

Pénzügyi idősorok előrejelzése ARMA-GARCH módszerekkel

Diplomamunka

Írta: Merész Gabriella

Alkalmazott matematikus szak

Témavezetők:

dr. habil. Lőrincz András (CSc), Szabó Zoltán (PhD)
Programozáselmélet és Szoftvertechnológiai Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Informatikai Kar



Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

2012

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Tézisek	3
3. ARMA, ARMA-GARCH modellek és paraméterbecslésük	4
3.1. ARMA és ARMA-GARCH modell	4
3.1.1. ARMA modell	4
3.1.2. ARMA-GARCH modell	5
3.2. Modell indentifikáció módszerei	6
3.2.1. EM módszer	6
3.2.2. Subspace módszer	7
3.2.3. Subspace-EM módszer	8
3.2.4. Rekurzív legkisebb négyzetes módszer	8
4. Numerikus kísérletek	10
4.1. Vizsgált kérdések	10
4.2. Adatbázisok ismertetése	10
4.2.1. Különböző típusú mintavételezés	12
4.3. Választott paraméter tartomány	12
4.3.1. A becslés folyamata	12
4.3.2. Paraméter tartomány	15
4.4. Alkalmazott jóság mércék	16
4.5. Eredményeim	16
4.5.1. ARMA modell eredményei	17
4.5.2. RLS módszer eredményei	21
4.5.3. ARMA-GARCH modellel elért eredmények	28
4.5.4. Eredmények a heti mintavételezésű adatokon	40
4.5.5. ARMA modell és a "high-low" segítségével elért eredmények	46
4.5.6. ARMA-GARCH modell és a "high-low" segítségével elért eredmények	54
5. Konklúzió	69

Köszönetnyilvánítás

Köszönetet mondok témavezetőimnek dr. habil. Lőrincz Andrásnak (CSc), Szabó Zoltánnak (PhD), akik lehetőséget és segítséget biztosítottak munkám sikeres elvégzéséhez és dolgozatom megírásához. Különösen köszönöm a segítőkész támogatását és dolgozatom alapos és kritikus átnézését.

Hálás vagyok tanárainknak, akik nélkülözhetetlen szakmai tudással alapozták meg munkámat, és hozzájárultak szakmai fejlődésemhez.

Köszönöm szüleimnek, akik egyetemi éveim alatt támogattak, és barátaimnak, akik szakmai és emberi oldalukkal is hozzájárultak sikeres diplomamunkámhoz.

1. fejezet

Bevezetés

Az idősorok elemzése és predikciója igen jelentős feladat napjainkban. Fontos a mögötte rejlő dinamika felismerése és modellezésének segítségével az előrejelzés. Számos területen használják fel az eddig kifejlesztett becslési és predikciós módszereket. Ezek közé tartozik az időjárás előrejelzés, az agyhullámok vizsgálata, a gazdasági mutatók előrejelzése, a jelfeldolgozás és a pénzügyi idősorok. A tőzsdei vagy pénzügyi idősorok elemzéséről már széles szakirodalom áll rendelkezésre, dolgozatomban ezzel fogok foglalkozni. Ezekbe vezet be Ruey S. Tsay (2002) könyve ([1]).

Az idősorok normalizálását tekintve a cikkek általában vagy az egyszerű hozamot vagy a logaritmikus hozamot használják ([2–8]), én az egyszerű hozamot vizsgáltam. A jószág mércéje leginkább az abszolút eltérés, azaz a becslés és valós adatok különbségének abszolút értéke ([2, 5, 7, 9, 10]), de találkozunk profit alapú ([9]) mércével is, én ezt vizsgálom numerikus kísérleteim során. Így azt mutatom meg, hogy a predikció segítségével adott befektetési intervallumon milyen profit érhető el.

Az idősor analízis az idősorok statisztikai elemzésével foglalkozik, vizsgálatának tárgya az idősorokon mutatkozó tendenciák, rejtett periódusok kimutatása, valamint ezek becslése, predikciója. Szűrési folyamatok terén nagy előrelépést értek el a Kálmán-szűrő segítségével ([11, 12]). Az idősor analízisben kiugró szerepet tulajdonítanak az úgynevezett lineáris módszereknek, az ARMA és ARMA-GARCH modellezésnek ([13, 14]). Az ARMA modell zajáról feltesszük, hogy ez i.i.d. (független azonos eloszlású), ezt gyengíthetjük, amennyiben az ARMA-GARCH modellt alkalmazzuk. Megfigyelhető pénzügyi idősorok esetén, hogy kis értékeket gyakran követ szintén kisebb, nagyobbakat pedig nagy. Ez alapján feltehetjük, hogy a hibatagban valamiféle dinamika van ([3–7]) és ezt az ARMA-GARCH modellel közelíthetjük.

Fontos megismerni, hogy a már több területen alkalmazott modell becslési módszerek hogyan viselkednek pénzügyi idősorok esetén. Én ezek közül az EM (Expectation Maximization), subspace, subspace-EM módszert és az RLS (Recursive Least Squares) algoritmust vizsgáltam.

A tőzsdei indexek jól kereskedhető termékek, adataik könnyen hozzáférhetőek, így ezek

jósolhatóságát vizsgálom, profitorientált szempontból. Az általam használt idősorok külföldi tőzsdék indexeinek (DIA (Dow Jones Industrial Average), Russell2000 és Nikkei225 (Tokiói tőzsde indexe)) napi és heti mintavételezésű árai, ugyanis több cikkben is olvasható ([4,6,7,9]), hogy napi mintavételezés helyett heti adatokat vizsgálva erősebb dinamika figyelhető meg így predikálhatóbb az idősor. Segédváltozók hozzávételével a becslés pontossága gyakran javítható, ezért több dimenziós idősorokat is megvizsgáltam, ahol a záróár mellé a napi legnagyobb és legalacsonyabb kereskedési ár különbségét is felhasználtam a modellezés során.

Pénzügyi termékek múltjának minden határon túli figyelembevétele gyakran káros hatással van a modellezésre, emiatt érdemes lehet a múltbéli értékeket folyamatosan elfelejteni. Emiatt a rekurzív (online) technikák is érdekesek, ezek közül az RLS módszert alkalmaztam. Dolgozatom során ezekkel a főbb irányokkal foglalkozom.

A 2. fejezetben ismertetem a téziseimet, főbb kérdéseket amiket numerikus kísérleteim során vizsgáltam. A 3. fejezetben egyrészt bemutatom az idősorokra kísérleteim során alkalmazott lineáris modelleket, azaz az ARMA és ARMA-GARCH modelleket, majd a második felében a modell paramétereinek becsléséhez kísérleteim során használt matematikai módszereket (EM, subspace, subspace-EM és RLS) ismertetem. A 4. fejezetben a kísérleteimre térek rá. Először sorra veszem az idősorokat, amiket használtam, az idősorok különböző típusait, a mintavételezés különböző típusait, majd ismertetem a modellezés során használt paraméter tartományokat, illetve magának a predikciónak a folyamatát. Ezt követően még az eredmények ismertetése előtt bemutatom az általam használt jóság mércét. Kísérleteim eredményét ezután foglalom össze 6 alfejezetben. Először 1 dimenziós, napi mintavételezésű idősoron az ARMA modellezés eredményét mutatom be subspace, subspace-EM, EM és RLS módszerekkel, majd pedig ezeket a módszereket alkalmazva az ARMA-GARCH modellel predikálok. Ezt követően bemutatom a heti mintavételezésű adatokon elért eredményeket, majd pedig 2 dimenziós ARMA és ARMA-GARCH modellek alkalmazásával kapott becslések teljesítményét. Az 5. fejezetben összefoglalom a kísérletek eredményét, numerikus tapasztalataimat.

2. fejezet

Tézisek

Dolgozatom során pénzügyi idősorokra koncentrálok, amelyek becslhetőségének jósgátát nem az abszolút eltérésben mérem, hanem egyrészt a növekedés/csökkenés predikciójának helyessége, másrészt a modell, és predikció által elérhető profit alapján. Legfőbb törekvésem az abszolút eltérésen keresztül már megfigyelt, tanulmányozott eredmények és a pénzügyi idősorok becslhetőségének igazolása.

A következőket vizsgáltam és igazoltam:

- A klasszikusan használt abszolút eltérés helyett a pénzügyileg jobban motivált, profit alapú jószágmérccékkel vizsgáltam meg a pénzügyi idősorok előrejelezhetőségét.
- A hagyományos i.i.d.(független azonos eloszlás) feltevessel élő ARMA folyamat modell alkalmazhatóságát a pénzügyi idősorokhoz jobban illeszkedő ARMA-GARCH folyamat modellel, több pénzügyi termékre (DIA, Russell2000, Nikkei225) és gazdasági időszaktípusra (növekedést mutató és törést tartalmazó idő intervallumok) numerikusan hasonlítottam össze.
- Az ARMA/ARMA-GARCH modellek becslésére a vizsgált pénzügyi előrejelzési feladaton 4 identifikációs módszer (EM, subspace, subspace-EM, RLS) numerikus összevetését végeztem el.
- Több dimenziós ARMA és ARMA-GARCH modellek alkalmazásával tanulmányoztam a predikciós feladatokban a segédváltozók figyelembevételét. Numerikus eredményeim azt mutatják, hogy a legmagasabb-legalacsonyabb ár figyelembevétele pontosabb becslést tud eredményezni.
- Összevettem a napi és heti mintavételezés alkalmazhatóságát. Numerikus kísérleteim a heti mintavételezési gyakoriság előnyösebb voltát igazolják.

3. fejezet

ARMA, ARMA-GARCH modellek és paraméterbecslésük

Ebben a fejezetben ismertetem a modellezési típusokat, amelyeket magam is használtam a modellezés során. Ezek lineáris modellezési típusok, az ARMA és ARMA-GARCH modell.

A fejezet második felében a modell paramétereinek becslésére alkalmas módszereket mutatom be, így az EM (Expectation Maximization), subspace, subspace-EM és RLS (Recursive Least Squares) módszereket, ahol az első 3 úgynevezett batch módszer, míg a negyedik rekurzív típusú.

3.1. ARMA és ARMA-GARCH modell

Ebben az alfejezet ismertetem az ARMA illetve ARMA-GARCH modelleket ([13–18]). Az ARMA egy rövidítés, jelentése az AR (autóregresszív) és a MA (mozgó átlag) szavak rövidítésének összetételéből adódik. A GARCH kifejezés, amely a maradékok szórásának fejlődését hivatott leírni, ezzel enyhítve az ARMA maradékaira vonatkozó független azonos eloszlású feltételt. Ebben az esetben ez egy G (generált) ARCH modell, ahol AR jelentését már ismerjük, a CH (conditional heteroscedastic) része a modellnek, ennek leírása Bollerslev cikkéből ([15]) ismert.

3.1.1. ARMA modell

Az ARMA modell bevezetéséhez először definiálom az AR és MA folyamatokat. Ezek segítségével kapjuk meg az ARMA modellt. Ezen modellek megtalálhatóak a már említett forrásokban ([1,13,14]), illetve ennek hiányzó adatokat is megengedő változatáról R. Kohn és C. F. Ansley (1986) cikke ([19]) számol be.

Az AR folyamat ötlete lényegében az, hogy az idősorunk $\mathbf{y}(t)$, t -beli állapota függ az azt megelőző p időpillanatban mért értékektől, azaz:

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^p \mathbf{F}_i \mathbf{y}(t-i) + \mathbf{e}(t), \quad (3.1)$$

ahol $\mathbf{F}_i \in \mathbb{R}^{D \times D}$ a megfelelő p darab AR együtthatómátrix és $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^D$ a folyamat zajtényezőjét jelöli, amelyről feltesszük, hogy független azonos eloszlású valószínűségi változó.

Az MA folyamatra tekinthetünk úgy, mint a hiba dinamikája, ami q időpillanat múlva is hatással van az idősorunk fejlődésére. Ezt a következőképpen írjuk le:

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{j=1}^q \mathbf{H}_j \mathbf{e}(t-j) + \mathbf{e}(t), \quad (3.2)$$

ahol $\mathbf{H}_j \in \mathbb{R}^{D \times D}$ a megfelelő q darab MA együtthatómátrix és $\mathbf{e}(t-j) \in \mathbb{R}^D$ a folyamat zajtényezőjét jelöli a különböző időpontokban.

Tehát az ARMA modellünk az idősorra egyrészt egy autoregresszív (AR) és egy mozgóátlag (MA) tagból áll. Azaz:

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^p \mathbf{F}_i \mathbf{y}(t-i) + \mathbf{e}(t) + \sum_{j=1}^q \mathbf{H}_j \mathbf{e}(t-j) \quad (3.3)$$

ARMA(p,q) (Autoregressive Moving Average) folyamat, vagy röviden

$$\mathbf{F}[z]\mathbf{y} = \mathbf{H}[z]\mathbf{e}, \quad (3.4)$$

ahol $\mathbf{F}[z] = \mathbf{I} - \sum_{i=1}^p \mathbf{F}_i z^i \in \mathbb{R}[z]^{D \times D}$ jelöli az AR (p rendű), és $\mathbf{H}[z] = \mathbf{I} + \sum_{j=1}^q \mathbf{H}_j z^j \in \mathbb{R}[z]^{D \times D}$ MA (q rendű) polinom mátrix reprezentációját, illetve \mathbf{I} az egységmátrixot, $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^D$ a folyamat zajtényezőjét és z az időlépték operátorát. A hagyományos ARMA modellnél az \mathbf{e} -ről (folyamat zajáról) feltesszük, hogy független azonos eloszlású az időben, t függvényében. Ez erős korlátozásnak tűnhet pénzügyi idősorok esetén.

3.1.2. ARMA-GARCH modell

Az idősorunk zajának \mathbf{e} független azonos eloszlású (i.i.d. t -ben) tulajdonságát (amit a klasszikus ARMA modell feltételez) gyengíteni lehet, ha egy időben változó feltételes szórásról tételezünk fel, hiszen az i.i.d. tulajdonság egy erős megszorítás. Ebben az esetben a \mathbf{e} modellezhető úgynevezett GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) folyamattal ([15–17]).

AZ egyszerű ARCH(s) modell esetén feltehetjük, hogy az \mathbf{e} két részből áll, (i) \mathbf{z}_t sztochasztikus részből és (ii) σ_t időtől függő változótól, a következőképpen:

$$\mathbf{e}_t = \sigma_t \mathbf{z}_t, \quad (3.5)$$

ahol \mathbf{z}_t egy 0 várható értékű 1 szórású folyamat, mint például a standard normális eloszlás ($N(0,1)$), és σ_t -t az alábbi egyenletből kapjuk meg, ahol az $\alpha_0 > 0$ és $\alpha_i \geq 0, i > 0$:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^s \alpha_i \mathbf{e}_{t-i}^2 \quad (3.6)$$

Egydimenziós esetben a GARCH(r,s) modell esetén σ^2 a következőképpen bővül ki, a G (generalized) tag miatt:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^s \alpha_i \mathbf{e}_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^s \beta_i \sigma_{t-i}^2, \quad (3.7)$$

ahol σ^2 a GARCH rész és \mathbf{e}^2 az ARCH tag.

A GARCH konstrukciót kísérleteim során több dimenziós esetben is alkalmaztam, ekkor a modellt 2 tulajdonság írja le: (i) feltétel nélküli momentumok $E[\mathbf{e}_t] = \mathbf{0}$, $cov(\mathbf{e}_t) = \mathbf{\Sigma}_t$, és (ii) a feltételes momentumok, $E_{t-1}[\mathbf{e}_t] = \mathbf{0}$, $E_{t-1}[\mathbf{e}_t \mathbf{e}_t^T] = \mathbf{\Sigma}_t$. Ahol $E_{t-1}[\cdot]$ jelöli az argumentum várható értékét, feltéve az addig rendelkezésünkre álló információkat $t-1$ -ig, és itt 'T' a transzponálást jelöli. A GARCH(r,s) modellben a feltételes szórások, $\mathbf{\Sigma}_t$ -k a következőképpen néznek ki:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B}[z])\text{vech}(\mathbf{\Sigma}_t) = \text{vech}(\mathbf{w}) + \mathbf{A}[z]\text{vech}(\mathbf{e}_t \mathbf{e}_t^T), \quad (3.8)$$

ahol a polinom mátrixokat a következőképpen definiáljuk: $\mathbf{B}[z] = \sum_{i=1}^r \mathbf{B}_i z^i$, $\mathbf{A}[z] = \sum_{j=1}^s \mathbf{A}_j z^j$ és $\text{vech}(\cdot)$ jelöli a vektoriális féloperátort, ami egy $D \times D$ mátrix felsőháromszög részében lévő elemek konkatenáltját adja. Ez a vektor $D(D+1)/2$ -dimenziós.

3.2. Modell indentifikáció módszerei

Ebben a fejezetben a modellbecsléshez használt algoritmusok alapjait mutatom be, amelyeket a modellezéshez és predikcióhoz használtam. A legtöbb cikk hasonló algoritmusokat használ modellezésre és predikcióra, és említi, hogy a ML alapú becslések lassú, de robusztus becslési és predikciós módszereknek tűnnek ([3, 6, 7, 10]). Én a már említett E^4 MATLAB programcsomagban¹ használtam (lásd [20]), amiben a következő módszerek találhatók.

- Expectation Maximization (EM) iteratív, likelihood alapú módszer.
- A subspace módszer, ami gyorsabb, altereket kihasználó módszer.
- A subspace módszerrel inicializált EM módszer, röviden subspace-EM módszer.

Ezekon kívül pedig a RLS (Recursive Least Squares) algoritmust használtam, ezt AR (Auto Regressive) modell paramétereinek becsléseire majd predikcióra. Ezek megértéséhez nyújtanak segítséget az alábbi alfejezetek.

3.2.1. EM módszer

Ezt a módszert leginkább statisztikában használják, valószínűségi modellek likelihood becslésének számolására, ahol a modell nem megfigyelhető változókat is tartalmaz. A módszer két lépésből áll. Az első kiszámolja a log likelihood függvény várható értékét, figyelembe véve a nem megfigyelhető valószínűségi változó eloszlásának aktuális becslését. A második lépés pedig a maximizáló lépés, ez számítja ki azokat a paramétereket, amelyek maximalizálják a log likelihood várható értékét, amelyet kiszámoltunk az első lépésben. Ezek a paraméterek fognak kiindulásul szolgálni, hogy megbecsüljük az első lépésben leírt rejtett

¹MATLAB programcsomag E^4 (GNU GPL licenz): <http://www.ucm.es/info/icae/e4/>.

változók eloszlását. Az algoritmus elnevezése és leírása először 1977-ben jelent meg Arthur Dempster, Nan Laird és Donald Rubin cikkében ([21]). A módszer megértéséhez segítséget nyújt még a ([22–24]) tanulmány.

Adott egy likelihood függvény $L(\theta; x, z)$, ahol θ a paraméter vektor, x a megfigyelhető adatok, z a rejtett adatok, vagy hiányzó adatok, a maximum likelihood (ML) becslést meghatározza a $L(\theta; x)$, de gyakran ez a mennyiség sem ismert.

A módszer iteratív módon a következő két lépést váltogatja:

1. várható érték számolás: kiszámolja a z feltételes eloszlásának log likelihood függvényének várható értékét, x és θ_t aktuális paraméter becslés alapján:

$$Q(\theta|\theta_t) = E[\log(L(\theta; x, Z))|x, \theta_t] \quad (3.9)$$

2. a maximum kereső lépés: megkeresi, hogy mely paraméterekkel kapjuk a maximumot.

$$\theta_{t+1} = \arg \max_{\theta} Q(\theta|\theta_t) \quad (3.10)$$

Az EM iteráció lokális szélsőértékhez való konvergenciája garantált. Többdimenziós eloszlásoknál ez azt jelenti, hogy elakadhat egy lokális maximumnál, ami a kezdőértékektől függ. Több módszer is ismert ennek elkerülésére. Példa: ha véletlen kezdőértékből indítjuk (így többféle kezdő θ_t becslésünk lesz).

3.2.2. Subspace módszer

A legtöbb becslési modell vagy a legkisebb négyzetes becslésen (LS - Least Square) vagy a Maximum Likelihood (ML) becslésen alapul. Az LS megközelítés előnyeit ismerjük: számolása egyszerű, és stabil. Azon modellekre azonban nem lehet könnyen alkalmazni, amelyeket vagy Mozgó Átlag (MA) vagy többszörös szezonális jellemez. Ezzel szemben az ML többszörös optimalizációs iterációval dolgozik, ami statisztikailag hatásos, de sokszor együtt jár bizonyos bizonytalansággal, illetve összetett, és számolása költséges. Speciálisan: ha egy gyors változású idősort tekintünk, mint amilyenek a pénzügyi idősorok, nehezen tudjuk kielégíteni a Gauss féle ML becslés feltételeit, és jelentős költségnövekedés is tapasztalható.

A subspace módszer szintén egy iterációs módszer. Gyorsasága annak köszönhető, hogy egy lineáris egyenletrendszer megoldásánál a mátrixot ortogonális bázisba helyezi, az iterációt ezen végzi. Így a feladat a kapott maradékok minimalizálása ebben a subspace formában.

Sok megelőző tanulmány is foglalkozik a subspace módszerrel ([25–30]), ezekből merít a VARMAX modellezésre jól használható algoritmust leíró [31] cikk is, ami stabil algoritmust mutat be, kódja megtalálható az E^4 MATLAB programcsomagban (lásd: [20]). Én is ezt használtam a modell paramétereinek becslése során.

Az alapgondolata az, hogy az ARMA és ARMA-GARCH modellünk a következő alakban is értelmezhető, ahol $x_t \in \mathbb{R}^n$ állapot vektor, $u_t \in \mathbb{R}^p$ észlelt input vektor és $y_t \in \mathbb{R}^q$ észlelt kimenő adatok, illetve $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ átmeneti mátrix:

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + Ee_t \quad (3.11)$$

$$y_t = Cx_t + Du_t + e_t, \quad (3.12)$$

ahol x_t , y_t és u_t ismert. A megfigyelhetőségi mátrix pedig a következőként írható le:

$$O = [C^T, (CA)^T, (CA^2)^T, \dots, ((CA)^{n-1})^T]^T \quad (3.13)$$

a subspace módszer neve ezen mátrix oszlopai által kifeszített altér becsléséből ered. Felteesszük továbbá, hogy A és $A - KC$ stabilak. Az állapot a bemeneti és kimeneti adatok által kifeszített altérben van, és a bemeneti vektor birtokában az állapot minden múltbeli információt tartalmaz a jövő (lineáris) predikciójához. A subspace módszerrel kapott paraméter becslés segítségével megkapjuk az eredeti ARMA és ARMA-GARCH modell paramétereit.

3.2.3. Subspace-EM módszer

Ez a módszer az EM (Expectation Maximization) kezdő értékei becslésére használja a subspace módszert, így gyorsítva az algoritmust, csökkentve a számítási költségeket, valamint ahogy említettük, az EM több dimenzióban elakadhat lokális maximumokban, amelyen több kezdőérték megfelelő választásával vagy párhuzamosan futtatott optimalizációval segíthetünk. Egy ilyen kezdőértéket szolgáltat a subspace módszer, ebből indítva az iterációs algoritmusunkat segítjük a becslés pontosítását. Ez az összetett algoritmus szintén megtalálható az E^4 ([20]) MATLAB programcsomagban, numerikus kísérleteim során ezt használtam.

3.2.4. Rekurzív legkisebb négyzetes módszer

A legkisebb négyzetes módszer (recursive least squares (RLS)) segítségével ([12,32–34]) is becsülhetünk lineáris modellt. Ennek a módszernek a célja, hogy minimalizálja a folyamat hibáit, egy rekurzív algoritmussal keresse az AR modell együtthatóit, ahol minél régebbi egy hiba tag, annál kevesebb jelentőséget tulajdonít neki a módszer:

$$\sum_{k=1}^t \lambda^{t-k} e^2(k), \quad (3.14)$$

ahol λ az úgynevezett felejtési tényező. Szemléletesen: minél régebbi hibát nézünk, az annál kevésbé fontos számunkra a hiba minimalizálása során. A λ hatványozása során ez a 0-hoz tart, ha $\lambda < 1$, így a sebességét a paraméterválasztás meghatározza. Az RLS becslés az AR modellek becslésére alkalmas. Ez egy online, rekurzív módszer.

Ehhez definiáljunk egy a vektort, ami az AR modell együtthatóit tartalmazza, y vektor az összes y_i bemenő adatot tartalmazza. Ezekre az inputokra, azaz y -ra és az aktuális inverz

kovariancia mátrixra (P -re) alapozva először az algoritmus kiszámolja a Kálmán-szűrő ([11,12]) vektorát, K -t, majd ennek segítségével kapjuk meg a rekurziót, amit $t = 0, 1, 2, \dots$ mellett számolunk:

$$\alpha_t = y_t - y_t^T a_{t-1} \quad (3.15)$$

$$K_t = \frac{P_{t-1} y_t}{\lambda + y_t^T P_{t-1} y_t} \quad (3.16)$$

$$P_t = \lambda^{-1} P_{t-1} - y_t^T \lambda^{-1} P_{t-1} \quad (3.17)$$

$$a_t = a_{t-1} + \alpha_t K_t \quad (3.18)$$

$$e_t = y_t - x_t^T w_t \quad (3.19)$$

ahol a $\alpha(n)$ az n . lépés a priori hibája, míg $e(n)$ az a posteriori hibája. Így tudjuk számolni a minimalizálni kívánt egyenletet ([33,34]).

4. fejezet

Numerikus kísérletek

4.1. Vizsgált kérdések

Ebben a fejezetben mutatom be az idősorokon elért eredményeket, ahol a becslés jóságát egyrészt egy gyakorlati profitorientált mércével mérem, másrészt, azzal, hogy a napok hány százalékában találta el a predikció az irányt, azaz amikor azt jósoltuk, hogy növekedés következik, akkor valóban az volt. Megmutatom, hogy a pénzügyi idősorok esetén jobban motivált ARMA-GARCH módszer hogyan teljesít az ARMA modellel szemben, illetve, hogy a becslési módszerek, az EM, subspace, subspace-EM, RLS milyen eredményeket képes produkálni adott modelleken. Segédváltozó hozzávételével az elérhető profit nagyságának növelésére teszek kísérletet. Így a napi záróárak mellé 2. változónak az idősorom mellé veszem a napi legmagasabb és legalacsonyabb ár különbségét, azaz a "high-low" változót, így egy több ($D = 2$) dimenziós ARMA illetve ARMA-GARCH modellt becslek és predikálok. Napi mintavételezéssel hasonlítom össze a heti mintavételezésű idősorokat, ezzel mutatva meg, hogy több esetben előnyösebb ez a típusú idősor, a dinamika könnyebben modellezhető.

4.2. Adatbázisok ismertetése

A futtatások során az $y(t)$ idősorom adatai vagy a napi vagy a heti egy dimenziós ($D = 1$) záróértékekből álló adatok voltak, vagy pedig kétdimenziós ($D = 2$), ahol a napi záró ár mellé bevettem a legmagasabb napi ár és legalacsonyabb napi ár különbségét ("high-low").

A következő indexek szerepelnek kísérleteimben az elkövetkező 4.5. fejezet során: a DIA (SPDR Dow Jones Industrial Average), vagy a Nikkei225, vagy a Russell2000 index, ezeket alább ismertetem, kisebb áttekintést adok róluk, amelyek elérhetőek a Yahoo! Finance oldalán (finance.yahoo.com) is.

A záró értékek vektorát a következőképpen transzformáltam hozam vektorrá: $(y_1(t+1) - y_1(t))/y_1(t)$. A következőkben az $y_1(t)$ már az első változóban transzformált idősort fogja jelenteni, két dimenzió ($D = 2$) esetén y_2 jelenti a "high-low" segédváltozót.

DIA

A DIA a Dow Jones Industrial Average, amit hívnak Ipari Átlagnak, Dow Jones-nak, Dow 30-nak vagy egyszerűen csak Dow-nak. Ez egy a sok tőzsdei index közül, amit a Wall Street Journal szerkesztői és a Dow Jones Company alapítója Charles Dow hozott létre. 1896. május 26-án alapították, és most a Dow Jones Indexes tulajdonában van, ami a CME cégcsoport tulajdona. Az átlag Dow-ról és az egyik üzletéről kapta a nevét, ami Edward Jones statisztikushoz kapcsolódik. Megmutatja az index, hogy hogyan kereskednek egy átlagos tőzsdei kereskedési napon a 30 nagy, köztulajdonban lévő amerikai egyesült államokbeli vállalattal. Ez a második legrégebbi index az Egyesült Államok tőzsdéjén, a Dow Jones Transportation után, amit szintén Dow alkotott meg.

Az ipari rész az elnevezésben nagyrészt csak történelmi, hiszen a 30 modernkori komponensnek kevés vagy semmi köze nincs a hagyományos nehéziparhoz. Az átlag ársúlyozott, és ki van belőle küszöbölve az osztalék és egyéb átállások hatása, így ez egy skálázott átlag. A Dow ára nem az aktuális részvény árak átlagából áll, hanem a benne szereplő részvények valamilyen többszöröse, amely szorzó módosul, ha adott részvélynél osztalék vagy hozam kifizetés történik.

Russell2000

A Russell 2000 index az utolsó 2000 részvény a Russell 3000 indexből. Ez kisebb tőkéjű részvények csoportja, úgynevezett "small-cap" index. A Russell 2000 régóta a legelterjedtebb mértéke a befektetési alapoknak, amelyek magukat "small-cap"-nek határozzák meg, míg az S&P index elsősorban a nagytőkéjű részvényeket tartalmazza. Ez a legszélesebb körben idézett mérce, amely alkalmas a small-cap és middle-cap cégek részvényeinek összesített teljesítmény mérés összehasonlítására. Az index megközelítőleg a teljes piaci tőke 10%-át jelenti a Russell 3000 indexből. Ez egy tőke súlyozott index, amelyet Frank Russell publikált, és 1986. december 31-től jegyzik.

Nikkei225

A Nikkei 225 Részvény Index a tokiói tőzsde, a Tokyo Stock Exchange (TSE) részvényeiből áll. Ez a legrégebbi és legismertebb ázsiai index a világon. A Nihon Keizai Shimbun (Nikkei) újság volt megbízva hivatalosan ennek kiszámításával 1971-től. 1950. szeptember 7-én kezdték számolni a Nikkei 225-t, és visszamenőleg 1949. május 16-ig számolták ki. Napjainkban a Nikkei-t használják a japán gazdaság legfőbb mutatójaként, hasonlóan a Dow Jones Industrial Average-hez. Az egész piacot figyelembe véve alkották meg, így nincsenek az ágazatok különbözőképp súlyozva. A részvény osztalékok és egyéb átállásainak hatásait úgy korigálja, küszöböli ki, hogy az egyes részvényeken különböző szorzókat alkalmaz.

Ez egy ár súlyozott átlag index (egysége a jen), hasonlóan az amerikai gazdaságot jól jellemző Dow Jones Industrial Average-hez, és 50 jen részvényenként az alapja. Ez

azt jelenti, hogy 50 jen árváltozás minden részvényben egyenlő hatással van az átlagra, függetlenül attól, hogy a részvény ára 5 jen vagy 500 jen. A Nikkei 225 index komponenseit minden év szeptemberében felülvizsgálják, és ha változás szükséges, akkor azt októberben megjelentetik, és annak megfelelően változtatják az indexet.

4.2.1. Különböző típusú mintavételezés

Az első típusú adatbázisom esetében napi mintavételezésű záró értékeket vettem, és $N = 260$ volt a befektetési intervallum hossza, ez egy év kereskedési napjait jelenti.

- Először az intervallum választása véletlenszerűen volt a ["2009 November 1" - 999 nap, "2009 November 1"] 1000 hosszúságú intervallumból. Ezt illusztrálja a 4.1 ábra.
- A véletlenszerűen kapott idősorok esetében a korábbi időszakok leginkább úgynevezett emelkedő időszakok voltak (így ezekre ezentúl így fogok hivatkozni a későbbi fejezetben (4.5.3-ben), ehhez választottam olyan intervallumokat is, amelyek egyfajta törést tartalmaznak.

A másik típusú adatbázisomnál napi mintavételezés helyett megnéztem, hogy a heti záróértékekkel milyen eredmény érhető el. A záró időpontot a ["2009 November 1" - 99 hét, "2009 November 1"] intervallumból választottam véletlenszerűen. Az intervallumok, amelyeket mintának használtam, egyaránt tartalmaztak törést és emelkedő részeket (lásd: 4.2 ábra).

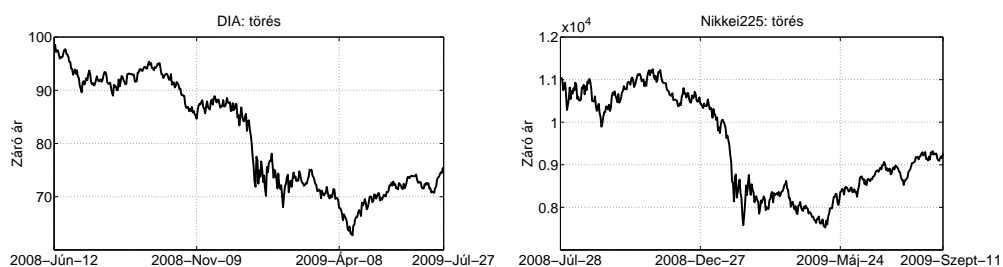
A harmadik típusú idősorom $\mathbf{y}(t)$ 2-dimenziós volt ($D = 2$), amely elsősorban a napi záróárak transzformáltját 'Close' (y_1) tartalmazta, és emellett az adott indexnek (y_2) "high-low" értékeit (lásd : 4.3 ábra), amit a napi legmagasabb és a legalacsonyabb ár különbségéből kaptam.

4.3. Választott paraméter tartomány

4.3.1. A becslés folyamata

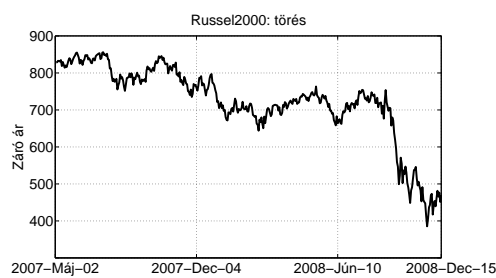
A múltbeli értékeket használva $y(1), \dots, y(T)$ idősorra illeszttem az ARMA modellt az E^4 programcsomag segítségével¹, és az y értékét a következő lépésben, $y(T + 1)$ -et a megkapott ARMA modell segítségével becsültem. Majd egy lépéssel tovább: megbecsültem $y(T + 2)$ értékét egy olyan ARMA modell segítségével, ami már az $y(2), \dots, y(T + 1)$ -t használja a modell illesztés alapjául, és ezt a módszert használom végig az egyéves "befektetési" periódus alatt. Összegezve, becsüljük $y(T + n)$ -eket használva mindig egy ARMA modellt, amit azon y -okból becsülünk, amik a $[0+n, T-1+n]$ intervallumból kapunk, ahol $n = 1, \dots, N$ és N pedig egy egyéves periódushoz közel eső szám, jelen esetben: 260. Így

¹A batch módszerekhez, ARMA identifikációkhoz az E^4 Matlab csomagot használtam (GNU GPL licenz alapján): <http://www.ucm.es/info/icae/e4/>.



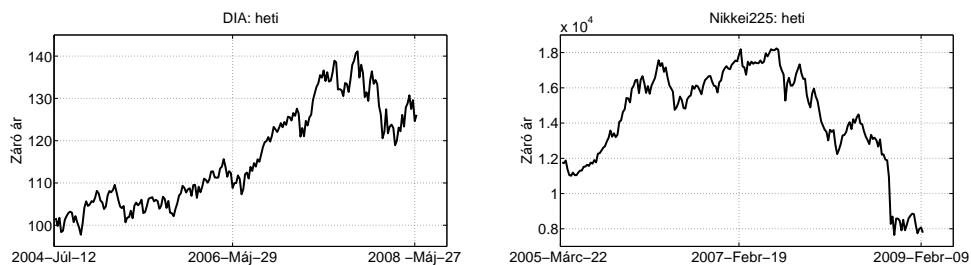
(a)

(b)



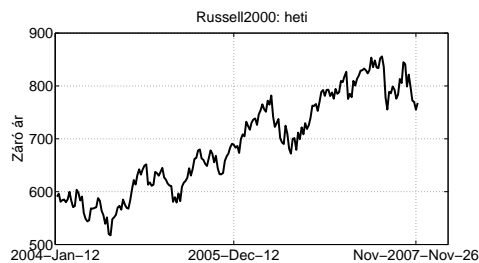
(c)

4.1. ábra. Az első típusú idősorok illusztrációja. (a): DIA, (b): Nikkei225, (c): Russell2000 adatok. A véletlenül választott periódusok, ezek általában törést tartalmaztak.



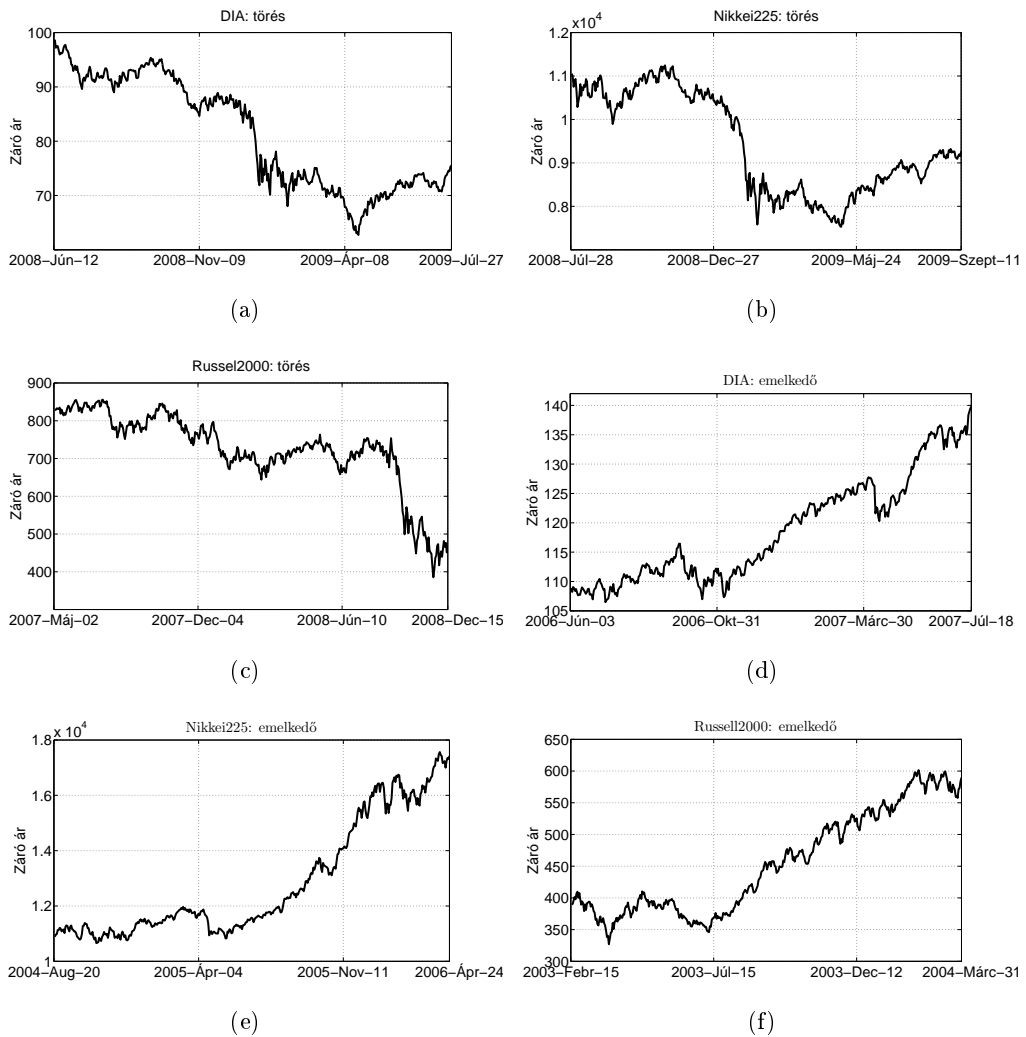
(a)

(b)



(c)

4.2. ábra. A második típusú adatok, heti mintavételezés. (a) DIA, (b): Nikkei225, (c): Russell2000.



4.3. ábra. A harmadik típusú idősorok. (a)-(c): azok az időintervallumok, amelyek törést tartalmaznak—DIA, Nikkei225 és Russell2000 index. (d)-(f): az emelkedést mutató indexek.

az intervallum hossza $T + N$ volt, a "befektetést" szimuláló időszak pedig N hosszúságú, a $T = 30, 60, 90, 120, 150$ választás mellett.

4.3.2. Paraméter tartomány

Az 3. fejezetben leírt modelleket a futtatásaim során két különböző módszerrel becsültem. AR modell esetén egy batch, másrészt egy rekurzív megközelítés szerepelt a futtatásaim között, ARMA és ARMA-GARCH esetén pedig kizárólag a batch módszer.

Maga a modellbecsléshez használt idő intervallum $T = 30, 60, 90, 120, 150$ volt a futtatások során.

Az ARMA folyamat identifikációja a következő módokon történt:

1. A batch megközelítem:

- az expectation maximization (EM) módszer, ami egy iteratív módszer és a maximum likelihood becslésen alapul
- ennek egy altereket kihasználó alternatívája, a subspace módszer, vagy
- a kettő kombinációja: az EM keresést a subspace optimális megoldásával inicializáljuk, ez a subspace-EM módszer.

Ennek során az ARMA(p,q) rendek közül a $p > 0$ és $p, q \leq 2$ rendeket vizsgáltam.

2. A rekurzív megközelítem: A legkisebb négyzetes módszer (recursive least squares (RLS)) segítségével, aminek célja, hogy minimalizálja a folyamat hibáit:

$$\sum_{k=1}^t \lambda^{t-k} e^2(k), \quad (4.1)$$

ahol λ az úgynevezett felejtési tényező. Az RLS becslésünk csak AR modellekre vonatkozott. A rekurzív identifikáció során a felejtési faktor λ paraméterét $\{0.9, 0.95, 0.98, 0.99, 0.995\}$ közül választottam. Illetve az RLS módszer AR rendjeit pedig 1 és 10 között vizsgáltam.

Az ARMA-GARCH modelleket a következő 3 batch módszerrel identifikáltam:

- Az Expectation Maximization (EM) iteratív, likelihood alapú módszer.
- A subspace, gyorsabb, altereket kihasználó módszer.
- A subspace módszerrel inicializált EM módszer, röviden subspace-EM módszer.

ARMA(p,q)-GARCH(r,s) rendek közül pedig a $p > 0$ és $p, q, r, s \leq 2$ választásokat elemeztem.

4.4. Alkalmazott jószág mércék

Akövetkező jószágmérceket használtam a becslések és predikciók során. Ezek nem gyakoriak, de jobban szemléltetik egy-egy modell gyakorlati hasznosságát:

1. Ár növekedés/csökkenés előrejelzése: Az egyéves periódus alatt (N) milyen százalékban predikálja a módszer megfelelően az előjelet, azaz jelzem előre ($\hat{y}(T+n)$), hogy a következő napi valós részvényárfolyam ($y(T+n)$ ($n = 1, \dots, N$)) emelkedni vagy csökkenni fog. Formálisan,

$$p_{ud} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi\{sgn(\hat{y}(T+n)) = sgn(y(T+n))\}, \quad (4.2)$$

ahol sgn és χ jelenti a signum és az indikátor függvényeket.

2. Profit (additív): Ez a mérték több részből áll. Az első fele azon hozamok abszolút értékének összege, ahol a becslésünk ($\hat{y}(T+n)$) előjele megegyezik a valós $y(T+n)$ ($n = 1, \dots, N$) előjével. A második rész pedig azon értékek abszolút értékeinek összege, ahol $\hat{y}(T+n)$ -nek az előjele *nem* egyezik meg $y(T+n)$ ($n = 1, \dots, N$) előjével. Mindkét szumma az egész egyéves intervallumra (N) vonatkozik; az első kifejezés a nyereséget jelenti (azon tagok, ahol a rövid vagy hosszú távú ARMA modell jól teljesített), a második a veszteséget jelenti. Így a tényleges additív profit a két rész különbségként áll elő:

$$p_{add} = \sum_{n=1}^N |y(t)| \chi\{sgn(\hat{y}(T+n)) = sgn(y(T+n))\} - \sum_{n=1}^N |y(t)| \chi\{sgn(\hat{y}(T+n)) \neq sgn(y(T+n))\}. \quad (4.3)$$

Ez a jószágmérce tekinthető egy játéknak, ahol a játékosok egy fix összeggel fogadnak (rövidtávú/hosszútávú befektetés) minden nap.

3. Profit (multiplikatív): Ez a mérce a hozamok egyéves (N) szorzatával egyezik meg, mínusz egy. Pl. $1.03 \times 0.98 \times \dots \times 1.02 - 1$ (első nap: 3% hasznot hozott, második nap: 2% veszteség történt, \dots , utolsó nap: 2% haszon van). Formálisan,

$$p_{mul} = \left(\prod_{n=1}^N [(1 + |y(t)|) \chi\{sgn(\hat{y}(T+n)) = sgn(y(T+n))\} + (1 - |y(t)|) \chi\{sgn(\hat{y}(T+n)) \neq sgn(y(T+n))\}] \right) - 1. \quad (4.4)$$

4.5. Eredményeim

A kapott eredményeim bemutatását 6 részre bontottam. Először az ARMA modell és a 3 batch módszer segítségével kapott eredményeket ismertetem, majd ezt az RLS módszer

hatékonyságával hasonlítom össze. A harmadik alfejezetben az ARMA-GARCH megközelítéssel kapottak szerepelnek. Az eddig említettek napi mintavételezésű adatokon futottak. A negyedik részben bemutatom a heti adatokon kapott becsléseimet, szintén az egyéves befektetési intervallumon. A ötödik és hatodik részben megmutatom, hogy a segédváltozó, a második dimenzió ("high-low") hozzávétele hogyan módosította a becsléseket az ARMA és ARMA-GARCH modell esetén.

4.5.1. ARMA modell eredményei

Ebben az esetben az idősoraimat véletlenszerűen választottam, a 4.2.1 részben leírtak szerint. Mint ezt korábban említettem, ezek többnyire emelkedő idősorok. Az ARMA modell és 3 becslési módszer esetén a következő predikciós eredményeket kaptam:

DIA adatbázis:

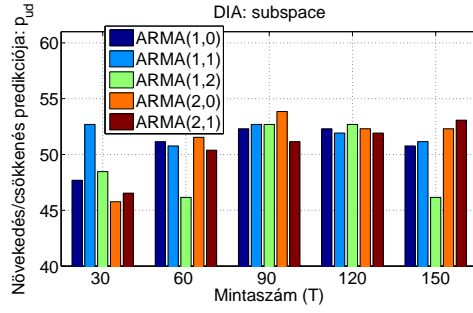
- A vizsgált ARMA identifikációs technikák (subspace, EM, subspace-EM) képesek predikálni a növekedés/csökkenés mércéje szerint ($p_{ud} > 0,5$), amennyiben a mintaszám $T = 60$ fölött van (körülbelül 2 hónap). A subspace-EM és EM megközelítés precízebb eredményeket ad (lásd 4.4. ábra).
- Rendeket tekintve az (1,2), (2,0), (2,1) nyújtja a legpontosabb becsléseket (lásd Fig. 4.4. ábra), ezek közül az ARMA(1,2)-t illusztrálja a 4.5. ábra. Azt láthatjuk, hogy nagyobb MA rendekre az EM megközelítés robusztusabb p_{ud} -t tekintve, és a subspace-EM technika szintén hatékony, amennyiben $T \geq 90$.
- A profit alapú mércékre hagyatkozva (p_{add}, p_{mul}) az EM minden mintaszám esetén hatékony, és a subspace-EM is képes profitot elérni, ha $T \geq 30$, ahogy ezt az (1,2) rendre a 4.6 ábra mutatja.

Nikkei225 adatbázis:

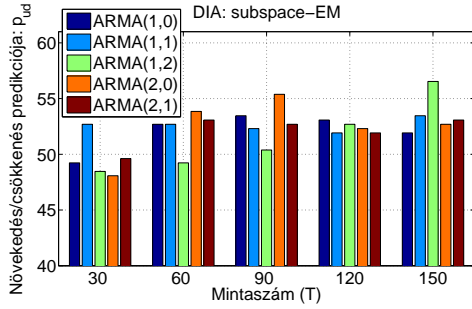
- A DIA adatbázishoz hasonlóan a becslési technikák $p_{ud} > 0,5$ eredményt adtak a legtöbb ARMA rendre, ha a mintaszámra igaz volt, hogy $T \geq 90$ (lásd 4.7 ábra). Kisebb mintaszámra az EM módszer adott jobb eredményt, növelve ezt a subspace és subspace-EM is erősödött. Az ábrán szintén megfigyelhető, hogy a (2,0) rend teljesít a legjobban a vizsgált mintaszámokra, és a legjobb a $T = 120, 150$ esetén.
- A profit mércék eredményei ARMA(2,0) modellre a 4.8 ábrán figyelhető meg. Ez alapján mindegyik módszer alkalmas profit generálásra.

Russell2000 adatbázis:

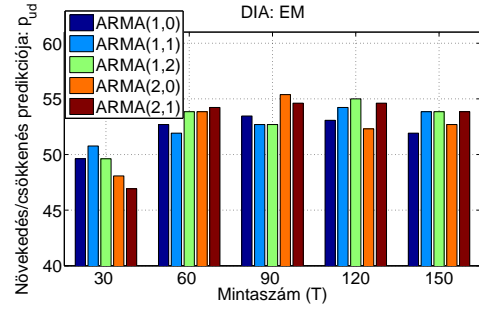
- Az emelkedés/csökkenés mércét tekintve a $T = 90$ (3 hónap) tűnik a legjobb választásnak (lásd. 4.9 ábra). Ezen az adatbázison az ARMA(1,2) modell tűnik ígéretesnek.
- Az ehhez tartozó profit alapú mércék láthatóak a 4.10 ábrán. Azt mutatja, hogy ezen paraméter választások mellett a módszer profitot képes elérni.



(a)

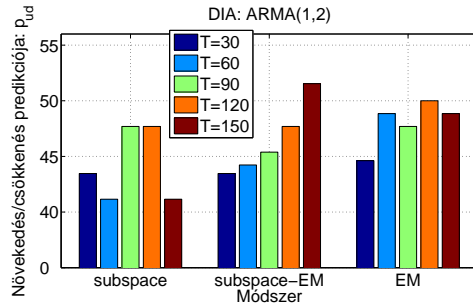


(b)

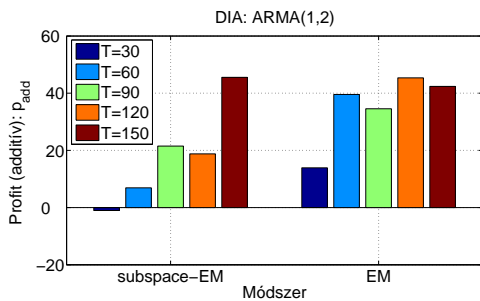


(c)

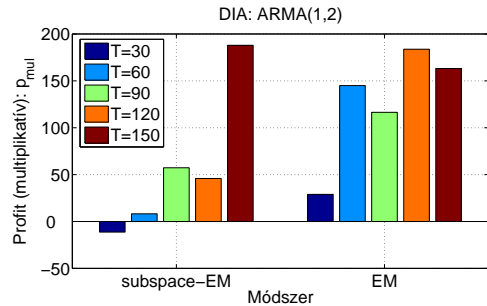
4.4. ábra. Az irány predikciójának (p_{ud}) illusztrációja a DIA adatbázison. (a): subspace, (b): subspace-EM, (c): EM módszer.



4.5. ábra. Az irány predikció (p_{ud}) eredményének illusztrációja az ARMA(1,2) rend esetén a DIA adatbázison a módszerek függvényében, különböző mintaszámok esetén.

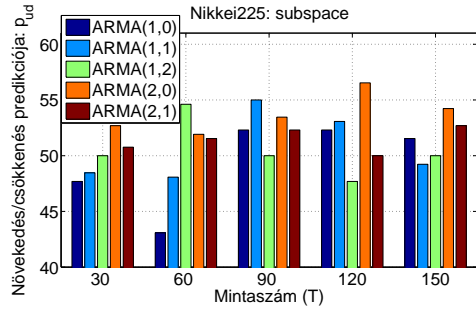


(a)

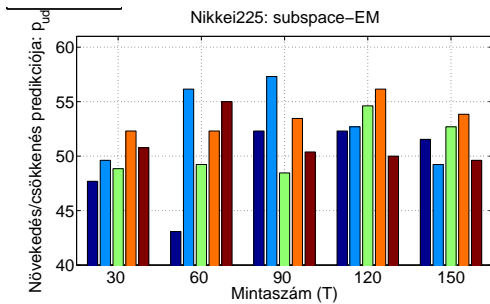


(b)

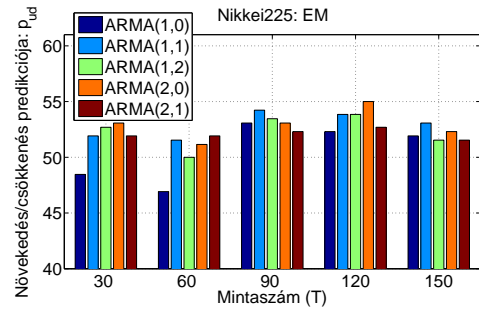
4.6. ábra. A profitorientált mércék (p_{add} , p_{mul}) százalékban megadott eredményének illusztrációja az ARMA(1,2) rend esetén a DIA adatbázison a módszerek függvényében, különböző mintaszámok esetén. (a): p_{add} , (b): p_{mul} mércék.



(a)

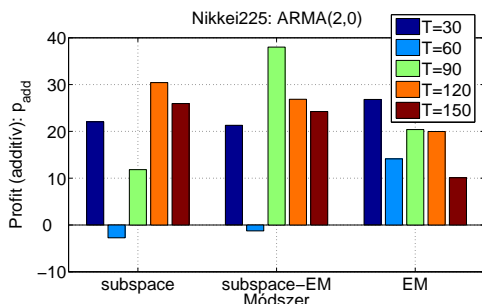


(b)

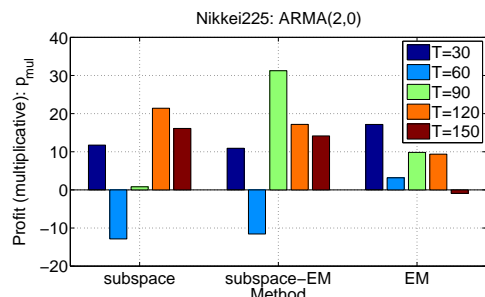


(c)

4.7. ábra. Az irány predikciójának (p_{ud}) illusztrációja a Nikkei225 adatbázison. (a): subspace, (b): subspace-EM, (c): EM módszer.

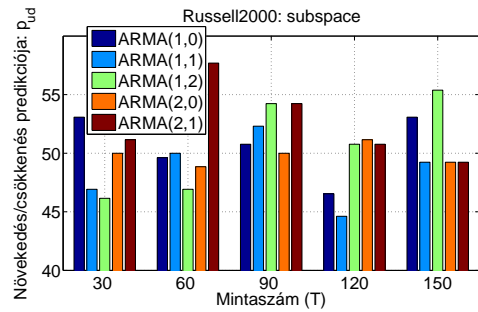


(a)

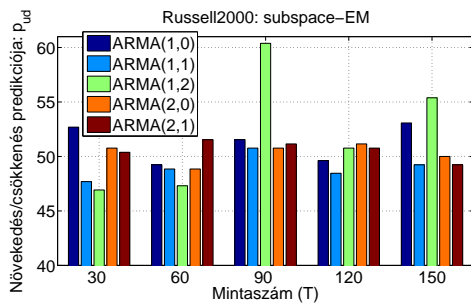


(b)

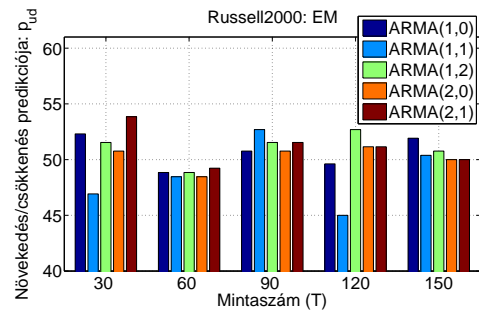
4.8. ábra. A profitorientált mércék (p_{add} , p_{mul}) százalékban megadott eredményének illusztrációja az ARMA(2,0) rend esetén a Nikkei225 adatbázison a módszerek függvényében, különböző mintaszámok esetén. (a): p_{add} , (b): p_{mul} mércék.



(a)

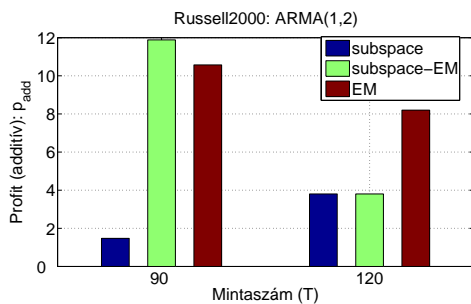


(b)

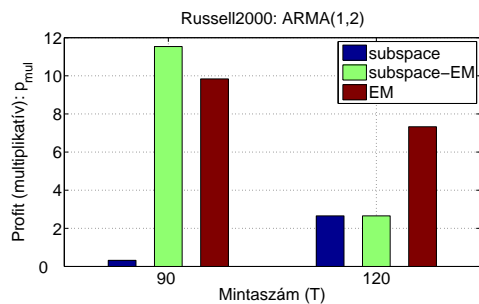


(c)

4.9. ábra. Az irány predikciójának (p_{ud}) illusztrációja a Russell2000 adatbázison. (a): subspace, (b): subspace-EM, (c): EM módszer.



(a)



(b)

4.10. ábra. A profitorientált mércék (p_{add} , p_{mul}) százalékban megadott eredményének illusztrációja az ARMA(1,2) rend esetén a Russell2000 adatbázison a módszerek függvényében, $T = 90$ és $1T = 20$ esetén. (a): p_{add} , (b): p_{mul} mércék.

4.5.2. RLS módszer eredményei

Itt szintén a véletlenszerűen választott, leginkább emelkedést mutató idősorokon végzem a vizsgálataimat. Az RLS módszerhez tartozó futtatásokat a következőképpen összegzem, figyelembe véve az ARMA módszerrel kapott eredményeket, melyeket az előző alfejezetben ismerttettem:

DIA adatbázis:

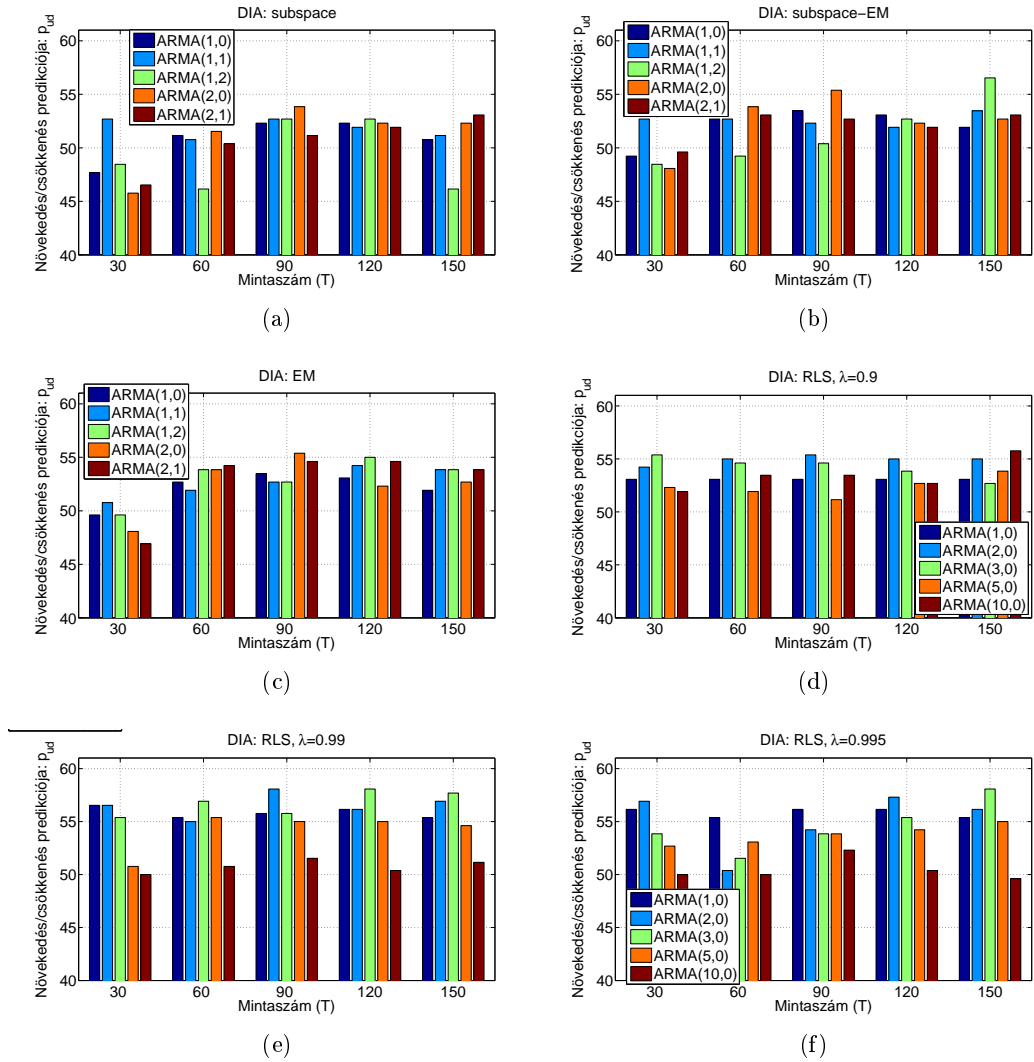
- A tanulmányozott rekurzív módszer, az RLS megközelítés eredménye összehasonlítható a batch módszerrel kapottakkal a növekedés/csökkenés predikcióját (p_{ud}) tekintve. Továbbá az RLS módszer alacsonyabb mintaszám mellett is képes elérni hatékony $p_{ud} = 0,55$ (55%) becslést. Ez figyelhető meg a 4.11 ábrán.
- A rendeket vizsgálva a (2,0) és a (3,0) nyújtja a legpontosabb becslést az RLS használata esetén. Az alább említett ábrák hasonlítják össze a két modell identifikációs módszer hatékonyságát p_{ud} mérce alapján. A 4.12 ábra a (2,0) rendet ábrázolja, amely a batch módszerrel történt becslés alapján is hatékony volt.
- A profit tekintetében a két mérési eszköz (p_{add} , p_{mul}) alapján az RLS pozitív profittal zár a tanulmányozott (λ , T) paraméterek mellett, ez látható a 4.13 ábrán.

Nikkei225 adatbázis:

- A DIA eredményeket tekintve megfigyelhető, hogy a Nikkei225 esetén kisebb felejtési faktor ($\lambda \leq 0,95$, e.g., $\lambda = 0,9$) jobb eredményt hoz a növekedés/csökkenés becslését (p_{ud}) illetően, ez figyelhető meg a 4.14 ábrán. AR(2) és AR(3) rendek tűnnek leghatékonyabbnak RLS módszerünk rendjei közül. Az illusztrációk során az AR(2) rendet fogom mutatni.
- A p_{ud} teljesítménye a (2,0) rendválasztás mellett az aktuális módszerrel látható a 4.15 ábrán. Ez alapján a batch módszerrel kapott eredményhez hasonló eredmény érhető el, főleg kis mintaszám esetén.
- A másik két profit mércénk (p_{add} , p_{mul}) a 4.16 ábrán figyelhető meg, ahol láthatóan az RLS módszer nagyobb profitot is képes elérni.

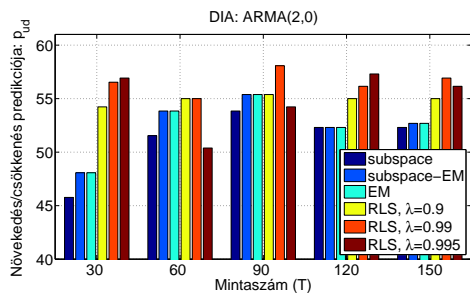
Russell2000 adatbázis:

- Rendek tekintetében a (1,0) és a (2,0) tűnik hatásosnak, a növekedés/csökkenés becslését (p_{ud}) tekintve, ezt látjuk a 4.17 ábrán. Továbbiakban a (2,0) ARMA rendet használom az illusztrációkhoz.
- Összehasonlítva a batch módszerrel azt tapasztaljuk, hogy képes jobban becsülni a p_{ud} -t kisebb mintaszámok esetén ($T \leq 60$) is, lásd 4.18 ábrát.

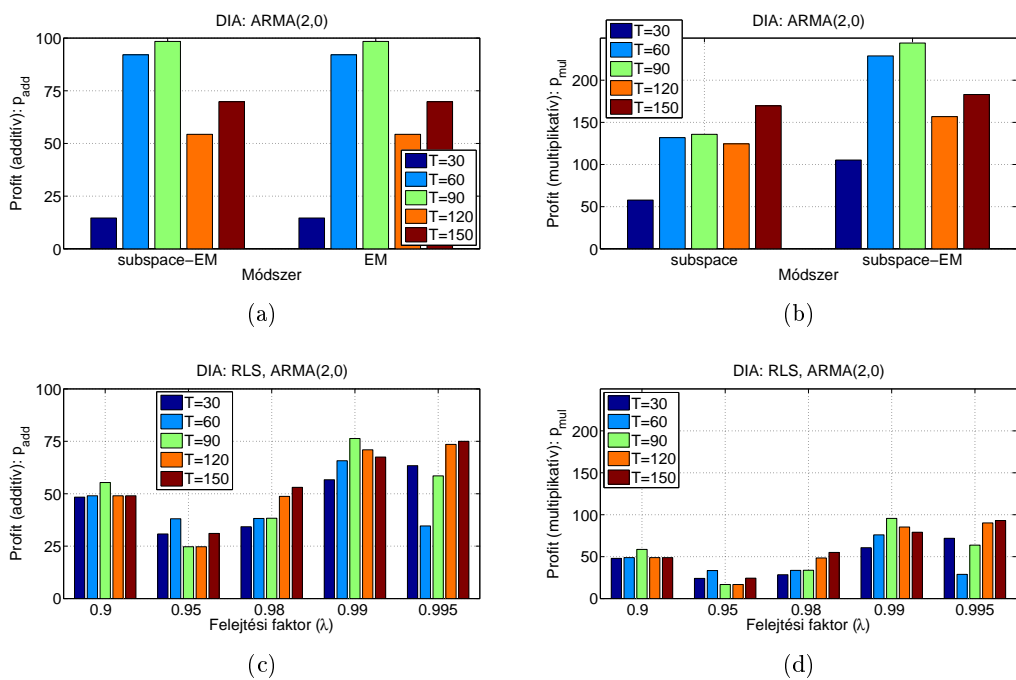


4.11. ábra. Az irány predikciójának (p_{ud}) illusztrációja a DIA adatbázison. (a): subspace, (b): subspace-EM, (c): EM módszer, (d): RLS, $\lambda=0.9$, (e): RLS, $\lambda=0.99$, (f): RLS, $\lambda=0.995$.

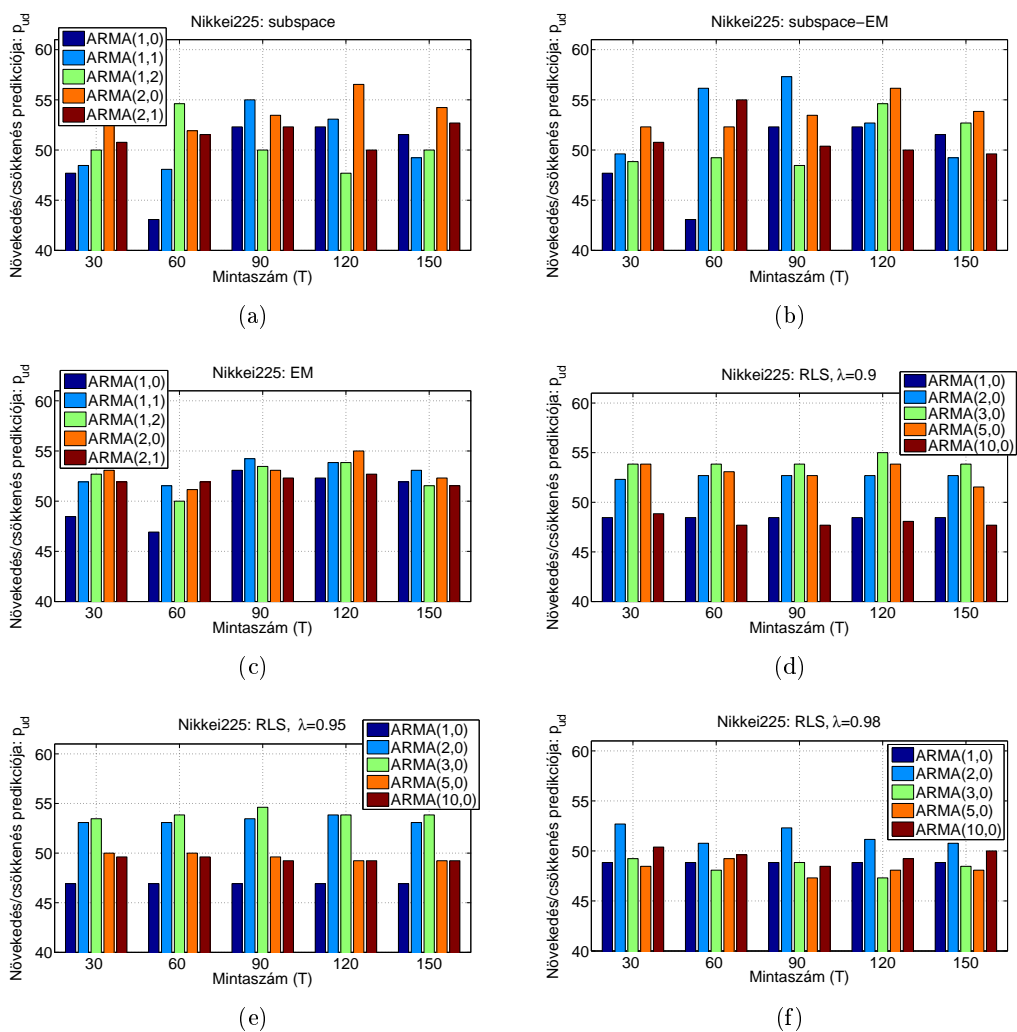
- A profitorientált ábrákat (p_{add} , p_{mul}) tekintve a $\lambda \geq 0.98$ felejtési faktor RLS módszer esetén ígéretes tendenciát mutat, ez látható a 4.19 ábrán. További illusztráció a 4.20 ábra, amely az RLS módszer hatékonyságát mutatja a mintaszám függvényében különböző rendek esetén.



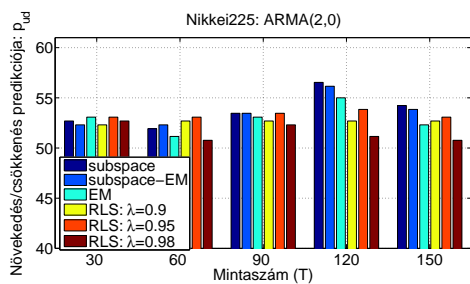
4.12. ábra. Az irány predikciójának (p_{ud}) illusztrációja a mintaszám függvényében, ARMA (2,0) esetén a DIA adatbázison különböző módszerek és felejtési faktorok (λ) esetén.



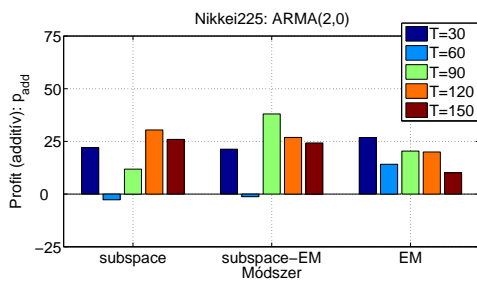
4.13. ábra. A profitorientált mércék (p_{add} , p_{mul}) százalékbán megadott eredményének illusztrációja az ARMA(2,0) rend esetén a DIA adatbázison a subspace-EM, az EM és az RLS módszerek alkalmazásával, különböző mintaszámok esetén. Bal: p_{add} , jobb: p_{mul} , második sor: az RLS hatékonysága a felejtési faktor függvényében.



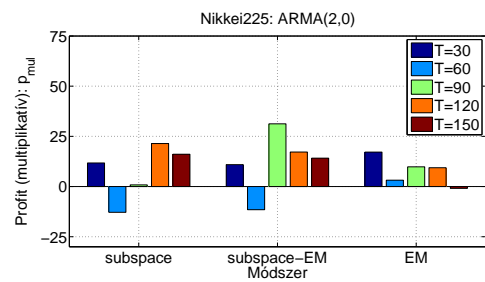
4.14. ábra. Az irány predikciójának (p_{ud}) illusztrációja a Nikkei225 adatbázison. (a): subspace, (b): subspace-EM, (c): EM módszer, (d): RLS, $\lambda=0.9$, (e): RLS, $\lambda=0.95$, (f): RLS, $\lambda=0.98$.



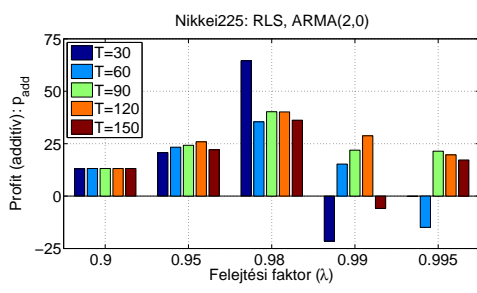
4.15. ábra. Az irány predikciójának (p_{ud}) illusztrációja a mintaszám függvényében, ARMA(2,0) esetén a Nikkei225 adatbázison különböző módszerek és felejtési faktorok (λ) esetén.



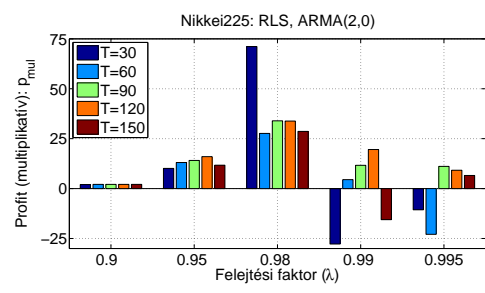
(a)



(b)

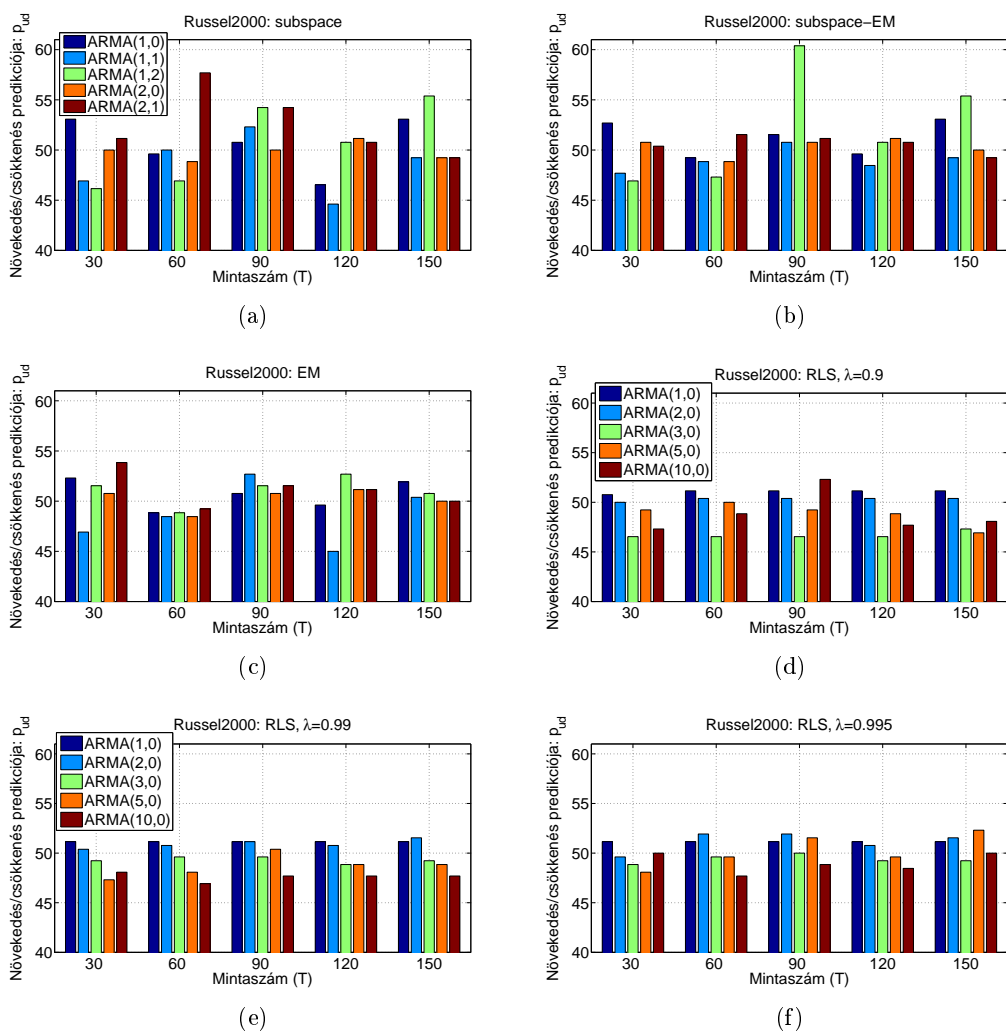


(c)

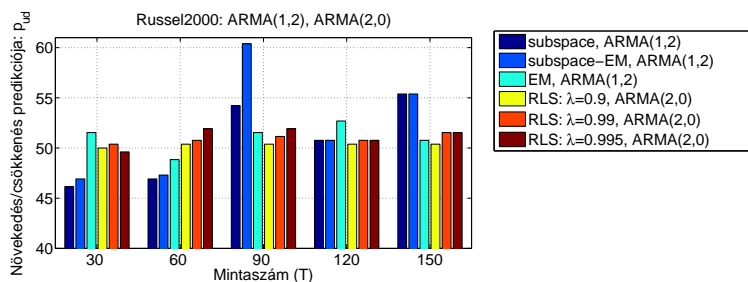


(d)

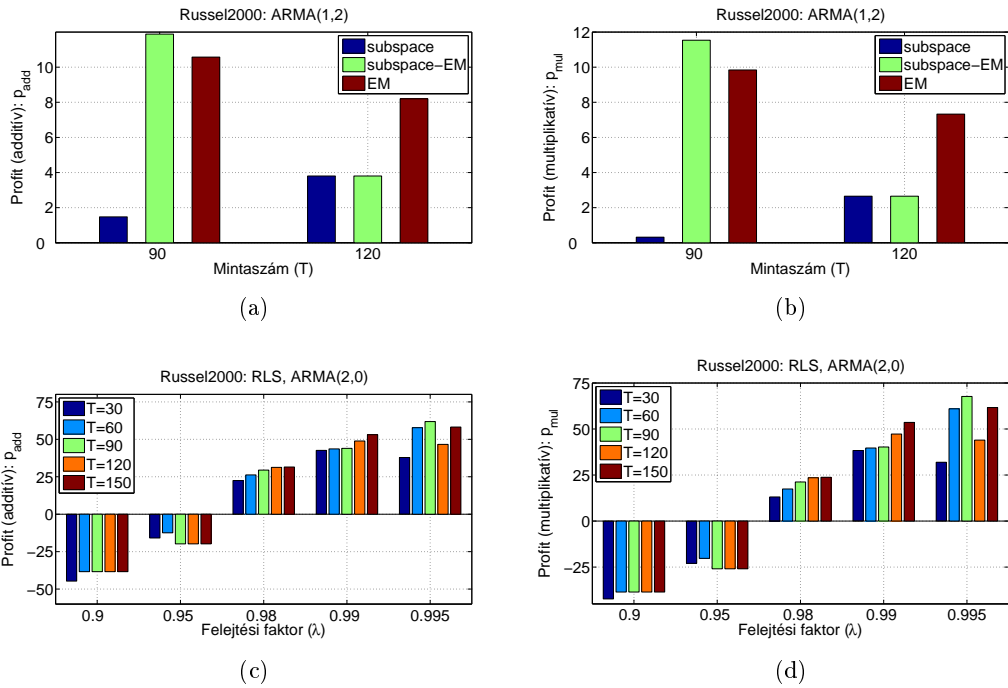
4.16. ábra. A profitorientált mércék (p_{add} , p_{mul}) százalékban megadott eredményének illusztrációja az ARMA(2,0) rend esetén a Nikkei225 adatbázison a subspace-EM, az EM és az RLS módszerek alkalmazásával, különböző mintaszámok esetén. Bal: p_{add} , jobb: p_{mul} , második sor: az RLS hatékonysága a felejtési faktor függvényében.



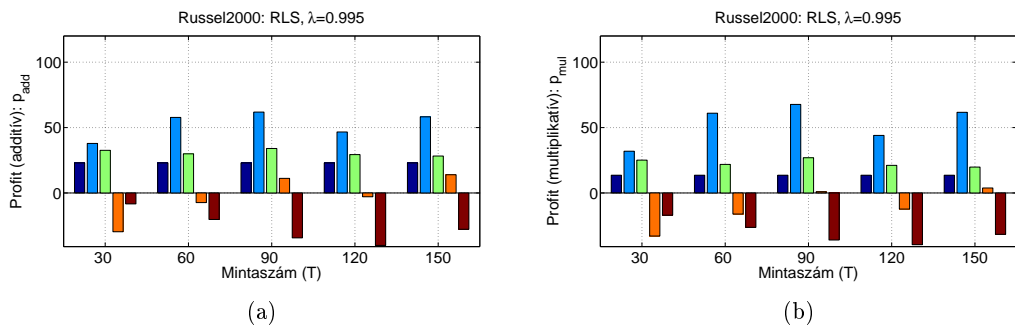
4.17. ábra. Az irány predikciójának (p_{ud}) illusztrációja a Russell2000 adatbázison. (a): subspace, (b): subspace-EM, (c): EM módszer, (d): RLS, $\lambda=0.9$, (e): RLS, $\lambda=0.99$, (f): RLS, $\lambda=0.995$.



4.18. ábra. Az irány predikciójának (p_{ud}) illusztrációja a mintaszám függvényében, ARMA (2,0) esetén a Russell2000 adatbázison különböző módszerek és felejtési faktorok (λ) esetén.



4.19. ábra. A profitorientált mércék (p_{add} , p_{mul}) százalékban megadott eredményének illusztrációja a Russell2000 adatbázison a subspace-EM, az EM módszerek (itt az ARMA rend (1,2)) és az RLS módszer (ARMA rend (2,0)) használatával, különböző mintaszámok esetén. Bal: p_{add} , jobb: p_{mul} , második sor: az RLS hatékonysága a felejtési faktor függvényében.



4.20. ábra. A profitorientált mércék (p_{add} , p_{mul}) százalékban megadott eredményének illusztrációja, rögzített $\lambda = 0.995$ mellett, a Russell2000 adatbázison a mintaszám függvényében különböző rendek esetén. (a): p_{add} , (b): p_{mul} .

4.5.3. ARMA-GARCH modellel elért eredmények

Ebben a részben az eddig véletlenszerűen választott, többnyire emelkedést mutató idősorok mellé választottam egy törést tartalmazó adatbázist, mint ezt a fejezet elején bemutatam a 4.3 ábrán.

Törést tartalmazó idősorok

Először összegzem az ARMA-GARCH futtatások eredményeit a törést tartalmazó időintervallumon való futtatás esetén:

DIA adatbázis:

- Az ARMA-GARCH megközelítés pozitív profitokat eredményezett² (p_{mul}) minden általam vizsgált GARCH rend esetén, ez látható a 4.21 ábrán. Az ARMA modellnek a (2,0) rendje volt leginkább hatásos, ezt választottam a további illusztrációkhoz.
- A GARCH rendekre nézve a (2,0) tűnik leginkább robusztusnak (lásd: 4.22 ábra).
- A 4.23 ábrát vizsgálva láthatjuk, hogy a profit, amit az ARMA-GARCH módszerrel kaptunk, valamivel alacsonyabb, mint az ARMA esetén, de nagyságrendileg összehasonlítható az eredmény.
- Az ehhez tartozó profitgörbét a 4.24 ábra mutatja az ARMA(2,0)-GARCH(2,0) rendek esetén. Ahogy megfigyelhető, a görbe ígéretesen növekszik, és egészen simának mondható.

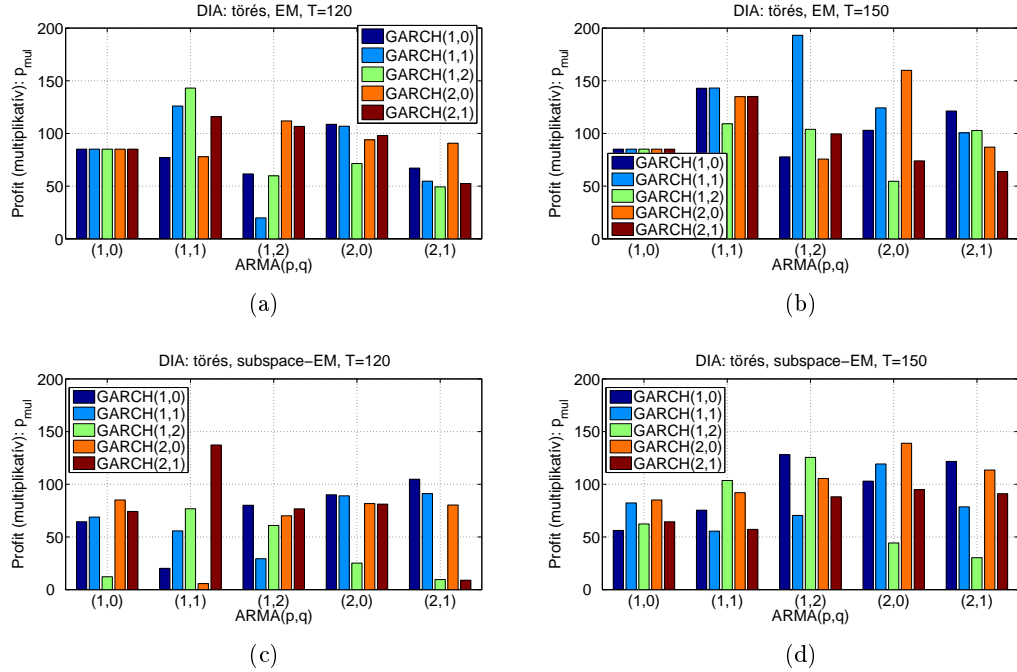
Nikkei225 adatbázis:

- A kapott profitok (p_{mul}) - különböző rendek függvényében - a 4.25 ábrán található. Ebből kiindulva az ARMA (2,0) rendet választottam az illusztrációhoz.
- A különböző GARCH rendeket tekintve, az (1,0) nyújtotta a legjobb eredményt, a legmagasabb profitot, amint ez látható a mintaszám függvényében a 4.26 ábrán.
- A 4.27 ábrán az ARMA-GARCH megközelítés magasán túteljesít a p_{mul} mércét tekintve, mint a hagyományos ARMA modellel kapott becslésünk.
- Ahogy az látszik a profit görbén (4.28 ábra), a kezdeti bizonytalanság után a profit növekedése közel monoton.

Russell2000 adatbázis:

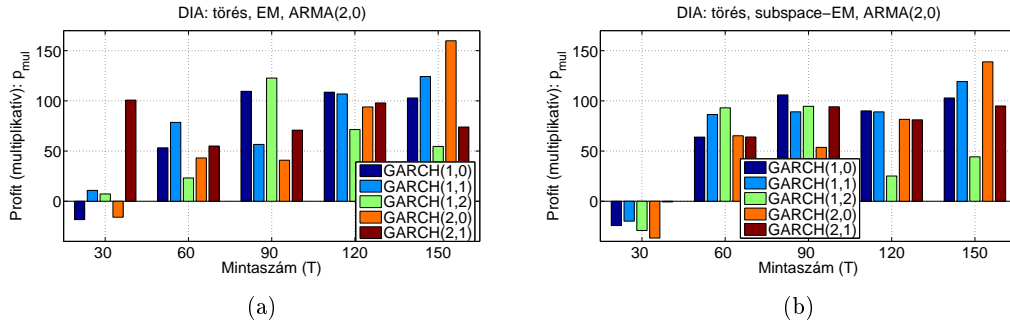
- A 4.29 ábráról leolvasható, hogy az ARMA rend (2,0)-ra kiugró eredményt mutat a profit (p_{mul}) mérce alapján, ezt fogjuk a továbbiakban ARMA rendnek használni az illusztrációkhoz.

²Hasonló eredményeket kaptam a p_{add} profit mérce esetén. Emiatt a p_{mul} profitot fogom használni az illusztrációk során.

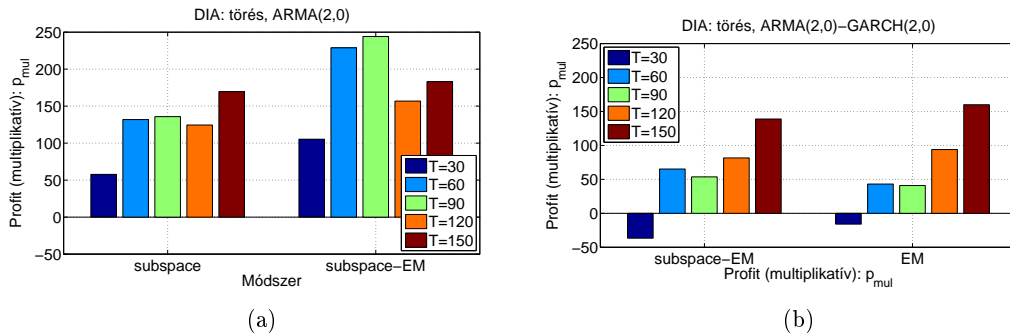


4.21. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) százalékban elért értékének illusztrációja a törést tartalmazó DIA adatokon, különböző ARMA-GARCH rendek esetén. (a): EM, $T = 120$, (b): EM, $T = 150$, (c): subspace-EM, $T = 120$, (d): subspace-EM, $T = 150$.

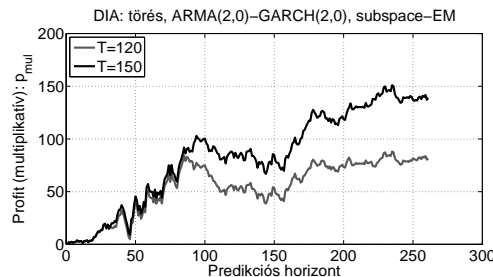
- Figyeljük meg a GARCH rendeket a 4.30 ábrán, így a (2,0) ideális választásnak tűnik.
- Az elért profit illusztrációja látható különböző mintaszám esetén az ARMA(2,0)-GARCH(2,0) modellre a 4.31 ábrán. Ez alapján: (i) a profit szinte monoton nő a mintaszám növekedésével, (ii) a GARCH modell jobb választásnak bizonyult, (iii) a subspace-EM identifikáció lényegesen segíti a becslésünket.
- Az erre vonatkozó profit görbe a 4.32 ábrán látható. A $T = 150$ mintaszám esetén a görbe szinte egyenletesen növekszik.



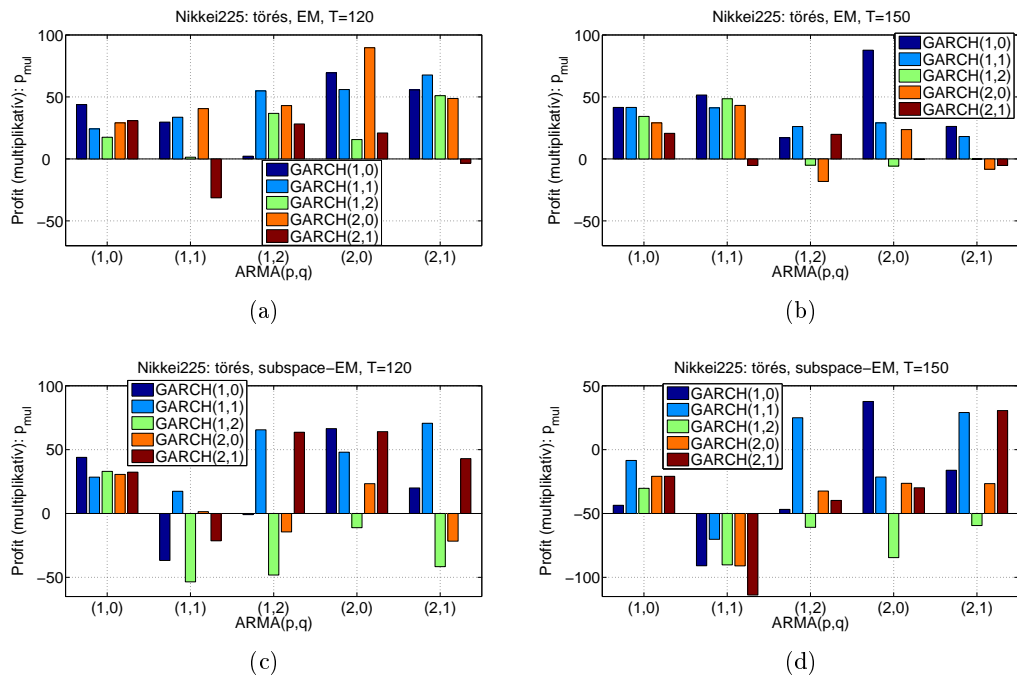
4.22. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) százalékban elért értékének illusztrációja a törést tartalmazó DIA adatokon, ARMA(2,0) rend mellett, különböző GARCH rendek esetén a mintaszám függvényében. (a): EM, (b): subspace-EM módszer.



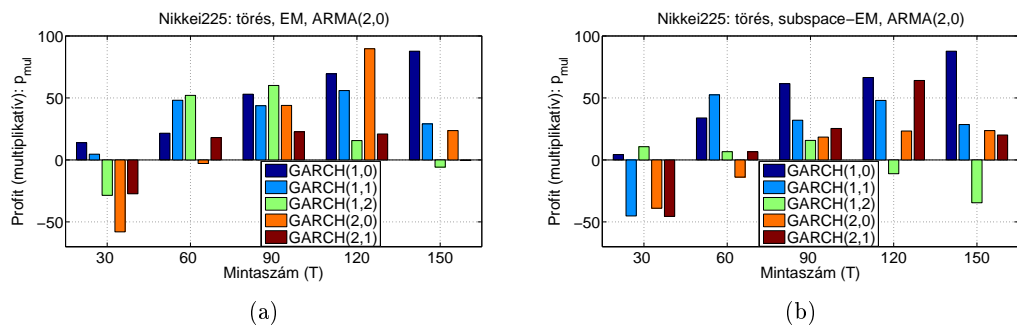
4.23. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) százalékban elért értékének illusztrációja a törést tartalmazó DIA adatokon, a subspace-EM és EM módszerek alkalmazásával különböző mintaszámra, ARMA(2,0) rend mellett. (a): ARMA, (b): ARMA-GARCH.



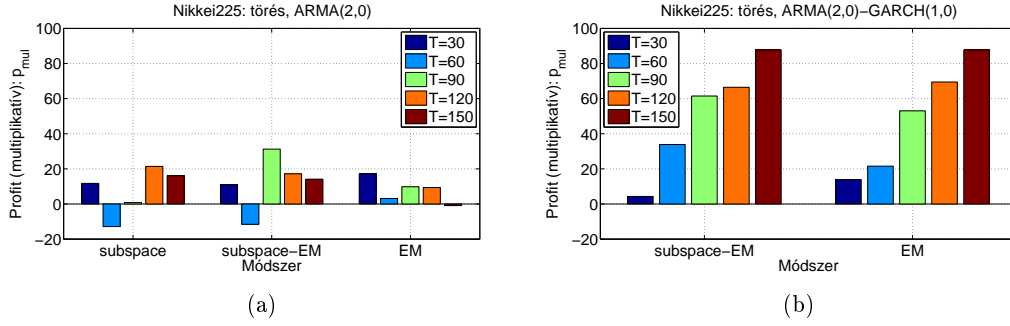
4.24. ábra. A profit érték (p_{mul}) görbéjének illusztrációja a predikciós horizonton, ARMA(2,0)-GARCH(2,0) modell és subspace-EM módszer esetén a DIA törést tartalmazó adatain. Mintaszám: $T = 120$ és $T = 150$.



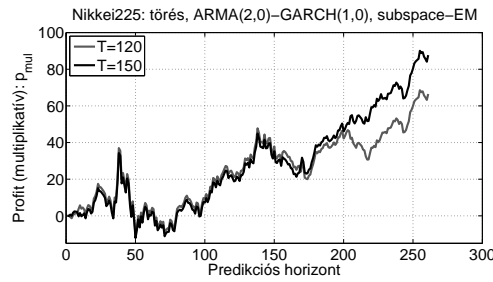
4.25. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) százalékban elért értékének illusztrációja a törést tartalmazó Nikkei225 adatokon, különböző ARMA-GARCH rendek esetén. (a): EM, $T = 120$, (b): EM, $T = 150$, (c): subspace-EM, $T = 120$, (d): subspace-EM, $T = 150$.



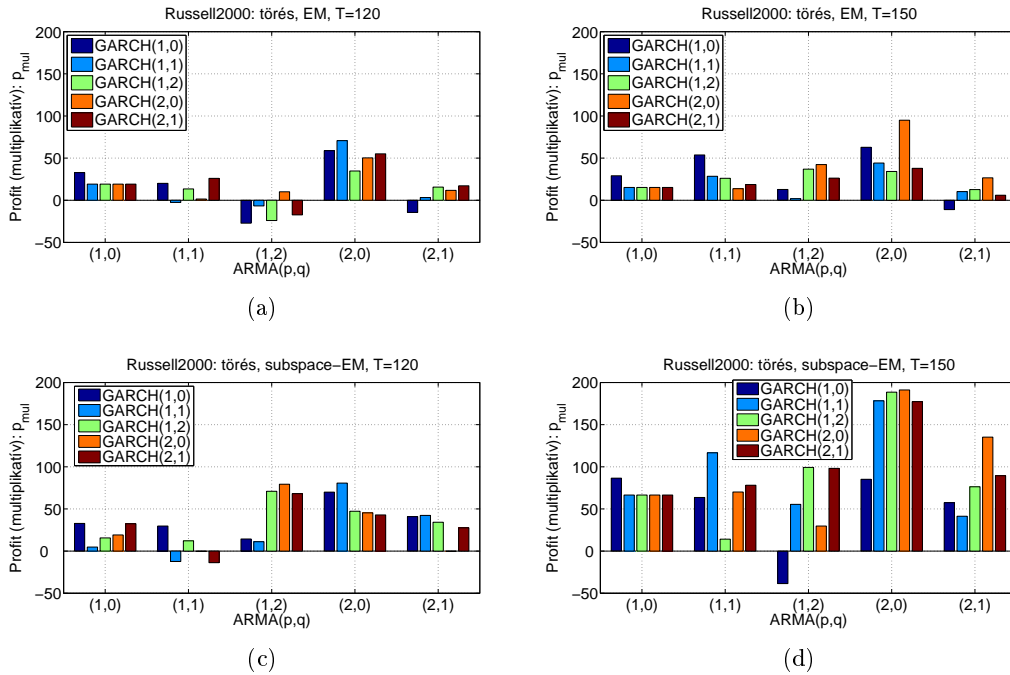
4.26. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) százalékban elért értékének illusztrációja a törést tartalmazó Nikkei225 adatokon, ARMA(2,0) rend mellett, különböző GARCH rendek esetén a mintaszám függvényében. (a): EM, (b): subspace-EM módszer.



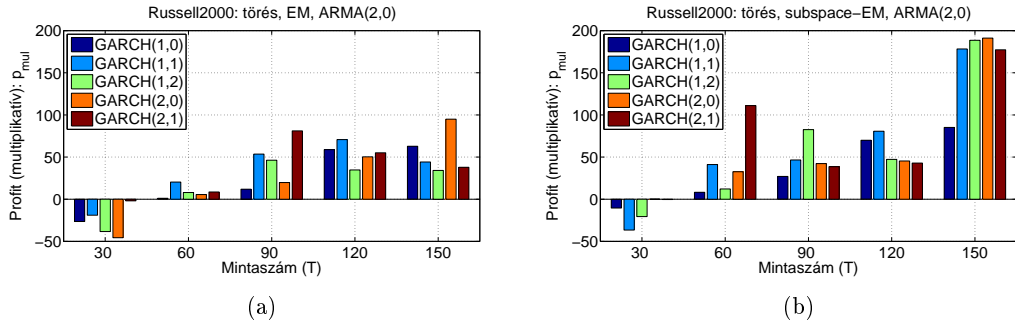
4.27. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) százalékban elért értékének illusztrációja a törést tartalmazó Nikkei225 adatokon, a subspace-EM és EM módszerek alkalmazásával különböző mintaszámra, ARMA(2,0) rend mellett. (a): ARMA, (b): ARMA-GARCH.



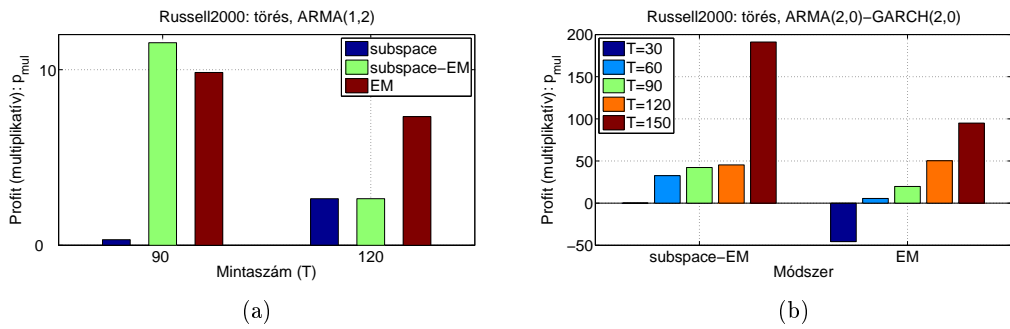
4.28. ábra. A profit érték (p_{mul}) görbéjének illusztrációja a predikciós horizonton, ARMA(2,0)-GARCH(1,0) modell és subspace-EM módszer esetén a Nikkei225 törést tartalmazó adatain. Mintaszám: $T = 120$ és $T = 150$.



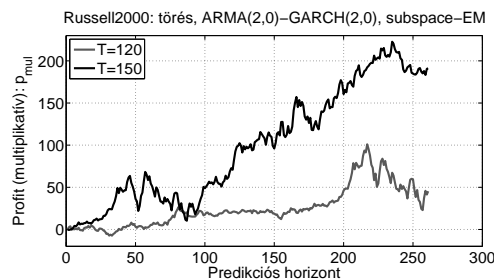
4.29. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) százalékban elért értékének illusztrációja a törést tartalmazó Russell2000 adatokon, különböző ARMA-GARCH rendek esetén. (a): EM, $T = 120$, (b): EM, $T = 150$, (c): subspace-EM, $T = 120$, (d): subspace-EM, $T = 150$.



4.30. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) százalékban elért értékének illusztrációja a törést tartalmazó Russell2000 adatokon, ARMA(2,0) rend mellett, különböző GARCH rendek esetén a mintaszám függvényében. (a): EM, (b): subspace-EM módszer.



4.31. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) százalékban elért értékének illusztrációja a törést tartalmazó Russell2000 adatokon, a subspace-EM és EM módszerek alkalmazásával különböző mintaszámra. (a): ARMA(1,2), (b): ARMA(2,0)-GARCH(2,0).



4.32. ábra. A profit érték (p_{mul}) görbéjének illusztrációja a predikciós horizont függvényében, ARMA(2,0)-GARCH(2,0) modell és subspace-EM módszer esetén a Russell2000 törést tartalmazó adatain. Mintaszám: $T = 120$ and $T = 150$.

Emelkedő idősorok

DIA adatbázis:

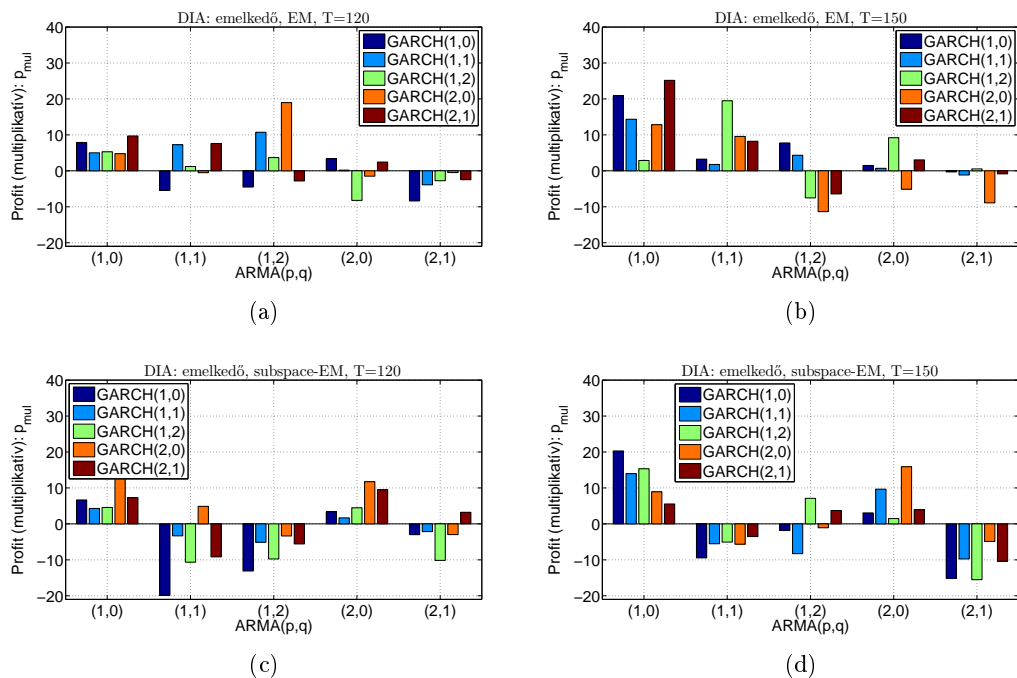
- A profit illusztrációja (p_{mul}) különböző ARMA-GARCH rendekre a 4.33 ábrán látható. Az ARMA(1,0) rendet használva látjuk, hogy ez egy jó rendválasztás lehet, így a továbbiakban erre szorítkozom.
- A profit értékei külön szerepelnek az ARMA (1,0) rendre a mintaszám függvényében a 4.34 ábrán, a GARCH rendek közül az (1,0) és (2,0) előnyösnek tűnik.
- Pozitív profit figyelhető meg a 4.35 ábrán.
- Az ehhez tartozó profit görbéje a 4.36 ábrán látható. Ezt megfigyelve láthatjuk, hogy a profit értéke növekszik körülbelül 150 lépésen keresztül, azután elkezd ingadozni.

Nikkei225 adatbázis:

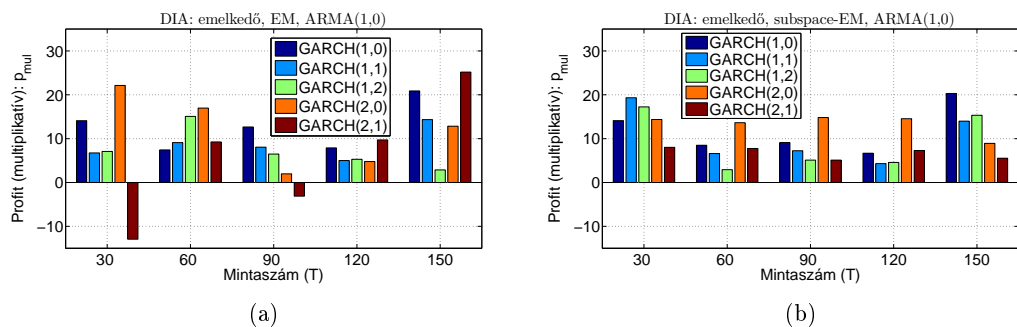
- A profit értékek láthatóak a 4.37 ábrán. Ezt figyelembe véve (i) a subspace-EM optimalizálás előnyösnek tűnik, (ii) az ARMA rendeknél pedig a (2,1)-et illusztrálok, figyelembe véve a 4.37(d) ábrát.
- A profitot a mintaszám függvényében vizsgálhatjuk a 4.38 ábrán. A GARCH rendeket vizsgálva az (1,0) mutatkozik legjobbnak, főleg nagyobb mintaszám esetén, így $T = 150$ -re.
- A magasabb profithoz, a subspace-EM optimalizálás ígéretes becslési lehetőség, főleg magasabb mintaszám ($T = 150$) esetén, ahogy ez a 4.39 ábrán látható.
- Az ehhez tartozó profit görbéket ábrázolja a 4.40 ábra: a fele után, ami egy inicializáló intervallumnak is tekinthető, a profit növekszik.

Russell2000 adatbázis:

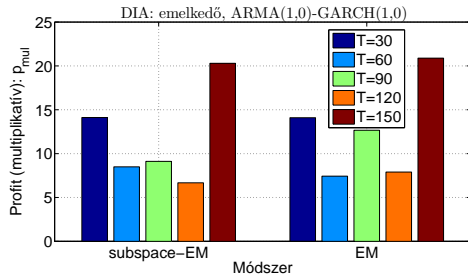
- A profit értékeket a 4.41 ábra mutatja. Láthatjuk, hogy az ARMA modellre a (2,0) rend ér el pozitív profitot (de azt is megfigyelhetjük, hogy a törést tartalmazóval összehasonlítva kevesebb profitot érünk el, hiszen ott több esetben is 100% felett volt), ezt a rendet választottam illusztrálni.
- A profit értékek láthatóak a 4.42 ábrán a mintaszám függvényében az ARMA(2,0) modell esetén. Ekkor a GARCH rendek közül az (1,2) előnyös választás.
- Figyelve a 4.43 ábrát, az EM módszer magasabb profitot képes generálni.
- Az ehhez tartozó profit görbéket pedig a 4.44 illusztrálja, ami ígéretesen emelkedik.



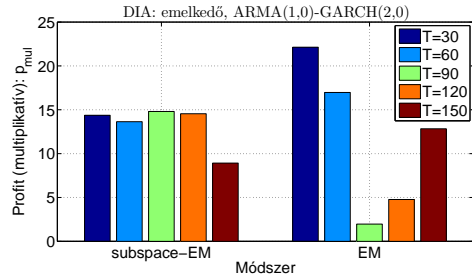
4.33. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) százalékban elért értékének illusztrációja az emelkedő DIA adatokon, különböző ARMA-GARCH rendek esetén. (a): EM, $T = 120$, (b): EM, $T = 150$, (c): subspace-EM, $T = 120$, (d): subspace-EM, $T = 150$.



4.34. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) százalékban elért értékének illusztrációja az emelkedő DIA adatokon, ARMA(1,0) rend mellett, különböző GARCH rendek esetén a mintaszám függvényében. (a): EM, (b): subspace-EM módszerek.

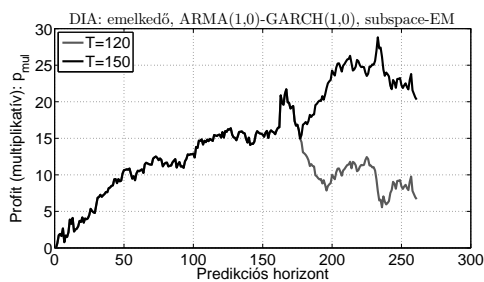


(a)

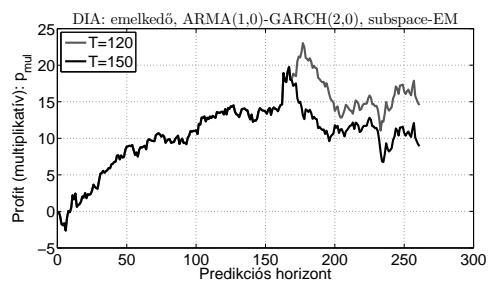


(b)

4.35. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) százalékban elért értékének illusztrációja az emelkedő DIA adatokon, a subspace-EM és EM módszerek alkalmazásával különböző mintaszámra. (a): ARMA(1,0)-GARCH(1,0), (b): ARMA(1,0)-GARCH(2,0).

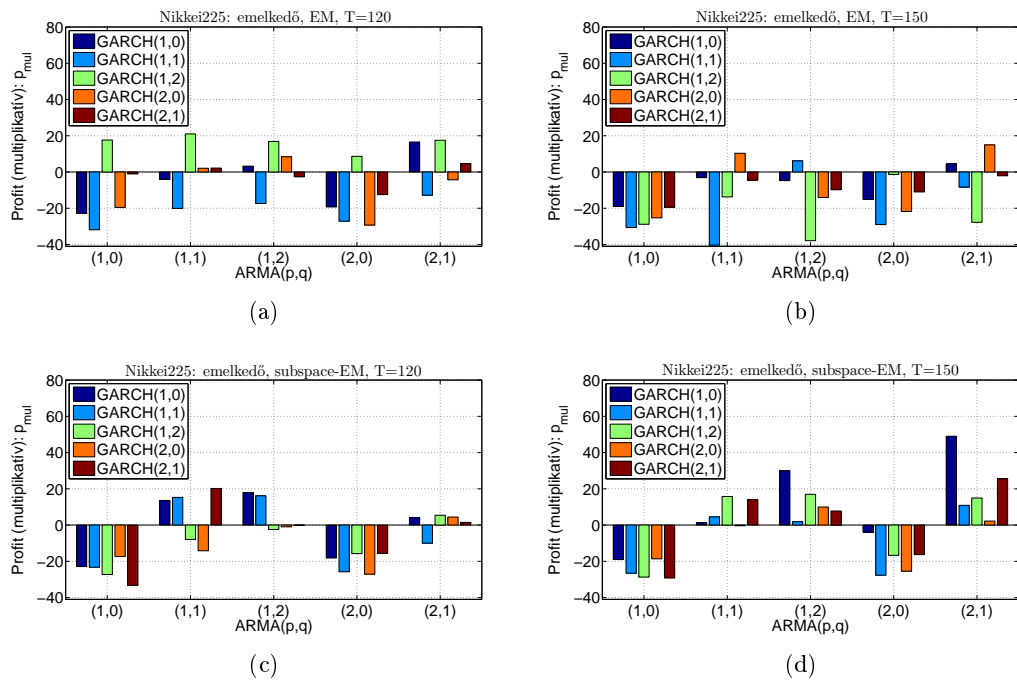


(a)

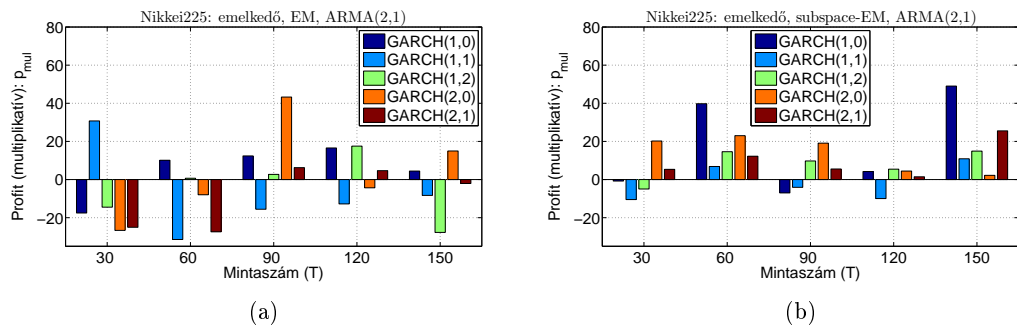


(b)

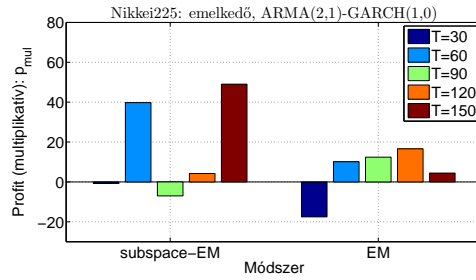
4.36. ábra. A profit érték (p_{mul}) görbéje a predikciós horizonton, a subspace-EM módszer esetén a DIA emelkedő adatain. (a): ARMA(1,0)-GARCH(1,0), (b): ARMA(1,0)-GARCH(2,0). Mintaszám: $T = 120$ és $T = 150$.



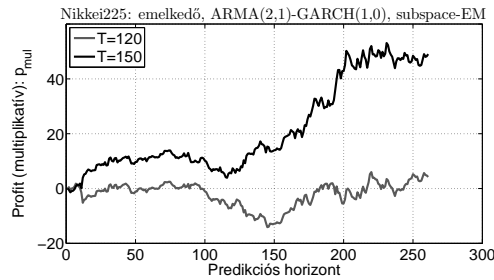
4.37. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) százalékban elért értékének illusztrációja az emelkedő Nikkei225 adatokon, különböző ARMA-GARCH rendek esetén. (a): EM, $T = 120$, (b): EM, $T = 150$, (c): subspace-EM, $T = 120$, (d): subspace-EM, $T = 150$.



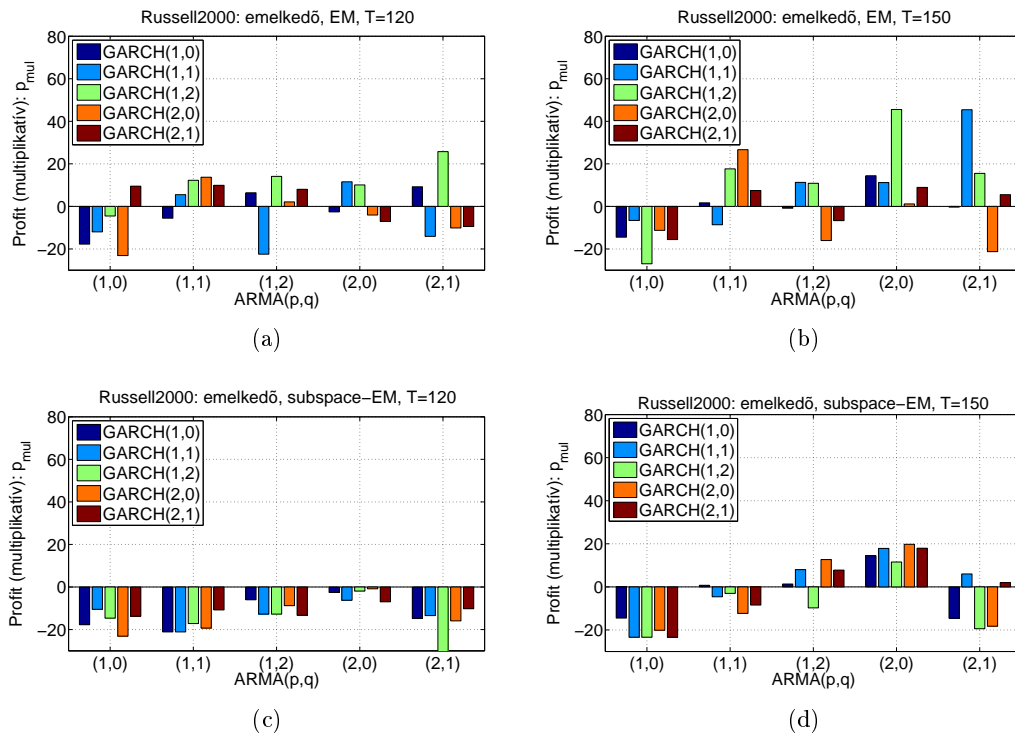
4.38. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) százalékban elért értékének illusztrációja az emelkedő Nikkei225 adatokon, ARMA(2,1) rend mellett, különböző GARCH rendek esetén a mintaszám függvényében. (a): EM, (b): subspace-EM módszer.



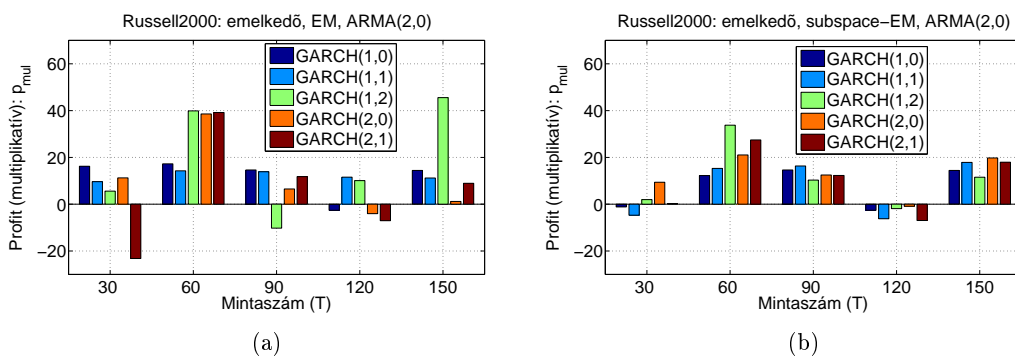
4.39. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) százalékban elért értékének illusztrációja az emelkedő Nikkei225 adatokon, a subspace-EM és EM módszerek alkalmazásával különböző mintaszámra ARMA(2,1)-GARCH(1,0) esetén.



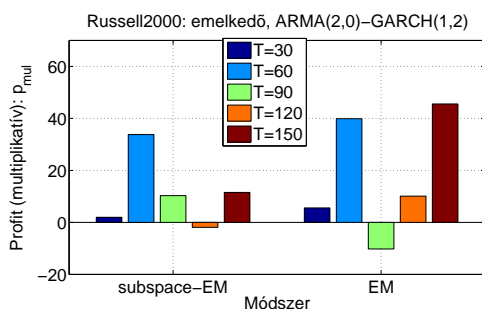
4.40. ábra. A profit érték (p_{mul}) görbéje a predikciós horizonton, ARMA(2,1)-GARCH(1,0) modell és subspace-EM módszer esetén a Nikkei225 emelkedő adatain. Mintaszám: $T = 120$ és $T = 150$.



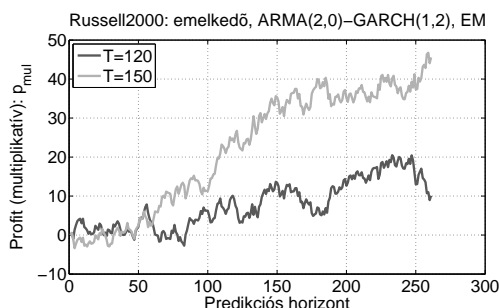
4.41. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) százalékban elért értékének illusztrációja az emelkedő Russell2000 adatokon, különböző ARMA-GARCH rendek esetén. (a): EM, $T = 120$, (b): EM, $T = 150$, (c): subspace-EM, $T = 120$, (d): subspace-EM, $T = 150$.



4.42. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) százalékban elért értékének illusztrációja az emelkedő Russell2000 adatokon, ARMA(2,1) rend mellett, különböző GARCH rendek esetén a mintaszám függvényében. (a): EM, (b): subspace-EM módszer.



4.43. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) százalékban elért értékének illusztrációja az emelkedő Russell2000 adatokon, a subspace-EM és EM módszerek alkalmazásával különböző mintaszámra ARMA(2,1)-GARCH(1,0) esetén.



4.44. ábra. A profit érték (p_{mul}) görbéje a predikciós horizonton, ARMA(2,1)-GARCH(1,0) modell és EM módszer esetén a Russell2000 emelkedő adatain. Mintaszám: $T = 120$ és $T = 150$.

4.5.4. Eredmények a heti mintavételezésű adatokon

Ebben a részben ismertetem, hogy milyen eredményeket kaptam a heti mintavételezésű adatokon:

DIA adatbázis:

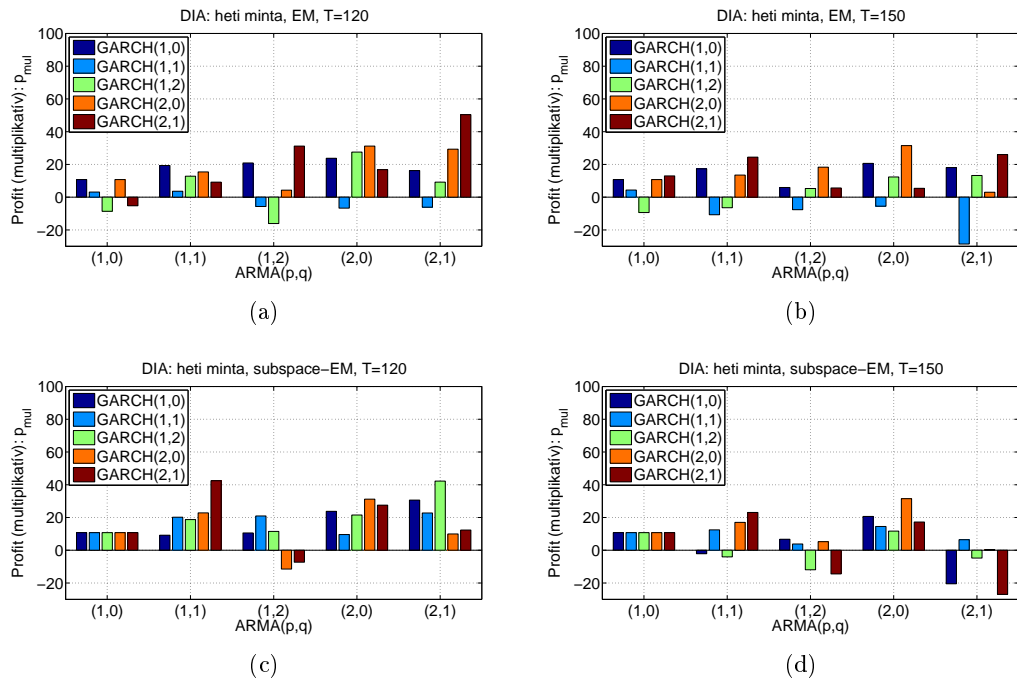
- A kapott profitot (p_{mul}) illusztrálja a 4.45 ábra, különböző ARMA rendekre. Ez a legtöbb ARMA rendre pozitív, ezek közül az ARMA(2,0) rendet vizsgálom a további ábrákon.
- GARCH rendeket tekintve a (2,0) tűnik robusztus választásnak a 4.46 ábra alapján.
- A 4.47 ábrán a profit értékek láthatók a mintaszám függvényében, amit az ARMA(2,0)-GARCH(2,0) modellel kaptam. Ezen látszik, hogy a subspace-EM és az EM-el kapott eredmények hasonlóak.
- Az ehhez a renدهz tartozó profit görbe ígéretesen emelkedik a becslési intervallum alatt (lásd 4.48 ábra).

Nikkei225 adatbázis:

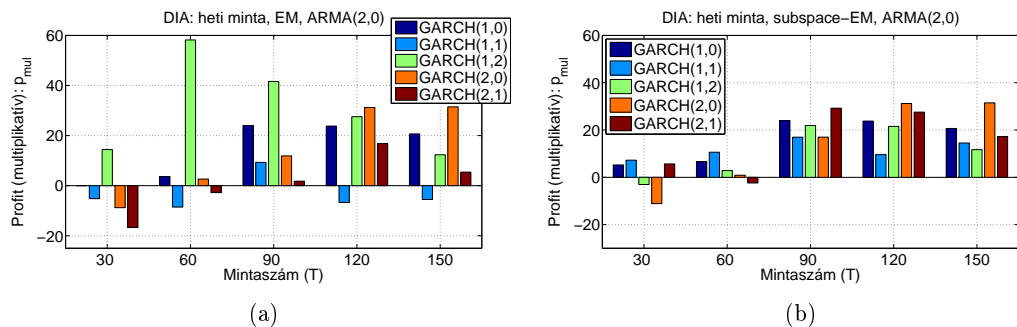
- Megfigyelve a 4.49 ábrát, az ARMA rendek (2,0) és (1,2) előnyös választásnak tűnnek az EM identifikáció esetén. Illusztrációként a (2,0) rendet használom a továbbiakban.
- Különböző GARCH rendeket összehasonlítva (4.50 ábra), az (1,2) és (2,1) ad jobb eredményeket a multiplikatív profitot (p_{mul}) tekintve.
- Az elért profit értékek a mintaszám függvényében a választott ARMA(2,0)-GARCH(1,2) modellre a következőképpen néznek ki: 4.51 ábra. Az EM identifikáció jobb eredményeket ad, mint a subspace-EM.
- Ennek a modellnek a görbéje látható a 4.52 ábrán a predikciós horizont függvényében. Az első félév elteltével kezd emelkedni a görbe.

Russell2000 adatbázis:

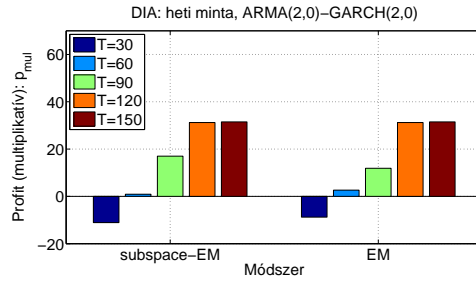
- Különböző ARMA-GARCH rendek esetén a kapott profit értékek (p_{mul}) a 4.53 ábrán látszanak. Az ARMA(1,0) modell 20% körüli, az (1,2) és (2,0) néha jobb eredményeket is hoz. A további illusztrációhoz a (2,0) rendet választottam.
- A GARCH rendeket szemügyre véve (4.54 ábra), a legjobb értékek az (1,2) és (1,0) rend választása mellett mutatkoztak.
- A 4.55 ábrán a profit értékek szerepelnek a mintaszám függvényében a választott ARMA(2,0)-GARCH(1,0) és ARMA(2,0)-GARCH(1,2) modellre. Mindkét módszerrel (subspace-EM, EM) a legmagasabb profit értékek 20-30% körüliek.
- Az ARMA(2,0)-GARCH(1,2) modell profit görbéi a 4.56 ábrán szerepelnek, subspace-EM identifikációs módszer mellett. Emelkedő trendet mutatnak.



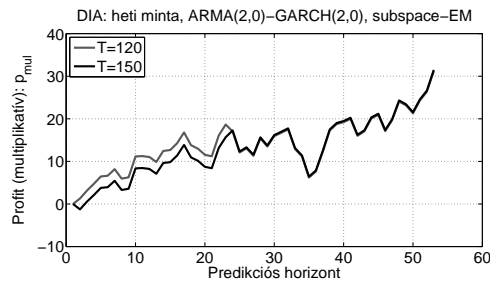
4.45. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) százalékban elért értékének illusztrációja a heti mintavételezésű DIA adatokon, különböző ARMA-GARCH rendek esetén. (a): EM, $T = 120$, (b): EM, $T = 150$, (c): subspace-EM, $T = 120$, (d): subspace-EM, $T = 150$.



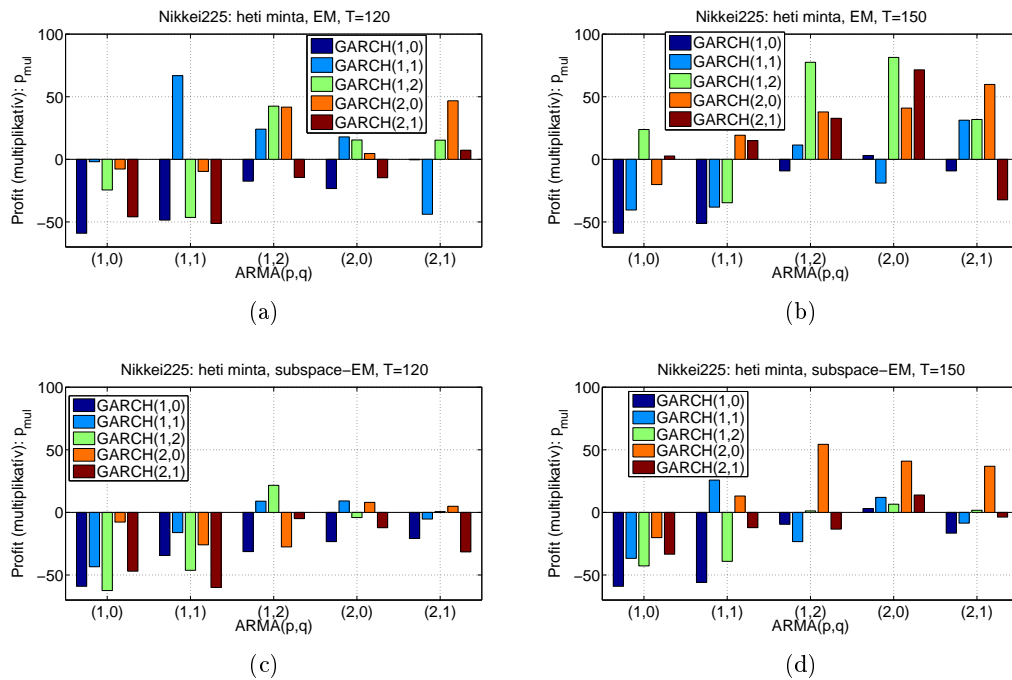
4.46. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) százalékban elért értékének illusztrációja a heti mintavételezésű DIA adatokon, ARMA(2,0) rend mellett, különböző GARCH rendek esetén a mintaszám függvényében. (a): EM, (b): subspace-EM módszer.



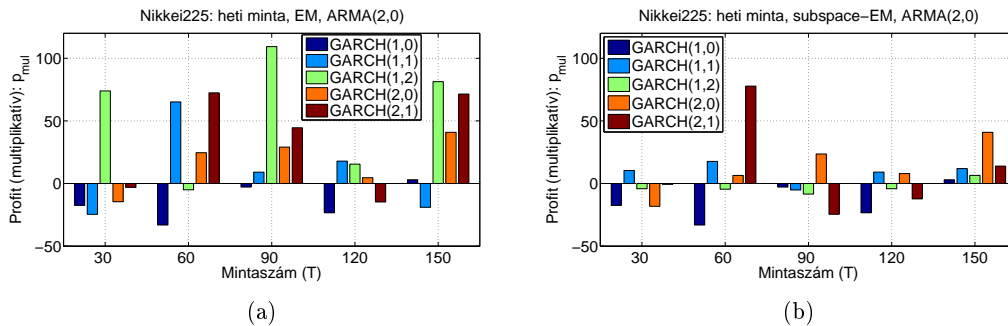
4.47. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) százalékban elért értékének illusztrációja az emelkedő heti mintavételezésű DIA adatokon, a subspace-EM és EM módszerek alkalmazásával különböző mintaszámra. Modell: ARMA(2,0)-GARCH(2,0).



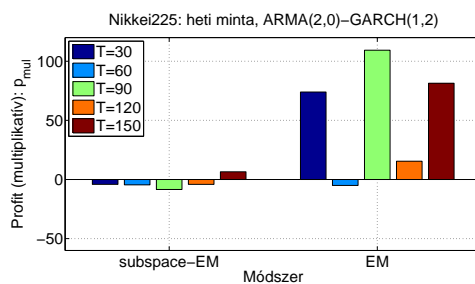
4.48. ábra. Az elért profit (p_{mul}) görbéjének illusztrációja a predikciós horizonton, a subspace-EM módszer esetén a DIA heti adatain. Rend: ARMA(2,0)-GARCH(2,0). Mintaszám: $T = 120$ és $T = 150$.



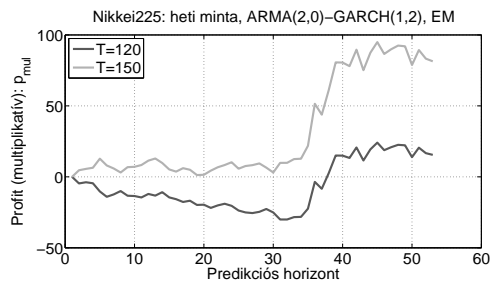
4.49. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) százalékban elért értékének illusztrációja a heti mintavételezésű Nikkei225 adatokon, különböző ARMA-GARCH rendek esetén. (a): EM, $T = 120$, (b): EM, $T = 150$, (c): subspace-EM, $T = 120$, (d): subspace-EM, $T = 150$.



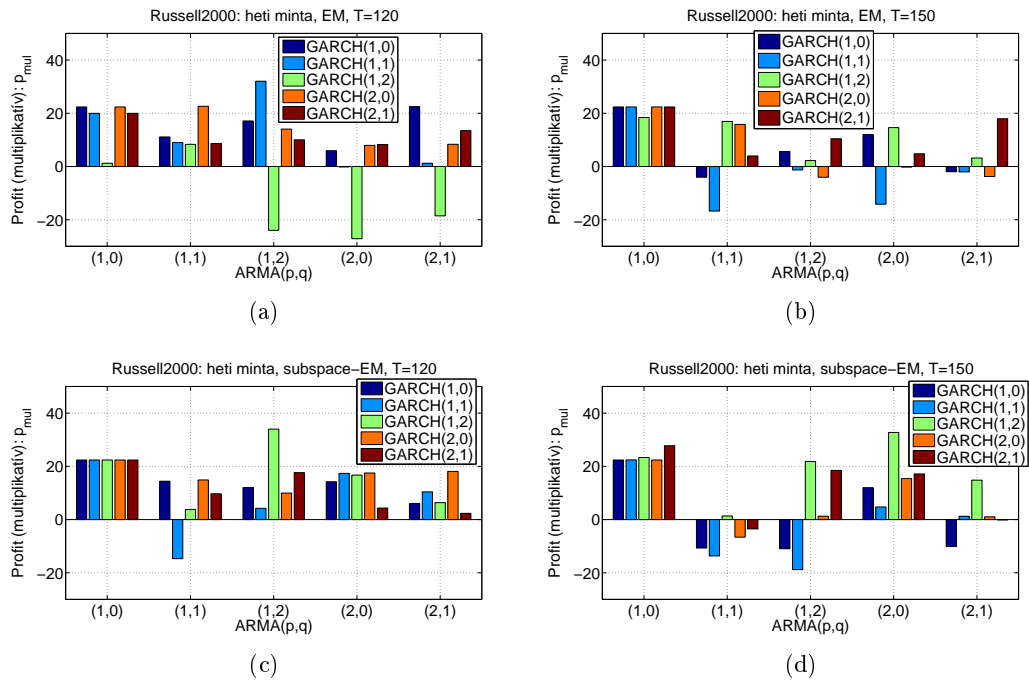
4.50. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) százalékban elért értékének illusztrációja a heti mintavételezésű Nikkei225 adatokon, ARMA(2,0) rend mellett, különböző GARCH rendek esetén a mintaszám függvényében. (a): EM, (b): subspace-EM módszer.



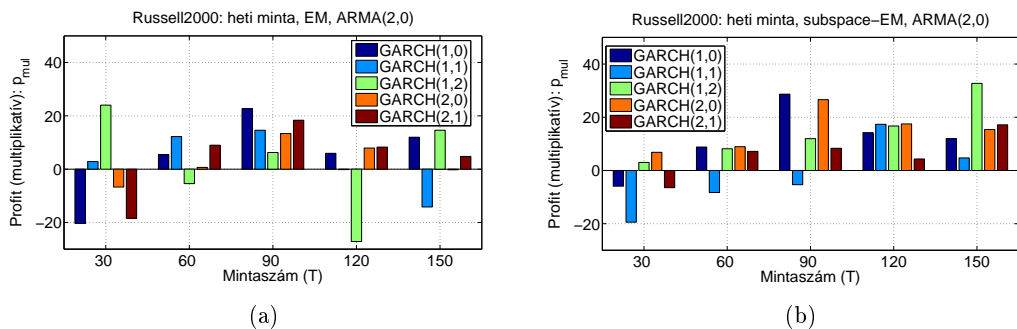
4.51. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) százalékban elért értékének illusztrációja az emelkedő heti mintavételezésű Nikkei225 adatokon, a subspace-EM és EM módszerek alkalmazásával különböző mintaszámra. Modell: ARMA(2,0)-GARCH(1,2).



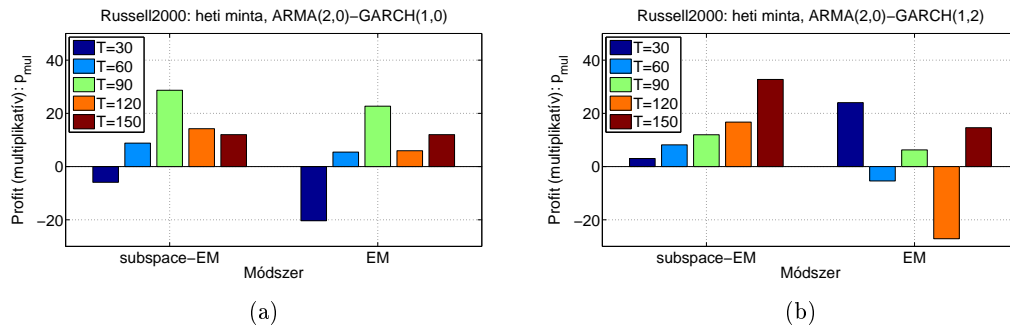
4.52. ábra. Az elért profit (p_{mul}) görbéje a predikciós horizonton, a subspace-EM módszer esetén a Nikkei225 heti adatain. Rend: ARMA(2,0)-GARCH(1,2). Mintaszám: $T = 120$ és $T = 150$.



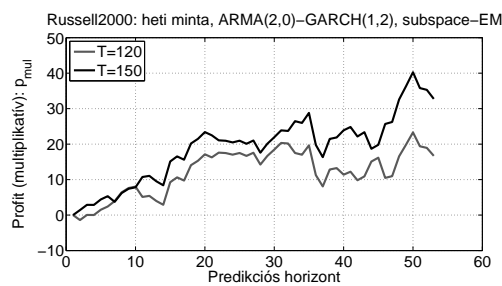
4.53. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) százalékban elért értékének illusztrációja a heti mintavételezésű Russell2000 adatokon, különböző ARMA-GARCH rendek esetén. (a): EM, $T = 120$, (b): EM, $T = 150$, (c): subspace-EM, $T = 120$, (d): subspace-EM, $T = 150$.



4.54. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) százalékban elért értékének illusztrációja a heti mintavételezésű Russell2000 adatokon, ARMA(2,0) rend mellett, különböző GARCH rendek esetén a mintaszám függvényében. (a): EM, (b): subspace-EM módszer.



4.55. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) százalékban elért értékének illusztrációja az emelkedő heti mintavételezésű Russell2000 adatokon, a subspace-EM és EM módszerek alkalmazásával különböző mintaszámra. Modell: (a): ARMA(2,0)-GARCH(1,0), (b): ARMA(2,0)-GARCH(1,2).



4.56. ábra. Az elért profit (p_{mul}) görbéje a predikciós horizonton, a subspace-EM módszer esetén a Russell2000 heti adatain. Rend: ARMA(2,0)-GARCH(1,2). Mintaszám: $T = 120$ és $T = 150$.

4.5.5. ARMA modell és a "high-low" segítségével elért eredmények

A "high-low" segédváltozó hozzávételével az immár 2 dimenziós idősorok becslési eredményei szerepelnek ebben a fejezetben. A "high-low" a napi legnagyobb és legalacsonyabb ár különbségét jelenti. A kapottakat a következőképpen összegezhetem:

Törést tartalmazó idősorok

DIA adatbázis:

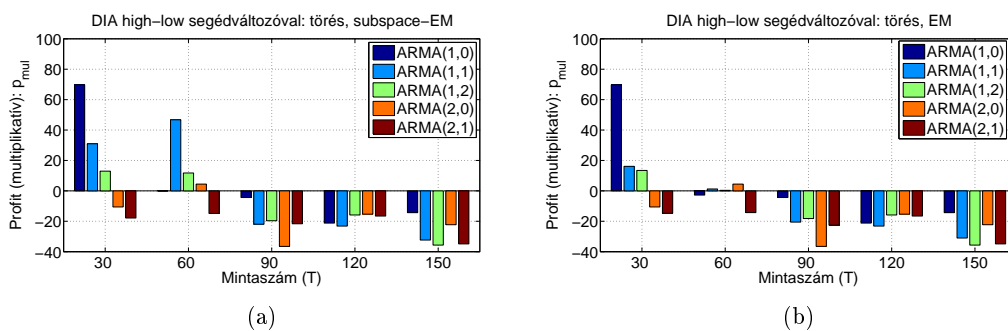
- Ahogy a 4.57 ábrán láthatjuk - a 2 dimenziós modell segítségével, azaz a "high-low" segédváltozó hozzávételével - elérhető profit (p_{mul}), amennyiben a mintaszámot $T \leq 60$ -re korlátozzuk. Az ARMA rendek tekintetében az (1,0) tűnik hatékonynak, ezt illusztrálom a továbbiakban.
- Annak ellenére, hogy használjuk a "high-low" segédváltozót, a 4.58 ábra tanulsága az, hogy nem ér el nagyobb profitot az így kapott becslésünk.
- Az ehhez tartozó profit görbék láthatóak a 4.59 ábrán. A görbe ígéretesen emelkedik egy rövid inicializáló periódus után.

Nikkei225 adatbázis:

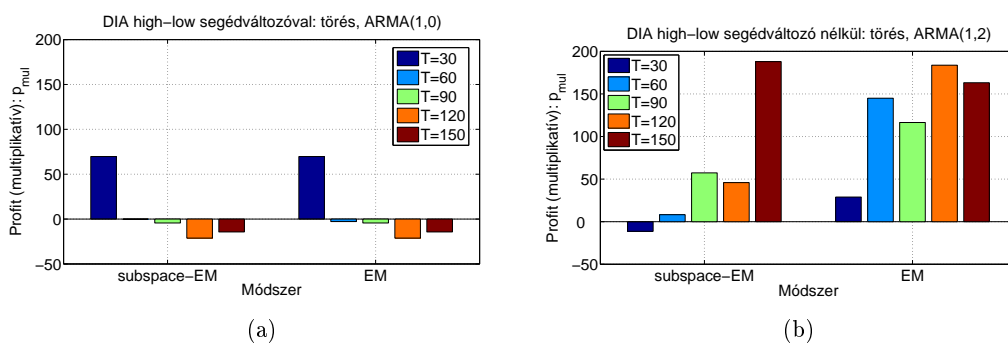
- Különböző rendekre kapott profitot (p_{mul}) illusztrálja a 4.60 ábra. Ennek alapján ARMA rendnek az (1,0)-t használom az illusztrációkhoz.
- Ebben az esetben az látszik, hogy nagyobb profit érhető el a "high-low" segédváltozó hozzávételével (4.61 ábra).
- A profit görbéje szerepel a 4.62 ábrán a $T = 60$ és $T = 90$ mintaszám mellett. Növekvő trend figyelhető meg.

Russell2000 adatbázis:

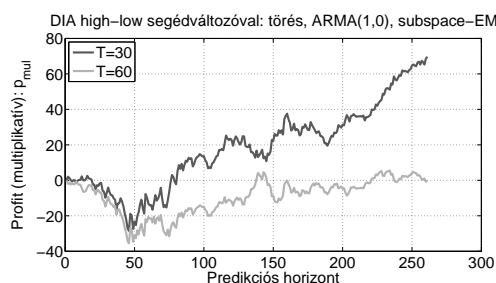
- Látható, hogy ebben az esetben majdnem az egész vizsgált paramétertartományon pozitív profitot eredményez a becslési modell (4.63 ábra). Így a rendek közül az (1,0)-t választottam.
- A 4.64 ábra azt mutatja, hogy a "high-low" változó alkalmazásával a profit jelentősen növelhető. Így itt a két dimenziós modell jobban teljesített.
- Az ehhez tartozó görbéket a 4.65 ábra mutatja, $T = 60$ és $T = 90$ mintaszámokra. Ezekből látszik, hogy a profit erőteljesen emelkedik a periódus második felétől.



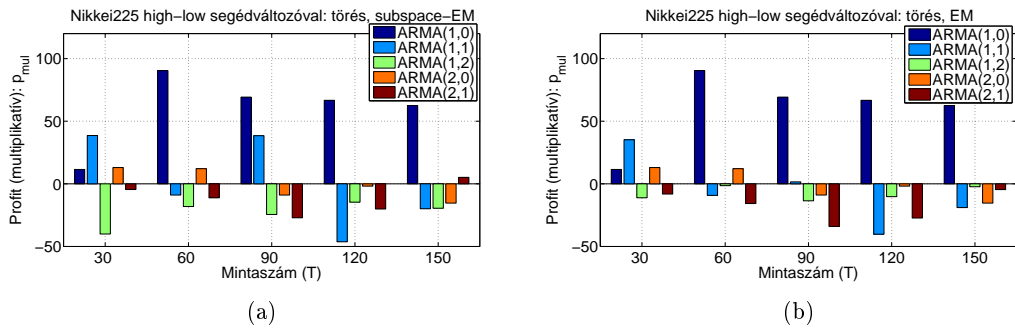
4.57. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) a törést tartalmazó DIA adatokon, a "high-low" segédváltozó használatával, különböző ARMA rendek esetén. (a): subspace-EM, (b): EM módszer.



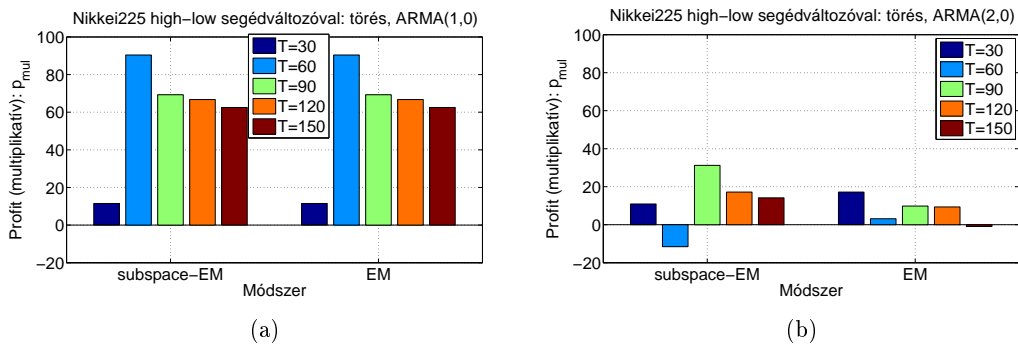
4.58. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) a törést tartalmazó DIA adatokon, különböző mintaszám és a subspace-EM, EM módszer esetén. (a): "high-low" segédváltozóval, ARMA(1,0), (b): "high-low" segédváltozó nélkül, ARMA(1,2).



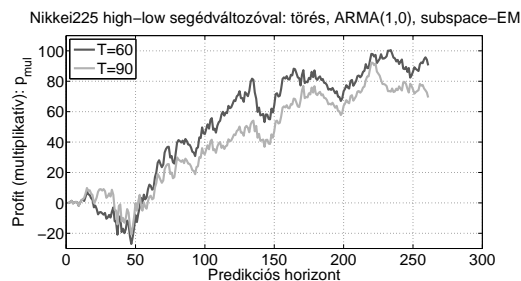
4.59. ábra. Az elért profit (p_{mul}) görbéje a predikciós horizonton, a subspace-EM módszer esetén a törést tartalmazó 2 dimenziós, "high-low" hozzávételével kapott DIA idősoron. Rend: ARMA(1,0). Mintaszám: $T = 30$ és $T = 60$.



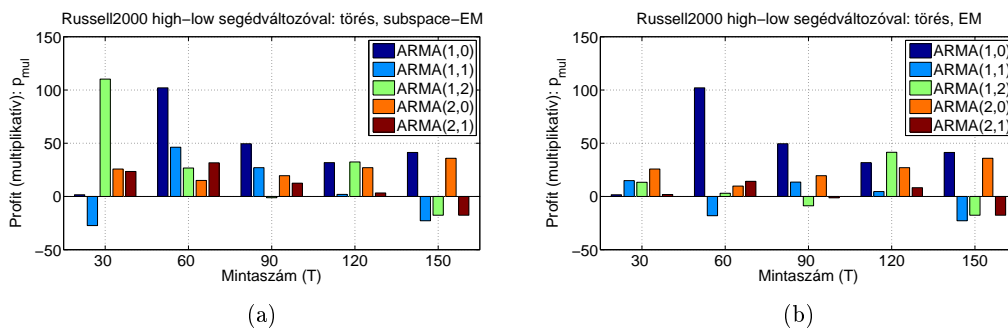
4.60. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) a törést tartalmazó Nikkei225 adatokon, a "high-low" segédváltozó használatával, különböző ARMA rendek esetén. (a): subspace-EM, (b): EM módszer.



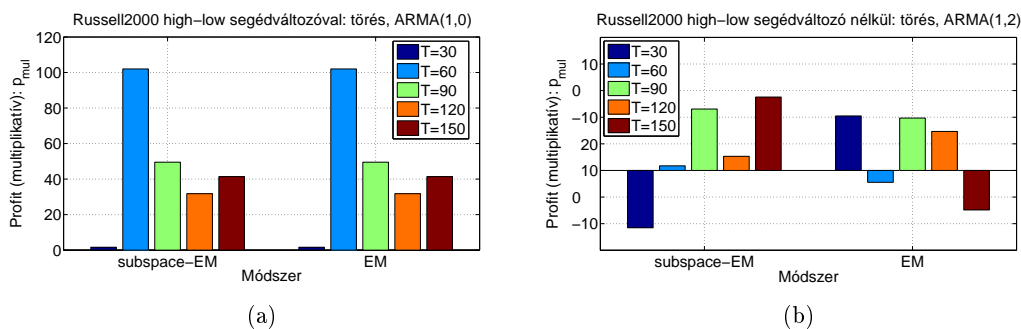
4.61. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) a törést tartalmazó Nikkei225 adatokon, különböző mintaszám és a subspace-EM, EM módszer esetén. (a): "high-low" segédváltozóval, ARMA(1,0), (b): "high-low" segédváltozó nélkül, ARMA(2,0).



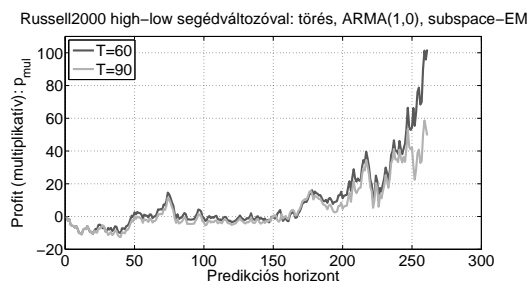
4.62. ábra. Az elért profit (p_{mul}) görbéje a predikciós horizonton, a subspace-EM módszer esetén a törést tartalmazó 2 dimenziós, "high-low" hozzávételével kapott Nikkei225 idősoron. Rend: ARMA(1,0). Mintaszám: $T = 60$ és $T = 90$.



4.63. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) a törést tartalmazó Russell2000 adatokon, a "high-low" segédváltozó használatával, különböző ARMA rendek esetén. (a): subspace-EM, (b): EM módszer.



4.64. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) a törést tartalmazó RUT adatokon, különböző mintaszám és a subspace-EM, EM módszer esetén. (a): "high-low" segédváltozóval, ARMA(1,0), (b): "high-low" segédváltozó nélkül, ARMA(1,2).



4.65. ábra. Az elért profit (p_{mul}) görbéje a predikciós horizonton, a subspace-EM módszer esetén a törést tartalmazó 2 dimenziós, "high-low" hozzávételével kapott Russell2000 idősoron. Rend: ARMA(1,0). Mintaszám: $T = 60$ és $T = 90$.

Emelkedő idősorok

Az emelkedő időintervallumokra vonatkozó eredmények a következők, amennyiben a segédváltozót figyelembe vesszük, és így 2 dimenziós idősorral becslem a következő napi záróárat.

DIA adatbázis:

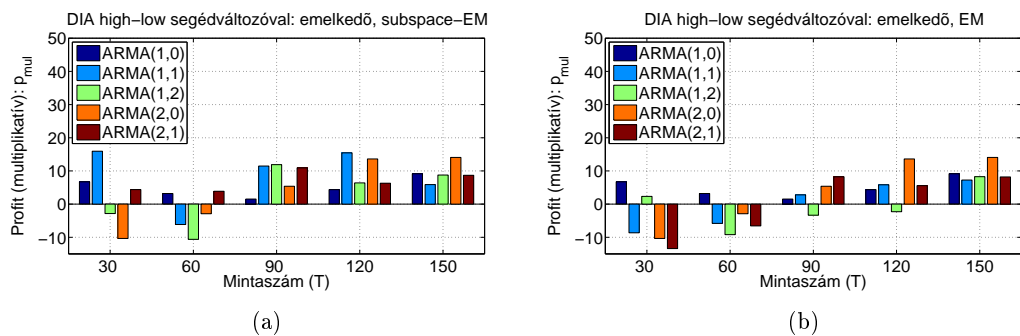
- A különböző rendekre kapott profit (p_{mul}) látható a 4.66 ábrán. Ez alapján a "high-low" segédváltozóval elért becslésekkel látszik pozitív profit is. Az illusztrációhoz az ARMA rendnek (2,0)-t választottam.
- A profit értékek a mintaszám függvényében növekednek, ez látszik a 4.67 ábrán. Ezek ellenére a segédváltozó nélküli eredmények előnyösebbnek tűnnek, mint a "high-low"-val elért profit.
- A 4.68 ábra alapján, a becslési horizont felétől a profit közel monoton módon emelkedik.

Nikkei225 adatbázis:

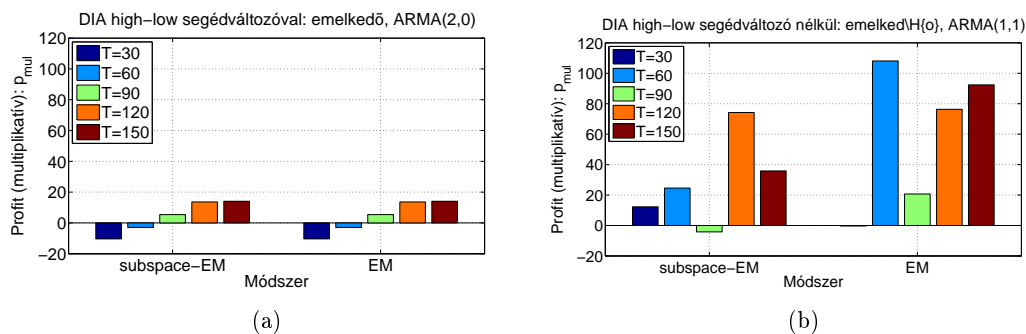
- $T \geq 60$ mintaszám esetén növekvő profitot kapunk, ez látszik a 4.69 ábrán. Rendek tekintetében megállapíthatjuk, hogy az eredmények hasonlóak, az illusztráció során az (1,1) ARMA rend fog szerepelni.
- A 4.70 ábrán a profit szépen növekszik a mintaszám függvényében, és a segédváltozó hozzávétele előnyös.
- A profit görbéket prezentálja a 4.71 ábra. A mintaszám itt $T = 120$ és 150 , és a görbe ebben az esetben emelkedik.

Russell2000 adatbázis:

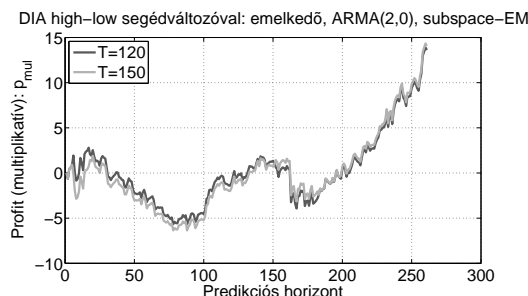
- A kapott profitot mutatja a 4.72 ábra. Ebben az esetben az (1,0) és (1,1) a legadekvátabb választás. Ezeket illusztrálom.
- Figyelembe véve a 4.73 ábrát, a subspace-EM jobb módszer, és a segédváltozó esetében a profit növekszik az 1 dimenziós modellhez képest.
- Ekkor a görbe $T = 60$ és $T = 90$ esetén ígéretesen emelkedik. (4.74 ábra)



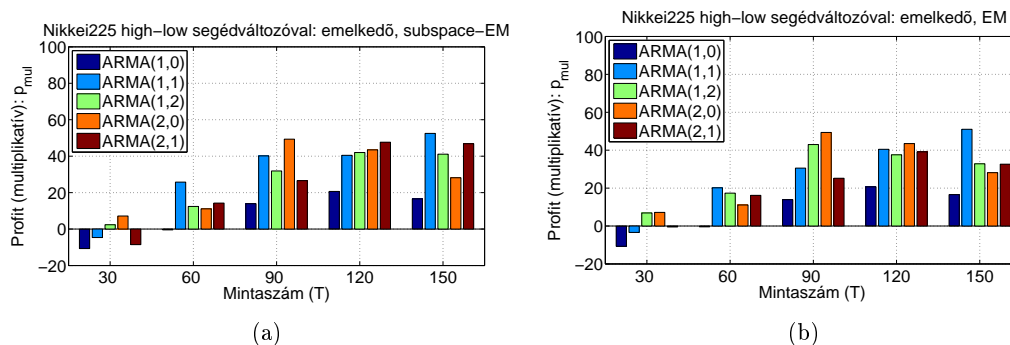
4.66. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) az emelkedő DIA adatokon, a "high-low" segédváltozó használatával, különböző ARMA rendek esetén. (a): subspace-EM, (b): EM módszer.



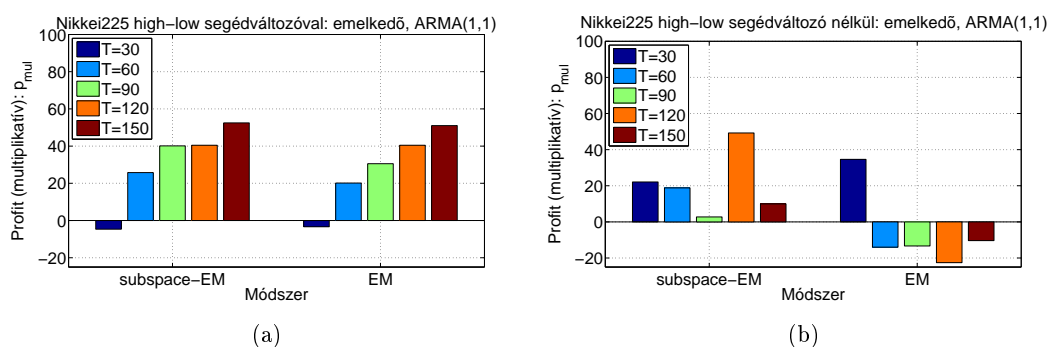
4.67. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) az emelkedő DIA adatokon, különböző mintaszám és a subspace-EM, EM módszer esetén. (a): "high-low" segédváltozóval, ARMA(2,0), (b): "high-low" segédváltozó nélkül, ARMA(1,1).



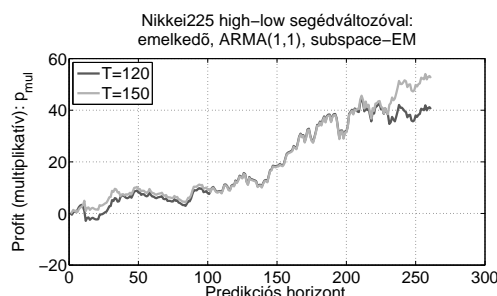
4.68. ábra. Az elért profit (p_{mul}) görbéje a predikciós horizonton, a subspace-EM módszer esetén a 2 dimenziós, "high-low" hozzávételével kapott emelkedő árakat tartalmazó DIA időszoron. Rend: ARMA(2,0). Mintaszám: $T = 120$ és $T = 150$.



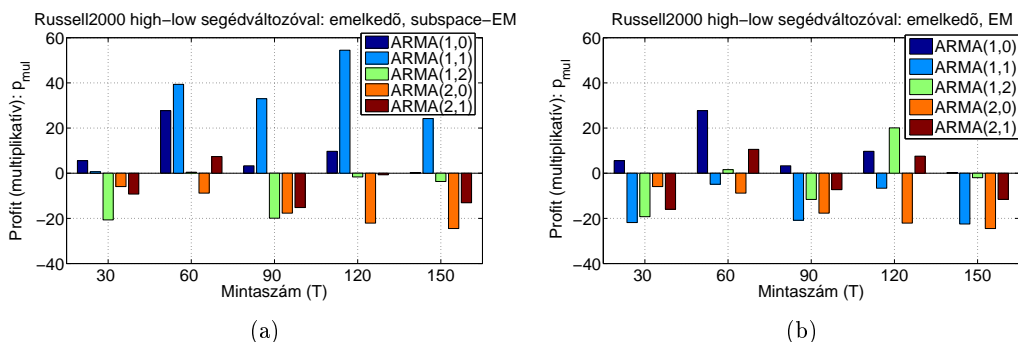
4.69. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) az emelkedő Nikkei225 adatokon, a "high-low" segédváltozó használatával, különböző ARMA rendek esetén. (a): subspace-EM, (b): EM módszer.



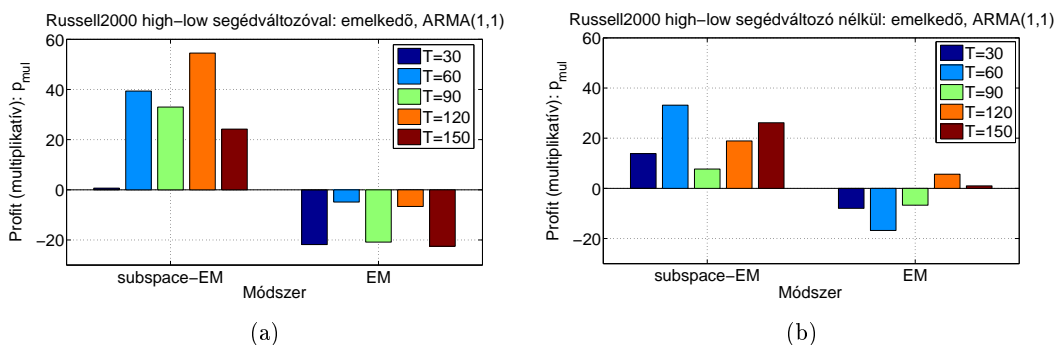
4.70. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) az emelkedő Nikkei225 adatokon, különböző mintaszám és a subspace-EM, EM módszer esetén. (a): "high-low" segédváltozóval, ARMA(1,1), (b): "high-low" segédváltozó nélkül, ARMA(1,1).



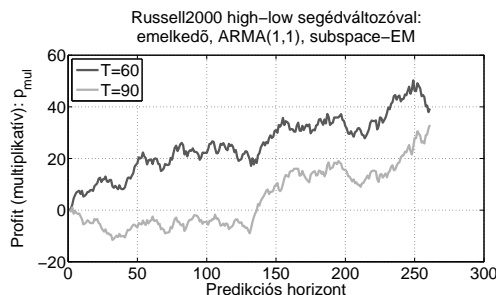
4.71. ábra. Az elért profit (p_{mul}) görbéje a predikciós horizonton, a subspace-EM módszer esetén a 2 dimenziós, "high-low" hozzávételével kapott emelkedő árakat tartalmazó Nikkei225 idősoron. Rend: ARMA(1,1). Mintaszám: $T = 120$ és $T = 150$.



4.72. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) az emelkedő DIA adatokon, a "high-low" segédváltozó használatával, különböző ARMA rendek esetén. (a): subspace-EM, (b): EM módszer.



4.73. ábra. A multiplikatív profit (p_{mul}) az emelkedő Russell2000 adatokon, különböző mintaszám és a subspace-EM, EM módszer esetén. (a): "high-low" segédváltozóval, ARMA(1,1), (b): "high-low" segédváltozó nélkül, ARMA(1,1).



4.74. ábra. Az elért profit (p_{mul}) görbéje a predikciós horizonton, a subspace-EM módszer esetén a 2 dimenziós, "high-low" hozzávételével kapott emelkedő árakat tartalmazó Russell2000 idősrón. Rend: ARMA(2,0). Mintaszám: $T = 60$ és $T = 90$.

4.5.6. ARMA-GARCH modell és a "high-low" segítségével elért eredmények

Szintén a "high-low" segédváltozó hozzávételével történt a predikció, és ARMA-GARCH modellt használtam. Az itt kapott eredményeket, az ARMA-GARCH 1 dimenziós modell eredményeit és a 2 dimenziós ARMA modell eredményeit hasonlítottam össze.

Törést tartalmazó idősorok

DIA adatbázis:

- A kapott profitok (p_{mul}) a 4.75 ábrán található különböző ARMA és GARCH rendekre. Az olvasható le, hogy az ARMA(2,0)-(2,0) modell előnyös választás. Ezt alkalmazzuk az illusztrációkhoz.
- A profitok külön láthatóak. A 4.76(b) ábra mutatja a választott ARMA(2,0)-GARCH(2,0) modellel kapott becslésünket a mintaszám függvényében. Az ARMA identifikációs technikák tekintetében a subspace-EM előnyös lehet. Összehasonlítva a 4.76(a) ábrával, a segédváltozó nélkül kapott eredmények hasonlóak. Ugyanakkor a 4.76(c) ábrával való hasonlítás eredménye, (ahol a modellünk az ARMA, látszik), hogy nagyobb profit érhető el, mint ARMA-GARCH modell esetén.
- A profit görbéket a 4.77 ábra mutatja $T = 90$ és $T = 120$ mintaszám mellett. Ezek növekednek a predikciós horizonton, ez ígéretes.

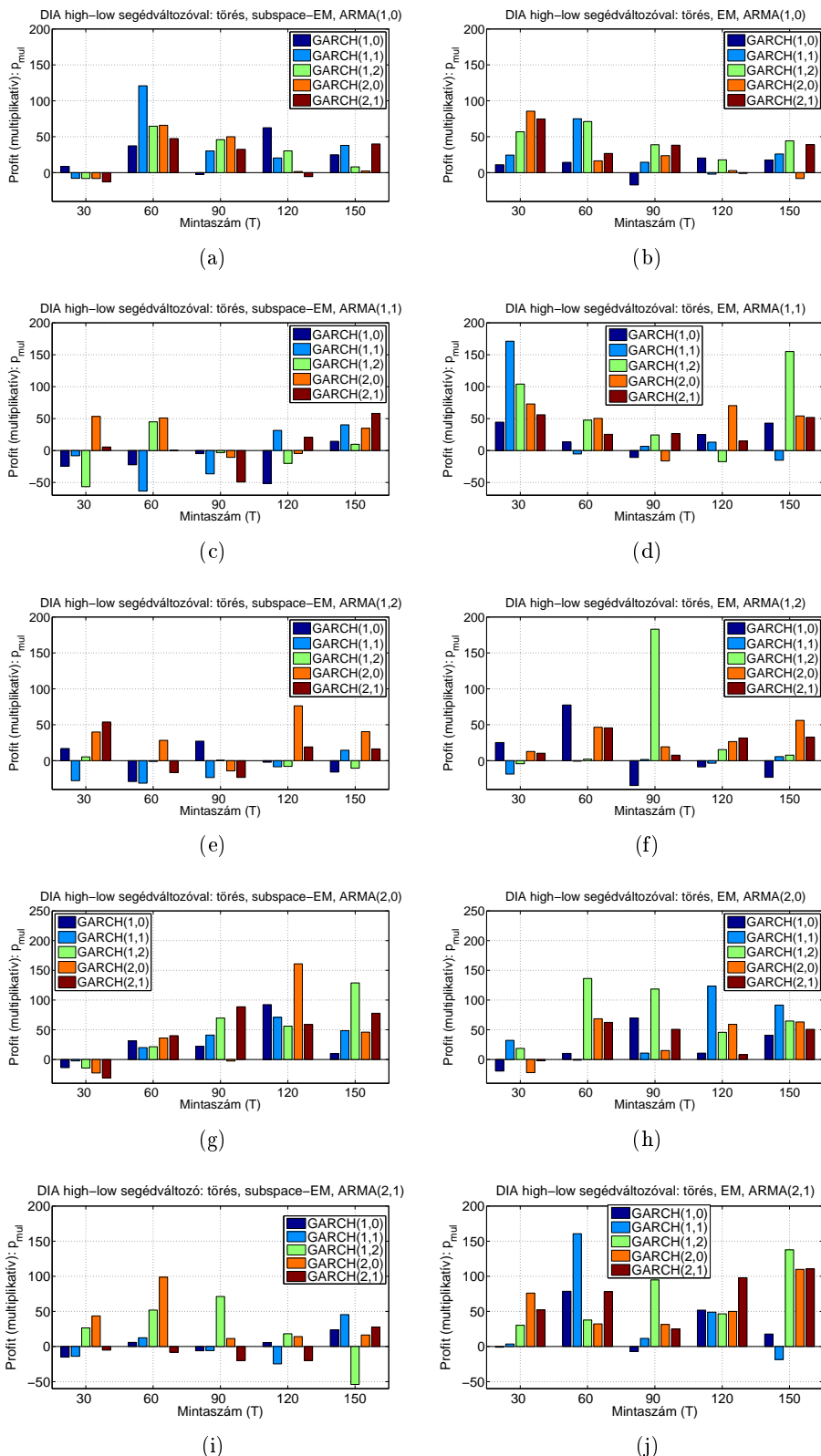
Nikkei225 adatbázis:

- A 4.78 ábra alapján az ARMA(1,0)-GARCH(2,0) modellt választva ér el a becslés nagyobb profitot (p_{mul}). Ezt használom az illusztrációhoz.
- Ahogy látható a 4.79 ábrán, maximális profitot a segédváltozóval és ARMA-GARCH modellel produkál, de a segédváltozó nélküli ARMA-GARCH és a 2 dimenziós ARMA modell is hasonló eredménnyel szolgál.
- Ehhez tartozó profit görbe $T = 60$ mellett majdnem monoton módon emelkedik, ez látható a 4.80 ábrán.

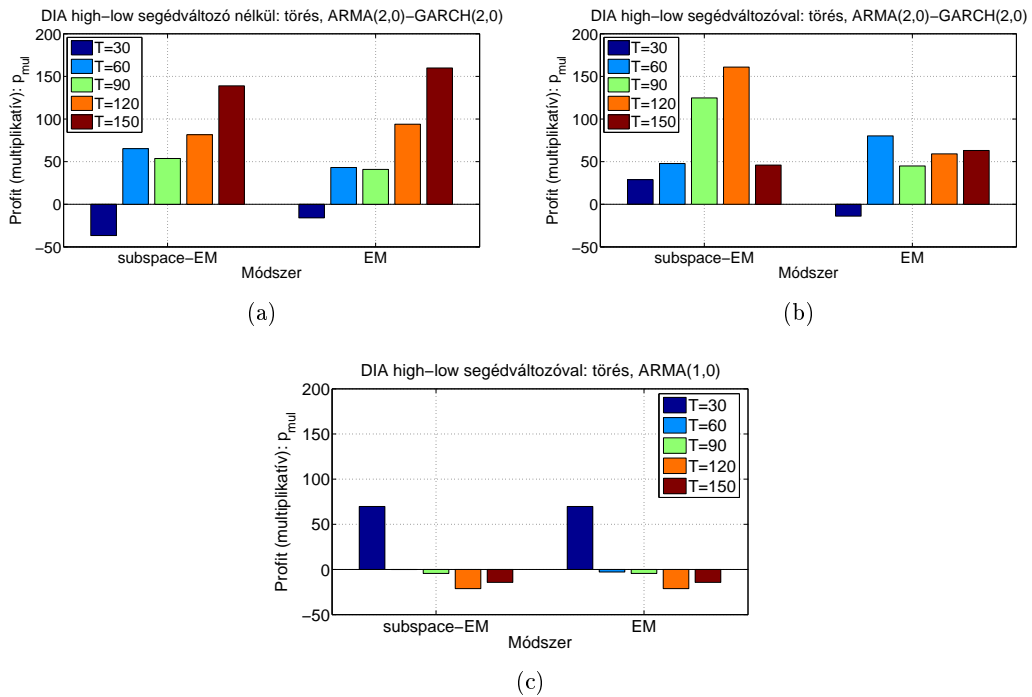
Russell2000 adatbázis:

- A profit értékeket mutatja a 4.81 ábra, különböző ARMA-GARCH rendekre. Ez alapján az ARMA(2,0)-GARCH(1,0) modell előnyös választás. Ezt illusztrálom.
- Az ARMA-GARCH megközelítés jóval nagyobb profitot produkál, mint az ARMA modell, abban az esetben, ha a "high-low" változót használjuk a becsléshez [4.82(b)-(c) ábra]. Az ARMA-GARCH modell 1 dimenziós esetben eredményesebb, mint 2 dimenzió esetén [4.82(a)-(b) ábra].

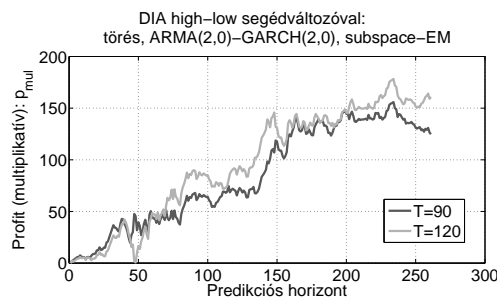
- A profit görbét illusztrálja a 4.83 ábra. Ezek erősen emelkednek a befektetési periódusunk második felében.



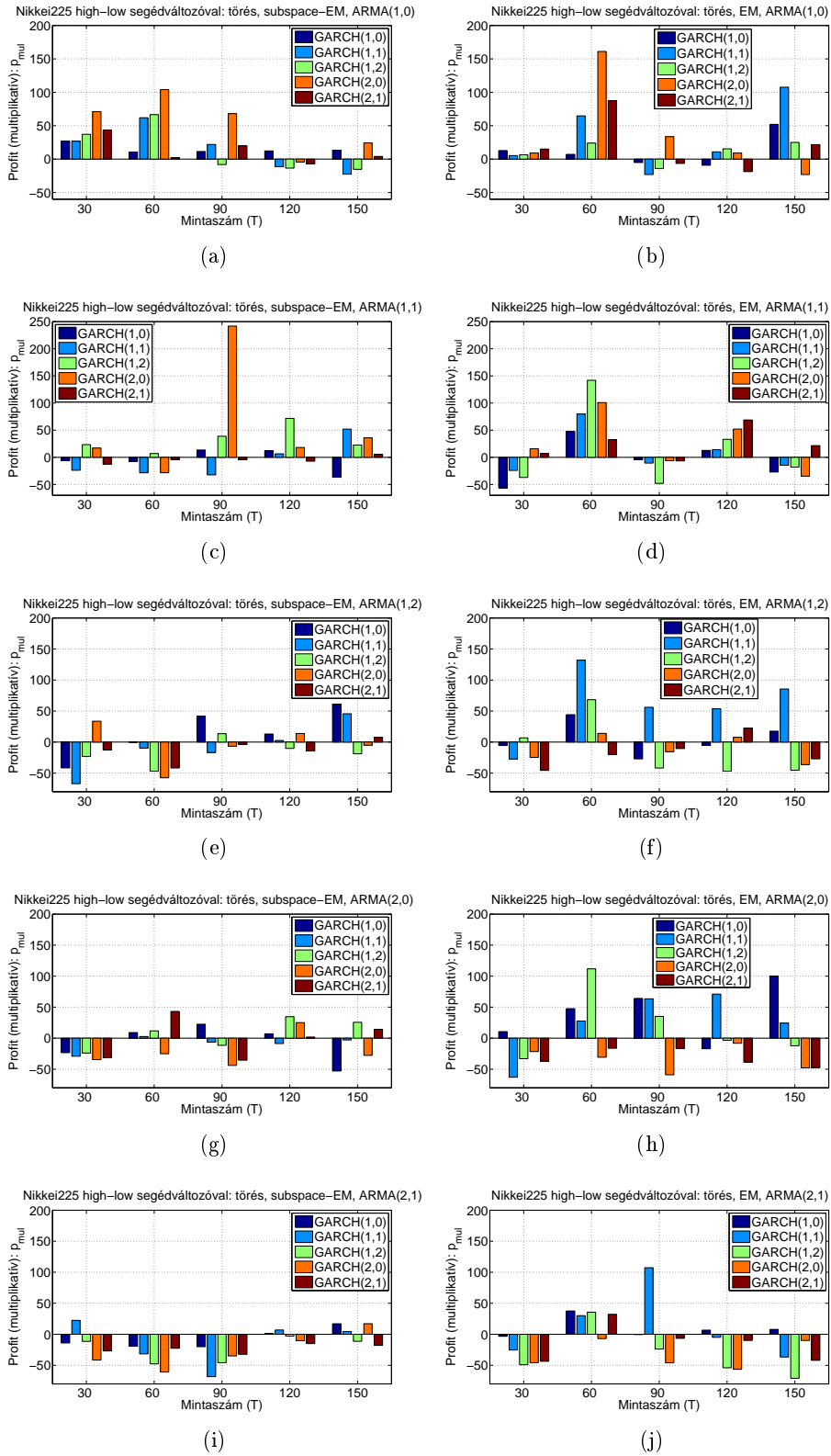
4.75. ábra. A multiplikatív profit illusztrációja (p_{mul}) a mintaszám függvényében a törést tartalmazó DIA adatokon, különböző ARMA-GARCH rendekre a "high-low" segédváltozó használatával. Első sor: ARMA(1,0), második sor: ARMA(1,1), harmadik sor: ARMA(1,2), negyedik: ARMA(2,0), ötödik: ARMA(2,1). Első oszlop: subspace-EM, második oszlop: EM módszer.



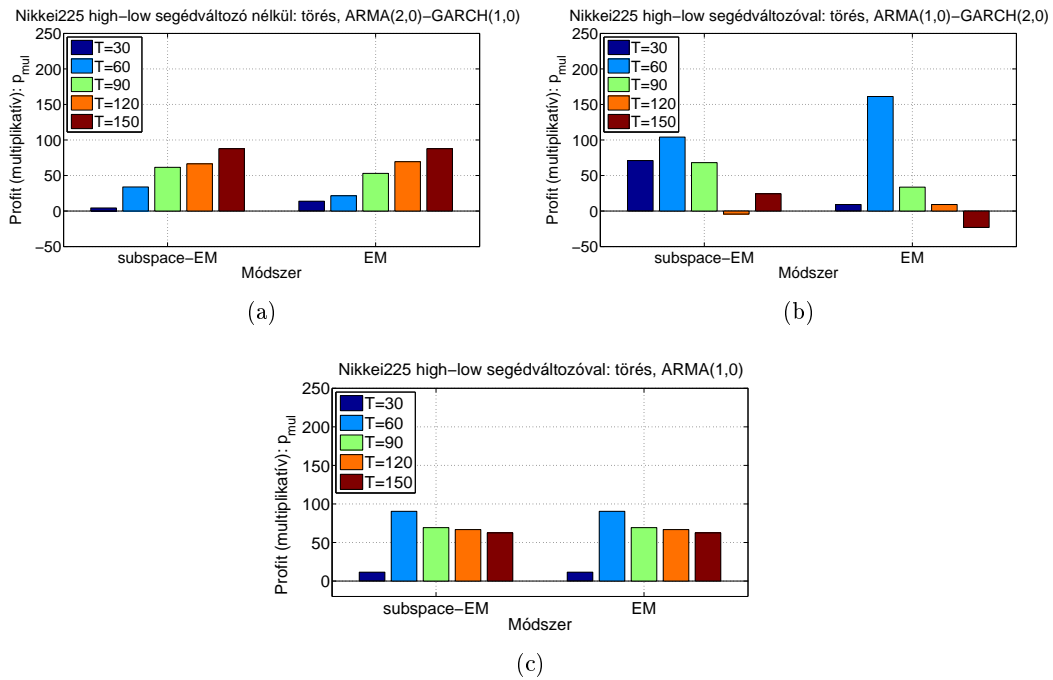
4.76. ábra. A multiplikatív profit illusztrációja (p_{mul}) a törést tartalmazó DIA adatokon, különböző mintaszámra, a subspace-EM és EM módszerekre. (a): "high-low" nélkül, ARMA(2,0)-GARCH(2,0), (b): "high-low" hozzávételével, ARMA(2,0)-GARCH(2,0), (c) "high-low" hozzávételével, ARMA(1,0).



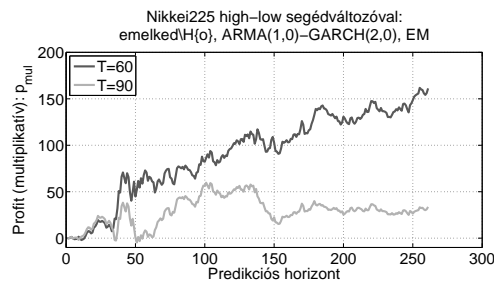
4.77. ábra. Az elért profit (p_{mul}) görbéje a predikciós horizonton, a subspace-EM módszer esetén. A törést tartalmazó DIA adatainak a "high-low" segédváltozó hozzávételével. Rend: ARMA(2,0)-GARCH(2,0), mintaszám: $T = 90$ és $T = 120$.



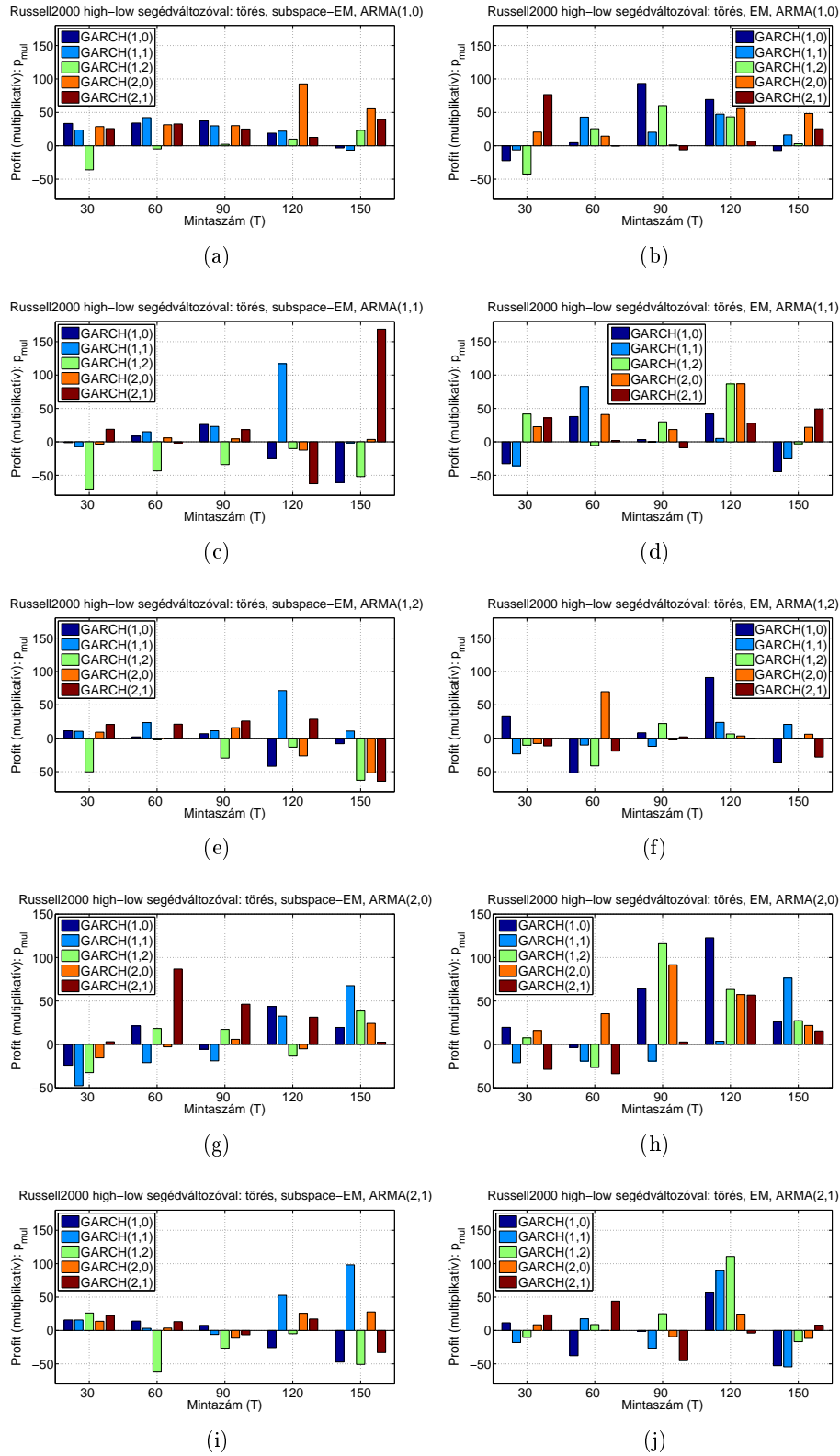
4.78. ábra. A multiplikatív profit illusztrációja (p_{mul}) a mintaszám függvényében a törést tartalmazó Nikkei225 adatokon, különböző ARMA-GARCH rendekre a "high-low" segédváltozó használatával. Első sor: ARMA(1,0), második sor: ARMA(1,1), harmadik sor: ARMA(1,2), negyedik: ARMA(2,0), ötödik: ARMA(2,1). Első oszlop: subspace-EM, második oszlop: EM módszer.



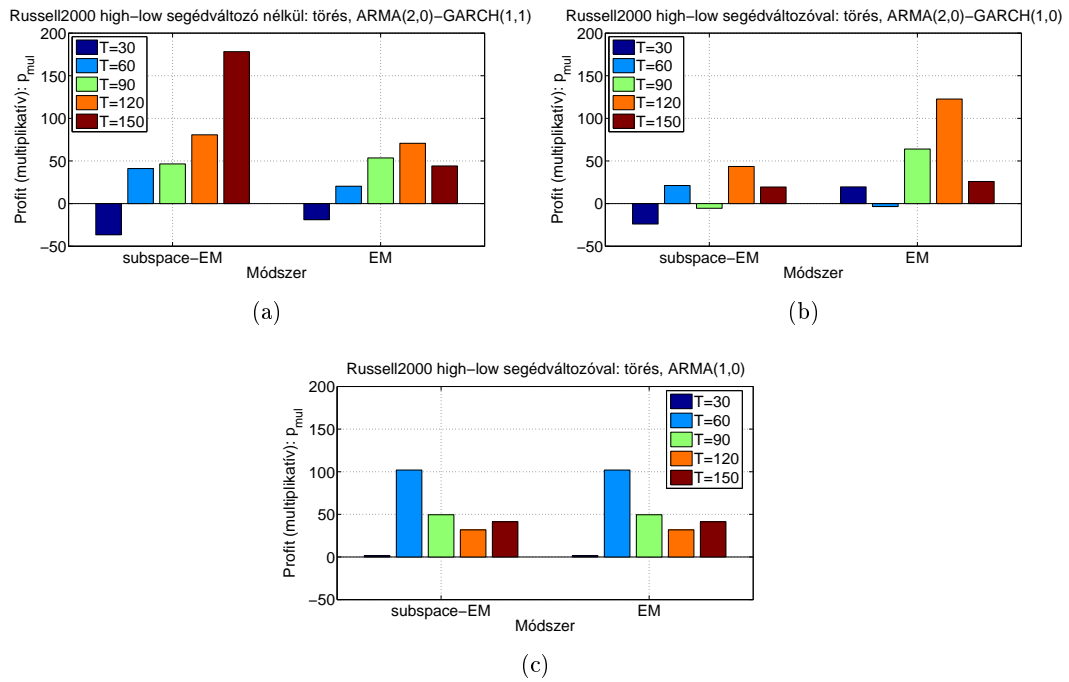
4.79. ábra. A multiplikatív profit illusztrációja (p_{mul}) a törést tartalmazó Nikkei225 adatokon, különböző mintaszámra, a subspace-EM és EM módszerekre. (a): "high-low" nélkül, ARMA(2,0)-GARCH(1,0), (b): "high-low" hozzávételével, ARMA(1,0)-GARCH(2,0), (c): "high-low" hozzávételével, ARMA(1,0).



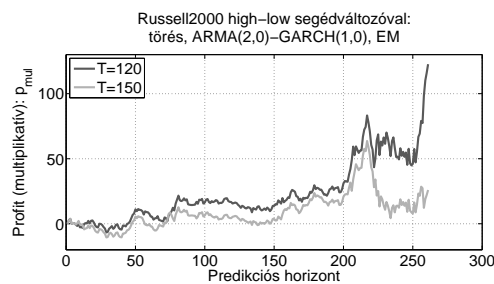
4.80. ábra. Az elért profit (p_{mul}) görbéje a predikációs horizonton, a subspace-EM módszer esetén. A törést tartalmazó Nikkei225 adatainak a "high-low" segédváltozó hozzávételével. Rend: ARMA(1,0)-GARCH(2,0), mintaszám: $T = 60$ és $T = 90$.



4.81. ábra. A multiplikatív profit illusztrációja (p_{mul}) a mintaszám függvényében a törést tartalmazó Russell2000 adatokon, különböző ARMA-GARCH rendekre a "high-low" segédváltozó használatával. Első sor: ARMA(1,0), második sor: ARMA(1,1), harmadik sor: ARMA(1,2), negyedik: ARMA(2,0), ötödik: ARMA(2,1). Első oszlop: subspace-EM, második oszlop: EM módszer.



4.82. ábra. A multiplikatív profit illusztrációja (p_{mul}) a törést tartalmazó Russell2000 adatokon, különböző mintaszámra, a subspace-EM és EM módszerekre. (a): "high-low" nélkül, ARMA(2,0)-GARCH(1,1), (b): "high-low" hozzávételével, ARMA(2,0)-GARCH(1,0), (c): "high-low" hozzávételével, ARMA(1,0).



4.83. ábra. Az elért profit (p_{mul}) görbéje a predikciós horizonton, a subspace-EM módszer esetén. A törést tartalmazó Russell2000 adatain a "high-low" segédváltozó hozzávételével. Rend: ARMA(2,0)-GARCH(1,0), mintaszám: $T = 120$ és $T = 150$.

Emelkedő idősorok

DIA adatbázis:

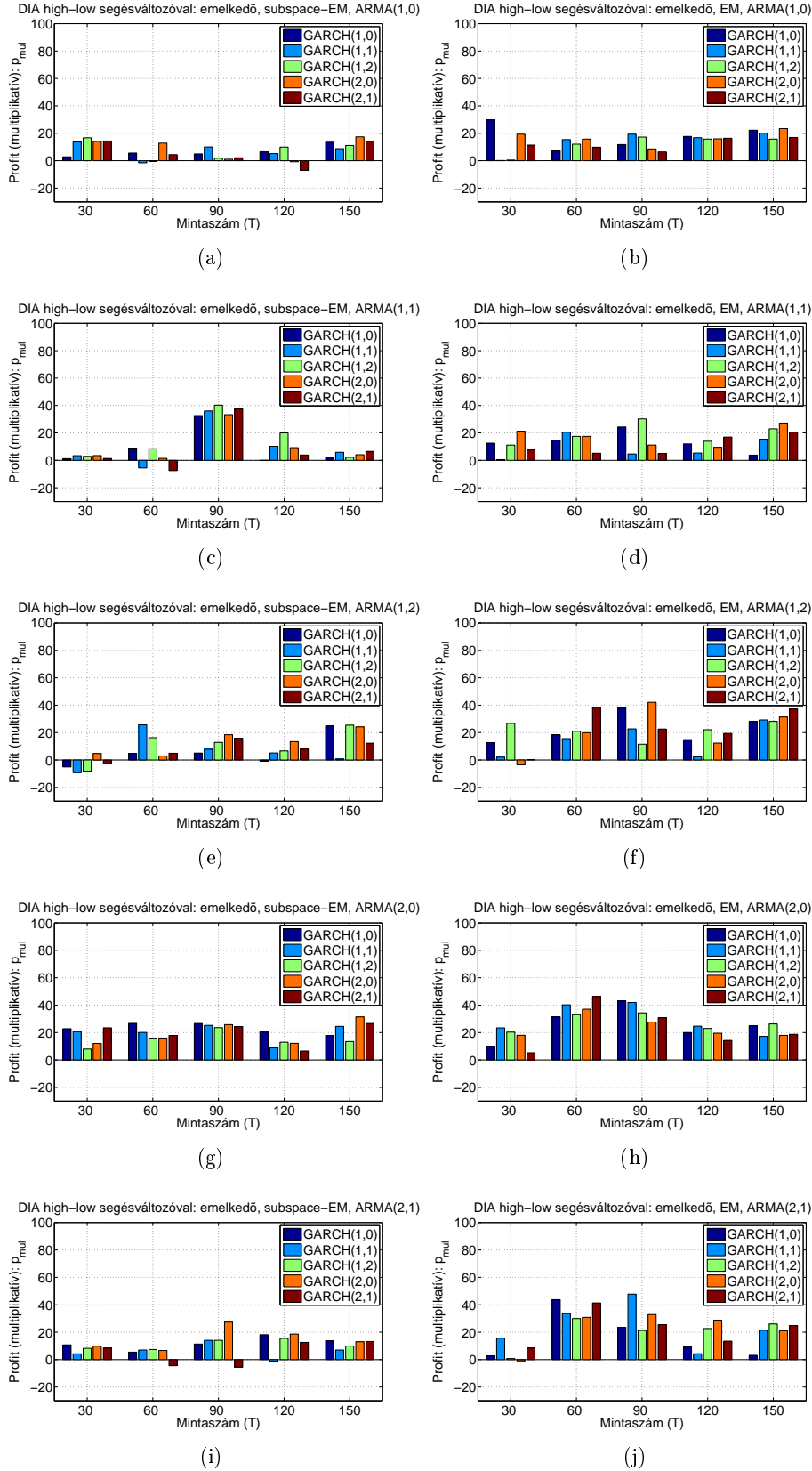
- Ha a profit értékeket nézem a 4.84 ábrán, az látszik, hogy az ARMA(2,0) modell mellett pozitív profit értékeket kaptam a vizsgált GARCH rendekre. Illusztrációhoz a (2,0)-(2,1) rendet választottam.
- A 4.85 ábrát tekintve az ARMA-GARCH modell alkalmazása előnyös, illetve a "high-low" segédváltozó hozzávételével is az elért profit nőtt.
- Az ehhez kapcsolódó görbék a 4.86 ábrán láthatóak. A $T = 60$ és $T = 90$ mintaszám mellett elég egyenletes növekedést láthatunk a predikciós intervallumon.

Nikkei225 adatbázis:

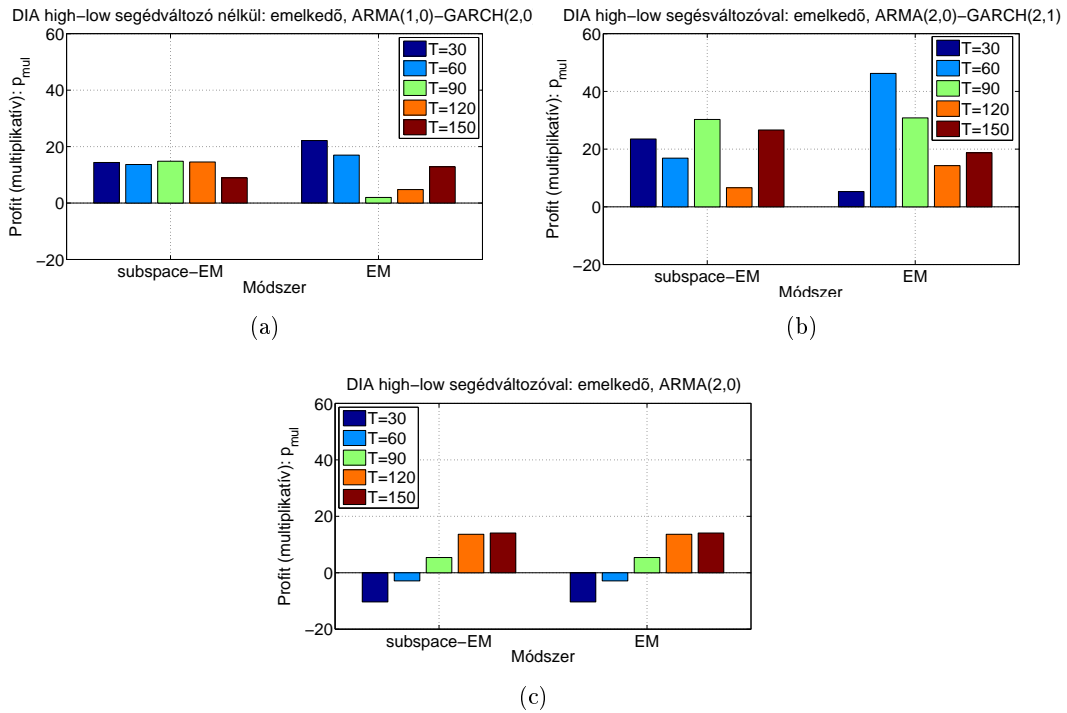
- Az elért profitok elég változékonyak a különböző rendekre és mintaszámokra. Ezt mutatja a 4.87 ábra, ami alapján az ARMA(1,1)-GARCH(1,0) modellt illusztrálok.
- Látható (4.88 ábra), hogy van olyan mintaszám ($T = 120$), amire a 2 dimenziós ARMA-GARCH modell kiemelkedő profitot ér el, de ennek ellenére az eddigi becsléseink, azaz a 2 dimenziós ARMA illetve az ARMA-GARCH modell segédváltozó nélkül jobb teljesítményt mutatott. Ebben az esetben a hagyományos ARMA modell a legelőnyösebb.
- A profit görbe erősen emelkedik a már említett $T = 120$ -as mintaszám esetén (4.89 ábra).

Russell2000 adatbázis:

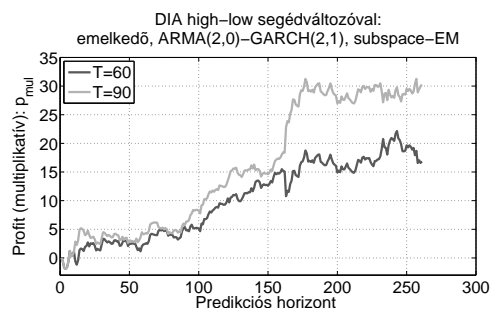
- Figyelembe véve a 4.90 ábrán látható profit értékeket az ARMA(2,1)-GARCH(1,1) modellt ábrázolom a továbbiakban.
- Ahogy látható (4.91 ábra), (i) a "high-low" segítségével extra profitot érhetünk el, a másik megfigyelés (ii), hogy az ARMA-GARCH és ARMA modell hasonló eredményeket produkál, illetve a (iii) a subspace-EM modell becslés előnyösebb.
- Az ehhez tartozó profit görbék a 4.92 ábrán szerepelnek a $T = 120$ és $T = 150$ mintaszámok esetén, ezek az intervallumon emelkednek.



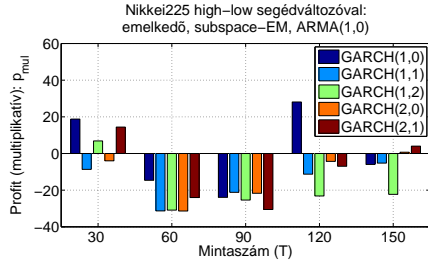
4.84. ábra. A multiplikatív profit illusztrációja (p_{mul}) a mintaszám függvényében az emelkedő DIA adatokon, különböző ARMA-GARCH rendekre a "high-low" segédváltozó használatával. Első sor: ARMA(1,0), második sor: ARMA(1,1), harmadik sor: ARMA(1,2), negyedik: ARMA(2,0), ötödik: ARMA(2,1). Első oszlop: subspace-EM, második oszlop: EM módszer.



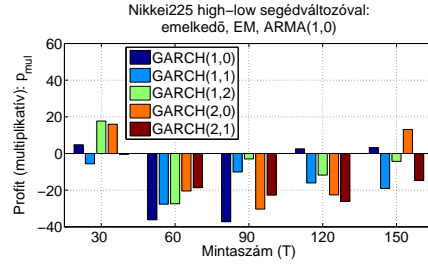
4.85. ábra. A multiplikatív profit illusztrációja (p_{mul}) az emelkedő DIA adatokon, különböző mintaszámra, a subspace-EM és EM módszerekre. (a): "high-low" nélkül, ARMA(1,0)-GARCH(2,0), (b): "high-low" hozzávételével, ARMA(2,0)-GARCH(2,1), (c): "high-low" hozzávételével, ARMA(2,0).



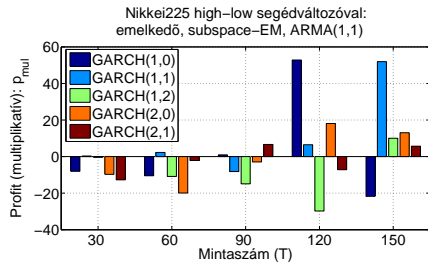
4.86. ábra. Az elért profit (p_{mul}) görbéje a predikciós horizonton, a subspace-EM módszer esetén. Az emelkedő DIA adataim a "high-low" segédváltozó hozzávételével. Rend: ARMA(2,0)-GARCH(2,1), mintaszám: $T = 60$ és $T = 90$.



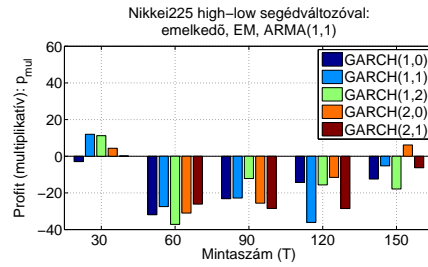
(a)



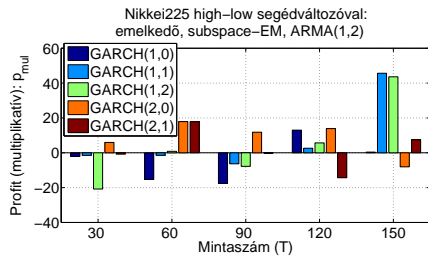
(b)



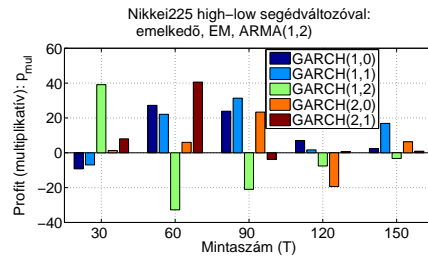
(c)



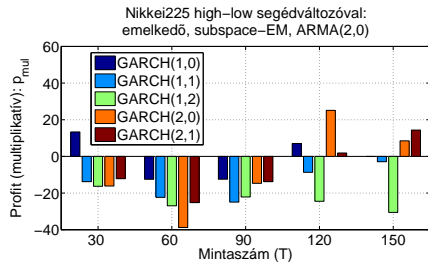
(d)



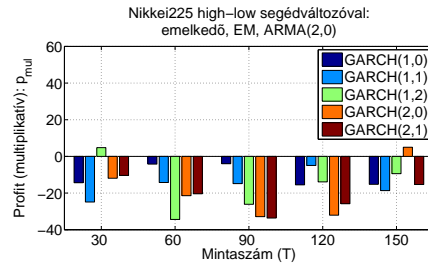
(e)



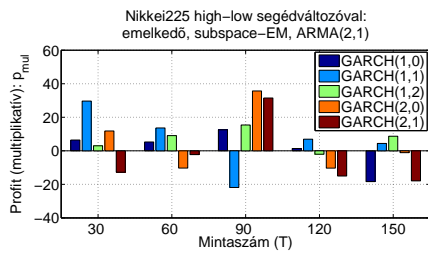
(f)



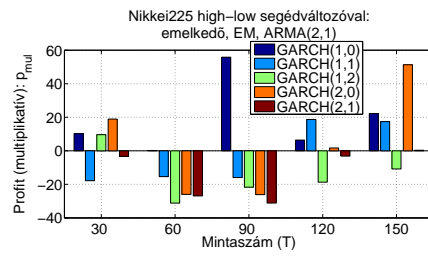
(g)



(h)

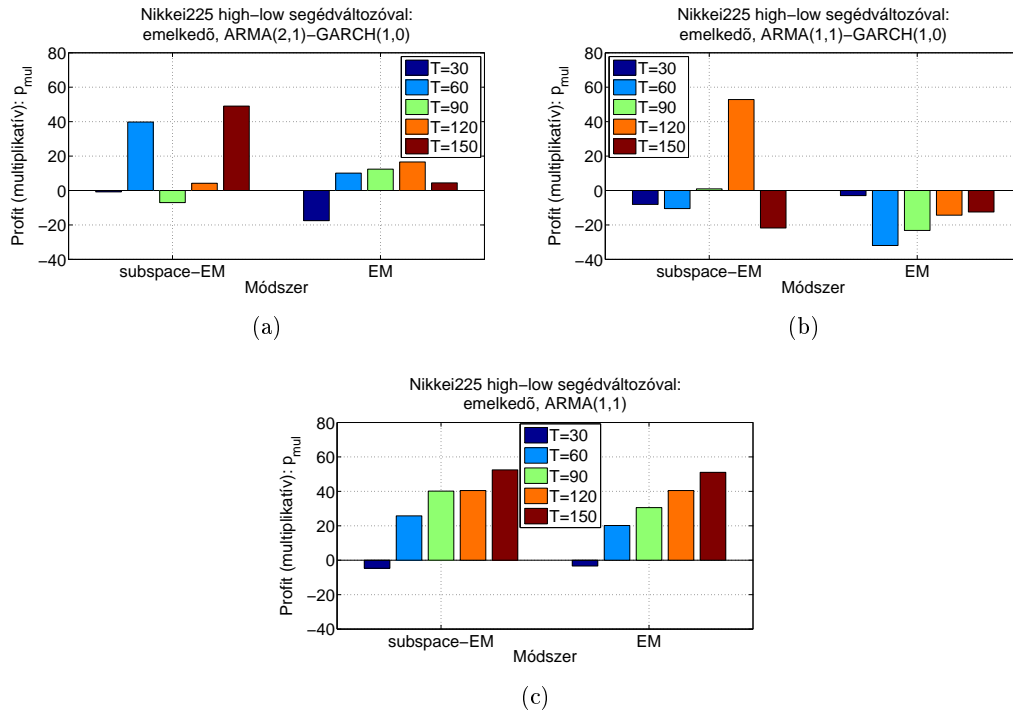


(i)

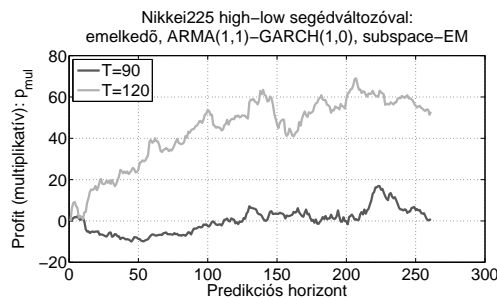


(j)

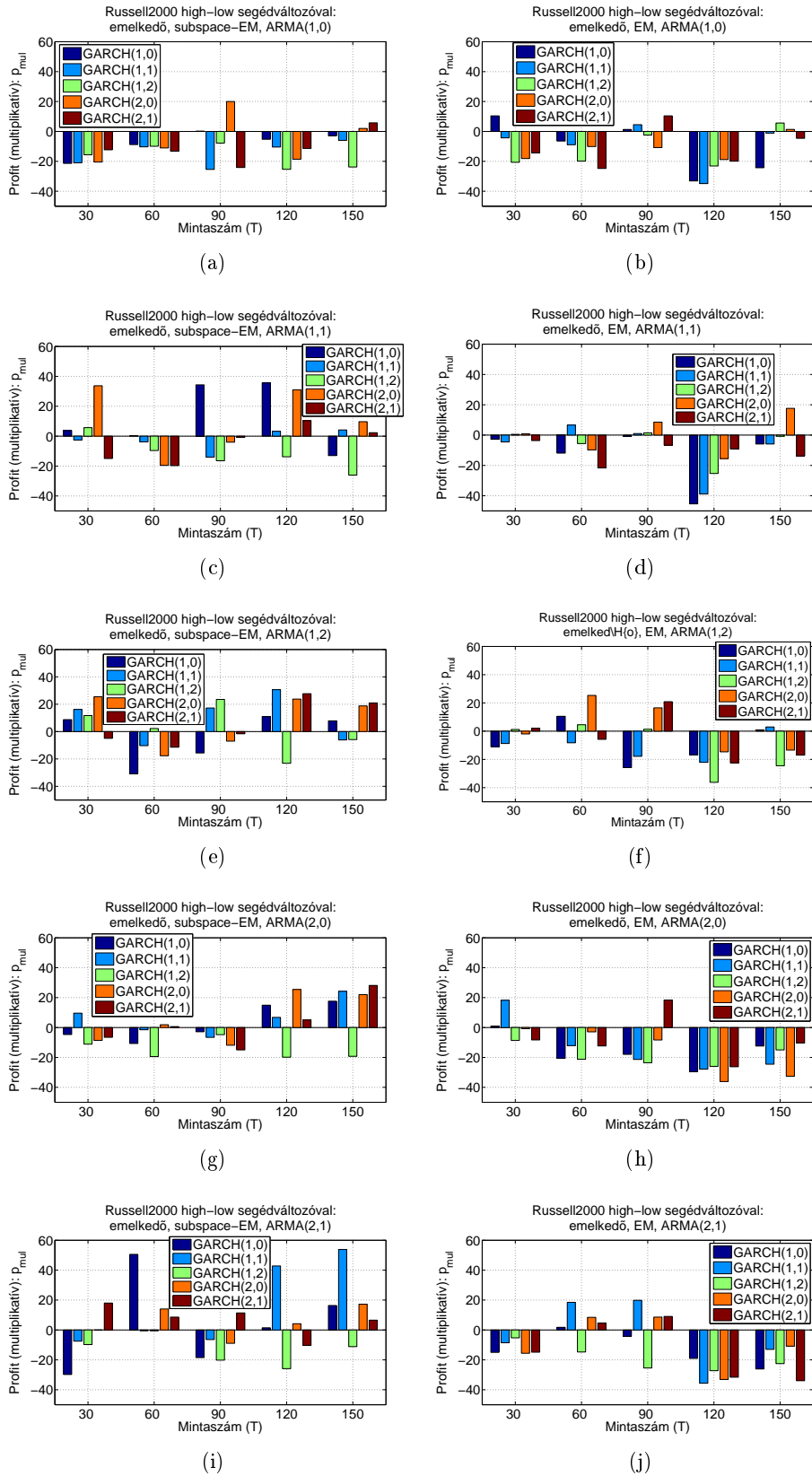
4.87. ábra. A multiplikatív profit illusztrációja (p_{mul}) a mintaszám függvényében az emelkedő Nikkei225 adatokon, különböző ARMA-GARCH rendekre a "high-low" segédváltozó használatával. Első sor: ARMA(1,0), második sor: ARMA(1,1), harmadik sor: ARMA(1,2), negyedik: ARMA(2,0), ötödik: ARMA(2,1). Első oszlop: subspace-EM, második oszlop: EM módszer.



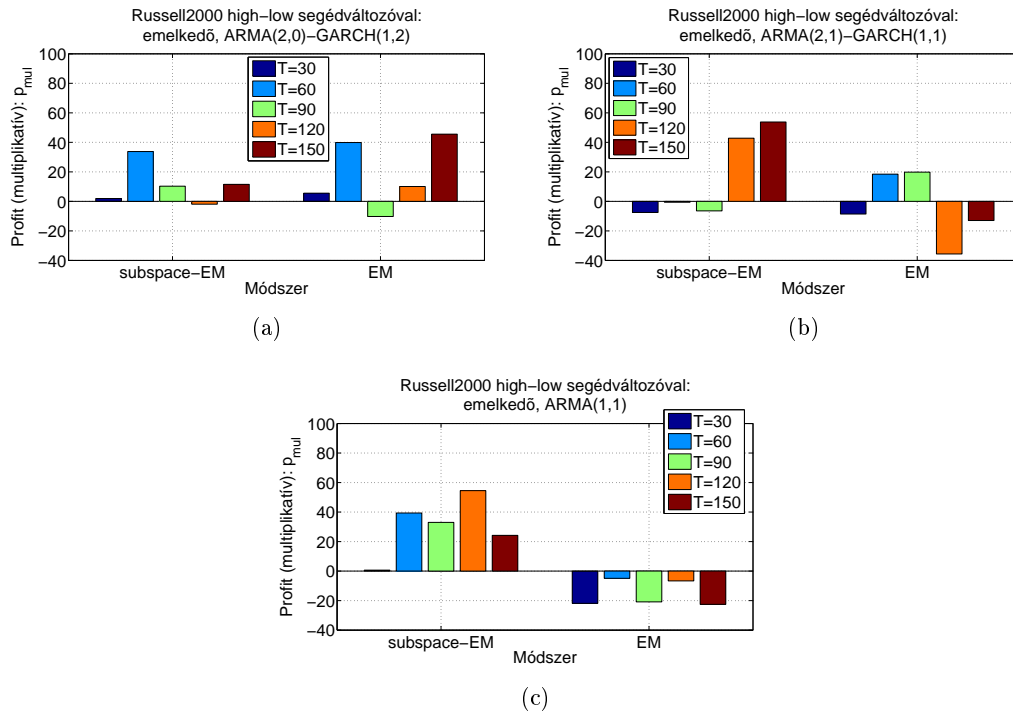
4.88. ábra. A multiplikatív profit illusztrációja (p_{mul}) az emelkedő Nikkei225 adatokon, különböző mintaszámra, a subspace-EM és EM módszerekre. (a): "high-low" nélkül, ARMA(2,1)-GARCH(1,0), (b): "high-low" hozzávételével, ARMA(1,1)-GARCH(1,0), (c): "high-low" hozzávételével, ARMA(1,1).



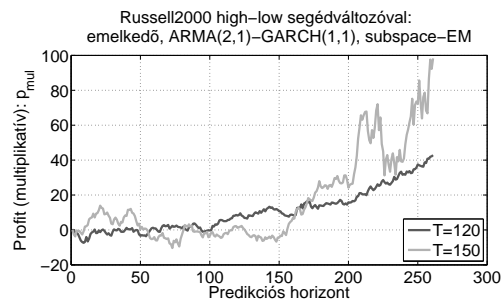
4.89. ábra. Az elért profit (p_{mul}) görbéje a predikációs horizonton, a subspace-EM módszer esetén. Az emelkedő Nikkei225 adatainak a "high-low" segédváltozó hozzávételével. Rend: ARMA(1,2)-GARCH(1,0), mintaszám: $T = 90$ és $T = 120$.



4.90. ábra. A multiplikatív profit illusztrációja (p_{mul}) a mintaszám függvényében az emelkedő Russell2000 adatokon, különböző ARMA-GARCH rendekre a "high-low" segédváltozó használatával. Első sor: ARMA(1,0), második sor: ARMA(1,1), harmadik sor: ARMA(1,2), negyedik: ARMA(2,0), ötödik: ARMA(2,1). Első oszlop: subspace-EM, második oszlop: EM módszer.



4.91. ábra. A multiplikatív profit illusztrációja (p_{mul}) az emelkedő Russell2000 adatokon, különböző mintaszámra, a subspace-EM és EM módszerekre. (a): "high-low" nélkül, ARMA(2,0)-GARCH(1,2), (b): "high-low" hozzávételével, ARMA(2,1)-GARCH(1,1), (c): "high-low" hozzávételével, ARMA(1,1).



4.92. ábra. Az elért profit (p_{mul}) görbéje a predikciós horizonton, a subspace-EM módszer esetén. Az emelkedő Russell2000 adatainak a "high-low" segédváltozó hozzávételével. Rend: ARMA(2,1)-GARCH(1,1), mintaszám: $T = 120$ és $T = 150$.

5. fejezet

Konklúzió

Dolgozatomban a pénzügyi idősorok modellezését és predikcióját vizsgáltam. Modellek terén az AR, ARMA, ARMA-GARCH típusokat használtam, melyek paramétereit a subspace, subspace-EM, EM és RLS módszerekkel becsültem. Ismertettem a felhasznált idősorokat, az alkalmazott jósgámcéket, az alkalmazott becslési folyamatot. Ezek után bemutattam az eredményeimet.

ARMA és ARMA-GARCH modell esetén is beláttam, hogy a profit alapú mérce segítségével igazolhatjuk, hogy megfelelő paraméterválasztások mellett a modellek és módszerek profitot eredményeztek. ARMA-GARCH modell több esetben is nagyobb eredményeket mutatott, amit az ARMA modellel kaptam, ez jellemzően a törést tartalmazó szakaszokra volt igaz. A 4 identifikációs módszer közül a subspace-EM és EM módszerek mutatkoztak a legjobbnak, a subspace inicializáció gyakran segítette a modell paraméter becslését, az EM pedig szélesebb paraméter tartományban volt képes profitot eredményezni. Napi és heti mintavételezések tekintetében megállapítottam, hogy az auto regresszív folyamat jobban megfigyelhető, mindhárom idősor esetében az ARMA(2,0) volt a választott ARMA rend. A becslés pontosságát segítette a subspace inicializáció, a subspace-EM jobban teljesített. A több dimenziós idősornál a törést tartalmazók esetén egyértelműen segítette a becslést a segédváltozó, mindkét modell típus esetében.

Irodalomjegyzék

- [1] Ruey S. Tsay. *Analysis of Financial Time Series*. Financial Econometrics, 2002.
- [2] Norman R. Swanson Geetesh Bhardwaj. An empirical investigation of the usefulness of ARFIMA models for predicting macroeconomic and financial time series. *Journal of Econometrics*, 2006.
- [3] José Dias Curto, José Castro Pinto, and Goncalo Nuno Tavares. Modeling stock markets volatility using GARCH models with Normal, Students't and stable Paretian distributions. *Statistical Papers*, 50(2):311–321, March 2007.
- [4] Komain Jiranyakul. Behavior of stock market index in the stock exchange of Thailand. *NIDA Economic Review*, 2(2):47–57, December 2007.
- [5] Svetlozar T. Rachev, Stoyan V. Stoyanov, Chufang Wu, and Frank J. Fabozzi. Empirical analyses of industry stock index return distributions for the Taiwan stock exchange. *Annals of Economics and Finance*, 8:21–31, 2007.
- [6] Richard T. Baillie and Tim Bollerslev. Prediction in dynamic models with time-dependent conditional variances. *Journal of Econometrics*, 52:91–113, 1992.
- [7] Natalia Abrosimova, Gishan Dissanaiké, and Dirk Linowski. Testing the weak-form efficiency of the Russian stock market. In *EFA 2002 Berlin Meetings Presented Paper*, Berlin, 20 February 2002. Available at SSRN: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=302287.
- [8] Christian Scherrer, Svetlozar T. Rachev, Young Shin Kim, Michael Feindt, and Frank Fabozzi. Using a neural network approach for backtesting methodologies for estimating and forecasting asset risk. In *Forecasting Financial Markets: Advances for Exchange Rates, Interest Rates and Asset Management*, Hannover, May 2010.
- [9] John T. Barkoulas, Christopher F. Baum, and Nickolas Travlos. Long memory in the Greek stock market. *Applied Financial Economics*, 10(2):177–184, 2000.
- [10] Asma Mobarek and Professor Keavin Keasey. Weak-form market efficiency of an emerging market: Evidence from Dhaka stock market of Bangladesh. In *ENBS Conference*, pages 1–30, Oslo, May 2000.

- [11] Andrew C. Harvey. Forecasting, structural time series models and the Kalman filter. *Cambridge University Press*, 1989.
- [12] B. Farhang-Boroujeny. *Adaptive Filters: Theory and Applications*. John Wiley and Sons, 1998.
- [13] Gregory C. Reinsel George E. P. Box, Gwilym M. Jenkins. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. A John Wiley and Sons Inc, 1970.
- [14] Terence C. Mills. *Time Series Techniques for Economists*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [15] Tim Bollerslev. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, (31):307–317, 1986.
- [16] Luc Bauwens, Sébastien Laurent, and Jeroen V. K. Rombouts. Multivariate GARCH models: a survey. *Journal of Applied Econometrics*, 21(1):79–109, 2006.
- [17] Ling S. and M. McAleer. Necessary and sufficient moment conditions for the GARCH(r,s) and asymmetric power GARCH(r,s) models. *Econometric Theory*, (18):722–729, 2002.
- [18] S. Ling. On probability properties of a double threshold ARMA conditional heteroskedasticity model. *Journal of Applied Probability*, 36(3):668–705, 1999.
- [19] C. F. Ansley R. Kohn. Estimation, prediction, and interpolation for ARIMA models with missing data. *Journal of the American Statistical Association*, 81(395):751–761, 1986.
- [20] Jaime Terceiro, José Manuel Casals, Miguel Jerez, Gregorio R. Serrano, and Sonia Sotoca. *Time Series Analysis using MATLAB, Including a complete MATLAB Toolbox*. Spanish Estimación de modelos Económicos en Espacio de los Estados, Jun 2000.
- [21] Maximum likelihood from incomplet data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, (39):1–38, 1977.
- [22] Sean Borman. The expectation maximization algorithm: A short tutorial. January 2009.
- [23] Frank Dallert. The expectation maximization algorithm. *Technical Report*, (GIT-GUV-02-20), February 2002.
- [24] G. C. Tiao S. C. Hillmer. Likelihood function of stationary multiple autoregressive moving average models. *Journal of the American Statistical Association*, 74:652–660, 1979.

- [25] Peter Van Overschee Wouter Favoreel, Bart De Moor. Subspace state space system identification for industrial processes. *Journal of Process Control*, 10(2-3):149–155, April 2000.
- [26] Tohru Katayama. *Subspace Methods for System Identification*. Springer Verlag, 2005.
- [27] Bart De Moor Peter Van Overschee. Subspace algorithms for the identification of combined deterministic-stochastic systems. *Automatica*, 30(1):75–93, 1994.
- [28] Dietmar Bauer. Estimating linear dynamical systems using subspace methods. *Econometric Theory*, 21:181–211, 2005.
- [29] Lennart Ljung. *System Identification - Theory For the User, 2nd edn*. PTR Prentice Hall, 1999.
- [30] M. Deistler K. Peterzell, W. Scherrer. Consistency and relative efficiency of subspace methods. *Automatica*, 31(12):1865–1875, December 1995.
- [31] Miguel Jerez Alfredo Garcia-Hiernaux, José Casals. Fast estimation methods for time-series models in state-space form. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 79(2):121–134, February 2009.
- [32] Simon Haykin. *Adaptive filter theory (3rd ed.)*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1996.
- [33] Jack Kurzweil. *An Introduction to Digital Communications*. John Wiley and Sons, New York, 2000.
- [34] John G. Proakis. *Digital Communications*. McGraw-Hill, fourth ed. edition, 2001.