \lambda_-^{\alpha-2})^{-1}, \text{ és } \mu = -2^{-\frac{\alpha+1}{2}} C \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) (\lambda_+^{\alpha-1} - \lambda_-^{\alpha-1})$$

akkor az így kapott MTS valószínűségi változó várható értéke 0, szórása pedig 1 lesz. Az ilyen változót standard MTS eloszlásúnak nevezzük, és  $stdMTS(\alpha, \lambda_+, \lambda_-)$ -szal jelöljük.

Az ekvivalens martingálmérték létezésének kérdésére a következő választ kapjuk:

Állítás: *Ha  $(X, P)$  és  $(X, Q)$  MTS-ek  $(\alpha, C, \lambda_+, \lambda_-, \mu)$  és  $(\tilde{\alpha}, \tilde{C}, \tilde{\lambda}_+, \tilde{\lambda}_-, \tilde{\mu})$  paraméterekkel, akkor  $P$  és  $Q$  pontosan akkor ekvivalensek, ha  $\alpha = \tilde{\alpha}, C = \tilde{C}$  és  $\mu = \tilde{\mu}$*

Állítás: *Legyen  $X \sim stdCTS(\alpha, \lambda_+, \lambda_-)$   $P$  alatt,*

*és  $(X + k) \sim stdCTS(\tilde{\alpha}, \tilde{\lambda}_+, \tilde{\lambda}_-)$   $Q$  alatt.*

*Ez esetben  $P$  és  $Q$  pontosan akkor ekvivalensek, ha*

$$\alpha = \tilde{\alpha}, \tilde{\lambda}_+^{\alpha-2} + \tilde{\lambda}_-^{\alpha-2} = \lambda_+^{\alpha-2} + \lambda_-^{\alpha-2},$$

$$\text{és } k = \frac{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) (\lambda_+^{\alpha-1} - \lambda_-^{\alpha-1} - (\tilde{\lambda}_+^{\alpha-1} - \tilde{\lambda}_-^{\alpha-1}))}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) (\lambda_+^{\alpha-2} - \lambda_-^{\alpha-2})}$$

## 2.3 A KR eloszlás

A KR temperált stabilis eloszlás a következő képpen épül fel:

Legyen  $\alpha \in (0, 2)$ ;  $k_+, k_-, r_+, r_- > 0$ ;  $p_+, p_- > -\alpha$

Tekintsük azt a korlátlanul osztható eloszlást, melynek Lévy mértéke a következő polárkoordinátás alakban írható fel:

$$M(ds, du) = s^{-\alpha-1} q(s, u) ds \sigma(du)$$

ahol

$$\sigma(A) = \frac{k_+ r_+^\alpha}{\alpha + p_+} I_A(1) + \frac{k_- r_-^\alpha}{\alpha + p_-} I_A(-1), A \subset S^0$$

$$q(v, 1) = (\alpha + p_+) r_+^{-\alpha-p_+} \int_0^{r_+} e^{-v/s} s^{\alpha+p_+-1} ds$$

$$q(v, -1) = (\alpha + p_-) r_-^{-\alpha-p_-} \int_0^{r_-} e^{-v/s} s^{\alpha+p_- -1} ds$$

A konstrukció alapján az így definiált eloszlás a Rosinski-féle temperált stabilisok közé tartozik. Korábbi tételünk alapján meg tudjuk adni a Rosinski-mértékét:

$$R(dx) = (k_+ r_+^{-p_+} I_{(0, r_+)}(x) |x|^{p_+-1} + k_- r_-^{-p_-} I_{(-r_-, 0)}(x) |x|^{p_- -1}) dx$$

Illetve alternatív módon is felírhatjuk a Lévy mértéket:

$$M(A) = k_+ r_+^{-p_+} \int_0^{r_+} \int_0^\infty I_A(tx) t^{-\alpha-1} e^{-t} dt x^{p_+-1} dx + k_- r_-^{-p_-} \int_0^{r_-} \int_0^\infty I_A(-tx) t^{-\alpha-1} e^{-t} dt x^{p_- -1} dx$$

Az eloszlás kumulánsait az alábbi módon kapjuk meg:

$$c_n(x) = \Gamma(n - \alpha) \left( \frac{k_+ r_+^n}{p_+ + n} + (-1)^n \frac{k_- r_-^n}{p_- + n} \right), n \geq 2$$

Így a várható érték, a szórásnégyzet, a ferdeség és a lapultság a következő:

$$E(X) = c_1(X) = m$$

$$D^2(X) = c_2(X) = \Gamma(2 - \alpha) \left( \frac{k_+ r_+^2}{p_+ + 2} + (-1)^n \frac{k_- r_-^2}{p_- + 2} \right)$$

$$s(X) = \frac{c_3(X)}{c_2(X)^{3/2}} = \frac{\Gamma(3 - \alpha) \left( \frac{k_+ r_+^3}{p_+ + 3} + (-1)^n \frac{k_- r_-^3}{p_- + 3} \right)}{\Gamma(2 - \alpha)^{3/2} \left( \frac{k_+ r_+^2}{p_+ + 2} + (-1)^n \frac{k_- r_-^2}{p_- + 2} \right)^{3/2}}$$

$$k(X) = \frac{c_4(X)}{c_2(X)^2} = \frac{\Gamma(4 - \alpha) \left( \frac{k_+ r_+^4}{p_+ + 4} + (-1)^n \frac{k_- r_-^4}{p_- + 4} \right)}{\Gamma(2 - \alpha)^2 \left( \frac{k_+ r_+^2}{p_+ + 2} + (-1)^n \frac{k_- r_-^2}{p_- + 2} \right)^2}$$



A fentiekből látszik, hogy a CTS és az MTS eloszlásokhoz hasonlóan itt is tudjuk úgy választani a paramétereket, hogy a várható érték 0, a szórás pedig 1 legyen, mégpedig  $k_{\pm} = \frac{p_{\pm}+2}{2\Gamma(2-\alpha)r_{\pm}^2}$ ,  $m=0$  választással. Ebben az esetben eloszlásunkat  $stdKR(\alpha, r_+, r_-, p_+, p_-)$ -szal jelöljük.

A karakterisztikus függvény a következő:

$$\phi(u) = \exp\left(ium + H_{\alpha}(u; k_+, r_+, p_+) + H_{\alpha}(-u; k_-, r_-, p_-) + iu\alpha\Gamma(-\alpha)\left(\frac{k_+r_+}{p_++1} - \frac{k_-r_-}{p_-+1}\right)\right), \text{ ahol}$$

$$H_{\alpha}(u; x, y, p) = \frac{x\Gamma(-\alpha)}{p} (F(p, -\alpha; 1+p; iyu) - 1),$$

F pedig a hipergeometriai függvény.

Az alábbi állítás mutatja, hogy a CGMY eloszlás speciális esete a KR temperált stabilis eloszlásnak:

Állítás: *A KR temperált stabilis eloszlás  $p_+, p_- \rightarrow \infty$  esetén eloszlásban konvergál a CGMY eloszláshoz, feltéve, hogy  $k_+ = c(\alpha + p_+)r_+^{-\alpha}$  és  $k_- = c(\alpha + p_-)r_-^{-\alpha}$  megfelelő  $c > 0$  konstanssal.*

Allítás: *A KR temperált stabilis Lévy-folyamat pontosan akkor korlátos változású, ha  $0 < \alpha < 1$*

A KR folyamat esetén ekvivalens mérték létezéséhez a következők szükségesek.

Állítás: *Legyen  $P_1$  és  $P_2$  két valószínűségi mérték, és tegyük fel, hogy  $X_t$  KR temperált stabilis folyamat  $P_j$  alatt  $(\alpha_j, k_{j,+}, k_{j,-}, r_{j,+}, r_{j,-}, p_{j,+}, p_{j,-}, m_j)$  paraméterekkel,  $j=1,2$ , és teljesül, hogy*

$$\begin{cases} p_{j,\pm} \in (1/2 - \alpha_j, \infty) \setminus \{0\} & \text{ha } \alpha_j \in (0, 1) \\ p_{j,\pm} \in (1 - \alpha_j, \infty) \setminus \{0\} & \text{ha } \alpha_j \in (1, 2) \end{cases}$$

*Ekkor  $P_1$  és  $P_2$  pontosan akkor ekvivalensek, ha*

$$\begin{cases} \alpha := \alpha_1 = \alpha_2 \\ \frac{k_{1,+}r_{1,+}^{\alpha}}{\alpha+p_{1,+}} = \frac{k_{2,+}r_{2,+}^{\alpha}}{\alpha+p_{2,+}} \\ \frac{k_{1,-}r_{1,-}^{\alpha}}{\alpha+p_{1,-}} = \frac{k_{2,-}r_{2,-}^{\alpha}}{\alpha+p_{2,-}} \\ m_2 - m_1 = \Gamma(1-\alpha) \sum_{j=1,2} (-1)^j \left( \frac{k_{j,+}r_{j,+}^{\alpha}}{p_{j,+}+1} - \frac{k_{j,-}r_{j,-}^{\alpha}}{p_{j,-}+1} \right) \end{cases}$$

A standard KR eloszlás esetére vonatkozó tételünk tehát a következő:

Állítás: *Legyen  $P_1$  és  $P_2$  két valószínűségi mérték, teljesüljenek az előző tétel feltételei, és tegyük fel, hogy*

$$X \sim stdKR(\alpha_1, r_{1,+}, r_{1,-}, p_{1,+}, p_{1,-}) \text{ } P_1 \text{ alatt,}$$

és  $(X + k) \sim \text{stdKR}(\alpha_2, r_{2,+}, r_{2,-}, p_{2,+}, p_{2,-}) P_2$  alatt.

Ekkor  $P_1$  és  $P_2$  pontosan akkor ekvivalensek, ha a paraméterekre a következők teljesülnek:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha := \alpha_1 = \alpha_2 \\ \frac{p_{2,+}+2}{p_{2,+}+\alpha} r_{2,+}^{\alpha-2} = \frac{p_{1,+}+2}{p_{1,+}+\alpha} r_{1,+}^{\alpha-2} \\ \frac{p_{2,-}+2}{p_{2,-}+\alpha} r_{2,-}^{\alpha-2} = \frac{p_{1,-}+2}{p_{1,-}+\alpha} r_{1,-}^{\alpha-2} \\ k = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{2\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=1,2} (-1)^j \left( \frac{p_{j,+}+2}{r_{j,+}(p_{j,+}+1)} - \frac{p_{j,-}+2}{r_{j,-}(p_{j,-}+1)} \right) \end{array} \right.$$

### 3. Folytonos piaci modellek

Ebben a fejezetben bemutatunk három exponenciális Lévy modellt, melyek meghajtófolyamatai a korábban definiált eloszlásainkból generáltak. A folytonos piac első fejezetben található felépítését alkalmazzuk, tehát az  $S_t = S_0 e^{X_t}$  részvényárdinamikát használjuk.

#### 3.1. A CGMY modell

Az  $m=0$  paraméterű CGMY valószínűségi változó karakterisztikus exponensét jelöljük  $\psi_{CGMY}^0(u; \alpha, C, \lambda_+, \lambda_-)$ -vel.

Tehát

$$\psi_{CGMY}^0(u; \alpha, C, \lambda_+, \lambda_-) = C\Gamma(-\alpha) \left( (\lambda_+ - iu)^\alpha - \lambda_+^\alpha + (\lambda_- + iu)^\alpha - \lambda_-^\alpha \right)$$

Definíció: Legyen  $C > 0, \lambda_- > 0, \lambda_+ > 1, \alpha \in (0, 2), \mu > 0$ . Tekintsünk a folytonos piaci modellt, és legyen  $X_t$  egy CTS folyamat  $(\alpha, C, C, \lambda_+, \lambda_-, m)$  paraméterekkel. Ha itt  $m = \mu - \psi_{CGMY}^0(-i; \alpha, C, \lambda_+, \lambda_-)$ , akkor  $S_t$ -t CGMY részvényárfolyamatnak nevezzük  $(\alpha, C, \lambda_+, \lambda_-, \mu)$  paraméterekkel, és azt mondjuk, hogy a részvényárfolyamat a CGMY modellt követi.

Tehát az, hogy egy részvényárfolyamat a CGMY modellt követi, azt jelenti, hogy a meghajtófolyamata CGMY folyamat.

Állítás: Tegyük fel, hogy  $S_t$  CGMY részvényárfolyamat a P piaci mérték alatt  $(\alpha, C, \lambda_+, \lambda_-, \mu)$  paraméterekkel, egy Q mérték alatt pedig  $(\tilde{\alpha}, \tilde{C}, \tilde{\lambda}_+, \tilde{\lambda}_-, r - d)$  paraméterekkel.

Ekkor Q pontosan akkor lesz ekvivalens martingálmértéke P-nek, ha teljesül, hogy

$$C = \tilde{C}, \alpha = \tilde{\alpha},$$

és

$$r - d - \psi_{CGMY}^0(-i; \alpha, C, \lambda_+, \lambda_-) = \mu - \psi_{CGMY}^0(-i; \alpha, C, \tilde{\lambda}_+, \tilde{\lambda}_-)$$

#### 3.2 Az MTS modell

Jelöljük az  $m=0$  paraméterű MTS eloszlás karakterisztikus exponensét  $\psi_{MTS}^0(u; \alpha, C, \lambda_+, \lambda_-)$ -vel, azaz

$$\psi_{MTS}^0(u; \alpha, C, \lambda_+, \lambda_-) = G_R(u; \alpha, C, \lambda_+, \lambda_-) + G_I(u; \alpha, C, \lambda_+, \lambda_-)$$

Definíció: Legyen  $C > 0, \lambda_- > 0, \lambda_+ > 0, \alpha \in (0, 2) \setminus \{1\}, \mu > 0$ . Tekintsünk a folytonos piaci modellt, és legyen  $X_t$  egy MTS folyamat  $(\alpha, C, \lambda_+, \lambda_-, m)$  paraméterekkel. Ha itt  $m = \mu - \psi_{MTS}^0(-i; \alpha, C, \lambda_+, \lambda_-)$ , akkor  $S_t$ -t MTS részvényárfolyamatnak nevezük  $(\alpha, C, \lambda_+, \lambda_-, \mu)$  paraméterekkel, és azt mondjuk, hogy a részvényárfolyamat az MTS modellt követi.

Állítás: Tegyük fel, hogy  $S_t$  MTS részvényárfolyamat a P piaci mérték alatt  $(\alpha, C, \lambda_+, \lambda_-, \mu)$  paraméterekkel, egy Q mérték alatt pedig  $(\tilde{\alpha}, \tilde{C}, \tilde{\lambda}_+, \tilde{\lambda}_-, r - d)$  paraméterekkel.

Ekkor Q pontosan akkor lesz ekvivalens martingálmértéke P-nek, ha teljesül, hogy  $C = \tilde{C}, \alpha = \tilde{\alpha}$ , és

$$r - d - \psi_{MTS}^0(-i; \alpha, C, \lambda_+, \lambda_-) = \mu - \psi_{MTS}^0(-i; \alpha, C, \tilde{\lambda}_+, \tilde{\lambda}_-)$$

### 3.3 A KR modell

Az eddigiekhez hasonló elgondolással, legyen

$$\psi_{KR}^0(u; \alpha, k_+, k_-, r_+, r_-, p_+, p_-) = H_\alpha(u; k_+, r_+, p_+) + H_\alpha(-u; k_-, r_-, p_-) + iu\alpha\Gamma(-\alpha) \left( \frac{k_+r_+}{p_++1} - \frac{k_-r_-}{p_-+1} \right)$$

Definíció: Legyen  $k_+, k_-, r_- \in (0, \infty), r_+ \in (0, 1), \alpha \in (0, 2) \setminus \{1\}$  és

$$\begin{cases} p_\pm \in (1/2 - \alpha_j, \infty) \setminus \{0\} & \text{ha } \alpha \in (0, 1) \\ p_\pm \in (1 - \alpha, \infty) \setminus \{0\} & \text{ha } \alpha \in (1, 2) \end{cases}$$

Tekintsünk a folytonos piaci modellt, és legyen  $X_t$  egy KR folyamat  $(\alpha, k_+, k_-, r_+, r_-, p_+, p_-, m)$  paraméterekkel.

Ha itt  $m = \mu - \psi_{KR}^0(-i; \alpha, k_+, k_-, r_+, r_-, p_+, p_-)$ , akkor  $S_t$ -t KR részvényárfolyamatnak nevezük  $(\alpha, k_+, k_-, r_+, r_-, p_+, p_-, \mu)$  paraméterekkel, és azt mondjuk, hogy a részvényárfolyamat a KR modellt követi.

Állítás: Tegyük fel, hogy  $S_t$  KR részvényárfolyamat a P piaci mérték alatt  $(\alpha, k_+, k_-, r_+, r_-, p_+, p_-)$  paraméterekkel, egy Q mérték alatt pedig  $(\tilde{\alpha}, \tilde{k}_+, \tilde{k}_-, \tilde{r}_+, \tilde{r}_-, \tilde{p}_+, \tilde{p}_-, r - d)$  paraméterekkel.

Ekkor Q pontosan akkor ekvivalens martingálmértéke P-nek, ha

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \tilde{\alpha} \\ \frac{k_+r_+^\alpha}{\alpha+p_+} = \frac{\tilde{k}_+\tilde{r}_+^\alpha}{\alpha+\tilde{p}_+} \\ \frac{k_-r_-^\alpha}{\alpha+p_-} = \frac{\tilde{k}_-\tilde{r}_-^\alpha}{\alpha+\tilde{p}_-} \\ \mu - (r - d) = H_\alpha(-i; k_+, r_+, p_+) + H_\alpha(i; k_-, r_-, p_-) - H_\alpha(-i; \tilde{k}_+, \tilde{r}_+, \tilde{p}_+) - H_\alpha(i; \tilde{k}_-, \tilde{r}_-, \tilde{p}_-) \end{array} \right.$$

### 3.4. A paraméterek becslése

A folytonos piaci modelleknél a paraméterbecslést maximum likelihood becsléssel végezhetjük el. Ehhez szükségünk van a sűrűségfüggvényre, melynek azonban nem ismert zárt alakja. Viszont mind a CGMY, mind az MTS, mind a KR modell esetén ismert az eloszlás karakterisztikus függvénye, ebből pedig inverz Fourier transzformációval megkapható a sűrűségfüggvény tetszőleges helyeken, hiszen  $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} E[e^{iux}] dx$

Az integrálást tipikusan a  $[-2^{16}, 2^{16}]$ , vagy ehhez hasonló nagyságrendű intervallumon végezzük el. Ha elég sok  $x$ -re megvan az integrál, elvégezhető az MLE.

A kockázatsemleges paraméterek meghatározásához legkisebb négyzetes becslés használatos, az ekvivalens martingálmértékre vonatkozó feltételek mellett. A CGMY és az MTS esetben 1, a KR modellben pedig 3 szabad paraméterünk lesz, emiatt a KR modellel érhető el a legjobb közelítés. A Kolmogorov-Smirnov próbát alkalmazva látszik is, hogy a legnagyobb  $p$  értékek a KR modellnél fordulnak elő, Kim et al[8] cikkjében megtalálhatóak a pontos számok S&P 500 indexre való illesztés mellett.

## 4. Diszkrét piaci modellek

A diszkrét piacon értelmezett, korlátlanul osztható innovációkat használó GARCH-modell a következőképpen épül fel:

Készítsünk egy  $(\Omega, F, (F_t)_{t \in \mathbb{N}}, \mathbb{P})$  filtrált mezőt.  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{N}}$  független, azonos, korlátlanul osztható eloszlású valószínűségi változó sorozat  $(\Omega_t, F_t)$ -n, és  $(E[\exp(x\varepsilon_t)]) < \infty, x \in (a, b)$  megfelelő a és b választásával.

$$F_t = \otimes_{k=1}^t \sigma(\varepsilon_k) \otimes F_0 \otimes F_0 \dots, F = \sigma\left(\bigcup_{t \in \mathbb{N}} F_t\right), \mathbb{P} = \otimes_{t \in \mathbb{N}} P_t.$$

$S_t$  a részvény ára a  $t$  időpontban,  $r_t$  a kockázatmentes kamatrátá,  $d_t$  az osztalék  $t-1$  és  $t$  között,  $\lambda_t$  pedig  $F_{t-1}$ -mérhető valváltozó, mely a piaci kockázat árát hivatott mérni.

A következő részvényárdinamikát használjuk:

$$\log\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = r_t - d_t + \lambda_t \sigma_t - L(\sigma_t) + \sigma_t \varepsilon_t, t \in \mathbb{N}$$

Itt  $L(x) = \log(E[\exp(x\varepsilon_t)])$ ,  $x \in (a, b)$ , azaz  $\varepsilon$  log-Laplace transzformáltja,  $\sigma_t^2$  pedig egy GARCH(1,1) folyamat, és megköveteljük tőle, hogy 0 és  $b^2$  között legyen, azaz  $\sigma_t^2 = (\alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2) \wedge \rho$ , ahol  $\alpha_0, \alpha_1$  és  $\beta_1$  nemnegatívak,  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$  és  $0 < \rho < b^2$

Mivel a modell korlátlanul osztható eloszlást követel meg  $\varepsilon_t$  helyén, így speciálisan a temperált stabilis eloszlásokat is használhatjuk, figyelve arra, hogy milyen intervallumon létezik exponenciális momentumuk. Megjegyzendő, hogy ha  $\varepsilon_t$  standard normális eloszlású lenne, akkor a Duan[4] által bevezetett normális GARCH modellt kapnánk.

### 4.1 A CTS-GARCH modell

Legyen  $\varepsilon_t \sim stdCTS(\alpha, \lambda_+, \lambda_-)$ . Mivel  $E(e^{x\varepsilon_t}) < \infty$  ha  $x \in (-\lambda_-, \lambda_+)$ , így  $\rho \in (0, \lambda_+^2)$ . Az így képzett a modellt nevezzük CTS-GARCH modellnek.

Az alábbiakban megmutatjuk, hogyan találhatunk kockázatsemleges folyamatot.

4.1.1. Állítás: *Nézzük a CTS-GARCH modellt  $T$  időhorizonttal, és legyen  $t < T$  rögzített.*

*Tegyük fel, hogy  $\tilde{\lambda}_+(t)$  és  $\tilde{\lambda}_-(t)$  eleget tesz a következő feltételeknek:*

$$\tilde{\lambda}_+(t) > \rho$$

$$\tilde{\lambda}_+(t)^{\alpha-2} + \tilde{\lambda}_-(t)^{\alpha-2} = \lambda_+^{\alpha-2} + \lambda_-^{\alpha-2}, \text{ és}$$

$$\frac{\lambda_+^{\alpha-1} - \lambda_-^{\alpha-1} - (\tilde{\lambda}_+(t)^{\alpha-1} - \tilde{\lambda}_-(t)^{\alpha-1})}{(1-\alpha)(\lambda_+^{\alpha-2} - \lambda_-^{\alpha-2})} =$$

$$\lambda_t + \frac{1}{\sigma_t} \left( L_{CTS}(\sigma_t; \alpha, \tilde{\lambda}_+(t), \tilde{\lambda}_-(t)) - L_{CTS}(\sigma_t; \alpha, \lambda_+, \lambda_-) \right)$$

Ebben az esetben létezik a  $P_t$ -vel ekvivalens  $Q_t$  mérték, mely alatt

$$\varepsilon_t + k_t \sim stdCTS \left( \alpha, \tilde{\lambda}_+(t), \tilde{\lambda}_-(t) \right),$$

$$ahol k_t = \lambda_t + \frac{1}{\sigma_t} \left( LCTS \left( \sigma_t; \alpha, \tilde{\lambda}_+(t), \tilde{\lambda}_-(t) \right) - LCTS \left( \sigma_t; \alpha, \lambda_+, \lambda_- \right) \right)$$

Ha a fentiek teljesülnek, akkor a részvényárdinamika:

$$\log \left( \frac{S_t}{S_{t-1}} \right) = r_t - d_t - LCTS \left( \sigma_t; \alpha, \tilde{\lambda}_+(t), \tilde{\lambda}_-(t) \right) + \sigma_t (\varepsilon_t + k_t)$$

és létezik ekvivalens  $Q_t$ , mely alatt az utolsó tag  $stdCTS \left( \alpha, \tilde{\lambda}_+(t), \tilde{\lambda}_-(t) \right)$  eloszlású lesz. Emiatt  $E_{Q_t} \left( \frac{S_t}{S_{t-1}} \right) = exp(r_t - d_t)$ , azaz  $Q_t$  ekvivalens martingálmérték lesz.

Tehát azt kaptuk, hogy a

$$\log \left( \frac{S_t}{S_{t-1}} \right) = r_t - d_t - LCTS \left( \sigma_t; \alpha, \tilde{\lambda}_+(t), \tilde{\lambda}_-(t) \right) + \sigma_t \xi_t,$$

$$\xi_t \sim stdCTS \left( \alpha, \tilde{\lambda}_+(t), \tilde{\lambda}_-(t) \right),$$

$$\sigma_t^2 = (\alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 (\xi_{t-1} - k_t)^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2) \wedge \rho$$

által megadott folyamat kockázatmentes lesz. Ezt a folyamatot CTS-GARCH opcióárazási modellnek nevezzük. Látható, hogy a részvény ára ebben a modellben a következő:

$$S_t = S_0 exp \left( \sum_{j=1}^t \left( r_j - d_j - LCTS \left( \sigma_j; \alpha, \tilde{\lambda}_+(j), \tilde{\lambda}_-(j) \right) + \sigma_j \xi_j \right) \right)$$

Most megmutatjuk, hogy a piaci folyamatból hogyan kaphatjuk meg a kockázatmentes folyamatot. Tegyük fel tehát, hogy sikerült becsülni a piaci GARCH-paramétereket  $(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$ , a CTS paramétereket  $(\alpha, \lambda_+, \lambda_-)$ , egy konstans  $\lambda_t = \lambda$  paramétert, és a  $\sigma_{t_0}^2$  kezdeti feltételes varianciát. A következő algoritmust használjuk:

1. Legyen  $t = t_0$
2. Keressük meg a 4.1.1. Állítás feltételeinek eleget tevő  $\tilde{\lambda}_+(t)$  és  $\tilde{\lambda}_-(t)$
3. Generáljunk egy  $\xi_t \sim stdCTS \left( \alpha, \tilde{\lambda}_+(t), \tilde{\lambda}_-(t) \right)$  valváltozót
4. Legyen  $S_t = S_{t-1} exp \left( r_t - d_t - LCTS \left( \sigma_t; \alpha, \tilde{\lambda}_+(t), \tilde{\lambda}_-(t) \right) + \sigma_t \xi_t \right)$
5. Legyen  $k_t = \lambda_t + \frac{1}{\sigma_t} \left( LCTS \left( \sigma_t; \alpha, \tilde{\lambda}_+(t), \tilde{\lambda}_-(t) \right) - LCTS \left( \sigma_t; \alpha, \lambda_+, \lambda_- \right) \right)$
6. Legyen  $t=t+1$ , és  $\sigma_t^2 = (\alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 (\xi_{t-1} - k_t)^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2) \wedge \rho$
7. Ismételjük a fenti lépéseket amíg  $t$  nem lesz nagyobb  $T$ -nél

## 4.2 Az MTS-GARCH modell

Legyen most  $\varepsilon_t \sim stdMTS(\alpha, \lambda_+, \lambda_-)$ . A CTS-hez hasonlóan  $E(e^{x\varepsilon_t}) < \infty$  ha  $x \in (-\lambda_-, \lambda_+)$ , így  $\rho \in (0, \lambda_+^2)$ . Az így felépített modellt nevezzük MTS-GARCH-nak.

A következő állítás a 4.2.1-eshez hasonló.

4.2.1. Állítás: *Állítás: Nézzük az MTS-GARCH modellt  $T$  időhorizonttal, és legyen  $t < T$  rögzített. Tegyük fel, hogy  $\tilde{\lambda}_+(t)$  és  $\tilde{\lambda}_-(t)$  eleget tesz a következő feltételeknek:*

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_+(t) &> \rho \\ \tilde{\lambda}_+(t)^{\alpha-2} + \tilde{\lambda}_-(t)^{\alpha-2} &= \lambda_+^{\alpha-2} + \lambda_-^{\alpha-2}, \text{ és} \end{aligned}$$

$$\frac{\Gamma^{\frac{1-\alpha}{2}}(\lambda_+^{\alpha-1} - \lambda_-^{\alpha-1} - (\tilde{\lambda}_+^{\alpha-1} - \tilde{\lambda}_-^{\alpha-1}))}{\sqrt{\pi}\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})(\lambda_+^{\alpha-2} - \lambda_-^{\alpha-2})} = \lambda_t + \frac{1}{\sigma_t} \left( L_{MTS}(\sigma_t; \alpha, \tilde{\lambda}_+(t), \tilde{\lambda}_-(t)) - L_{MTS}(\sigma_t; \alpha, \lambda_+, \lambda_-) \right)$$

*Ebben az esetben létezik a  $P_t$ -vel ekvivalens  $Q_t$  mérték, mely alatt*

$$\varepsilon_t + k_t \sim stdMTS(\alpha, \tilde{\lambda}_+(t), \tilde{\lambda}_-(t)),$$

*ahol*

$$k_t = \lambda_t + \frac{1}{\sigma_t} \left( L_{MTS}(\sigma_t; \alpha, \tilde{\lambda}_+(t), \tilde{\lambda}_-(t)) - L_{MTS}(\sigma_t; \alpha, \lambda_+, \lambda_-) \right)$$

Az MTS-GARCH opcióárazási modell pontosan úgy épül fel, mint a CTS, és a kockázatmentes folyamat algoritmikus kiszámítása is ugyanúgy történik, csak a 2. lépésben a 4.2.1. Állítás igazságát kell ellenőrizni, illetve stdCTS helyett mindenhol stdMTS változókat használunk.

## 4.3 A KR-GARCH modell

Ha a temperált stabilis GARCH modellben  $\varepsilon_t \sim stdKR(\alpha, r_+, r_-, p_+, p_-)$ , és teljesül, hogy

$$\begin{cases} p_{\pm} \in (1/2 - \alpha_j, \infty) \setminus \{0\} & \text{ha } \alpha \in (0, 1) \\ p_{\pm} \in (1 - \alpha, \infty) \setminus \{0\} & \text{ha } \alpha \in (1, 2) \end{cases}$$

akkor KR-GARCH modellről beszélünk. Mivel  $E(e^{x\varepsilon_t}) < \infty$  ha  $x \in (-1/r_-, 1/r_+)$ , ezért  $\rho \in (0, 1/r_+^2)$

Állítás: *Nézzük a KR-GARCH modellt  $T$  időhorizonttal, és legyen  $t < T$  rögzített. Tegyük fel, hogy  $\tilde{r}_+(t)$ ,  $\tilde{r}_-(t)$ ,  $\tilde{p}_+(t)$ ,  $\tilde{p}_-(t)$  eleget tesz a következő feltételeknek:*

$$\tilde{r}_+(t) > \rho$$

$$\frac{\tilde{p}_+(t)+2}{\tilde{p}_+(t)+\alpha} \tilde{r}_+(t)^{\alpha-2} = \frac{p_++2}{p_++\alpha} r_+^{\alpha-2}$$



$$\frac{\tilde{p}_-(t)+2}{\tilde{p}_-(t)+\alpha} \tilde{r}_-(t)^{\alpha-2} = \frac{p_-+2}{p_-+\alpha} r_-^{\alpha-2}$$

$$\frac{\Gamma(1-\alpha)}{2\Gamma(2-\alpha)} \left( \frac{\tilde{p}_+(t)+2}{\tilde{r}_+(t)(\tilde{p}_+(t)+1)} - \frac{\tilde{p}_-(t)+2}{\tilde{r}_-(t)(\tilde{p}_-(t)+1)} - \frac{p_++2}{r_+(p_++1)} + \frac{p_-+2}{r_-(p_-+1)} \right) =$$

$$\lambda_t + \frac{1}{\sigma_t} (L_{KR}(\sigma_t; \alpha, \tilde{r}_+(t), \tilde{r}_-(t), \tilde{p}_+(t), \tilde{p}_-(t)) - L_{KR}(\sigma_t, \alpha, r_+, r_-, p_+, p_-))$$

*Ebben az esetben létezik a  $P_t$ -vel ekvivalens  $Q_t$  mérték, mely alatt  $\varepsilon_t + k_t \sim stdKR(\tilde{r}_+(t), \tilde{r}_-(t), \tilde{p}_+$   
ahol*

$$k_t = \lambda_t + \frac{1}{\sigma_t} (L_{KR}(\sigma_t; \alpha, \tilde{r}_+(t), \tilde{r}_-(t), \tilde{p}_+(t), \tilde{p}_-(t)) - L_{KR}(\sigma_t, \alpha, r_+, r_-, p_+, p_-))$$

A modell további felépítése hasonló az előző két esetéhez.

## 5. Szimulációs eljárások

Ebben a szakaszban mutatunk néhány numerikus módszert, melyekkel szimulálhatjuk a korábban definiált folyamatokat.

Először Poirot és Tankov[11] módszerét ismertetem, amely klasszikus temperált stabilis folyamatok függvényeinek Monte Carlo módszeres becslésére használatos. Ez a többivel ellentétben nem egy trajektóriánkénti szimuláció, viszont éppen ezért sokkal jobb futási eredményekre képes. Tehát ha nincs szükségünk a teljes folyamat ismeretére, csak valamilyen függvényét akarjuk becsülni, akkor ez a leggyorsabb eljárás.

A módszer lényege, hogy az eredeti folyamatot két másik Lévy-folyamat összegére bontjuk, melyekhez konstruálni tudunk egy olyan ekvivalens mértéket, mely alatt azok stabilisak lesznek.

Mivel stabilis folyamatot könnyedén tudunk szimulálni, így a szimulációt az alatt a mérték alatt végezzük el. A függvény régi mérték alatti várható érték pedig könnyen megfogható kapcsolatban van az új mérték alattival, így egyszerű számolással megkaphatjuk abból.

Legyen tehát  $X_t$  egy temperált stabilis Lévy folyamat  $(\Omega, F, P)$ -n,

$$\nu(dx) = \frac{c_+ e^{-\lambda_+ x}}{x^{1+\alpha_+}} 1_{x>0} + \frac{c_- e^{-\lambda_- |x|}}{|x|^{1+\alpha_-}} 1_{x<0} \text{ Lévy-sűrűségfüggvénnyel.}$$

Bontsuk fel  $X_t$ -t  $X_t^+ + X_t^-$ -ra, ezeknek a karakterisztikus tripletjei legyenek  $(0, \nu_+, \gamma_+)$  és  $(0, \nu_-, \gamma_-)$ , Lévy sűrűségfüggvények pedig

$$\nu_+(dx) = \frac{c_+ e^{-\lambda_+ x}}{x^{1+\alpha_+}} 1_{x>0}, \text{ és}$$

$$\nu_-(dx) = \frac{c_- e^{-\lambda_- |x|}}{|x|^{1+\alpha_-}} 1_{x<0}$$

Csináljunk egy  $c$  konstanst a következő képpen:

Ha  $0 < \alpha < 1$ , akkor

$$c = -\lambda_+ \gamma_0^+ \Gamma(-\alpha_+) \lambda_+^{\alpha_+} c_+ + \lambda_- \gamma_0^- \Gamma(-\alpha_-) \lambda_-^{\alpha_-} c_-$$

ebben az esetben a Lévy-Hincsin formulában szereplő csonkító függvényünk a konstans 0 lesz

$1 < \alpha < 2$  esetén a csonkítófüggvénynek az identitásfüggvényt választjuk, így

$$c = -\lambda_+ \gamma_c^+ \Gamma(-\alpha_+) \lambda_+^{\alpha_+} c_+ (\alpha_+ - 1) + \lambda_- \gamma_c^- \Gamma(-\alpha_-) \lambda_-^{\alpha_-} c_- (\alpha_- - 1).$$

Ekkor  $U_t = \lambda_+ X_t^+ - \lambda_- X_t^- + ct$  esetén  $e^{U_t}$  P-martingál lesz, továbbá

a  $\frac{dQ}{dP} \mid F_t = e^{U_t}$  által definiált Q mérték ekvivalens P-vel, és Q alatt  $X_t^+$  és  $X_t^-$

stabilis folyamatok lesznek.

$X_t^+$  és  $X_t^-$  karakterisztikus tripletjei Q alatt  $(0, \tilde{\nu}_+, \tilde{\gamma}_+)$  és  $(0, \tilde{\nu}_-, \tilde{\gamma}_-)$ , a Lévy-sűrűségfüggvények

$$\tilde{\nu}_+(x) = \frac{c_+}{x^{1+\alpha_+}} \mathbf{1}_{x>0} \text{ és } \tilde{\nu}_-(x) = \frac{c_-}{|x|^{1+\alpha_-}} \mathbf{1}_{x<0}$$

A gammák pedig a korábban bemutatott  $\tilde{\gamma}_h - \gamma_h = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) (\nu' - \nu)(dx)$  feltételből következően

$0 < \alpha < 1$  esetén a konstans 0 csonkítófüggvény miatt  $\tilde{\gamma}_0^+ = \gamma_0^+$  és  $\tilde{\gamma}_0^- = \gamma_0^-$ ,

$1 < \alpha < 2$  esetén pedig

$$\tilde{\gamma}_c^+ = \gamma_c^+ + c_+ \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-\lambda_+ x}}{x^{\alpha_+}} dx = c_+ \lambda_+^{\alpha_+-1} \Gamma(1 - \alpha_+), \text{ illetve}$$

$$\tilde{\gamma}_c^- = \gamma_c^- + c_- \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-\lambda_- |x|}}{|x|^{\alpha_-}} dx = c_- \lambda_-^{\alpha_- - 1} \Gamma(1 - \alpha_-)$$

Megjegyzendő, hogy  $X_t^+$  és  $X_t^-$  közül az egyikből egy kt lineáris függvényt kivonva, a másikhoz pedig hozzáadva ugyanúgy teljesülnek a kívánt egyenlőségek, azaz a felbontás csak lineáris függvény erejéig egyértelmű.

Q definíciója miatt  $X_T$   $F_T$ -mérhető f függvényeire fennáll, hogy

$$E^P [f(X_T)] = E^Q \left[ f(X_T) e^{-\lambda_+ X_T^+ + \lambda_- X_T^- - cT} \right]$$

A jobb oldali várható értéket pedig Q alatt tudjuk becsülni, hiszen Q alatt stabilis folyamatokat kell kiértékelni benne.  $f(X_T)$  Monte Carlo becslése,  $\hat{f}(X_T)$  így nem más, mint

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X_T^i) \exp(-\lambda_+ X_T^{i,+} + \lambda_- X_T^{i,-} - cT)$$

Amennyiben CGMY folyamatot szeretnénk szimulálni, vannak más lehetőségeink is. Az első lehetőség, hogy átskálázott Brown-mozgásként tekintünk a folyamatra, és az átskálázó folyamat, és a Brown mozgás szimulálásával kapunk megfelelő eloszlású eredményt. Az eljárás Yor és Madan[12] munkájában szerepel.

Állítás: *Legyen  $c, \lambda_+, \lambda_- > 0$ ,  $Z$  pedig egy szubordinátor, azaz egy monoton növő Lévy folyamat, 0 drifttel, és*

$$\nu_Z(x) = \frac{C e^{\frac{\alpha}{2}A^2 - \frac{\alpha}{4}B^2} D_{-\alpha}(B\sqrt{x})}{x^{\frac{\alpha}{2}+1}}$$

Lévy-mértékkel; itt  $D$  a parabolikus-henger függvény,  $A = \frac{\lambda_- - \lambda_+}{2}$ , és  $B = \frac{\lambda_- + \lambda_+}{2}$

Ekkor az  $X_t = AZ_t + W_{Z_t}$  átskálázott Wiener folyamat egy  $c, \lambda_+, \lambda_-, \alpha$  paraméterű CGMY folyamat lesz.

A szimulációhoz tehát elég, ha a szubordinátor folyamatot és a Wiener folyamatot szimuláljuk. A szubordinátor folyamatra igaz a következő:

Állítás:  $Z_t$  abszolút folytonos egy  $\alpha/2$ -stabilis szubordinátorra nézve. Az  $\alpha/2$  szubordinátor Lévy mértéke

$$\nu_{\frac{\alpha}{2}}(x) = \frac{2^{-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\pi} C}{\Gamma(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}) x^{1+\frac{\alpha}{2}}} 1_{x>0} = \frac{K}{x^{1+\frac{\alpha}{2}}} 1_{x>0}$$

Továbbá fennáll a következő kapcsolat  $Z_t$  és az  $\alpha/2$  szubordinátor között:

$$\nu_Z(x) = f(x) \nu_{\frac{\alpha}{2}}(x),$$

ahol

$$f(x) = \frac{2^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}) e^{\frac{\alpha}{2}A^2 - \frac{\alpha}{4}B^2} D_{-\alpha}(B\sqrt{x})}{\sqrt{\pi}}$$

Ez az  $f(x) \leq 1$ , így Rosinski elutasító eljárásával[2] szimulálhatjuk  $Z$  trajektóriáit a stabilis subordinátoréból. Így a teljes szimuláció a következő módon történik:

Először szimulálni fogjuk az  $\alpha/2$  szubordinátort, mégpedig egy compound Poisson folyamattal, melynek Lévy-mértéke  $\frac{K}{x^{1+\frac{\alpha}{2}}} 1_{x>0}$ , driftje pedig

$$d = \int_0^\varepsilon y \frac{K}{y^{1+\frac{\alpha}{2}}} 1_{y>0} dy = \frac{K\varepsilon^{1-\frac{\alpha}{2}}}{1-\frac{\alpha}{2}}$$

A drifttel azt érjük el, hogy az  $\varepsilon$ -nál kisebb ugrásokat pont a várható értékükre cseréljük az adott intervallumon.  $\varepsilon$  csökkentésével pontosabb szimuláció érhető el, a futási idő rovására.

Ezután a stabilis subordinatorból Rosinski eljárásával szimuláljuk  $Z$ -t. Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy a stabilis szubordinátor  $y_i$  ugrásai közül azokat tartjuk meg, amelyre  $f(y_i) > U_i$ , ahol  $U_i$  egy egyenletes eloszlású valószínűségi változó 0 és 1 között. Tehát  $Z$  közelítése:  $\hat{Z}_t = td + \sum_i y_i 1_{f(y_i) > U_i}$ .

Végül pedig  $X_t$  közelítése:  $\hat{X}_t = A\hat{Z}_t + W_{\hat{Z}_t}$

Egy másik, és sokkal általánosabb lehetőség végtelen véletlen sor limeszeként felírni a folyamatot. Ez az eljárás Bianchi et al[9] cikkjében található, és egy speciális esete a Rosinski[1] által bebizonyított előállításnak.

Állítás: Legyen  $\{U_j\}$  független,  $(0, T)$ -n egyenletes eloszlású valószínűségi változókból álló sorozat,  $\{E_j\}$  és  $\{E'_j\}$  1 paraméterű exponenciálisokból álló i.i.d. sorozatok,  $\Gamma_j = E'_1 + \dots + E'_j$ ,  $\{V_j\}$  szintén i.i.d.,  $P(V_j = -G) = P(V_j = M) = \frac{1}{2}$ . Feltételezzük, hogy ezek a sorozatok ( $\Gamma_j$ -t kivéve) kölcsönösen is függetlenek. Legyen  $Y$  0 és 2 közötti konstans,  $\|\sigma\| = \sigma(S^{d-1}) = 2C$ . Ekkor

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{Y\Gamma_j}{2C} \right)^{-1/Y} \wedge E_j U_j^{1/Y} |V_j|^{-1} \right] \frac{V_j}{|V_j|} I_{\{U_j \leq t\}} + tb_T, \quad t \in [0, T],$$

ahol  $b_T =$

$$\begin{cases} -\Gamma(1-Y)C(M^{Y-1} - G^{Y-1}) & \text{ha } Y \neq 1 \\ (2e^* + \log(2TC))C(M^{Y-1} - G^{Y-1}) - C(G^{Y-1}\log G - M^{Y-1}\log M) & \text{ha } Y = 1 \end{cases}$$

majdnem mindenütt és egyenletesen konvergál egy  $(C, G, M, Y, 0)$  paraméterű CGMY-folyamathoz. A képletben szereplő  $e^*$  az Euler konstans

A KR-temperált stabilis folyamatoknak is létezik hasonló előállítása, mely a következő: Legyen itt is  $\{U_j\}$  független,  $(0, T)$ -n egyenletes eloszlású valószínűségi változókból álló sorozat,  $\{E_j\}$  és  $\{E'_j\}$  1 paraméterű exponenciálisokból álló i.i.d. sorozatok,  $\Gamma_j = E'_1 + \dots + E'_j$ . Legyenek  $\alpha \in (0, 2)$ ,  $k_+, k_-, r_+, r_- > 0$ ,  $p_-, p_+ \in (-\alpha, \infty) \setminus \{-1, 0\}$  konstansok. Legyen  $\{V_j\}$  i.i.d. a következő sűrűségfüggvénnyel:

$$f_V(r) = \frac{1}{\|\sigma\|} \left( k_+ r_+^{-p_+} I_{\{r > \frac{1}{r_+}\}} r^{-\alpha-p_+-1} + k_- r_-^{-p_-} I_{\{r < -\frac{1}{r_-}\}} |r|^{-\alpha-p_- -1} \right)$$

ahol  $\|\sigma\| = \frac{k_+ r_+^\alpha}{\alpha + p_+} + \frac{k_- r_-^\alpha}{\alpha + p_-}$

Itt is feltesszük, hogy  $\{U_j\}$ ,  $\{E_j\}$ ,  $\{E'_j\}$ ,  $\{V_j\}$  kölcsönösen függetlenek.

A 0 és 1 közötti  $\alpha$ -ra, illetve a megfelelő paraméterfeltételeket teljesítő eloszlásokra egyszerűbb alakja van a végtelen sorral való előállításnak, de az eloszláscsalád többi tagját is el lehet készíteni, még ha több munka is van vele. Lássuk először az egyszerűbb esetet:

Ha  $\alpha \in (0, 1)$ , vagy  $\alpha \in [1, 2)$  és  $k_+ = k_-$ ,  $r_+ = r_-$ ,  $p_+ = p_-$ , akkor a

$$\sum_{j=1}^{\infty} I_{\{U_j \leq t\}} \left( \left( \frac{\alpha \Gamma_j}{T \|\sigma\|} \right)^{-1/\alpha} \wedge E_j U_j^{1/\alpha} |V_j|^{-1} \right) \frac{V_j}{|V_j|} - \Gamma(1-\alpha) \left( \frac{k_+ r_+}{p_+ + 1} - \frac{k_- r_-}{p_- + 1} \right)$$

végtelen sor majdnem mindenütt és egyenletesen konvergál a  $(k_+, k_-, r_+, r_-, p_+, p_-, \alpha, 0)$  paraméterű KR-temperált stabilis folyamathoz.

Ha  $1 \leq \alpha < 2$ , akkor a következő végtelen sor adja a kívánt eredményt:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[ I_{\{U_j \leq t\}} \left( \left( \frac{\alpha \Gamma_j}{T \|\sigma\|} \right)^{-1/\alpha} \wedge E_j U_j^{1/\alpha} |V_j|^{-1} \right) \frac{V_j}{|V_j|} - \frac{t}{T} \left( \frac{\alpha_j}{T \|\sigma\|} \right)^{-1/\alpha} x_0 \right] + tb_T,$$

$$b_T = \begin{cases} \alpha^{-1/\alpha} \zeta\left(\frac{1}{\alpha}\right) T^{-1} (T \|\sigma\|)^{1/\alpha} x_0 - \Gamma(1 - \alpha) x_1 & \text{ha } 1 < \alpha < 2 \\ (2e^* + \log(T \|\sigma\|)) x_1 - \left(\frac{k_+ r_+}{p_+ + 1} \left(\log r_+ - \frac{1}{p_+ + 1}\right) - \frac{k_- r_-}{p_- + 1} \left(\log r_- - \frac{1}{p_- + 1}\right)\right) & \text{ha } \alpha = 1 \end{cases},$$

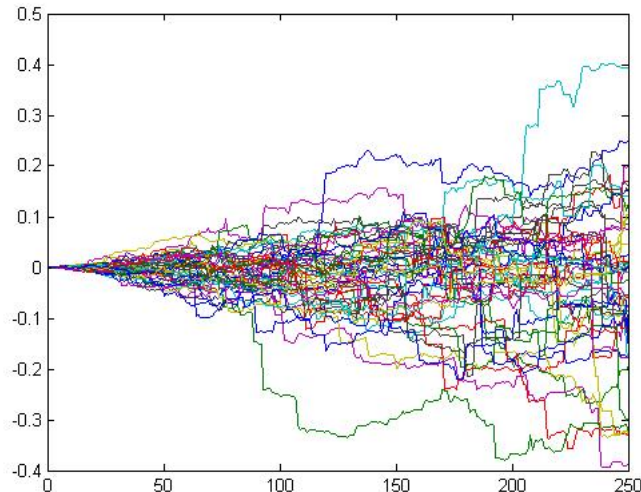
$$x_0 = \|\sigma\|^{-1} \left(\frac{k_+ r_+^\alpha}{\alpha + p_+} - \frac{k_- r_-^\alpha}{\alpha + p_-}\right), \quad x_1 = \frac{k_+ r_+}{p_+ + 1} - \frac{k_- r_-}{p_- + 1}$$

Végül tekintsünk egy konkrét opcióárazási példát, adott kockázatmentes paraméterek mellett. A modellek közül a választásunk a CGMY-ra esett. Látni fogjuk, hogy a kapott implicit volatilitások jól visszaadják a piacon tapasztaltakat, a kirajzolódó alakzatot implied volatility smile-nak nevezzük. A szimulációhoz feltételezzük, hogy a részvény ára jelen pillanatban 100 dollár, a kockázatmentes kamatrátát 0.04, és negyedéves vételi opciót szeretnénk árazni, azaz  $T=0.25$ . Tegyük fel, hogy kockázatmentes paramétereink a következők:  $C=0.5$ ,  $G=3.5$ ,  $M=2$ ,  $Y=0.75$ . A részvényárdinamikánk:  $S_t = 100e^{X_t}$

Célunk az opciók árának, és az implicit volatilitásnak a kiszámítása. Az implicit volatilitást úgy kaphatjuk meg, hogy először kiszámítjuk, a modellünk szerint kapott opcióárat adott kötési ár és lejáratidő mellett a Black-Scholes formula milyen volatilitási paraméter mellett adná vissza, utána pedig a kötési árak függvényében kirajzoljuk a kapott volatilitásokat.

A  $K$  kötési árú call opció ára  $e^{-rT} E((S_T - K)^+) = e^{-0.01} E((S_T - K)^+)$

Első lépésben szimuláljunk 1000 trajektóriát, a végtelen sorok módszerét használva. Az alábbi ábrán ezen trajektóriák közül látható 50 darab.



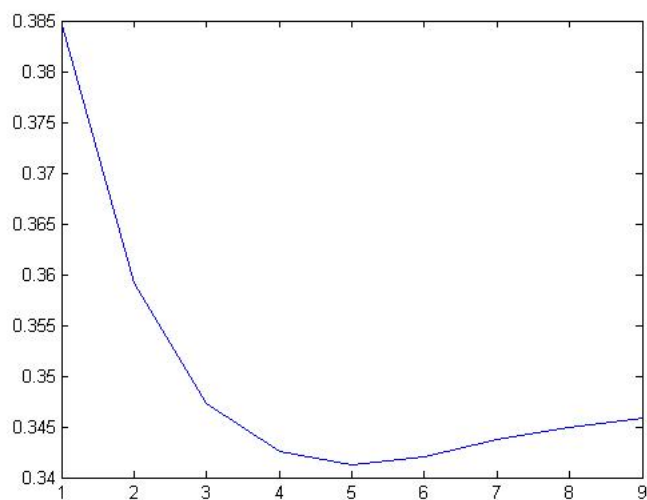
Ezzel a módszerrel 0 várható értékű CGMY folyamatokat szimuláltunk, nekünk azonban a kockázatmentesség miatt olyanra van szükségünk, amelyre teljesül hogy

$Ee^{X_t} = e^{rT} = e^{0.01}$ . Emiatt az 1000 darab  $X_T$  mindegyikéhez adjuk hozzá azt az  $L$  konstanst, mellyel teljesül az  $\frac{1}{1000} \sum_{j=1}^{1000} e^{X_{T,j}+L} = e^{0.01}$  egyenlőség, itt  $X_{T,j}$  a  $j$ . szimuláció során kapott értéke  $X_T$ -nek. Ezt az  $L$  számot természetesen az eloszlás Laplace exponensének kiszámításával is megkaphattuk volna, hiszen  $L$  a tapasztalati Laplace exponensnek és a kamatrátának a különbségének az ellentettje..

A call opció árának becslése így  $C(K) = \frac{1}{1000} e^{-0.01} \sum_{j=1}^{1000} \max(S_{T,j} - K, 0)$ , ahol  $S_{T,j} = e^{X_{T,j}}$

A kapott árak, és a hozzájuk tartozó implicit volatilitások a következők:

Kötési ár	Opció ár
80	21.7304
85	17.3213
90	13.3370
95	10.0128
100	7.2721
105	5.1483
110	3.5597
115	2.4003
120	1.5779



A kapott implicit volatilitások jól visszaadják a piacon tapasztalt alakot.

## 6. Összefoglalás

Dolgozatomat a Lévy folyamatok alapvető tételeinek bemutatásával kezdtem. Ezután a temperált stabilis eloszlások fogalmát definiáltam, és bemutattam fontosabb tulajdonságaikat, ehhez Rosinski[2] munkáját használtam fel. A második fejezetben a CTS, MTS és KR eloszlások leírása történt. Az MTS eloszláshoz Kim et al[10], a KR eloszláshoz Kim et al[7] munkáját használtam fel. A harmadik fejezetben a második fejezet eloszlásaiból készített folytonos piaci modelleket mutattam be, ezekhez Kim et al[8] munkája volt a támaszpont számomra. A negyedik részben a CTS-GARCH, azt MTS-GARCH és a KR-GARCH modellekkel foglalkoztam, Kim et al[8] cikkjét felhasználva. Az ötödik fejezetben KR és CTS folyamatok szimulálása található, illetve egy példafolyamaton keresztül a Monte Carlo módszeres opcióárzás bemutatása, és az implicit volatilitások kiszámítása. A szimulációhoz használt programot MATLAB R2009B programban írtam, a programkódok megtalálhatóak a függelékben.



Felhasznált irodalom:

1. K. Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press, (1999)
2. Jan Rosinski, Tempering Stable Processes, *Stochastic processes and their applications*, 117(6):677-707. (2007)
3. Jan Rosinski, Series representations of Lévy processes from the perspective of point processes, *Lévy processes-Theory and Applications*, pp. 401-415. Birkhauser, Boston, (2001)
4. J.-C. Duan, The GARCH Option Pricing Model. *Mathematical Finance* 5, 1, 13-32. (1995)
5. I. Koponen, Analytic approach to the convergence of truncated Lévy flights towards the Gaussian stochastic process. *Physical Review E*, 52, 1197-1199. (1995)
6. P. Carr, H. Geman, P. Madan, M. Yor, The fine structure of asset returns: An empirical investigation. *Journal of Business*, 75, 305-332. (2002)
7. Y. S. Kim, S. T. Rachev, M. L. Bianchi, F. J. Fabozzi, A new tempered stable distribution, and its application to finance. *Risk Assessment: Decisions in Banking and Finance*, pp. 51-84. Physika Verlag, Springer, (2007)
8. Y. S. Kim, S. T. Rachev, M. L. Bianchi, F. J. Fabozzi, Financial market models with Lévy processes and time-varying volatility. *Journal of Banking and Finance*, 32(7):1363-1378, (2008)
9. M. L. Bianchi, S. T. Rachev, Y. S. Kim, F. J. Fabozzi, *Tempered stable distributions and processes in finance: numerical analysis*, May 30, 2008
10. Y. S. Kim, S. T. Rachev, D. M. Chung, M. L. Bianchi, *The modified tempered stable distribution, GARCH Models and Option Pricing*, (2006) (Revised 2008)
11. J. Poirot, P. Tankov, Monte Carlo Option Pricing for Tempered Stable(CGMY) Processes. *Asia-Pacific Financial Markets*, 13(4):327-344, (2006)
12. M. Yor, D. B. Madan, CGMY and Meixner subordinators are absolutely continuous with respect to one sided stable subordinators, Prépublication du Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires, (2005)

## Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretném megköszönni témavezetőmnek, Márkus Lászlónak a téma kiválasztásában és annak feldolgozásában nyújtott, idejét nem kímélő segítségét.

A felhasznált program kódja:

```
const_euler= 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992;
lambda=1;
clear X
clear V
clear E
clear F
clear Gamma
if (0<Y) && (Y<2) && Y~=1 bT=-gamma(1-Y)*C*(M^(Y-1)-G^(Y-1));
else if Y == 1 bT= (2*const_euler + log(2*T*C))*C*(M^(Y-1)-G^(Y-1))-C*(G^(Y-
1)*log(G)-M^(Y-1)*log(M));
end X=zeros(250,1000);
l=1;
for l=1:1:1000
for j=1:N
N a=randi(2,1);
if a==1 V(j)=-G;
else if a==2 V(j)=M;
end
end
U= T*rand(N,1);
E=exprnd(lambda,N,1);
F=exprnd(lambda,N,1);
Gamma(1)=F(1);
for i=2:N, Gamma(i)=Gamma(i-1)+F(i); end
s=1;
for t=(T/250):(T/250):T,
Z=zeros(N,1);
for j=1:N,
if U(j)<=t Z(j)= min((Y*Gamma(j)/(2*C))^(-1/Y),E(j)*(U(j)^(1/Y))*(abs(V(j))^(1)) * V(j)/abs(V(j))); else Z(j)= 0; end j=j+1;
end
X(s,l)=sum(Z)+t*bT;
s=s+1;
end
l=l+1; end
```

```
m=1
Impv=zeros(9,1)
for K=80:5:120
clear S clear Ppr clear Cpr
for f=1:1:1000 S(f)=100*exp(X(250,f)+0.0735); f=f+1; end
for a=1:1:1000 Ppr(a)=max(K-S(a),0); end
for b=1:1:1000 Cpr(b)=max(S(b)-K,0); end
Impv(m)=blsimpv(100,K,0.04,0.25,sum(Cpr)/1000*exp(-0.01));
m=m+1;
end
```