# A hasznosság és igazságosság matematikai modelljeiről

Diplomamunka

Belinszki Bálint
alkalmazott matematikus szak
matematikatanár szak

Témavezetők:

*Pröhle Tamás*, tanársegéd
Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

*Wintsche Gergely*, adjunktus
Matematikatanítási és Módszertani Központ

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2018.

# Köszönetnyilvánítás

Diplomamunkámért köszönettel tartozom témavezetőmnek, Pröhle Tamásnak, aki nem csupán segített kiválasztani a témámat, hanem bátorított és vezetett, mindvégig segítve munkámat. Köszönettel tartozom továbbá tanári szakos témavezetőmnek, Wintsche Gergelynek, aki a pedagógiai részhez nyújtott segítséget, és érdekes ötletekkel látott el annak megírásához.

# Előszó

A korai kutatók az 1700-as évekig azt gondolták, hogy egy játék igazságos ára – mely ár azt jelenti, hogy a játékban részt vevő felek várható vagyon változása nulla – megegyezik a nyeremények várható értékével. Ezen elv sok esetben igaz tézisnek is bizonyul, viszont a Szentpétervári játék végtelen várható értékével rámutatott arra, hogy ez nem minden esetben igaz. A Szentpétervári játék megjelenése után számtalan kutató kezdett el azzal foglalkozni, hogy mi tekinthető ennek a végtelen várható értékű játék igazságos árának, és mi lehet annak a látszólagos ellentmondásnak a feloldása, hogy ez végtelennek tűnik.

A dolgozat 1. része mutatja be magát a játékot, annak keletkezését és paradoxon voltát. A 2. részben a paradoxon lehetséges feloldásait tekintem át a teljesség igénye nélkül a [1], [2], [3] és [11] alapján. A 3. szakaszban az R program segítségével előállított szimulált adatokat mutatom be, melyeket a 2. szakaszban kifejtett eredmények tükrében elemzek. A 4. részben módosított Szentpétervári játékokon keresztül a növekvő osztalékot fizető részvények értékelésének problémájára mutatok rá a paradoxon segítségével a [8] , [9] és [10] alapján. Továbbá a 2000-es évi „hight tech" részvények piaci összeomlásának a Szentpétervári játékkal való összefüggését, mint annak egyik lehetséges magyarázatát [10]-re támaszkodva ismertetem. Az 5. rész pedagógiai témájú, amelyben középiskolai szinten gyakorlati példákon keresztül vezetem be az igazságos játék fogalmát, a jövedelmezőnek tűnő martingál stratégiát annak veszélyeivel együtt a ruletten keresztül ismertetem és végezetül a Szentpétervári játékot mutatom be.

# Tartalomjegyzék

# 1. A Szentpétervári játék mint paradoxon

## 1.1. A játék leírása

Péter és Pál a következő játékot játssza: Péter egy szabályos érmét dobál.
1) Fej esetén Péter 1 dollárt fizet Pálnak, és a játék véget ér.
Írás esetén az érmét újra dobja.
2) Fej esetén Péter 2 dollárt fizet Pálnak, és a játék véget ér.
Írás esetén az érmét újra dobja.
...
n) Fej esetén Péter $2^{n-1}$ dollárt fizet Pálnak, és a játék véget ér.
Írás esetén az érmét újra dobja.
...
Azaz, ha az első fej az $n$–dik dobás során jelenik meg, akkor Péter $D(n) = 2^{n-1}$ dollárt fizet Pálnak.

## 1.2. A probléma és a története

Felmerül a kérdés, hogy mennyit kell Pálnak a játék jogáért fizetni, hogy a játék „igazságos" legyen. Mi legyen a játék $P$ ára, ha azt szeretnénk, hogy a játék után Pálnak és Péternek a várható vagyon változása nulla legyen?

A probléma felvetése Nicolaus Bernoullitól származik, bár ő a játékot az első hatosig történő kockadobással fogalmazta meg 1713–ban egy Rémond de Montmortnak írott levelében. A játéknak a fenti formája Gabriel Cramertől ered, aki kockadobálásról pénzdobásra egyszerűsítette a problémát egy 1728–ban írott levelében, melyben közli saját eredményeit Nicolaus Bernoullival. Nicolaust nem elégítette ki Cramer megoldása, ezért írt unokaöccsének, Daniel Bernoullinak, aki a szentpétervári akadémián tanított. 1738–ban meg is jelent Daniel dolgozata a Cári Tudományos Akadémia Commentarii sorozatában saját és Cramer megoldásával. Innen ered a Péter és Pállal való fogalmazás, és a Szentpétervári játék végleges alakja. Az eredeti megfogalmazásban a pénznem dukát volt és nem dollár. A probléma neve végül annak a nem ritka történetnek köszönhető, hogy amikor Jean le Rond d'Alambert a problémát érdekesnek találva, a 'Croix ou pie' címszóval a korszakhatárt jelölő Enciklopédiába beírja, nem akarván az általa utált szerzőre utalni, a kérdésre a cikk megjelenési helye nyomán, csak mint "le probleme de Petersburg" hivatkozik rá.

Jelölje $D$ Pál nyereményét, ekkor $\forall n \epsilon \mathbb{N}$ esetén a $P\{D = D(n)\}$ valószínűség annak a valószínűsége, hogy Péter egymás után $(n-1)$–szer írást dob és $n$–edikre fejet, azaz $P\{D = 2^{n-1}\} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, feltéve természetesen, hogy a dobások függetlenek egymástól.

A probléma felvetését az az elképzelés motiválta, hogy a korai kutatók azt hitték, hogy a kockázatos vállalkozásokat megítélhetik a várható érték alapján, azaz egy játékra érdemes tenni, ha a nettó vagyonváltozás várható értéke a $E(D(n)) - P$ pozitív, ezt a kritériumot Huygensnek lehet tulajdonítani. Ez az elv a Szentpétervári paradoxonban meghiúsul, abban az értelemben, hogy nincs véges $P$ ár, amely elriasztja a részvételt, mert a kifizetés várható értékét a Szentpétervári játékban divergens összeg adja:

$$E(D(n)) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty \tag{1}$$

Nicolaus Bernoulli megemlítette, hogy ezt a játékot „furcsának” találta. Később a kutatók azt találták, hogy paradoxon, hogy az olyan személyek, akik felajánlották, hogy jegyet vásárolnak ebben a játékban, nem hajlandóak nagy árat fizetni érte, nevezetesen nem többet, mint néhány dollárt, és nem a teljes vagyonukat, sőt minden pénzt, amit kölcsönözhetnek. Tehát a Szentpétervári paradoxon azon a látszólagos ellentmondáson nyugszik, hogy a játék nyereményének végtelen a várható értéke, de a valódi emberek ennek ellenére sem hajlandóak sokat fizetni azért, hogy részt vehessenek a játékban. Bernoulli, rámutatott arra, hogy ennek a következetlenségnek köszönhetően a nettó nyeremények várható értékét, a Huygens féle kritériumot „el kell vetni”, mint leíró vagy előíró viselkedési szabályt.

A végtelen sok dollár fizetése a játékban való részvételért, abból az egyszerű megfontolásból is túlzásnak tűnik, mert tetszőleges $x \geq 1$ esetén,

$$P\{D \leq x\} = \sum_{n:2^{n-1} \leq x} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\lfloor log_2 x \rfloor + 1} \left(\frac{1}{2}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor log_2 x \rfloor} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor log_2 x \rfloor + 1}$$

Vagyis $D$ nyereményének jobbról folytonos eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = P\{D \leq x\} = \begin{cases} 0 & x < 1, \\ 1 - 2^{-(\lfloor log_2 x \rfloor + 1)} & x \geq 1. \end{cases} \tag{2}$$

Bár a nyeremény várhatóan végtelen nagy lesz, mivel $P\{D > x\} = 2^{-(\lfloor log_2 x \rfloor + 1)}$, így a nyeremény kis eséllyel halad meg egy $x \geq 1$-nél jelentősebb összeget is. Például, $P\{D > 10\} = 2^{-4} = 0,0625$, $P\{D > 100\} = 2^{-7} = 0,0078125$ vagy $P\{D > 10000\} = 2^{-14} \approx 0,000061$.

Nyilvánvaló, hogy egy véges nagy összeget is félve kockáztatna bárki is, nemhogy végtelen sok dollárt, azért, hogy nagyon kis valószínűséggel nagy nyereményre tehessen szert.

# 2. A paradoxon feloldásai

Durand [8]–ban megjegyzi, hogy a játék alap feltételezései ki vannak téve a gyakorlatias elmével bíró emberek ellenvetéseinek.

Az egyik ilyen ellenvetés az, hogy a valós életben a játék nem folytatódhat végtelen hosszú ideig, hiszen Péter és Pál halandók, így előbb, vagy utóbb egyikük meghal, és a játék véget ér függetlenül attól, hogy a pénzérme feldobások során előfordult–e már a fej vagy sem.

Egy másik ellenvetés Péter pénzügyi helyzete, hiszen Pál nyereménye hatalmas mértékben nőhet. Péter tartozása puszta 37 írás után meghaladja a Fort Knox-i aranytartalékot, és még puszta három feldobás után meghaladná az Egyesült Államokban elhelyezett összes banki letét mennyiségét, és további 6, azaz 46 írás után meghaladja, az összes „amerikai" háztartás és nonprofit szervezetek nettó vagyonát is. Amennyiben ilyen módon nőnek a nyeremények, akkor szó szerint a csillagos ég a határ. Még abban az esetben is, ha Péter és Pál megegyeznek, hogy 100 feldobás után a játék mindenképpen véget ér, ekkor bár Péter lehetséges maximális nyereménye véges, de még így is lenyűgözi a képzeletet.

Keynes 1921–ben a játékkal kapcsolatos ellenvetéseit így fogalmazta meg: „Nem akarunk Pálnak lenni, részben mivel nem hisszük hogy Péter tényleg kifizetne bennünket, amennyiben jó szerencsénk lenne a dobásoknál, részben pedig mert nem tudjuk mit tehetnénk ilyen sok pénzzel, ha megnyernénk, részben mivel nem hisszük hogy valaha meg is nyerhetnénk, részben pedig mivel nem hisszük hogy józan cselekedet lenne végtelen összeget, vagy akár csak egy igen nagy összeget kockáztatni, egy végtelenül nagyobb összegért, melynek megszerzése végtelenül valószínűtlen."

A komoly gyakorlati ellenvetések ellenére, számos író úgy döntött, hogy elfogadja egy végtelen hosszúságú játék feltételezését, és figyelmüket arra irányították, hogy egy ilyen játék értékét meghatározzák Pál számára.

## 2.1. A hasznosságon alapuló feloldás

Daniel Bernoulli és röviddel előtte Cramer felhívta a figyelmet a javasolt játék értékelésében részt vevő pszichológiai és viselkedési kérdésekre. Amellett érveltek, hogy a pénzügyi nyereséghez kapcsolódó kívánatosság vagy "hasznosság", nemcsak a nyereségtől, hanem annak a személynek a vagyonától is függenek, aki ezt a nyereséget szerzi, és az embereket csak annyiban érdekli a pénzbeli vagyonuk, amennyiben az hasznos számukra.

Ebből a célból bevezették az $U(W)$ hasznosságfüggvényt, amely minden $W$ dollár vagyonhoz egy bizonyos hasznosságot rendel. Mivel egy extra dollár általában kevésbé értékes egy gazdag embernek, mint egy szegény embernek, $U(W)$ feltételezhető, hogy konkáv, így a $\frac{dU(W)}{dW}$ monoton módon csökken. Bernoulli és Cramer a pénzbeli nyeremények várható értékének kiszámítása helyett, azt javasolták, hogy a nyereség hasznosságának a várható értékét számolják ki.

Cramer első ötlete az volt, hogy feltételezte, hogy $\exists n \in \mathbb{N}$ olyan nagy $D(n) = 2^{n-1}$ dollár nyeremény, amelynél nagyobb megnyerése már nem okozna nagyobb örömet a $2^{n-1}$ dollár megnyerésénél, ezért a játék értéke egy „hétköznapi ember számára"

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\frac{1}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{n-1}\frac{1}{2^k} = \frac{n}{2} + \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

dollár. De mi legyen az $n$ értéke? Cramer szerint $n = 25$, mert $D(n) = 2^{24} = 16777216$ ugyanannyi hasznot vagy örömöt hoz, mint 16 777 216 dollárnál nagyobb nyereség, vagyis a játék árának $P = 13$ dollárnak kell lennie. Cramer a fent leírt esetben úgy tekintette, hogy a pénz hasznossága $2^{24} = 166777216$ dollár megegyezik annak értékével, és konstans a $2^{24}$ dollárt meghaladó összegnél. Azaz a kifizetések hasznossága megszűnik növekedni a 25. feldobás után, így lett Pál úgynevezett erkölcsi várakozása $\frac{25+1}{2} = 13$ dollár.

Cramer másik megoldása az $U(W) = \sqrt{W}$ hasznossági függvény bevezetése, mely szerint a $D(n)$ nyeremény által keltett öröm korlátlanul nagy lehet ugyan, de annak értéke csak $\sqrt{D(n)}$. Mivel

$$E\left(\sqrt{D(n)}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2^{n-1}}}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k=\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{2}\right)=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

és „a játék értékének olyan összegnek kell lenni, amelynek elvesztésével okozott fájdalom ugyanannyi, mint az elnyerésével szerzett öröm morális várható értéke", Cramer szerint a hipotézis alapján Pál számára a játék

$$\left[E\left(\sqrt{D(n)}\right)\right]^2=\left[1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^2\approx 2,9$$

dollárt ér. Cramer a játék értékének a $2,9$ dollárt reálisabbnak tartotta a 13 dollárnál.

Cramertől függetlenül, Daniel Bernoulli is hasznosságfüggvénnyel oldotta meg a problémát, $U(W)=\ln(W)$ hasznosságfüggvényt használva. Bernoulli logaritmusa arra a meggyőződésre épült, hogy a vagyon növekedésének meg kell felelnie a hasznosság növekedésének, amely fordítottan arányos az egyén vagyonával, $du/dx=1/x$ , amelynek megoldása a logaritmus. De Bernoulli Cramerrel ellentétben nem csupán az

$$E\left(\ln\left(D(n)\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\left(2^{n-1}\right)}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k\ln 2}{2^k}=\frac{1}{2}\left(3\ln 2\right)=\frac{3}{2}\ln 2\approx 1$$

dollár értéket számolta ki, hanem figyelembe vette a játékbeli Pál vagyonát is. Bernoulli javaslata szerint az az összeg, amelyet az emberek számításba vesznek, mikor azon gondolkodnak, hogy részt vegyenek-e a játékban, a hasznosság várt növekedésének, és a szelvény megvásárlásának a kombinációja, ennek megfelelően két lépésben számította ki, hogy „milyen nagy legyen egy tét, amelyet egy magánszemély hajlandó kockáztatni":

Első lépésben a várható hasznosság nyereségét, a $E\left(\Delta U^{+}\right)$-t a jegy árának figyelembe vétele nélkül számította ki

$$E\left(\Delta U^{+}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\ln\left(W+D\left(n\right)\right)-\ln\left(W\right)\right)=$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\ln\left(W + 2^{n-1}\right) - \ln\left(W\right)\right) \tag{3}$$

Ez lenne a hasznosság nettó növekedése, amennyiben a játék ingyen lenne, azaz a játék ára $P = 0$ dollár lenne.

Ezt követi az a kijelentés, hogy „A tét, aminél egy személynek nem szabad többet kockáztatnia" az a jegyár, $P$ dollár, ami kielégíti az alábbi egyenletet:

$$0 = \left(\Delta U^{+}\right) - \Delta U^{-} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\ln\left(W + D\left(n\right)\right) - \ln\left(W\right)\right) - \left[\ln\left(W\right) - \ln\left(W - P\right)\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\ln\left(W + 2^{n-1}\right) - \ln\left(W\right)\right) - \left[\ln\left(W\right) - \ln\left(W - P\right)\right] \tag{4}$$

Ahol az $\ln\left(W\right) - \ln\left(W - P\right) = \Delta U^{-}$ a a logaritmus hasznosság-vesztést fejezi ki a jegy megvásárláskor, azaz miután a szelvényt megvették, de mielőtt bármiféle pénzbevétel származna a játékból. A (4)–ből az egyenlet átrendezésével kifejezhető a $P$ a következő módon:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\ln\left(W + D\left(n\right)\right) - \ln\left(W\right)\right) = \ln\left(W\right) - \ln\left(W - P\right)$$

$$\ln\left(W - P\right) = \ln\left(W\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\ln\left(W + D\left(n\right)\right) - \ln\left(W\right)\right),$$

minkét oldalt $e$ alapú hatványra emelve:

$$P = W - e^{\ln(W) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\ln(W + D(n)) - \ln(W)\right)} =$$

$$= W - e^{\ln(W) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\ln\left(W + 2^{n-1}\right) - \ln(W)\right)}.$$

Így a vagyon függvényében a játék ára meghatározható, vagy helyesebb megfogalmazásban a vagyonunktól függően egy adott $P$ jegyár mellett a fenti kritérium alapján dönthetünk arról, hogy részt vegyünk-e a játékban, vagy sem.

Bernoulli ezen kritériuma azt állítja, hogy a jövőbeli hasznoktól függetlenül az ember soha nem adná oda a teljes vagyonát valamely játék egy szelvényéért, mivel ez a megvásárlás pillanatában végtelen hasznosság-vesztést jelentene, azaz $P < W$. Ez abban az esetben abszurd eredményekhez vezethet, ha egy valószínűségű egy olyan jövőbeli nyereség, amely nagyobb a játékos vagyonánál.

Bernoulli a (4) egyenletbeli kritérium mellett úgy érvelt, hogy „tisztességes játékban a veszítés miatt elszenvedett hasznosságvesztésnek egyenlőnek kell lennie a győzelemből eredő hasznossággal". Ha ezt úgy értelmezzük – ami megfelel a hasznosságelméleti irodalom állásfoglalásának –, hogy Bernoulli a tisztességes játékot úgy akarta definiálni, mint amelyben a várható nettó hasznosságváltozás nulla, akkor arra a következtetésre jutunk, hogy hibát vétett a (4) egyenletben szereplő kifejezésben. A logaritmikus hasznosság várt nettó változását $E\left(\Delta U\right)$–t ugyanis nem számolta ki, – bár a kutatók nagy része azt feltételezi, hogy ez volt a szándéka –, amely a következő lenne, figyelembe véve a $W$ dollár kezdeti vagyont és a játék árának költségeit, ami $P$ dollár:

$$E\left(\Delta U\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \left(ln\left(W - P + D\left(n\right)\right) - ln\left(W\right)\right) =$$

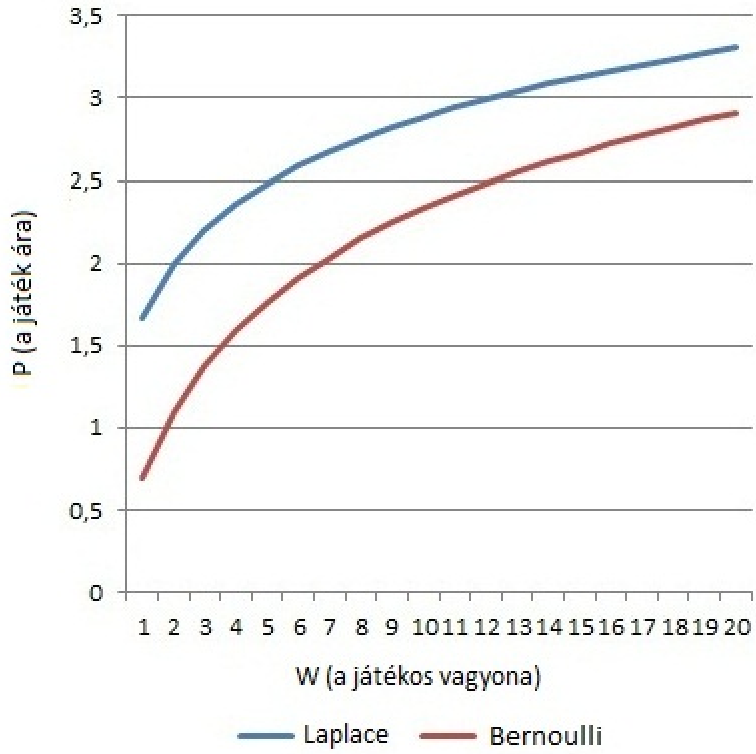
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \left(ln\left(W - P + 2^{n-1}\right) - ln\left(W\right)\right) \tag{5}$$

Ahol $ln\left(W - P + D\left(n\right)\right)$ a játék utáni vagyon hasznosságát jelenti, mert a $W$ kezdeti vagyon a $P$ befizetett díjjal csökken, valamint nő a $D\left(n\right)$ nyereménnyel. Az $ln\left(W\right)$ pedig a játék előtti vagyon hasznossága.

Az (5)–ben szereplő összeg konvergens minden véges $W$ mellett. $E\left(\Delta U\right)$ értéke $W$ és $P$ függvényében pozitív vagy negatív lehet, ami tükrözi a várható nyereséget vagy veszteséget az adott hasznosság mellett, $E\left(\Delta U\right) = 0$ pedig a tisztességes játék árát. Ezt a kritériumot általában Bernoulli nevéhez kapcsolják, ahogy Laplace 1814-es (5) művében is ezt teszi, de a dolgozatban Laplace kritériumaként fogok rá hivatkozni.

A (4) és (5) egyenleteket használva néhány $W$ mellett kiszámoltam a $P$ értékeket az Excel program segítségével. Kis $W$ értékek mellet a két egyenletből származó $P$-k nagyobb eltérést mutattak, melyet a lenti ábra is jól szemléltet.

A $W$, azaz a játékos vagyonának növekedésével a két, (4) és (5) kritériumból meghatározott $P$–k (a játék árak) különbsége csökken, feltételezhető, hogy $W \to \infty$ esetén 0–hoz tart.




Azt feltételezve, hogy a potenciális játékosok nem a várt pénznyereségre alapozzák döntéseiket, hanem a várható nyereség hasznosságára, és ezt a hasznosságot az $U$ megfelelően képviseli, akkor a paradoxon megoldódott.

## Kritikák a hasznosság fogalmával kapcsolatban

A modern tankönyvek valamilyen formában kijelentik, hogy a hasznosság egy olyan dolog, amely az emberi preferenciákat a maga várható értéke szerint kódolja. Menger Daniel Bernoulli 1738-as megoldásának (feloldásának) pont ezt az „ad hoc jellegét" kritizálta [5]–ben, amely alatt a választott hasznossági függvény önkényességét értette. Felmerül a kérdés, hogy milyen legyen az $U$ hasznossági függvény ebben a konkrét helyzetben, illetve ha módosítjuk a játék kifizetéseit, az hogyan módosítja a hasznosságfüggvény által adott megoldást. Menger [5]–ben az 5. és 6. szakaszban arra a következtetésre jut, ami szerint csak korlátos hasznossági függvényeket lehet használni, amennyiben a Szentpétervári játékhoz hasonló játékokban el akarjuk kerülni, hogy a hasznosság várható nettó változása – a szelvény árától függetlenül – pozitívan divergens legyen.

Menger [5]–ben bevezetett egy módosított szentpétervári játékot, amelyben a $D(n) = 2^{n-1}$ kifizetés függvény helyett, ahol egy adott összeg akkor kerül kifizetésre, ha tisztességes pénzfeldobások sorozatában a fej az $n$-edik feldobásnál jelenik meg először, a $D(n) = Wexp\,(2^n) - W$ kifizetést használja. Ezt Menger egy „kissé módosított játéknak” nevezi, feltehetően azért, mert az eredeti játékhoz hasonlóan ez is nagy nyereményeket kínál kis valószínűségekkel. Menger a módosítást azzal a szándékkal végezte, hogy megmutassa, a logaritmikus hasznosság nem tudja megoldani ezt a módosított Szentpétervári játékot. A Bernoulli által bevezetett $E\left(\Delta U^{+}\right)$ várható hasznosság nyereség a Menger féle módosított Szentpétervári játékban valóban végtelen lesz, ha (4)-s egyenletbe helyettesítjük a $D(n) = Wexp\,(2^n) - W$ kifizetésfüggvényt.

$$E\left(\Delta U^{+}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\ln\left(W + W\exp\left(2^{n}\right) - W\right) - \ln\left(W\right)\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\ln\left(\exp\left(2^{n}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}2^{n} = \sum_{n=1}^{\infty}1 = \infty$$

Menger kijelenti, hogy „egyértelmű, hogy még a módosított Szentpétervári játékban sem kockáztatná teljes vagyonát vagy annak egy jelentős részét egyetlen normális ember sem”. Menger úgy gondolta, hogy azáltal, hogy a várható hasznosság nyereség a $E\left(\Delta U^{+}\right)$ a módosított játékban végtelen lett, ezáltal az eredeti játékhoz hasonló problémával találjuk szembe magunkat, azaz Pál számára a játék ára ismét végtelen lesz.

Peters 2011–es [2] cikkében rámutat Menger két hibájára is. Az egyik hiba az, hogy Menger nem vette észre, hogy mennyit változtatott az eredeti játékon. Nem vette figyelembe, hogy játékában a legrosszabb eshetőség sem jár semmilyen kockázattal azon személy számára, aki a teljes vagyonát, azaz

$P = W$ dollárt fizet egy játékért. A legrosszabb eshetőség, amely egy játékossal megtörténhet, hogy a fej az első dobás során jelenik meg, azaz $n = 1$. Azonban ebben a legrosszabb esetben is a játékos nyereménye

$$D(n = 1) = W\left(e^2 - 1\right) \approx 6,3 \cdot W.$$

Tehát a legkisebb nyeremény is a játékos vagyonának $6,3$-szorosa, így ahhoz, hogy a játékos bárminek az elvesztését kockáztassa a játékban, egyetlen játékért a vagyonának több mint $6,3$–szorosát kell kifizetnie, feltételezhetően úgy, hogy kölcsönkér.

Menger cikkének másik hibája, hogy Menger vagy figyelmen kívül hagyta, hogy az $\ln(W - P)$ logaritmus negatívan divergens, ha $P \to W$, vagy Bernoullinak a (4)-ben szereplő $\Delta U^- = \ln(W) - \ln(W - P)$ teljes második kifejezését hagyta figyelmen kívül. Az igaz, hogy a (4) első kifejezése pozitívan divergens, amitől a játék vonzónak tűnik, ám a második kifejezés negatívan divergens, abban az esetbe, ha $P \to W$. Ráadásul a $P \geq W$ értékekre a (4) nincs is meghatározva. Ahhoz, hogy megértsük, mit jelent ez a meg nem határozott terület, össze kell hasonlítanunk ezeket a végtelenekbe tartó divergenciákat. Ehhez tekintsünk egy véges játékot, mely megegyezik a Menger féle módosított játékkal, kivéve, hogy ha $n_{max}$ feldobott érme közül egyik sem lesz fej, akkor véget ér a játék és Péter visszatéríti a játék árát Pálnak. Bármely véges $n_{max}$ érték esetén a megfelelő részlet összeget kompenzálhatja egy az ember vagyonához elég közeli játék ár, úgy hogy a Bernoulli féle (4) kritérium ne részesítse előnyben a játékban való részvételt:

$$\forall n_{max} < \infty \exists P_0 < W : \sum_{n=1}^{n_{max}} \left(\frac{1}{2}\right)^n 2^n - \ln\frac{W}{W - P_0} = 0.$$

A fenti egyenlet az alábbi alakban is felírható

$$n_{max} = \ln\frac{W}{W - P_0},$$

ami rejtetten magában foglalja, hogy a pénzérme feldobások maximálisan megengedett számának, az $n_{max}$–nak meg kell közelítenie a végtelent, hogy kiegyensúlyozzon egy véges $W$ értékhez közeli árat. Az egyenletből $P_0$–t kifejezve kapjuk:

$$P_0 = W\left(1 - e^{-n_{max}}\right).$$

Mindegy, hogy az összegben hány tagot vagy hány pénzfeldobást veszünk figyelembe, a szelvényár soha nem lehet $W$-nél több, hogy a divergens összeget kompenzálja. Következésképpen $P \geq W$ jegyár, ahol a (4) nem definiált, megfelel annak a javaslatnak, hogy ne vegyünk jogot a játékra, és a nyereményekből eredő hasznosságváltozás divergens várható értékével szemben a szelvényvásárlás negatívan divergens hasznosságváltozása dominál.

Bernoulli (4) kritériuma inkább a túlzott óvatosságáért kritizálható. Amint láttuk, Menger játékának legrosszabb eshetősége az, hogy a nyeremény a játékos eredeti vagyonának kb. 630%-a. Még a játékos vagyonának kétszeresébe kerülő szelvényár mellett és a legrosszabb esetben is a nettó eredmény még mindig a vagyon 430%-os növekedése. Bernoulli (4) kritériuma viszont ellenzi a játékban való részvételt.

Arrow a [6]-ban következőképpen foglalta össze Menger [5]–s cikkét: „Legyen $U(x)$ egy adott $x$ pénzmennyiségből származó hasznosság, és feltételezzük, hogy $x$ növekedésével $U(x)$ korlátlanul növekszik (pl. ha $U(x) = \ln(x)$, mint Bernoulli saját elméletében), akkor, minden $n$ egész számhoz, tartozik egy olyan $x_n$ pénzösszeg, hogy $U(x_n) = 2^{n-1}$. Tekintsük ezt a módosított Szentpétervári játékot, amelyben $x_n$ a kifizetés, mikor az $n$-edik feldobásnál jelenik meg először a fej. Ekkor egyértelműen a várt hasznosság ugyanaz lesz, mint a várt pénzkifizetés az eredeti megfogalmazásban, azaz végtelen. Ez az eredeti megfontoláshoz hasonlóan elutasításra kerül, mivel ellenkezik az intuícióval.” Samuelson [7]–ben egyetért azzal, hogy „... Menger azt mutatja, hogy mindig készíthetünk egy Szuper−Szentpétervári játékot [...] hogy a kompenzációt, amelyre Pálnak ismét szüksége van, végtelen legyen.„ Ezek az értelmezések abban az esetben helytállóak, ha nem vesszük figyelembe a játékbeli Pál vagyonát. Az $U(x) = \ln(x)$ hasznosság függvényt és Arrow jelölését használva, legyen a „Szuper−Szentpétervári játék” kifizetése $x_n = \exp\left(2^{n-1}\right)$, ekkor a nyereség hasznosságának a várható értéke $E\left(U\left(x_n\right)\right)$ valóban $\infty$ lesz:

$$E\left(\ln\left(x_n\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\exp\left(2^{n-1}\right)\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty.$$

Következésképpen abban az esetben, ha a „Szuper−Szentpétervári játék" díjának meghatározására használt hasznosság függvény a Cramer megoldásához hasonlóan, és a (4) valamint (5) kritériumokkal ellentétben nem tartalmazza a játékos kezdeti vagyonát, akkor tényleg minden korlátlan hasznosság függvény esetén megadható olyan $x_n$ módosított kifizetés, hogy a nyereség hasznosságának a várható értéke továbbra is $\infty$ legyen.

De a $D(n) = \exp(2^{n-1})$ kifizetések esetén is a (4) valamint (5) kritériumok is meghatározzák, hogy milyen véges $P$ jegyár mellett vegyünk részt a játékban. Bernoulli (4) kritériuma a szerencsejátéktól való tartózkodást javasolja a $P \geq W$ jegyár esetén. A (5) kritérium pedig abban az esetben javasolja a szerencsejátéktól való tartózkodást, ha a játék árának, $P$-nek a megfizetése az anyagi csőd kockázatával jár, azaz ha a játék $P$ ára nem kisebb a játékos $W$ vagyonának és a legkisebb nyereménynek $D(1) = x_1 = \exp(2^0) = e^1$ az összegénél, tehát $P \geq W + e$ esetben.

A játékban való részvétel eldöntésére a $W$ kezdeti vagyonnal rendelkező Pál számára megoldást adhat a hasznosság függvény használata, de a kérdés még mindig nyitott marad, hogy mi legyen a játék „igazságos" ára nem csupán a játékban játékosként részt venni kívánó Pál esetében és vagyonához mérten, hanem a játékot felajánló Péter számára is.

## 2.2. Az ergodelméleten alapuló megoldás

Ole Peters [2] és [3] 2011–es írásaiban egy alternatív megoldást ad, amelyben az idő átlagával helyettesíti a várható értéket, és nem hasznosság függvényt vezet be. Az ergodikus rendszerek irodalmának nagy része a determinisztikus dinamikával foglalkozik, de az alapkérdés az, hogy az időátlagok (ahol egy rendszer dinamikáját átlagoljuk egy időpályán) helyettesíthetők-e a várható értékekkel.. Az ergodelmélet a gázok mechanikájában a termodinamikai változók hatásainak vizsgálatából ered. Ilyen változó például egy gáz makroszkopikus nyomása, ahol a részecskék nagy száma , és ütközések gyakorisága miatt, nem lehetséges explicit megoldani a mozgásmikroszkópos egyenleteket, hiszen teljes információ az összes molekula pozíciójáról és lendületéről nem áll rendelkezésre, és az idő átlaga, például a tartályfalra való lendület átvitele nem számítható közvetlenül. Mivel azonban a makroszkópikus változók időben nem változnak, és a mikroszkópikus ingadozások engedelmeskednek az egyensúlyi állapotnak, így az időnek kevés kézzelfogható hatása van, és teljesen eltekinthetünk attól, azaz a rendszer ergodikus.

Abban az esetben ha az időátlag nem egyezik meg a várható értékkel, akkor a folyamat nem ergodikus. Tegyük fel, hogy van két pénzérménk, ahol az egyik szabályos, a másikon viszont két fej található. Ezen érmék közül véletlenszerűen válasszuk ki az egyiket, majd ezzel a kiválasztott érmével végezzünk független dobásokat. Legyen $X[n]$ az a diszkrét idejű véletlen folyamat, ahol $X[n] = 1$, ha az $n$-edik dobás kimenetele fej és 0, ha írás. Ebben az esetben $X[n]$ várható értéke $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{4}$, de a hosszútávú átlag 1/2 a szabályos érme és 1 a két fejet tartalmazó érme esetében. Tehát a hosszútávú időátlag 1/2 vagy 1, ami különbözik a várható értéktől, ezért ez a véletlen folyamat nem ergodikus.

Peters azt állítja, hogy a Szentpétervári játék sem ergodikus, mert az egyén vagyona általában nem egyensúlyi, sőt nem is stacionárius, ezért a várható érték és időátlag nem egyezik meg.

Peters állítása szerint a vagyon időbeli felhalmozódását jól jellemzi egy exponenciális növekedési ráta. Legyen $r_i$ az a tényező, ami a játékos vagyonát a játék egyik fordulójában megváltoztatja. A forduló most egy teljes játékot jelent, azaz érmedobások egy olyan sorozatát, amíg az írás bekövetkezik, míg $n$ a várokozási időt jelenti, azaz egy adott körben az érme dobásainak számát. Legyen $W$ dollár a játék előtt a játékos vagyona, $P$ dollár a játék ára és $D_i$ dollár a játék adott köréből származó nyeremény. Ekkor:

$$r_i = \frac{W - P + D_i}{W}. \tag{6}$$

Annak érdekében, hogy ezt a tényezőt egy $g$ exponenciális növekedési rátává alakítsuk, vesszük a $g_i = ln\,(r_i)$ logaritmust. Azért használunk logaritmust, hogy lehetővé váljon Bernoulli elemzésével való összehasonlítás.

**Állítás:** Az együttes átlagos exponenciális növekedési üteme a Szentpétervári játéknak:

$$\begin{aligned}\langle g\rangle = ln\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{W-P+D\left(n\right)}{W}\right) = \\ = ln\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{W-P+2^{n-1}}{W}\right)\end{aligned}$$

**Bizonyítás:** Először az $r_i$ növekedési tényezőt vesszük figyelembe, és véges számú mintára átlagoljuk. Legyen $N$ játékos, aki egyszerre játszik, ekkor a játékosok általában különböző dobás sorozatot tapasztalnak, melyek átlaga:

$$\langle r\rangle_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i.$$

A fenti összegzést megváltoztatjuk úgy, hogy a pénzfeldobások egy körön belüli számának ($n$) geometriai eloszlása szerint fusson

$$\langle r\rangle_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{n_N^{max}} k_n r_n,$$

ahol $k_n$ annak a gyakoriság, amellyel egy adott $n$ megjelenik a „párhuzamos univerzumok” $N$ mintájában, azaz az $N$ játékos közül $k_n$-nél jelenik meg az első írás az $n$-edik dobásra, és $n_N^{max}$ a legnagyobb $n$ a mintában. Ha $N$ növekszik, akkor $k_n/N$ tart az $n$ valószínűségéhez, vagyis $\lim_{N\to\infty} k_n/N = p_n$, és az $\langle r\rangle_N$ sztochasztikus változó helyett egy véletlentől nem függő valós számot, az együttes átlagos növekedési faktort $\langle r\rangle$-t kapjuk.

$$\langle r\rangle = \lim_{N\to\infty}\langle r\rangle_N = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{n_N^{max}}\frac{k_n}{N}r_N = \sum_{n=1}^{\infty} p_n r_n$$

Az $\langle r\rangle$ logaritmusát véve megkapjuk az exponenciális növekedési ütemet, a (6) felhasználásával pedig maga a tétel adódik.

$$\begin{aligned}\langle g\rangle = ln\left\langle r\right\rangle = ln\sum_{n=1}^{\infty} p_n r_n = \\ = ln\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{W-P+D\left(n\right)}{W}\right) =\end{aligned}$$

$$= ln \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{W - P + 2^{n-1}}{W}\right)$$

**Állítás:** A Szentpétervári játék idő-átlagos exponenciális növekedési üteme

$$\bar{g} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{W - P + D(n)}{W}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n ln \left(\frac{W - P + 2^{n-1}}{W}\right). \qquad (7)$$

**Bizonyítás:** Az időátlag számítási módját az előző bizonyításhoz hasonlóan végezzük. A játék véges számú T fordulója után a játékos vagyona:

$$W(T) = W \prod_{i=1}^{T} r_i.$$

A teljes változás T–edik gyöke,

$$\bar{r}_T = \left(\prod_{i=1}^{T} r_i\right)^{\frac{1}{T}},$$

ahol $\bar{r}_T$ az a tényező, amivel a vagyon átlagosan nőtt a játék egyik körében. Megváltoztatjuk a szorzatot

$$\bar{r}_T = \left(\prod_{n=1}^{n_T^{max}} r_n^{k_n}\right)^{\frac{1}{T}},$$

ahol $k_n$ az a gyakoriság, amivel egy adott $n$ előfordul a $T$ forduló alatt, és $n_T^{max}$ a legnagyobb előforduló $n$ a sorozatban. Ha a $T$ nő, akkor $k_n/T$ tart az $n$ valószínűségéhez. $\lim_{T\to\infty} k_n/T = p_n$, és az $\bar{r}_T$ sztochasztikus változó helyett egy véletlentől nem függő valós számot, az idő-átlagos növekedési faktort $\bar{r}$–t kapjuk.

$$\bar{r} = \lim_{T\to\infty} \bar{r}_T = \lim_{T\to\infty} \prod_{n=1}^{n_T^{max}} r_n^{k_n/T} = \prod_{n=1}^{\infty} r_n^{p_n}$$

Az $\bar{r}$ logaritmusa az idő-átlagos exponenciális növekedési ütem, és a (6) felhasználásával:

$$\bar{g} = ln\left(\prod_{n=1}^{\infty} r_n^{p_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \ln r_n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\ln\left(W - P + 2^{n-1}\right) - \ln\left(W\right)\right)$$

Peters azt állítja, hogy ez a $\bar{g}$ kiszámolt érték a játékos vagyonának időarányos exponenciális növekedési üteme, kockázati preferenciákra és személyes jellemzőkre vonatkozó feltételezések nélkül. A kapott eredmény (7) pedig matematikailag megegyezik a (5) eredménnyel, de koncepciójában különbözik. Az önkényes hasznosság le lett váltva egy olyan érvre, ami az idő múlásának a valóságán alapszik, és azon, a tényen, hogy se kommunikáció se erőforrás csere nincs a „párhuzamos univerzumok" között.

A $\bar{g} = 0$ mutatja meg a növekedés és a hanyatlás közötti átmenet pontos helyét, azaz ha $\bar{g} > 0$, akkor kell a játékot játszani, mert a játékos elvárhatja, hogy az idő múlásával a vagyona növekedjen, ellenben, ha $\bar{g} < 0$, akkor a játékot nem szabad játszani, mert a játékos ebben az esetben azt várja, hogy idővel elveszíti a pénzét. Tehát a $\bar{g}$ egy kritériumnak tekinthető, arra vonatkozóan, hogy mennyi kockázatot kell vállalnia egy személynek.

Ha a jegy árát $P > 1$ fixnek tekintem, akkor $\bar{g}$ értéke csak a játékos vagyonától, $W$-től függ. A nagyon gazdag játékos számára a nyereség nem jelentős, és a veszteség sem befolyásolja komolyan a befektetési képességét, ennek megfelelően $\lim_{W\to\infty} \bar{g} = 0$. Egy olyan játékos esetén viszont, akinek a minimum nyereménnyel megnövelt vagyona kisebb a játék áránál, azaz $W \leq P - 1$, a játék kockázatot jelent a csődre, ami bizonyos értelemben gazdasági életének végét jelentené. Ebben az esetben a (7)-es egyenletben szereplő összeg tagjai között vannak nem definiáltak. $\lim_{W\to(P-1)^+} \bar{g} = -\infty$.

Ha a játékos vagyonát $W$-t tekintjük fixnek, akkor $\bar{g}$ értéke csak a játék árától, $P$-től függ. Nyilván a $P = 0$ triviális esetben célszerű játszani, és $\bar{g} > 0$. Minden $W$ véges vagyonhoz, $P$ értékét növelve $\bar{g}$ végül negatívvá válik, azaz a játékban való részvétel kockázata túl magas lesz. Valamint az itt tárgyalt időfelbontás elriasztja a játékost minden olyan játékra való belépéstől, ahol a csőd, azaz a nulla vagy negatív vagyon a játék után nem nulla valószínűséggel fordul elő, azaz, ha $P \geq W - 1$. Ebben az esetben a már említett (7)–s egyenletben szereplő összeg tagjai között vannak nem definiáltak.

Peters [3]-ban megjegyzi, hogy a (7) természetellenes kritériumnak tűnhet, azon ok miatt, hogy a játék csak egyszer játszódik $W$ vagyonnal, a következő fordulóra a vagyon $D_i - P$–vel megváltozott, és a helyzetet újra kell értékelni. Hiszen annak ellenére, hogy ugyanazon az áron ismételten jegyet tudunk vásárolni, az adott játék előtt a kezdeti vagyonok különbözők lehetnek, így $\bar{g}$ értéke fordulónként változhat.

## 2.3. Az eloszlásfüggvény közelítése

Ezen megközelítés nem foglalkozik a történetbeli Pál vagyonával, hanem azt veszi figyelembe, hogy bizonyos számú játék esetén Péter mekkora összeget állapítson meg egy játék díjának, hogy a díjakból származó jövedelem fedezze a Pálnak fizetendő nyeremények összegét. Természetesen Pál azon döntését, hogy részt fog-e venni egy ilyen játékban, vagy játékok sorozatában, a játék(ok) belépési díján kívül saját anyagi helyzete is meg fogja határozni.

Nicolas de Condorcet márki volt az első, aki két dolgozatában is kifejtette 1785-ben, hogy a várható érték csak, mint sok megfigyelésre vett átlag érvényesülhet, így Pálnak végtelen sok játékot kellene játszania, hogy végtelen várható értéke realizálódjon. Tehát Condorcet arra a következtetésre jutott, hogy a játék ára függni fog a játszott játékok számától, következésképpen a paradoxon feloldásához nem egyetlen játékot, hanem játékok sorozatát kell figyelembe venni. Ennek megfelelően több játékot játszva Pál nyereményei az első, második, ... játékban legyenek $D_1$, $D_2$, ... független véletlen valószínűségi változók, ugyanazzal az eloszlással, mint $D(n)$, azaz

$$P\left\{D_k = 2^{n-1}\right\} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n, \quad n\epsilon\mathbb{N}, \quad \forall k\epsilon\mathbb{N} \quad \textit{esetén.}$$

Jelölje $S_m = D_1 + D_2 + \ldots + D_m$ Pál összes nyereményét $m$ játék során.

Ha $D$ várható értéke $E(D(n))$ véges volna, akkor teljesülne a nagy számok gyenge törvénye, és mivel ebben az esetben $E|D(n)|$ is véges lenne, a nagy számok erős törvénye is érvényesülne, vagyis

$$\frac{S_m}{m} \xrightarrow{P} E\left(D(n)\right)$$

a gyenge törvény szerint, azaz

$$P\left\{\left|S_m/m - E\left(D(n)\right)\right| < \varepsilon\right\} \to 1, \quad \forall\varepsilon > 0 \quad esetén,$$

és

$$\frac{S_m}{m} \xrightarrow{m.b.} E\left(D(n)\right)$$

az erős törvény szerint, azaz

$$P\left\{lim_{m\to\infty} S_m/m - E\left(D(n)\right)\right\} = 1.$$

$E\left(D(n)\right)$ végessége esetén nagy $m$-re $S_m/m \approx E\left(D(n)\right)$, azaz az egy játékra eső $S_m/m$ átlagos nyeremény $E\left(D(n)\right)$ körül van, ami még mindig nem garantálná azt, hogy egy játékért az igazságos díj $P = E\left(D(n)\right)$. Ehhez $D$ várható értékén kívül még $D$ szórásának $\sigma$-nak is végesnek kellene lennie. Ebben az esetben a centrális határeloszlás tételből, következően $S_m$ gyengén konvergál a standard normális eloszláshoz, azaz

$$P\left(\frac{S_m - m\left\langle D(n)\right\rangle}{\sqrt{m}\sigma} < z\right) \to \Phi\left(z\right),$$

ahol $\Phi$ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye. Valamint a normális eloszlás azon tulajdonságából, hogy a várható értéke és mediánja ugyanaz, következne, hogy

$$P\left\{S_m - mE\left(D(n)\right) > 0\right\} \to \frac{1}{2} \leftarrow P\left\{S_m - mE\left(D(n)\right) < 0\right\},$$

vagyis nagy $n$-re a játékok közelítőleg felében Pál, másik felében Péter nyerne, és a nyeremények is közelítőleg szimmetrikusan oszlanának el a két fél között. A Huygens féle kritériumot ezen esetben lehetne használni a játék árának meghatározására, azonban a Szentpétervári játékban $D\left(n\right)$–nek sem a szórása, de még a várható értéke, sem véges.

Mivel $E\left(D(n)\right) =\infty$, így azt tudjuk, hogy Pál játékonkénti átlagnyereménye majdnem biztosan a végtelenbe tart, ha a játékok számával tartunk a végtelenbe. A kérdés $S_m/m$ milyen gyorsan tart a végtelenbe. Sztochasztikus konvergenciát használva adódik a következő tétel, amit Fellernek tulajdoníthatunk. Feller művében [4]–ben leírt Szentpétervári játékban szereplő nyeremények, az általam 1.1 szakaszban leírt nyeremények kétszeresei, ezért a [4]–beli tételt és a bizonyítást ennek megfelelően írtam és számítottam át, Feller gondolatmenetét követve.

**Feller tétele:** $\frac{2S_m}{mlog_2m} \xrightarrow{P} 1$

**Bizonyítás:** Tekintsük az

$$X_{km} = D_k\left(\frac{m\log_2 m}{2}\right) =$$

$$= D_k I\left(D_k \leq \frac{m\log_2 m}{2}\right) = \begin{cases} D_k, & D_k \leq \frac{m\log_2 m}{2} \\ 0, & D_k > \frac{m\log_2 m}{2} \end{cases}$$

$\frac{1}{2}m\log_2 m$-nél megvágott változókat, a hozzájuk tartozó

$$Y_{km} = D_k I\left(D_k > \frac{m\log_2 m}{2}\right) = \begin{cases} 0, & D_k \leq \frac{m\log_2 m}{2} \\ D_k, & D_k > \frac{m\log_2 m}{2} \end{cases}$$

levágott részekkel, úgyhogy

$$D_k = X_{km} + Y_{km}, k = 1, \dots, m,$$

és

$$S_m = \textstyle\sum_{k=1}^m X_{km} + \sum_{k=1}^m Y_{km} \quad , \quad m = 1, 2, \dots$$

Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén,

$$P\left\{\left|\frac{2S_m}{m\log_2 m} - 1\right| > \varepsilon\right\} =$$

$$= P\left\{\left|\sum_{k=1}^m X_{km} + \sum_{k=1}^m Y_{km} - \frac{m\log_2 m}{2}\right| > \frac{\varepsilon m\log_2 m}{2}\right\} \leq$$

$$\leq P\left\{\left|\sum_{k=1}^{m} X_{km} - \frac{m\log_2 m}{2}\right| + \sum_{k=1}^{m} Y_{km} > \frac{\varepsilon m\log_2 m}{2}\right\} \leq$$

$$\leq P\left\{\left|\sum_{k=1}^{m} X_{km} - \frac{m\log_2 m}{2}\right| > \frac{\varepsilon m\log_2 m}{2}\right\} + P\left\{\sum_{k=1}^{m} Y_{km} > 0\right\}$$

Mivel a második tagra fennáll, hogy

$$P\left\{\sum_{k=1}^{m} Y_{km} > 0\right\} \leq P\left\{\bigcup_{k=1}^{m} \{Y_{km} > 0\}\right\} <$$

$$< mP\left\{D > \frac{m\log_2 m}{2}\right\},$$

valamint $D$ eloszlásfüggvényéből (2)–ből következik, hogy

$$\frac{1}{2} \leq x\left(1 - F\left(x\right)\right) = xP\left\{D > x\right\} = x2^{-\lfloor \log_2 x \rfloor + 1} < 1,$$

$$mP\left\{D > \frac{m\log_2 m}{2}\right\} < \frac{2}{\log_2 m}.$$

Így adódik, hogy

$$P\left\{\sum_{k=1}^{m} Y_{km} > 0\right\} < \frac{2}{\log_2 m} \to 0.$$

A továbbiakban elég belátni, hogy

$$P\left\{\left|\sum_{k=1}^{m} X_{km} - \tfrac{m\log_2 m}{2}\right| > \tfrac{\varepsilon m\log_2 m}{2}\right\} \to 0 \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \textit{esetén}. \tag{8}$$

Minden $k = 1, \ldots, n$ esetén legyen

$$\mu_m = E\left(X_{km}\right) = E\left(DI\left(D \leq \frac{m\log_2 m}{2}\right)\right)$$

és

$$\sigma_m^2 = E\left(\left[X_{km} - \mu_n\right]^2\right) = E\left(\left[DI\left(D \leq \frac{m\log_2 m}{2}\right) - \mu_m\right]^2\right)$$

az $X_{km}$ változó $k$-tól nem függő várható értéke és szórásnégyzete. Ekkor

$$\mu_m = \sum_{\left\{k:2^{k-1}\leq\frac{m\log_2 m}{2}\right\}} 2^{k-1}\frac{1}{2^k} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\lfloor \log_2\left(m\log_2 m\right)\right\rfloor = \frac{1}{2}\left\lfloor \log_2 m + \log_2\left(\log_2 m\right)\right\rfloor,$$

és

$$\sigma_m^2 \leq \frac{1}{2} m \log_2 m,$$

mert

$$\sigma_m^2 \leq E\left(D^2 I\left(D \leq \frac{m\log_2 m}{2}\right)\right) = \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(m\log_2 m)\rfloor} 2^{k-2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{2^{\lfloor \log_2(m\log_2 m)\rfloor} - 1\right\}.$$

Ezért $n \geq 4$ esetén, a Csebisev egyenlőtlenséggel és a függetlenséggel

$$P\left\{\left|\sum_{k=1}^m X_{km} - m\mu_m\right| > \varepsilon m\mu_m\right\} \leq \frac{m\sigma_m^2}{\varepsilon^2 m^2\mu_m^2} \leq \frac{\log_2 m}{2\varepsilon^2\mu_m^2} \leq \frac{2}{\varepsilon^2 \log_2 m},$$

tekintve, hogy

$$\frac{1}{2}\log_2 m \leq \mu_m \leq \frac{1}{2}\left\lfloor \log_2 m + \log_2\left(\log_2 m\right)\right\rfloor.$$

Látjuk, hogy

$$p_m\left(\varepsilon\right) = P\left\{\left|\sum_{k=1}^m X_{km} - m\mu_m\right| > \varepsilon m\mu_m\right\} \to 0 \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \textit{esetén.}$$

A $\mu_m \sim \frac{1}{2}\log_2 m$ aszimptotikus egyenlőség miatt valójában az utóbbi konvergencia és a (8)–ban kívánt ekvivalensek. $\forall\varepsilon > 0$ esetén a háromszög egyenlőtlenségből kövezkezik, hogy $\forall$ olyan $n$-re, amelyre teljesül a

$$\frac{\log_2 m}{2\mu_m} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2\left(1+\varepsilon\right)}$$

egyenlőtlenség, a (8) baloldalán álló valószínűség nem nagyobb, mint

$$P\left\{\left|\sum_{k=1}^m X_{km} - m\mu_m\right| > \left[\varepsilon - \left(1+\varepsilon\right)\left\{1 - \frac{\log_2 m}{2\mu_m}\right\}\right] m\mu_m\right\} \leq p_m\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Mivel $p_m(\varepsilon/2) \to 0$, ez a (8) állítást és Feller tételét bizonyítja. □

Steinhaus 1949-ben egy determinisztikus sorozattal próbálja meg imitálni Pál véletlen nyereményeit. Pálnak az egyes játékok során nyert véletlen összegeit rendre $D_1, D_2, \ldots$ sorozattal jelöltük. A Steinhaus által megadott sorozatot jelöljük $P_1$, $P_2$, ... –vel, ahol $P_1$ lesz a díj az első játszmáért,$P_2$ a másodikért, és így tovább. A $P_i$ sorozat előállításához induljunk ki egyesek és üres helyek egy alternáló sorozatából:

1, _, 1, _, 1, _, 1, _, 1, _, 1, _, 1, _, 1, _, 1, _, 1, _, 1, _, 1, _, 1,...

Írjunk minden második üres helyre egy kettest:

1, 2, 1, _, 1, 2, 1, _, 1, 2, 1, _, 1, 2, 1, _, 1, 2, 1, _, 1, 2, 1, _, 1, ... ,

majd minden második üres helyre egy négyest:

1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, _, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, _, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, _, 1, ... ,

és így tovább. Eredményül adódik:

1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 8, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 16, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 8, 1, ...

sorozat a $P_1$, $P_2$, ... Steinhaus sorozat.

Ebben a sorozatban az 1-es szám gyakorisága 1/2, a 2 gyakorisága 1/4, és általánosan $2^{n-1}$gyakorisága $1/2^n$.

Steinhaus szerint a játékokért rendre $P_1$, $P_2$, ... dollárt kell fizetni, és $m$ játékért összesen $s_m = P_1 + P_2 + \ldots + P_m$-et. Feller azt állítja, hogy ez az összeg „erős” értelemben igazságos.

Csörgő az [1]–ben Feller „erős” értelemben igazságos állítását az alábbiak szerint értelmezte Jelölje $\sharp\{B\}$ a $B$ halmaz elemeinek számát. Tekintsük a Szentpétervári játék kifizetés sorozatának $m$-edik empirikus eloszlásfüggvényét:

$$\hat{F}_m(x) = \frac{\sharp\{1 \leq j \leq m : D_j \leq x\}}{m},$$

és a Steinhaus sorozat $m$-edik empirikus eloszlásfüggvényét:

$$F_m(x) = \frac{\sharp\{1 \leq j \leq m : P_j \leq x\}}{m},$$

amelyek $\forall x \epsilon \mathbb{R}$ megadják, hogy a sorozat első $m$ elemének hányad része nem nagyobb, mint $x$.

A játékbeli Pál $D$ nyereményének (2)–ben felírt $F(\cdot)$ eloszlásfüggvényére, és a Szentpétervári sorozatra a Glivenko–Cantelli tétel az alábbit mondja ki:

$$\sup_{x \epsilon \mathbb{R}} \left| \hat{F}_m(x) - F(x) \right| \xrightarrow{m.b.} 0,$$

míg a Steinhaus sorozatra igaz az a determinisztikus tény, hogy

$$\sup_{x \epsilon \mathbb{R}} \left| F_m(x) - F(x) \right| \xrightarrow{m.b.} 0.$$

Csörgő továbbá megjegyzi Feller tételével kapcsolatban, hogy egy valószínűséggel nem igaz, és belátja, hogy

$$\liminf_{m \to \infty} \frac{2S_m}{mlog_2 m} = 1$$

és

$$\limsup_{m \to \infty} \frac{2S_m}{mlog_2 m} = \infty$$

majdnem biztosan. Csörgő továbbá megjegyzi, hogy a játékbeli Pál halmozott nyereményeinek $S_m$ sorozata determinisztikus sorozatokkal nem egyensúlyozható ki úgy, hogy véges pozitív határértéket kapjunk majdnem biztosan. Feller tételének sztochasztikus limesze az egy valószínűséggel létező torlódási pontok közül a legkisebb, míg a legnagyobb végtelenné válik. Ez minden $\frac{1}{2}mlog_2 m$-el aszimptotikusan egyenlő sorozatra is igaz, ilyen például a Steinhaus-féle $s(m)$ összeg is. Ennek oka az időnként jelentkező nagyon nagy nyeremény.

Adott $m$ játék esetén a $D_1, \ldots, D_m$ nyeremények nagyság szerinti sorba rendezése legyen $D_{m,1} \leq D_{m,2} \leq \ldots \leq D_{m,m}$. A rögzített $k \epsilon \mathbb{N}$ számnál nagyobb $m > k$ játékot játszva, legyen

$$S_m(k) = \sum_{j=1}^{m-k} D_{m,j}$$

a játékbeli Pál nyereménye $m$ játék során, azaz a játék kifizetését úgy módosítjuk, hogy Pál lemond $k$ darab legnagyobb nyereményéről, vagyis $D_{m,m} + D_{m,m-1} + \ldots + D_{m,m-k+1}$ dollárról, és $S_m$ dollár helyett $S_m(k)$ dollárt kap $m$ játék során. Csörgő megjegyzi, hogy a kifizetés módosításával a „józan ész szerint" kevesebbet kellene Pálnak az $m$ játékért fizetnie, hiszen a játék során szerzett $k$ darab legnagyobb nyereményéről lemondott. De ennek ellenére:

$$\frac{2S_m(k)}{mlog_2m} \xrightarrow{m.b.} 1$$

minden rögzített $k \epsilon \mathbb{N}$ esetén.

$S_m$ nyeremények rapszodikus viselkedésének az oka a legnagyobb $D_{m,m}$ nyeremény rapszodikus viselkedése. Abban az esetben, ha Pál lemond a legnagyobb nyereményéről, akkor Feller gyenge törvénye erős törvénnyé válik.

Csörgő továbbá [1]-ben megjegyzi, hogy „minden ilyen gyenge vagy erős törvény ugyanazt az $\frac{1}{2}mlog_2m$ dollárt írja elő $S_m$-ért, $S_m(1)$-ért, $S_m(2)$-ért, ..., vagy bármi ezzel aszimptotikusan ekvivalens dollárt." „A nagy számok (gyenge vagy erős) törvénye önmagában nagyon tompa eszköz: a jelen esetben csak annyit tud mondani, hogy valahol $\frac{1}{2}mlog_2m$ körül kell keresni az $S_m$ és $S_m(k)$ véletlen nyeremények értékét."

Csörgő még azt is megjegyzi, hogy $m$ játékért $\frac{1}{2}mlog_2m$ dollár akkor is kevés, ha Pál lemond a legnagyobb nyereményéről, de abban az esetben már sok, ha a két legnagyobb nyereményéről mond le. Azaz

$$S_m(2) < \frac{1}{2}mlog_2m < S_m(1).$$

# 3. A játék szimulációja

Minden esetben 100 000 szimulációt hajtottam végre, hat különböző játékszámmal 1, 50, 1000, 2048, 10 000 és 100 000 játékkal. Ahol egy játék az első írásig történő megjelenést reprezentálja. Az egyes szimulációk során a maximális értékek és átlag értékek megjelenítésén kívül fontos és érdekes adatnak gondoltam a legnagyobb nyereményről való lemondás, valamint a 2 legnagyobb nyereményről való lemondás esetén módosult átlag és maximális értékek megjelenítését is. Ennek oka, a legnagyobb nyeremény szélsőséges volta, mely gyakran nagyobb a többi forduló során nyert össznyereménytől is, ahogy ezt az előző szakaszban már említettem. Ha több fordulós játék esetén Pál lemond az őt illető legnagyobb nyereményről, esetleg a két legnagyobb nyereményéről, akkor a játéksorozatok ára a Steinhaus és Feller által meghatározott értékek közelében lesznek.

## 3.1. A szimulációk eredményei

Az 1 játékra lefuttatott 100 000 szimuláció esetén az átlagos nyeremény 10 dollár lett, a legnagyobb nyeremény pedig, ami előfordult a 100 000 szimuláció során a 131 072 dollár.

Az alábbi táblázatok az $m$ fordulós játéksorozat 100 000 szimulációra lefuttatott eredményeit tartalmazzák, melyek első cellájában a játéksorozatok száma, az $m$ található.

A táblázatok második oszlopának első sora tartalmazza az összes $(100000 \cdot m)$ játék során előforduló legnagyobb nyereményt, amit $\max D_{m,m}$–el jelöltem. A második sora pedig az egyes játéksorozatok során előforduló maximális nyeremények átlagát, amit $\overline{D}_{m,m}$–el jelöltem.

A táblázatok harmadik oszlopának első sora a 100 000 szimuláció során előfordult legmagasabb össznyereményt, azaz $\max S_m$–et tartalmazza, amit úgy is megfogalmazhatunk, hogy az $m$ hosszú játéksorozatokat játszó 100 000 játékos közül a „legszerencsésebb játékos” össznyereménye. A második sora pedig a 100 000 szimulációra eső össznyeremények átlagát tartalmazza, azaz $m$ játékra eső átlagos össznyereményt $\overline{S}_m$–et.

A táblázatok negyedik oszlopának első sora a 100 000 szimuláció során előfordult a legnagyobb nyereménnyel csökkentett legmagasabb össznyereményt, azaz $\max(S_m - D_{m,m}) = \max S_m(1)$–et tartalmazza. A második sora pedig a 100 000 szimulációra eső a legnagyobb nyereménnyel csökkentett össznyeremények átlagát tartalmazza, amire az $\overline{S}_m(1)$ jelölést használtam.

A táblázatok ötödik oszlopának első sora a 100 000 szimuláció során előfordult a két legnagyobb nyereménnyel csökkentett legmagasabb össznyereményt, azaz $\max(S_m - D_{m,m} - D_{m,m-1}) = \max S_m(2)$–öt tartalmazza. A második sora pedig a 100 000 szimulációra eső a két legnagyobb nyereménnyel csökkentett össznyeremények átlagát tartalmazza, amire az $\overline{S}_m(2)$ jelölést használtam.

Az alábbi táblázat a 50 fordulós játéksorozat 100 000 szimulációra lefuttatott eredményeit tartalmazza.

| 50 | $D_{50,50}$ | $S_{50}$ | $S_{50}(1)$ | $S_{50}(2)$ |
|---|---|---|---|---|
| max. | 16 777 216 | 16 777 295 | 8476 | 2209 |
| átlag | 654 | 817 | 163 | 127 |

Az alábbi táblázat a 1000 fordulós játéksorozat 1000 szimulációra lefuttatott eredményeit tartalmazza.

| 1000 | $D_{1000,1000}$ | $S_{1000}$ | $S_{1000}(1)$ | $S_{1000}(2)$ |
|---|---|---|---|---|
| max. | 134 217 728 | 134 244 063 | 185 756 | 54 684 |
| átlag | 9613 | 15 052 | 5439 | 4714 |

Az alábbi táblázat a 2048 fordulós játéksorozat 2048szimulációra lefuttatott eredményeit tartalmazza.

| 2048 | $D_{2048,2048}$ | $S_{2048}$ | $S_{2048}(1)$ | $S_{2048}(2)$ |
|---|---|---|---|---|
| max. | 536 870 912 | 536 888 778 | 1 060 941 | 63 190 |
| átlag | 20 971 | 33 147 | 12 176 | 10 697 |

Az alábbi táblázat a 10 000 fordulós játéksorozat 100 000 szimulációra lefuttatott eredményeit tartalmazza.

| 10 000 | $D_{10000,10000}$ | $S_{10000}$ | $S_{10000}\,(1)$ | $S_{10000}\,(2)$ |
|---|---|---|---|---|
| max. | 2 147 483 648 | 2 147 692 927 | 757 962 | 321 551 |
| átlag | 136 275 | 207 154 | 70 879 | 63 703 |

Az alábbi táblázat a 100 000 fordulós játéksorozat 100 000 szimulációra lefuttatott eredményeit tartalmazza.

| 100 000 | $D_{100000,100000}$ | $S_{100000}$ | $S_{100000}\,(1)$ | $S_{100000}\,(2)$ |
|---|---|---|---|---|
| max. | 4 294 967 296 | 4 296 740 924 | 17 546 784 | 3 863 754 |
| átlag | 969 270 | 1 844 058 | 874 788 | 802 850 |

## 3.2. Elemzés, értelmezés

A szimulációk eredményeiből jól látható, hogy a játéksorozatok hosszának, $m$-nek a növelésével legnagyobb nyeremények átlaga $\overline{D}_{m,m}$ és az abszolút legnagyobb nyeremény értéke $\max D_{m,m}$ is növekedett a várakozásoknak megfelelően.

Minden lefuttatott $m$ játékszám mellett $\overline{D}_{m,m} > \overline{S}_m\,(1)$, ami igazolja azt, hogy $m$ játéksorozatok esetén átlagosan a legnagyobb nyeremény több, mint az azon kívüli $m-1$ nyeremény összege, ami azt is jelenti, hogy abban az esetben, ha egy játékos lemond a legnagyobb nyereményéről, akkor átlagosan több, mint a nyereményének a feléről mond le.

A szimuláció eredményeit látva számomra nagyon meglepő volt az, hogy $\max D_{m,m}$ és $\max S_m$ különbsége milyen kicsi, még $m = 100000$ játék esetén is kevesebb mint $\max S_m$ $0,05\%$-a. Ennek kapcsán megnéztem, hogy $\max D_{m,m}$ hogyan viszonyul a 100 000 szimuláció során szerzett összes nyereményhez, ami $100000m$ játékból ered, $m=$ 1-re 13%, $m=$ 50-re 20%, $m=$ 1000-re 9%, $m=$ 2048-re 16%, $m=$ 10000-re 10%, $m=$ 100000-re 2%.

A kapott eredmények átlagainak jobb összehasonlíthatóság érdekében egy közös táblázatba rendeztem ezen értékeket, a Feller és Steinhaus által adott megoldások eredményeivel együtt. Ezen kívül kiszámoltam és szintén táblázatba rendeztem a különböző hosszúságú és megszorítású játéksorozatok esetén az egy játékra eső játék árát.

Az alábbi táblázat első oszlopa tartalmazza az egy játékos által játszott játékok számát, $m$–et. A táblázat második oszlopa a szimulációk össznyereményeinek átlagát $\overline{S}_m$–et tartalmazza, ha a játékosok minden nyereményüket megkapják. A táblázat harmadik oszlopa a szimulációknak a legnagyobb nyereménnyel csökkentett össznyereményeinek átlagát tartalmazza, azaz $\overline{S}_m\,(1)$–et. A táblázat negyedik oszlopa a szimulációknak a két legnagyobb nyereménnyel csökkentett össznyereményeinek átlagát tartalmazza, azaz $\overline{S}_m\,(2)$–t. A táblázat ötödik oszlopa a Feller, a hatodik oszlopa pedig a Steinhaus által adott megoldások eredményeit.

| játékok | $\overline{S}_m$ | $\overline{S}_m\,(1)$ | $\overline{S}_m\,(2)$ | Feller | Steinhaus |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 0 | / | / | 1 |
| 50 | 817 | 163 | 127 | 141 | 163 |
| 1000 | 15 052 | 5439 | 4714 | 4983 | 5060 |
| 2048 | 33 147 | 12 176 | 10 697 | 11 264 | 13 312 |
| 10 000 | 207 154 | 70 879 | 63 703 | 66 439 | 71 728 |
| 100 000 | 1 844 058 | 874 788 | 802 850 | 830 482 | 878 000 |

Az alábbi táblázat első oszlopa tartalmazza az egy játékos, azaz Pál által játszott játékok számát, $m$–et. A táblázat második oszlopa egy játék árának értékét tartalmazza, ha a játékos, azaz Pál minden nyereményét megkapja. A táblázat harmadik oszlopa egy játék árának értékét tartalmazza, abban az esetben, ha Pálunk lemond a legnagyobb nyereményéről. A táblázat negyedik oszlopa egy játék árának értékét tartalmazza, abban az esetben, ha a játékosunk olyan nagyvonalú, hogy lemond az őt illető két legnagyobb nyereményéről. A táblázat ötödik oszlopa tartalmazza a Feller által adott megoldás alapján számolt egy játékra eső jegyárakat, a hatodik oszlopa pedig a Steinhaus által adott megoldás alapján számolt egy játékra eső jegyárakat.

| játékok | $\overline{P}$ | $\overline{P}(1)$ | $\overline{P}(2)$ | Feller | Steinhaus |
|---|---|---|---|---|---|
| 50 | 16,34 | 3,26 | 2,54 | 2,82 | 3,26 |
| 1000 | 15,05 | 5,44 | 4,71 | 4,98 | 5,06 |
| 2048 | 16,19 | 5,95 | 5,22 | 5,5 | 6,5 |
| 10 000 | 20,72 | 7,09 | 6,37 | 6,64 | 7,17 |
| 100 000 | 18,44 | 8,75 | 8,03 | 8,3 | 8,78 |

A kapott eredmények jól igazolják Csörgő eredményeit, hogy a Feller által $m$ játéksorozat esetén megadott $\frac{1}{2}log_2m$ játékonkénti ára még akkor is kevés, ha a játékos lemond a legnagyobb nyereményéről, abban az esetben viszont sok, ha a két legnagyobb nyereményéről mond le, azaz $\frac{1}{2}log_2m$ $\overline{P}(1)$ és $\overline{P}(2)$ között van ($\overline{P}(1) < \frac{1}{2}log_2m < \overline{P}(2)$).

A Steinhaus sorozat által adott eredmények nagyon közel esnek a szimuláció által kapott $\overline{P}(1)$ értékekhez abban az esetben, ha a játszani kívánt játékok száma 2–nek két egymást követő hatványa közötti szám körül van (például 50, vagy 100 000 játék esetén), abban az esetben, ha a játszani kívánt játékok száma 2–nek valamely hatványa, vagy annál nem sokkal nagyobb szám, akkor a Steinhaus sorozat eredménye a $\overline{P}(1)$–nél nagyobb (például 2048 játék), ha a játékszám 2–nek valamely hatványánál nem sokkal kisebb szám (például 1000 játék), akkor Steinhaus sorozat eredménye a $\overline{P}(1)$–nél kisebb lesz. Ennek magyarázata az, hogy a Steinhaus sorozat minden 2 hatványnál nagyot ugrik.

A kapott eredményekből, az is megfigyelhető, hogy $\overline{P}(1)$, $\overline{P}(2)$, Feller és Steinhaus értékek is logaritmikusan nőnek a játék számának $m$–nek a növelésével, ezzel szemben a szimuláció eredményeiből úgy tűnik, hogy a $\overline{P}$ értékekre ez nem igaz. Ennek oka a szimuláció során véletlenszerűen felbukkanó kiugró értékek, ami a játék megszületésétől fogva a problémát okozza. Ebben a konkrét szimulációban $100000m$ játék során $m = 50$–nél a többi nyereményhez képest van egy nagyon nagy kiugró érték, $m = 1000$–nél pedig kettő is van, $m = 100000$–nél viszont egy sincs, és ez okozza előbbiek magas, utóbbinak pedig alacsony $\overline{P}$ értékét. Valószínűleg ugyanezen paraméterekre a szimuláció újbóli lefuttatásával ezen szimuláció eredményeitől eltérő $\overline{P}$ értékek jönnének ki, de nagyon hasonló $\overline{P}(1)$ és $\overline{P}(2)$ értékek.

# 4. Befektetések elemzése a játék alapján

## 4.1. Módosított játék

Az eredeti Szentpétervári játékban, ha a fej az $n$. dobás során következik be először, akkor Pál $2^{n-1}$ dollárt kap Pétertől. Felhasználva, hogy

$$2^{n-1} = 2^n/2 = \left(2 + \sum_{k=2}^{n} 2^{k-1}\right)/2 =$$

$$= \left(2 + 2\sum_{k=2}^{n} 2^{k-2}\right)/2 = 1 + \sum_{k=2}^{n} 2^{k-2},$$

ha módosítjuk az eredeti Szentpétervári játékot úgy, hogy Pál lehetséges nyereményeit 1 dollárral csökkentjük, akkor Pál lehetséges nyereményei:
$D(n) = 2^{n-1} - 1 = \sum_{k=2}^{n} 2^{k-2}$ alakba írhatóak.

Tovább általánosítjuk a módosított játékot a következőképpen:

- Az írás dobásának valószínűségét $\frac{1}{2}$–ről $\frac{1}{1+i}$–re változtatjuk, ahol $i > 0$, azaz nem szabályos pénzérmével játszuk. A fej dobásának valószínűsége ebben az esetben $\frac{1}{2}$–ről $1 - \frac{1}{1+i} = \frac{i}{1+i}$–re változik.
- A nyeremények növekedésének ütemét pedig 2-ről $1 + g$-re változtatjuk, ahol $g > 0$.

A fenti módosítások figyelembevételével Péter és Pál a következő játékot játsza: Péter egy szabálytalan érmét dobál, ahol az írás valószínűsége $\frac{1}{1+i}$.
1) Írás esetén Péter $D$ dollárt fizet Pálnak, és az érmét újra dobja.
Fej esetén a játék véget ér.
2) Írás esetén Péter $D(1+g)$ dollárt fizet Pálnak, és az érmét újra dobja.
Fej esetén a játék véget ér.

...

n) Írás esetén Péter $D(1+g)^{n-2}$ dollárt fizet Pálnak, és az érmét újra dobja.
Fej esetén a játék véget ér.

...

Pál ezen módosított játék során nem csupán a játék végén kapja meg nyereményét, hanem már a játék közben minden írás dobása esetén jutalékot kap Pétertől. Vagyis minden alkalommal, amikor a játék még a szabályok szerint folytatható, azaz amíg a játékos fejet nem dob.

## 4.2. Növekvő osztalékfizetés és a módosított játék

Ezen alfejezetben leírtak Durand [8]–ban található gondolatmenetét követik. Az alábbi táblázat tartalmaz néhány lehetséges kimenetelt, és a hozzájuk kapcsolódó valószínűségeket a 3.1–ben bemutatott módosított Szentpétervári játék esetében, ahol Péter osztalékok sorozatát fizeti Pálnak aszerint, hogy hányszor jelenik meg írás egy adott dobássorozatban, mielőtt először jelenik meg a fej.

| Dobás sorozat | Valószínűség | Osztalék | Halmozott osztalék |
|---|---|---|---|
| $F$ | $i/(1+i)$ | $0$ | $0$ |
| $IF$ | $i/(1+i)^2$ | $D$ | $D$ |
| $IIF$ | $i/(1+i)^3$ | $D(1+g)$ | $D+D(1+g)$ |
| $IIIF$ | $i/(1+i)^4$ | $D(1+g)^2$ | $D+D(1+g)+D(1+g)^2$ |

Természetesen végtelen számú ilyen lehetséges kimenetel van, mert minden véges írás sorozat, függetlenül attól, hogy mennyire hosszú, nagyobb, mint nulla valószínűséggel fordul elő. Pál matematikai várakozását úgy kapjuk meg, hogy összeadjuk a második oszlopban lévő valószínűségek és a második oszlopban lévő kifizetések szorzatát. Így például az $IIF$ sorozat valószínűsége $i/(1+i)^3$, és két osztalék kifizetést eredményez, $D$–t és $D(1+g)$–t. A szorzat az alábbi táblázatban látható, az $F$, $IF$ és $IIIF$ dobás sorozatokhoz tartozó szorzatokkal együtt.

| Dobás sorozat | Szorzat |
|---|---|
| $F$ | 0 |
| $IF$ | $Di/\left(1+i\right)^2$ |
| $IIF$ | $\left[D+D\left(1+g\right)\right]i/\left(1+i\right)^3$ |
| $IIIF$ | $\left[D+D\left(1+g\right)+D\left(1+g\right)^2\right]i/\left(1+i\right)^4$ |

A játék várható értékének kiszámításához ezen szorzatok összegzése egyszerűbbé válik, ha felbontjuk a zárójeleket, és a kapott tagokat az $1+g$ hatványai alapján rendezzük át. Így például minden tag, amely tartalmazza az $(1+g)^n$ kifejezést, kiemelve belőlük a $\frac{Di(1+g)^n}{(1+i)^{n+2}}$ kifejezést kapjuk a

$$\frac{Di\left(1+g\right)^n}{\left(1+i\right)^{n+2}}\left[1+\frac{1}{1+i}+\frac{1}{\left(1+i\right)^2}+\dots\right] \tag{9}$$

szorzatot, ahol a zárójelben lévő kifejezés egy mértani sor. A mértani sor kvóciense $\left|\frac{1}{1+i}\right|< 1$, amiből következik, hogy az összeg konvergens, melynek értéke:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+i}\right)^k=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^k}{1-\frac{1}{1+i}}\right]=\frac{1}{\frac{i}{1+i}}=\frac{1+i}{i}.$$

A (8)–s egyenletbe helyettesítve a mértani sor összegét, adódik:

$$\frac{Di\left(1+g\right)^n}{\left(1+i\right)^{n+2}}\cdot\frac{1+i}{i}=\frac{D\left(1+g\right)^n}{\left(1+i\right)^{n+1}}.$$

Tehát a várható értékben az összes $(1+g)^n$–t tartalmazó tag összege $\frac{D(1+g)^n}{(1+i)^{n+1}}$, aminek következtében Pál matematikai várakozását

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{D\left(1+g\right)^k}{\left(1+i\right)^{k+1}} \tag{10}$$

mértani sor adja. Ez a sor aritmetikailag egyenértékű egy diszkontált osztalékfizetési sorozattal, amely $D$ dollárral kezdődően, folyamatosan növekszik egy konstans$g$ rátával, és diszkontálódik $i$ kamatlábon. A pénzügyi értékpapírok értékének kontextusában az $i$ paraméter egy összetett kamatlábat (vagy effektív kamatlábat) képvisel, ami egyenértékű, az egy múlva visszafizetendő egy dolláros hitel jelenértékével, ami $1/(1+i)$. A vállalat részvényeinek valós értékének megítélésekor $g$ a vállalat növekedési ütemét mutatja, az egy részvényre jutó bevétel összetett növekedése alapján mérve.

## 4.3. Növekvő osztalékfizetés értékelése

Hasonlóan, ahogy az eredeti Szentpétervári játék esetében itt is felmerül a kérdés, hogy mi legyen a játék igazságos ára, vagy vele ekvivalens módon mi legyen a növekvő osztalékfizetés belépési díja. Véges számú osztalékfizetés esetén a (10)–s képletben szereplő összeg első $n$ tagját kell összegezni, ami egy mértani sorozat összege, melynek első tagja $\frac{D}{1+i}$ kvóciense $\frac{1+g}{1+i}$. A mértani sorozat összegképletét alkalmazva az első $n$ tag összege

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{D(1+g)^k}{(1+i)^{k+1}} = \frac{D}{1+i} \cdot \frac{1-(1+g)^n/(1+i)^n}{1-(1+g)/(1+i)} =$$

$$= \frac{D}{1+i} \cdot \frac{1-(1+g)^n/(1+i)^n}{(i-g)/(1+i)} = D \cdot \frac{1-(1+g)^n/(1+i)^n}{i-g} \tag{11}$$

feltéve, hogy $g \neq i$ . $g = i$ esetén pedig $nD/(1+i)$. Ha a kifizetések száma végtelen, akkor

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D(1+g)^k}{(1+i)^{k+1}} = \begin{cases} \frac{D}{i-g} & , ha \quad g < i \\ \infty & , ha \quad g \geq i \end{cases} . \tag{12}$$

Így Pál várakozási értéke, ha $g < i$, akkor $\frac{D}{i-g}$, másrészről, ha$g \geq i$, akkor a végtelen sor összeg – az eredeti Szentpétervári problémához hasonlóan – divergens, és egy „ésszerűen gondolkodó” Pál ismét ellenzi a végtelenül nagy belépési díj kifizetését.

Durand [8]–ban kifejti, hogy a (11) és (12) alkalmazhatósága a növekedési részvények értékelésére nem új dolog, és a kapott eredményt összekapcsolja J. B. Williams [12]–ben található eredményével. A [10] cikk hozzáteszi, hogy széles körben elfogadott nézőpont, hogy ahhoz, hogy felbecsüljük Péter részvényének valós értékét, diszkontálni kell az összes jövőbeli osztalékot az örökkévalóságig. Itt egy tisztességes ár Péter részvényére az összes jövőbeni osztalék jelenértéke alapján becsülhető meg. Jelölje $E_n$ Péter részvényre jutó nyereségét (vagyis profitját) az $n$. évben. Továbbá $B_n$ jelölje Péter könyv szerinti értékét vagy nettó eszközértékét, az $n$. évben részvényenként, és $D_n$ a részvényenként fizetett osztalékot ugyanazon évben. A könyv szerinti érték változása évről évre megegyezik a jövedelmek és a kifizetett osztalékok közötti különbséggel, vagyis $\forall n \geq 1$–re

$$B_{n+1} - B_n = E_n - D_n.$$

Péter részvényének valós értékét becsülve Pál általánosan azt feltételezi, hogy az $r = E_n/B_n$ és $p = D_n/E_n$ arányok függetlenek n-től. Ez a feltételezés azt jelenti, hogy $B_{n+1} - B_n$, a könyv szerinti érték változása az $n$. évtől az $n + 1$. évig, $E_n$-nek egy konstans szorosa.

$$B_{n+1} - B_n = E_n - D_n = (1 - p)\, E_n = (1 - p)\, rB_n.$$

Ezért Péter osztalékai, könyv szerinti értéke és nyeresége állandóan növekszik, a $g = (1 - p)\, r$ konstans rátával. Ebben az összefüggésben a (12) egy állandó (örökös) osztalékfizetés sorozatot jelent, kezdve a $D_1 = D$ dollártól, a $g$ konstans rátával növekedve, és az $i$ kamatlábbal diszkontálva. Ha $i > g$, akkor az (12)-es összeg konvergál, a $D_1/\,(i - g) = pE_1/\,(i - g)$-hez, ami a Péter részvényeinek egy részvényre vonatkozó igazságos értékének becslését jelenti. Ha $i \geq g$, akkor a (10) sorozat divergál, és most van egy olyan formája a Szentpétervári paradoxonnak, amelyben a növekvő részvények értékelése vezet egy paradox eredményre.

Durand analógiájának alapja, hogy az $i$ diszkontrátát a pénzérme $i/\,(1 + i)$ valószínűségeként értelmezte. Azonban amíg az eredeti Szentpétervári játékban bármely jövőbeli kifizetést kifizetnek valamennyi valószínűséggel, addig a módosított játékban, amely ekvivalens egy növekedési vállalat által generált osztalékok sorozatával, bármely jövőbeli kifizetést biztosan ki fognak fizetni, ám ezt egy diszkonttényező bevonásával fogják értékelni. Egy részvény értéke csak akkor végtelen, ha az osztalék a diszkontrátával egyenlő vagy annál nagyobb ütemben növekszik, ugyanígy a játék várható nyereménye csak akkor végtelen, ha a nyeremények a hozzájuk tartozó valószínűségek csökkenésének ütemével egyenlő vagy annál nagyobb ütemben növekszenek.

## 4.4. A „hight-tech" részvények összeomlása

A [10] szerint a Szentpétervári paradoxon valamennyire megmagyarázza a „hight-tech" növekedési részvények árában végbemenő korábban nem látott növekedést a 1990-es évek végén. Rendszerint „növekedési részvényként" utalnak azon vállalatok részvényeire, vagy magukra a vállalatokra, amelynek bevételei lényegesen gyorsabban növekednek annál, ami a gazdaságra általánosan jellemző. Az említett időszakban az amerikai Jegybanki rendszer (Federal Reserve System, röviden úgy szoktak rá hivatkozni, hogy Fed) alapkamata közel volt a történelmi mélyponthoz, ez Durand cikkének kontextusában azt jelenti, hogy az $i$ értéke nagyon kicsi volt. Ráadásul a növekedési részvények vásárlói azt feltételezték, hogy $g$, a tipikus „high tech" vállalat növekedési rátája, az örökkévalóságig magas marad. Ennek az eredménye az lett, hogy $i > g$, sőt ennél szélsőségesebb volt, hogy sok „high tech" vállalatnál úgy számoltak, hogy az $i/g \approx 0$. Mivel a jövedelmeket és osztalékokat az örökkévalóságig diszkontálták, a (10)-es érékelő képlet bármiféle felhasználása a technológiai részvények árainak olyan magas becsült értékelésekre jutott, amely a becslőnek éppen tetszett.

A befektetők nem számoltak azzal, hogy azon előfeltételezés, hogy a vállalatok jövőbeli kifizetései egy magas $g$ konstans ütemben hosszú távon folyamatosan növekedhet, téves. Eisdorfer és Giaccotto 2016-os [9]-es cikkében rámutat arra, hogy a történelmi tények és a közgazdasági intuíciók azt sugallják, hogy a nagyon magas növekedési ütem, amely például a „high tech" vállalatokat jellemezi, idővel várhatóan hanyatlani kezd, és a kezdeti magas növekedési ütem le fog lassulni a teljes gazdaság általános növekedési ütemével megegyező szintre . Azaz a rövidtávú növekedési ütem tipikusan sokkal magasabb, mint a várható hosszútávú ütem.

Ha a növekedési ráta az örökkévalóságig magas maradhatna, egy befekető számára várható élettartamán túl az osztalékfizetési ciklusok értéktelenek.

## 4.5. Sztochasztikus osztalék értékelés

A befektetések értékelését a 4.2 és 4.3 szakaszban egy módosított Szentpétervári játékra vezettük vissza, és beláttuk, hogy a Szentpétervári játék alkalmazható olyan cégek értékelésére, amelyek osztalékai örökké egy konstans ütemben növekednek. Ebben az esetben a játékos nyereményét írásonként fix mértékben növeltük, de a fix növekedés osztalékokban gondolkodva nem reális.

Eisdorfer és Giaccotto 2016–os [9]–es cikke alapján megmutatjuk, hogy hogyan modellezhető a befektetés értéke a Szentpétervári játék megfelelő módosításával, hogyha a befektetői környezet (a nyeremény, az osztalék) véletlenszerűen változik. Eisdorfer és Giaccotto az osztalék növekedési ütemét egy átlaghoz visszatérő folyamatként modellezték.

Feltételezték, hogy az osztaléknövekedési ütem egy autoregresszív folyamat.

Legyen $g_t$ (az osztalékok indexének logaritmusa) egy olyan AR(1) folyamat, amely $t = 1, 2, \ldots$-re

$$g_{t+1} = (1 - \phi)\,\bar{g} + \phi g_t + \varepsilon_{t+1}, \tag{13}$$

ahol $\phi \epsilon (0, 1)$ az autoregresszív együttható, $\varepsilon_{t+1}$ egy független normális eloszlású zaj $\sigma_\varepsilon^2$ szórással, azaz $N(0, \sigma_\varepsilon)$. $\bar{g} \epsilon \mathbb{R}$ pedig az áltag növekedési ráta, a mondott feltételek mellett a megegyezik a $\lim_{t=\infty} E\,(g_{t+1})$ várhatóérték határértékkel, a $g_0$ tetszőleges értéke esetén. Azaz a $g_t$ trajektóriája a $\bar{g}$ körül ingadozik.

Legyen tehát az osztalék olyan, hogy $D_{t+1} = \exp\,(g_{t+1}) \cdot D_t$ egy adott $D_1$ mellett. Ahhoz, hogy megkapjuk minden jövőbeli osztalék kockázat igazított jelenértékét a CAPM (Capital Asset pricing Model) modellt használva, a periódusonkénti osztalék $R$ várható érétke:

$$E\,(R) = R_f + \beta\,(E\,(R_m) - R_f)\,,$$

ahol $R_f$ a kockázatmentes alapkamat, $R_m$ a piaci portfólió hozama, $\beta$ pedig a piaci kockázat mértékét mutatja, ami a kockázati prémium szorzója.

Eisdorfer és Giaccotto 2016–os [9]–es cikkében belátja, hogy a sztochasztikus $\{D_t\}_{t=1}^{\infty}$ osztalék sorozattal rendelkező eszköz CAPM szerinti, piaci kockázathoz igazított, alapkamat szerint diszkontált jelenértéke:

$$P=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{E\left(D_t\right)\prod_{j=1}^{t}\left[1-\left(E\left(R_m\right)-R_f\right)z_j\beta_g\right]}{\left(1+R_f\right)^t}, \tag{14}$$

ahol $z_0=0$, $z_j=\phi z_{j-1}+1$, $i=1,2,\ldots$
$\beta_g$ az $\varepsilon_t$ piaci hozam szerinti regressziós együtthatója,

$$E\left(D_t\right)=D\exp\left(A\left(t\right)+B\left(t\right)\bar{g}+C\left(t\right)g_0\right), \tag{15}$$

ahol

$$A\left(t\right)=\left(\sigma_\varepsilon^2/2\right)\textstyle\sum_{j=1}^{t}z_j^2,\quad B\left(t\right)=\left(1-\phi\right)\sum_{j=1}^{t}z_j,\quad C\left(t\right)=\phi z_t.$$

A (14)-as képlet bizonyítása megtalálható Eisdorfer és Giaccotto [9]-es cikkében, de ennek bizonyítását itt nem részletezem.

A (15) egyenlet azt mutatja, hogy a $P$ pillanatnyi ár függ a pillanatnyi növekedéstől, $g_0$-tól és a hosszútávú növekedési ütemtől $\bar{g}$-tól, azonban az utóbbi hatása sokkal erősebb a $z_j$ összeg miatt. Így egy pillanatnyilag magas növekedési ütem csak átmeneti hatást gyakorol az egyensúlyi árfolyamra.

$P$ értéke a megfelelő kockázat igazításon is múlik, és mivel $z_j$ egy konstans $1/\left(1-\phi\right)$ értékhez konvergál, így a $z_j\beta_g$ által reprezentált piaci kockázat $j$–vel együtt nő egészen $\beta_g/\left(1-\phi\right)$-ig, így a kockázathoz való igazítás nagyon nagyra nő a távoli jövőben várt osztalékok esetében, ami a következőképpen közelíthető:

$$\left[\frac{1-\left(E\left(R_m\right)-R_f\right)\beta_g/\left(1-\phi\right)}{\left(1+R_f\right)}\right]^t,$$

és a várt jövőbeli osztalékok egy

$$A_t=\exp\left[\left(\bar{g}+\frac{1}{2}\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\left(1-\phi\right)^2}\right)t\right]$$

ösvény mentén fognak fejlődni. Ennél fogva egyetlen $D_t$ osztalék jelenértéke nagy $t$ esetén a következőképpen közelíthető:

$$D_0e^{\left[\bar{g}+\frac{1}{2}\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\left(1-\phi\right)^2}-\left(E\left(R_m\right)-R_f\right)\beta_g/\left(1-\phi\right)\right]t}.$$

Ez nullához konvergál, ha a szögletes zárójelben lévő kifejezés negatív, és abban az esetben az összes jövőbeli osztalék jelenértékének összege véges lesz. Így adódik a következő feltétel:

$$\bar{g} \leq R_f + (E(R_m) - R_f)\frac{\beta_g}{(1-\phi)} - \frac{1}{2}\frac{\sigma_\varepsilon^2}{(1-\phi)^2} \tag{16}$$

## Kapcsolat a Szentpétervári játékkal

Tekintsünk egy olyan Szentpétervári játékot, ahol a fej dobásának valószínűsége $R_f/(1+R_f)$, ekkor az írás valószínűsége $1/(1+R_f)$, ahol $R_f$ a korábbiaknak megfelelően a kockázatmenetes kamat mértéke.
Péter és Pál pedig a következő játékot játssza: Péter egy szabálytalan érmét dobál, ahol az írás valószínűsége $1/(1+R_f)$:
1) Péter $(D_1 a_1)/R_f$ dollárt fizet Pálnak, és az érmét feldobja.
 Fej esetén a játék véget ér.
 Írás esetén az érmét újra dobja.
2) Péter $(D_2 a_1 a_2)/R_f$ dollárt fizet Pálnak, és az érmét feldobja.
 Fej esetén a játék véget ér.
 Írás esetén az érmét újra dobja.
...
n) Péter $\left(D_n \prod_j^n a_j\right)/R_f$ dollárt fizet Pálnak, és az érmét feldobja.
 Fej esetén a játék véget ér.
 Írás esetén az érmét újra dobja.
...
Ha a játék az $n$. dobás után ér véget, akkor Pál össznyereménye

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{D_j \prod_{i=1}^{j} a_i}{R_f}$$

dollár, ahol $D_n$ az ebben a szakaszban definiált osztalék folyamattal azonos, és $a_j = 1 - (E(R_m) - R_f) z_j \beta_g$.

Pál várható kifizetése a játék során:

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_f}{(1+R_f)^n} \frac{D_n \prod_{j=1}^{n} a_j}{R_f} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(D) \prod_{j=1}^{n} [1 - (E(R_m) - R_f) z_j \beta_g]}{(1+R_f)^n},$$

ami pontosan megegyezik a (14) egyenlet szerinti részvényárfolyammal.

Tehát az így definiált Szentpétervári játék nyilvánvalóan azonos várhatóértékű ajánlat az előzőekben leírt piaci értékelésű osztalékos eszközzel.

Következésképpen azon feltétel, amely mellett a játék értéke véges, megegyezik azzal a feltétellel, amely mellett a részvény árfolyam véges, amit (16) képletben már megadtunk, így közvetett megoldást kaptunk a paradoxonra is.

## 4.6. További vizsgálódás

A szakdolgozat fő vonulata egy végtelen várható értékű játék igazságos árának meghatározása, egy olyan áré, amely nem okoz tőkeemelést. Éles ellentétben ezzel Kelly [15] és Tijms [16] a tőkeemelés maximalizálására törekedett, az olyan tisztességtelen fogadások kihasználásával, amelyek kedveznek a szerencsejátékosoknak. Ilyen előny nélkül, azaz tisztességes, vagy annál magasabb ár esetén Kelly azt javasolja, hogy ne vegyünk részt a játékban kerülve a kockázatot. További érdekes vizsgálódás lehet a profitmaximalizálás, a Kelly formula segítségével, és ezen formula általánosításaival, ami a játékos vagyonának egy képlettel meghatározott arányú kockáztatását írja elő. Hasonló elv, de más motiváció vezette Whitworth-ot, aki az igazságos játék árát nem egy konkrét értékben, hanem a játékos vagyonának arányában határozta meg [11] könyvében.

Illetve egy közgazdasági megközelítésű dolgozat témája lehet még a fent vázolt 2000-es tőzsdei összeomlás egyéb gazdasági okainak feltárása, melynek egyik kiinduló pontja [13]–as cikk lehetne.

# 5. Szentpétervári játék a középiskolai oktatásban

## 5.1. Tervezet, oktatási célok

A bemutatott tervet középiskolai osztály 12. vagy 11. évfolyamára szánom. Célom, hogy felkeltsem a diákok érdeklődését, a matematikai gondolkodás szélesebb körben való alkalmazhatóságára, illetve arra, hogy az alkalmazás körültekintést igényel. Ez együtt jár az alapos vizsgálattal és a kritikai gondolkodásmóddal.

A diákok internetezés közben könnyen találkozhatnak online szerencsejátékokat hirdető reklámokkal, internetes oldalakkal, amelyek könnyű és gyors pénzszerzési lehetőséget kínálnak. Némely honlapon ajánlanak nyerő stratégiákat is különböző játékokhoz, és ezeket a stratégiákat matematikai érvekkel látszólag alá is támasztják.

Tekintsünk egy játékot, amelyet a bank ellen játszunk, legyen ebben a játékban $50-50\%$, vagy e körüli érték annak az esélye, hogy nyerünk vagy veszítünk. A nyereményünk pedig győztes játék esetén a tétünk kétszerese. Egy ilyen játék esetén látszólagosan jól alátámasztható matematikai érvekkel az úgynevezett martingál (halmozási) stratégia alkalmazása, amely biztos nyereménnyel kecsegtet. A stratégia szerint, ha az első játszmában veszítünk, akkor a második játszmában megkétszerezett téttel játszunk, ha a második játszmát is elveszítjük, akkor a következő játékban ismét megkétszerezzük az előző tétünket, és így tovább, amíg ki nem jön a tippünk és nyerünk. Győztes játék után a következő tétünk egyezzen meg az első játék során kockáztatott tétünkkel, és ismét addig kétszerezzük a tétünket, amíg nem nyerünk. A következő tétünk pedig ismét egyezzen meg az első játék során kockáztatott tétünkkel. Az össznyereményünk ezt a stratégiát alkalmazva meg fog egyezni a nyert játékok számának és az első játék során kockáztatott tétünknek a szorzatával.

Az alábbi táblázat egy konkrét játéksorozaton keresztül mutatja be, a martingál stratégiát, ahol a kezdeti tétünk 1. A táblázat második sorában az egyes játékok kimenetelei szerepelnek. $V$ jelentése, hogy a játékos veszített, azaz a bank nyert, és a játékos elveszítette a játékra feltett összeget. $Gy$ jelentése pedig, hogy a játékos győzött, a bank pedig veszített, és a játékos a feltett té-

tének kétszeresét kapja, azaz a tétjével megegyező összeget nyeri. A táblázat 3. sora az egyes játékok esetén befektetett összeget, azaz a tétet tartalmazza. A 4. sor a játék fordulói során bekövetkező pénzmozgást mutatja a szerencsejátékos szemszögéből. Az 5. sor pedig a játékos kezdeti vagyonában bekövetkezett változást mutatja, amely minden győzelem esetén 1–el növekszik.

| játékok száma | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| kimenetel | $V$ | $V$ | $Gy$ | $V$ | $Gy$ | $V$ | $V$ | $Gy$ | $Gy$ | |
| tétek | 1 | 2 | 4 | 1 | 2 | 1 | 2 | 4 | 1 | |
| nyermény | $-1$ | $-2$ | $+4$ | $-1$ | $+2$ | $-1$ | $-2$ | $+4$ | $+1$ | |
| össznyeremény | $-1$ | $-3$ | $+1$ | 0 | $+2$ | $+1$ | $-1$ | $+3$ | $+4$ | |

A látszólag nyerőnek tűnő martingál stratégiának szeretném a hátrányait csoportmunkában középiskolás diákok elé tárni, rávezető feladatokkal olyan módon, hogy a következtetések levonása után saját maguk is meg tudják válaszolni azt a kérdést, hogy a martingál stratégia nyerő stratégia-e a rulettben, vagy a rulethez hasonló játékokban.

Továbbá a tanulóknak szeretném bemutatni a szakdolgozatom problémafelvetésének alapvető játékát, a Szentpétervári játékot, amely véletlen sorozatok viselkedését mutatja be érdekes módon. Az, hogy egy ilyen játékban részt vegyünk-e, és ha igen, akkor mennyit kockáztatva, függ attól, hogy a hasznosságot hogyan értelmezzük. A probléma oktatása bemutathat olyan szempontokat, amelyek véletlen környezetben való döntés esetén iránymutatóak lehetnek.

## 5.2. Előzmények (2012-es kerettanterv alapján)

A szükséges előismeretek az aktuális kerettanterv alapján a következők:

**9. osztály:** Hatványozás.

**10. osztály:** Kombinatorika és valószínűségszámítás.

**11. osztály:** Valószínűségszámítás.

**12. osztály:** Számtani és mértani sorozatok.

## 5.3. Alkalmazott munkaformák

**Egyéni munka:** A lent vázolt órák során az egyéni munkának az egyedül végzett munka változata került elő elsősorban az első órán és a házi feladatok megoldása során.

*Előnyei:* A feladatmegoldásoknál a tanulók a saját munkatempójuk szerint dolgozhatnak. A diákokat az egyéni munka önállóságra neveli. A táblázat egyéni kitöltésével mindenkinek lehetősége van a kapott eredmények összevetésére, ami segíti a megértést.

*Hátrányai*: A tanulók nem mindegyike foglalkozik a feladattal, azáltal, hogy a feladatmegoldás helyett esetleg különböző melléktevékenységeket folytatnak, vagy várják a gyorsabb, jobb képességű tanulók eredményeit.

*Lehetséges veszélyek:* Előfordulhat, hogy az órán nem minden tanuló dolgozik, a diákok könnyebben válhatnak passzívvá. Akik nem készítették el a házi feladatukat, azoknál a diákoknál a tanult anyag elmélyítésének folyamata elmarad, illetve kevésbé tudnak bekapcsolódni az órába is.

**Páros munka:** Páros munkaformát két esetben, az első és második órán alkalmaztam. Az első órán azért, hogy a tanulók maguk is lássák, tapasztalják, hogy hosszabb azonos sorozatok is előfordulnak kockadobásnál, pénzfeldobásnál. A második órán pedig azért, hogy az igazságos játék fogalmát mélyebben megértsék.

*Előnyei:* Az első órái páros munka során más érzés az, ha a tanulók saját maguk dobnak és írnak le egy hosszabb prím−prím−prím−...−prím vagy egy hosszabb nem prím sorozatot. A tanulók saját maguk is megtapasztalhatják azt, hogy hosszabb homogén sorozatok előfordulnak kocka-, pénzdobálásnál, így az új ismeret nem csupán elméleti, hanem gyakorlati is lesz. A második órán pedig a tanulók nem csak passzív szemlélőként látják azt, hogy valaki veszít vagy nyer, hanem a tanulók saját maguk is átérezhetik a nyerés és veszítés lélektani hatásait. Az átélt élmények mélyebb megértést tesznek lehetővé a tanulók számára, és az ezáltal megtanult ismeretek is tartósabban megmaradnak. Ezen felül a diákok tapasztalatot szereznek az együttműködésben, egymás kölcsönös segítésében, ami a szocializáció szempontjából is fontos. A pedagógus pedig új oldalukról ismerheti meg diákjait, a tanulók közös munkája közben.

Kiderül, hogy a tanulók mennyire kommunikatívak, együttműködők és toleránsak egymással. Tehát a páros munka fejleszti a kooperációs és kommunikációs képességeket, az együttműködést és a toleranciát.

*Hátrányai:* A páros munka abban az esetben nem lesz hatékony, ha a pár egyik tagja nem akar dolgozni, vagy ha a párok nem tudnak együtt dolgozni. Nehézséget okozhat továbbá a párok kialakításánál annak elkerülése, hogy egyik pár között se legyen domináns fél, vagy elnyomott tanuló. Az is nehézséget okozhat a második órai páros gyakorlat során, hogy a párok egyik tagja esetlegesen megpróbálhat csalni az egymás elleni játékban, és ezáltal konfliktus alakulhat ki a diákok között.

Az előbb felsorolt esetleges problémák elkerülése végett érdemes a párokat rokonszenvi alapon kialakítani, így az együtt folyó munka nagyobb eséllyel lesz mindkét fél számára építő jellegű.

*Lehetséges veszélyek:* A tanulók között konfliktus alakulhat ki, az órán hangzavar, és a páros feladat nem éri el célját, a szemléltetés helyett csak zűrzavar támad az órán. Esetleges veszély lehet még, hogy a tanulóknak nem a levont következtetések maradnak meg, hanem csak a játék élménye, ezért a páros feladat előtt és után is hangsúlyozni kell a feladat célját.

**Csoportmunka:** Csoportmunkát az utolsó két órára terveztem, azért, hogy minden tanuló kipróbálhassa valamilyen formában a rulettet és megfelelő mennyiségű adat álljon rendelkezésre a Szentpétervári játék átlagos árának meghatározására.

*Előnyei:* A matematika órán kevésbé aktív diákok is könnyebben bekapcsolódhatnak az órába, és a csoportmunka aktivitásra inspirálhatja őket. Mindenki megtalálhatja a helyét és a feladatot, amit el tud végezni. Azok a tanulók is megszólalnak, akik a nagyobb közösség előtt ezt nem tennék, azáltal, hogy bizalom alakul ki a csoport tagjai között. Tehát a csoportmunka is fejleszti a döntéshozatali, kooperációs és kommunikációs képességeket, az együttműködést és toleranciát.

*Hátrányai:* Több időt kell szánni a csoportmunkára, mint a frontális oktatásra, emiatt nehezebb besűríteni egy 45 perces órába. Több előkészületet, tervezést és szervezést igényel, a konkrét esetünkben a játékok beszerzése, táblázatok elkészítése és kinyomtatása, a megfelelő csoportok kialakítása. A csoporton belül, a tagok között kialakulhat feszültség, amit a pedagógusnak fel kell ismerni és kezelni.

*Lehetséges veszélyek:* A csoportból kiválhatnak informális vezetők, akik elnyomhatják a többi csapattagot, ezáltal nem mindenki tud igazán részt venni a munkában.

**Osztálymunka:** Osztálymunkát elsősorban az ismétlésnél, a házi feladatok megbeszélésénél, valamint a páros és csoportmunkák következtetéseinek közös levonásánál terveztem.

*Előnyei:* Nem vesz sok időt igénybe. Fejleszti a koncentrációt és a figyelmet.

*Hátrányai:* Előfordulhat, hogy csak azok a tanulók vesznek részt az osztálymunkában, akik együtt akarnak és tudnak haladni a pedagógussal.

*Lehetséges veszélyek:* Azok a tanulók, akik nem csináltak házi feladatot, vagy nem végezték el rendesen a páros vagy csoportmunkát, azok nem tudnak érdemben részt venni az osztálymunkában.

## 5.4. Óravázlat (Prím, nem prím sorozatok kockadobásnál)

### Ismétlés

Ismételjük át néhány egyszerű feladaton keresztül a valószínűségszámítás alapjait!

1. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy szabályos dobókockával 6-os számot, páros számot, prímszámot dobunk, egymás után 8 prímszámot dobunk?

2. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy szabályos pénzérmével elsőre fejet dobunk, egymás után 6 fejet dobunk?

3. Egyszerre feldobunk hat szabályos dobókockát, amelyek különböző színűek. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok között lesznek azonosak?

A feladatokat önálló munkában oldják meg a diákok, majd a feladatok megoldásait, közösen megbeszéljük. A megbeszélés eredménye pedig felkerül a táblára.

### Páros munka

Az ismétlés után egy páros munka következik, melynek célja az, hogy megmutassa azt, hogy az óra elején kiszámolt 8, illetve 6 hosszúságú azonos minta előfordulásának kicsi az esélye ugyan, de nagy számú játék esetén már nagy valószínűséggel előfordulhat. Vagyis nagyszámú játék esetén hosszabb nyerő vagy vesztes szériák nagyobb valószínűséggel bekövetkeznek. Az itt megemlített elv a 3. órára mutat előre, és a martingál stratégia egyik kockázatára hívja fel a figyelmet.

*A páros feladat a következő:*

Minden pár kap három sorszámozott táblázatot, amelybe a játék eredményeit kell vezetniük. A táblázat az alábbiak szerint néz ki:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. |
| | | | | | | | | | |
| 11. | 12. | 13. | 14. | 15. | 16. | 17. | 18. | 19. | 20. |
| | | | | | | | | | |
| 21. | 22. | 23. | 24. | 25. | 26. | 27. | 28. | 29. | 30. |
| | | | | | | | | | |
| 31. | 32. | 33. | 34. | 35. | 36. | 37. | 38. | 39. | 40. |
| | | | | | | | | | |
| 41. | 42. | 43. | 44. | 45. | 46. | 47. | 48. | 49. | 50. |
| | | | | | | | | | |
| 51. | 52. | 53. | 54. | 55. | 56. | 57. | 58. | 59. | 60. |
| | | | | | | | | | |
| 61 | 62. | 63. | 64. | 65. | 66. | 67. | 68. | 69. | 70. |
| | | | | | | | | | |
| 71. | 72. | 73. | 74. | 75. | 76. | 77. | 78. | 79. | 80. |
| | | | | | | | | | |
| 81. | 82. | 83. | 84. | 85. | 86. | 87. | 88. | 89. | 90. |
| | | | | | | | | | |
| 91. | 92. | 93. | 94. | 95. | 96. | 97. | 98. | 99. | 100. |
| | | | | | | | | | |

Első lépésben minden tanulónak ki kell töltenie egy ilyen táblázatot $I$ és $N$ betűkkel – ahol $I$ jelöli a prímet, $N$ a nem prímet –, annak alapján, amit egy várható kockadobás-sorozatról gondolnak. Egy kockán három prímszám van (2, 3, 5) és három nem prím (1, 4, 6), ezért 50% annak az esély, hogy egy szabályos dobókockával prímszámot dobunk, vagy sem. Az óra eleji feladat miatt a diákoknak amúgy sem idegen, hogy nem páros-páratlan, hanem prím-nem prím alapján kell kitölteni a táblázatot, melynek célja, hogy a tanulók elmélyítsék, hogy az 1-es szám nem prím. A megmaradt lapra pedig fel kell vezetniük egy valós kockadobás-sorozat eredményeit. Miután minden pár kapott kockát/kockákat, akkor a párok egyik fele dob, a másik tanuló pedig lejegyzeteli a dobás eredményeit sorban a lapra. Több különböző színű kockával lehet gyorsítani a sor kitöltését, ahol a szín a dobás sorrendiségét jelöli. Több kocka esetén a párok cserélhetnek, és fordítva is lejátszhatják a játékot, ebben az esetben az elején eggyel több táblázatot kell osztani a pároknak. A kísérlet végrehajtása után minden lap hátuljára kerüljön rá, hogy valós játékból származnak az eredmények, vagy sem.

*A játék egy lehetséges változata*

A játék elvégezhető pénzérmével is. A játék gyorsítása érdekében különböző címletű érméket használhatunk, ahol a különböző címletek a dobások sorrendiséget hivatottak eldönteni. A játék ezen változatában a prímszám megállapításának plusz élménye elmarad.

**Következtetések levonása**

A párok kapnak pár percet, hogy a kitöltött listákat összehasonlítsák, és megbeszéljék észrevételeiket, látnak-e valami érdekeset az egyes adatsorokban. Látnak-e különbséget a valós játék eredményei és az általuk írt között, ha igen, akkor mit? Ha senki se jön rá arra, hogy a lejátszott játékból származó eredményekben hosszabb igen-nem sorozatok is előfordulnak, akkor el lehet játszani a diákokkal, hogy nagy valószínűséggel ki lehet találni, hogy melyik lapot írták maguktól, és melyik volt valóban lejátszva.

A tanulók ezután karikázzák be a lapjaikon a leghosszabb igen és nem sorozatokat. Minden egyes csoport eredményei kerüljenek fel a táblára, külön oszlopba a találomra kitöltött, külön oszlopba a lejátszott játék leghosszabb igen és nem sorozatainak hossza. Az eredményeket meg lehet jelölni, hogy melyik az $I$ és melyik az $N$. Majd közösen számoljuk ki az eredmények átlagait.

### Házi feladat

Minden tanuló töltse ki az alábbi táblázatokat otthon. A második gyak. nevezetű oszlopba a dobás sorozat gyakorisága kerüljön, a harmadik d. sz. nevezetű oszlapba pedig az ehhez szükséges dobások száma (Például: ha az $III$ sorozat ötször fordult elő, akkor d.sz oszlopba $3 \cdot 5 = 15$ kerüljön). A párok egyik tagja a ténylegesen lejátszott sorozat alapján töltse ki a táblázatot, a másik tagja pedig az általa írt „nem valós” sorozat alapján. A helyesen kitöltött táblázatra jó ellenőrzést adhat, hogy a dobások számának összesen 100-nak kell lennie.

| dobás | gyak. | d. sz. |
|---|---|---|
| $I$ | | |
| $II$ | | |
| $III$ | | |
| $IIII$ | | |
| $IIIII$ | | |
| $IIIIII$ | | |
| | | |
| | | |

| dobás | gyak. | d. sz. |
|---|---|---|
| $N$ | | |
| $NN$ | | |
| $NNN$ | | |
| $NNNN$ | | |
| $NNNNN$ | | |
| $NNNNNN$ | | |
| | | |
| | | |

Számítsd ki külön az $I$ és az $N$ homogén sorozatok hosszainak átlagát?

## 5.5. Óravázlat (Igazságos játék)

### Ismétlés

Közösen ismételjük át az előző órán tanultakat a kockadobás során előforduló leghosszabb azonos sorozatokról! A házi feladatok összesített adatai kerüljenek fel az óra elején a táblára, majd bizonyítás nélkül felírható, hogy a leghosszabb homogén sorozat hosszának várható értéke $\log_2 n - 1$, ahol $n$ a dobások száma. A táblára felkerült összesített eredményekből és a $\log_2 n - 1$ képletből számolt értékeket összevethetjük.

### Az igazságos játék

Az új fogalmat közösen a diákok meglévő ismereteire alapozva, irányított kérdésekkel alakítjuk ki. Például: Mitől lesz egy játék igazságos? Mit jelent az esély fogalma? Igazságos játék az, ha mindkét félnek ugyanakkora esélye van, igaz-e ez az állítás?

A következtetések levonása után kialakítjuk az igazságos játék fogalmát. Melyet egy példával elmélyítünk. Az igazságos játék fogalma és a példa a táblára is felkerülnek.

**Definíció:** Egy játék igazságos, ha a két játékos fél számára a várható vagyonváltozás nulla, feltéve, hogy a várható nyeremények korlátosak és a tétek csak végesek lehetnek.

**Példa:** Fej vagy írás játékot szabályos érmével játszva mi az igazságos ára a játéknak?

### Páros munka

Az óra hátralévő részében egy páros munka következik, melynek célja az, hogy rámutasson arra, hogy az előbbi fogalom akkor igaz, ha a két játékos egyaránt mentes a korlátozásoktól. Ha bármilyen feltétel bevezetésre kerül, hogy a játéknak egy bizonyos pozíció elérésekor le kell állnia, és ez a helyzet egyik játékos számára kedvezőbb, akkor a másik játékos hátrányos helyzetbe kerül.

*A páros feladat a következő:*

Minden pár kap egy megkevert pakli francia kártyát, és a párok egyik tagja 2 zsetont, a másik tagja 8 zsetont. A párok játék előtt megállapodnak egymás között, hogy kié a fekete és kié a piros szín – ha nem megy a megállapodás, akkor a kevesebb zsetonnal rendelkező játékos választ –, ezen a játék során már nem szabad változtatni. A pakliból felváltva húznak visszatevéssel, minden visszatevés után a paklit megkeverik. Egy adott körben amelyik játékos színét kihúzzák, az nyer, a másik játékos veszít, és a vesztes játékos ad egy zsetont a győztes játékosnak. Abban az esetben, ha az egyik félnek elfogynak a zsetonjai, a játék véget ér. Amennyiben egy játék hamar véget ér, akkor a párok szerepcserével megismételhetik a játékot. A páros munkára előre meghatározott idő áll rendelkezésre, hogy a következtetések az óra hátralévő részében

még levonhatóak legyenek, tehát az idő lejárta esetén a játék automatikusan véget ér.
*A játék változatai:*

Ezt a páros feladatot megfelelő számú francia pakli hiányában a közismert kő-papir-olló nevű játékkal is helyettesíthetjük. Mivel a kő-papir-olló játékban három különböző kimenetel van, ezért döntetlen esemény is előfordulhat. Ez nem okoz problémát, ha a döntetlen esemény esetén a zsetonok száma nem változik egyik játékosnál sem.

Egy harmadik alternatív változata lehet a játéknak, ha kockadobással játszák le a diákok a játékot. Ebben a változatban az is izgalmas lehet, hogy a pároknak meg kell állapodnia egy igazságos kockadobásos játékban, például páros-páratlan, prím-nem prím, háromnál nem nagyobb-háromnál nagyobb szám dobása esetén az egyik vagy másik játékos nyer.

**Következtetések levonása**

A játék következtetéseit közösen vonjuk le.

Mi volt a korlátozó tényező a vesztes játékos számára, ha véget ért a játék?

A vesztes játékosnak nem volt több anyagi forrása, amit kockáztathatott volna, azaz elfogytak a zsetonjai, így egy újabb vesztes kör után már nem tudta volna kifizetni a győztes fél nyereményét. A valós életben ez a korlátozó tényező a pénz, vagy vagyon.

Előfordulhat, hogy az előre megbeszélt időre nem ér véget a játék, azaz egyik fél sem veszti el a rendelkezésre álló zsetonjait. Ebben az esetben mi korlátozta az egyes játékosokat, hogy nagyobb nyereményre tegyenek szert?

A másik korlátozó tényező az idő. Az órán maximálisan csak a megadott ideig játszhattunk. A kaszinók 0-24-ig nyitva tartanak, és az online kaszinók esetében is bármikor játszhat az ember, de ebben az esetben is korlátozza őt az idő. Alvás nélkül nem bírja sokáig a szervezet, és ha bírná is, 120 év múlva már minden bizonnyal nem fog élni, így játszani sem tudna.

Melyik játékosnak volt nagyobb esélye arra, hogy elnyerje a másik fél zsetonjait?

A játékkezdet előtt több zsetonnal, azaz nagyobb vagyonnal rendelkező játékosnak volt nagyobb esélye arra, hogy megszerezze ellenfelének zsetonjait, amit úgy is meg lehet fogalmazni, hogy nagyobb valószínűséggel a kevesebb zsetonnal rendelkező játékos fog tönkremenni.

A tönkremenés valószínűségeket, azaz, hogy egy adott tőkével rendelkező játékosnak mennyi valószínűséggel fogy el a vagyona, idő hiányában a következő órán kerül megbeszélésre. Szorgalmi feladatként plusz pontért feladatható az órán eljátszott konkrét esetben a tönkremenési valószínűségek kiszámítása.

**Házi feladat**

1. Mennyi legyen annak az igazságos játéknak a nyereménye, amelyet szabályos dobókockával játszanak, és csak a hatos szám dobása esetén fizet?

2. Mértani sorozatról tanultak átismétlése.

3. Mennyi a kettő első hat, első tíz, valamint első húsz nem negatív hatványának összege?

4. **Szorgalmi:** Mennyi a valószínűsége, hogy a két tallérral rendelkező játékos zsetonjai fogynak el hamarabb? Mennyi a valószínűsége, hogy a nyolc tallérral rendelkező játékos zsetonjai fogynak el hamarabb?

## 5.6. Óravázlat (Van nyerő stratégia a rulettben?)

**Ismétlés**

Ellenőrizzük le az előző órai házi feladatokat – a szorgalmi megbeszélésére szánjunk több időt –, majd közösen ismételjük át, hogy mit tudtunk meg az igazságos játékról. A mértani sorozat összegképlete kerüljön fel a táblára, a házi feladat eredményeivel együtt.

A szorgalmi feladat megoldása: A játék véget ér, ha a játékosnak 0 vagy 10 tallérja lesz. Jelölje $p_k$ annak esélyét, hogy végül a kezdetben több zsetonnal rendelkező játékos nyer (a kevesebb zsetonnal rendelkező játékos megy tönkre), ha éppen most $k$ zsetonja van. Nyilvánvaló, hogy $p_0 = 0$ és $p_{10} = 1$. $p_k$-t a következő forduló eredménye szerint szétbontva:

$$p_k = 0,5 \cdot p_{k-1} + 0,5 \cdot p_{k+1}, \quad ha \quad 1 \leq k \leq 9$$

A $p_k$ értékek a két szomszédos tag átlagával egyenlők, azaz egy egyenesen helyezkednek el, $p_1 = p$, $p_2 = 2p$, $p_3 = 3p$, ... , $p_{10} = 10p$, és $p_{10} = 1$, így $p = \frac{1}{10}$.

Annak az esélye, hogy a két tallérral rendelkező játékos zsetonja fogy el hamarabb, $1 - p_2 = 1 - \frac{2}{10} = \frac{8}{10} = p_8$.

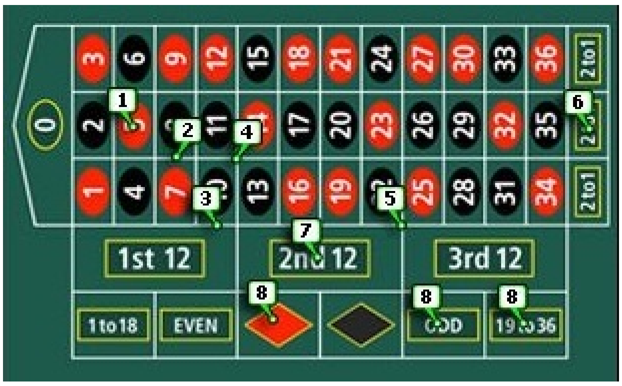
Fel lehet tenni a kérdést az osztálynak, hogy általános esetben, ha egyik játékos vagyona $n$, a másiké $m$, akkor mennyi az $m$ zsetonnal rendelkező játékos tönkremenésének valószínűsége? A bizonyítás könnyen általánosítható: $p_0 = 0$ és $p_{n+m} = 1$ , valamint $p = \frac{1}{n+m}$, így $1 - p_m = p_n = \frac{n}{n+m}$.

### Martingál (halmozási) stratégia

Az órára bevitt mini rulett asztallal/asztalokkal és hozzá tartozó zseton készlettel/készletekkel a „nyerő” martingál stratégia bemutatása.

Először is a diákok megismerkednek a rulett asztallal, a rakható tétekkel és a rulett típusaival. A rulett kerekek alapján megkülönböztetünk európai, francia és amerikai rulettet. Az órán az európai rulettel foglalkozunk, melynek kerekén 37 szám található. A mezők egyforma méretűek, a nulla zöld színű, a maradék 36 mező fele piros, fele fekete. Ha kivesszük a nullát, akkor a számok többféle módon is egyenlő nagyságú csoportokra oszthatóak.

Az alábbi rulett asztalt ábrázoló kép a különböző valószínűségű téteket ábrázolja. Tehetünk:




1. *Egy szám*ra, ez esetben a zsetont közvetlenül a kiválasztott számra kell helyezni, amely lehet bármelyik szám, a nulla is.
2. *Megosztva*, ez esetben bármelyik két szomszédos számra tippelhetünk, és a zsetont a két számot elválasztó vonalra kell tenni.

3. *Sor*ra, ebben az esetben három egymás melletti számra tippelhetünk, a zsetont a rulett asztal alsó határvonalára kell helyeznünk.
4. *Sarok*ra, így négy számra is tippelhetünk, ekkor a zsetont a négy számot összekötő vonalak metszéspontjára kell helyeznünk.
5. *Két sor*ra, ekkor a zsetont a rulett asztal alsó határvonalán a két oszlopot elválasztó vonalra kell helyezni.
6. *Oszlop*ra, ekkor a zsetont a rulett asztal rövidebb szélén található három db „2 to 1" feliratú négyzet valamelyikébe kell helyeznünk, így a mellette lévő 12 számra tippelünk (a nullát kivéve).
7. *Tucat*ra, az „1st 12", „2nd 12", vagy „3rd 12" mezőkre téve, a felette levő 12 számra tippelünk.
8. *Pirosra*/*Feketé*re, *Páros*ra/*Páratlan*ra és *Alacsony*ra/*Magas*ra, ekkor a rulett asztal hosszabbik oldalán a legalsó sorban található téglalapok egyikére kell helyeznünk a zsetont, így a (nullát leszámítva) rulett asztal számainak a felére tippelünk.

A téteket 1–5–ig belső, 6–8–ig külső téteknek nevezik.

| sorszám | lefedettség | esély | kifizetés |
|---|---|---|---|
| 1. | 1 | 2,7% | 35 az 1-hez |
| 2. | 2 | 5,4% | 17 az 1-hez |
| 3. | 3 | 8,1% | 11 az 1-hez |
| 4. | 4 | 10,8% | 8 az 1-hez |
| 5. | 6 | 16,2% | 5 az 1-hez |
| 6. | 12 | 32,4% | 2 az 1-hez |
| 7. | 12 | 32,4% | 2 az 1-hez |
| 8. | 18 | 48,6% | 1 az 1-hez |

Az egyszerűség kedvéért a martingál stratégia bemutatásakor csak színre fogok tenni, ami a feltett pénz kétszeresét fizeti, 0 esetén a pénzemet elveszítem. A stratégia az, hogy a játék során mindig ugyanazon színre teszek, az első játszmában egyet. Amennyiben veszítek, akkor a második játszmában megkétszerezett téttel játszok, ha a második játszmát is elveszítem, akkor a következő játékban ismét megkétszerezem az előző tétem, és így tovább, amíg ki nem jön a választott szín és nyerek. Nyerés után újra a minimum téttel kezdek, azaz 1–el, és az előzőeknek megfelelően járok el.

Az osztály létszámától, valamint a rulett asztalok számától és a játékpénz mennyiségétől függően lehet csoportmunkában is csinálni a játékot. Minden csoport kap egy rulett asztalt, egy tanuló játszik, azaz a téteket teszi (ő kapjon 1100 értékű zsetont), egy másik a rulett asztalt pörgeti, a harmadik a bank szerepét játszva kifizeti a nyereményeket, vagy elveszi az elvesztett összeget (ő kapjon 5000 értékű zsetont), a negyedik tanuló pedig figyeli, hogy minden rendben zajlik-e, és az egyes körökben lévő pénzmozgást jegyzeteli előjelesen (például ha a tét kettő és a játékos nyer, akkor +2 kerüljön a négyzetbe, ha veszít, akkor −2).

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. |
| | | | | | | | | | |
| 11. | 12. | 13. | 14. | 15. | 16. | 17. | 18. | 19. | 20. |
| | | | | | | | | | |
| 21. | 22. | 23. | 24. | 25. | 26. | 27. | 28. | 29. | 30. |
| | | | | | | | | | |
| 31. | 32. | 33. | 34. | 35. | 36. | 37. | 38. | 39. | sum |
| | | | | | | | | | |

A szemléltetés a 15. győzelem megszerzésével érjen véget, függetlenül attól, hogy ehhez hány játék szükséges. A „sum" jelzésű mezőbe kerüljön a pénzmozgások összege. Ez 15 kell, hogy legyen a 15 győzelem miatt, kivéve abban az esetben, ha 12 nem nyerő azonos szín jön egymás után, mert akkor a játékos zsetonjai fognak elfogyni.

**Következtetések levonása**

Közösen megbeszéljük, hogy mindenkinek 15–el nőtt–e a vagyona, és ha igen, akkor miért?

A táblára már felkerült az óra elején a mértani sorozat összegképlete. A növekvő tét egy mértani sorozatot képez, ahol $q = 2$, és $a_1 = 1$, az első $n$ tagjának összege

$$S_n = 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1.$$

Tehát ha egymás után $n-1$-szer nem nyertünk, akkor a következő tétünk $2^{n-1}$ lesz. Győzelem esetén a kétszeresét kapjuk, ami $2^n$, ez pont egyel több az $S_n$-nél, ami az előző nyerés óta elveszített tétek összege.

Ez azt jelenti, hogy megvan a nyerő stratégia, és aki már betöltötte a 18. életévét, az este menjen a kaszinóba, vagy regisztráljon valamelyik online kaszinó honlapján egy kis plusz zsebpénzért? Nyilván nem, de miért nem?

Itt érdemes feleleveníteni az előző órákon tanultakat:

- A játék nem igazságos, a ruletten található 0 miatt, hisz annak a színe zöld, így a fekete, fehér szín eltalálásának esélye 50% helyett csak $\approx 48,65\%$.
- A banknak sokkal több pénze van, mint nekem, azaz a banknak sokkal nagyobb esélye van elnyerni az én pénzemet, mint fordítva. Óra elején szó volt a tönkremenési valószínűségekről igazságos játék esetén. Már igazságos játék esetén is, mivel a játékos vagyona általában a bank vagyonának töredéke, nagy lenne a játékos tönkremenésének valószínűsége, de ez a valószínűség a játék igazságtalan volta miatt még nagyobb.
- Az előző órán láttuk, hogy egész hosszú azonos kimenetelű sorozatok is előfordulhatnak már 100 játék esetén is ( ami csupán 50 várható vagyonnövekedést eredményez a martingál stratégiával ), egy 10 hosszú „pech” széria miatt az összes pénzünk elveszíthetjük, viszont egy 10 hosszú „szerencse” szériával is csak 10-et nyerhetünk

Továbbá:

- A rulettben az egy körben feltehető tét maximalizálva van, tehát 500-nál akkor sem tehetünk többet, ha anyagilag megengedhetnénk magunknak.

A kaszinók azért imádják a tétduplázós játékosokat, mert hosszú távon ezek a játékosok mindig veszítenek. A 0 és a tétmaximumok miatt.

### Házi feladat

1. A rulettben egymás utáni 8 pörgetés során mindig piros színt kaptunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a 9. pörgetés is piros lesz?
2. A rulettben egymást követő 10 pörgetés eredménye fekete. Hogyan állnánk a 10. pörgetés után, ha a martingál stratégiát követjük és mindig a pirosra teszünk? Mindig a feketére teszünk?

## 5.7. Óravázlat (A Szentpétervári játék)

### Ismétlés

Ellenőrizzük le az előző órai házi feladatot.

### A Szentpétervári játék

Péter és Pál a következő játékot játssza: Péter egy szabályos érmét dobál.

1) Fej esetén Péter 1–t fizet Pálnak, és a játék véget ér.
   Írás esetén az érmét újra dobja.
2) Fej esetén Péter 2–t fizet Pálnak, és a játék véget ér.
   Írás esetén az érmét újra dobja.

...

n) Fej esetén Péter $2^{n-1}$–t fizet Pálnak, és a játék véget ér.
   Írás esetén az érmét újra dobja.

...

Azaz, ha az első fej az $n$–dik dobás során jelenik meg, akkor Péter $2^{n-1}$–t fizet Pálnak. A kérdés pedig az, hogy mennyit kell Pálnak a játék jogáért fizetni, hogy a játék igazságos legyen?

Annak érdekében, hogy a tanulók jobban megértsék az egyes dobássorozatokhoz tartozó nyereményeket, az alábbi táblázat kerüljön fel a táblára, melyet a tanulók töltsenek ki.

| dobás sorozat | dobás szám | nyeremény |
|---|---|---|
| $F$ | 1 | $2^0 = 1$ |
| $IF$ | 2 | $2^1 = 2$ |
| $IIF$ | 3 | $2^2 = 4$ |
| $IIIF$ | 4 | $2^3 = 8$ |
| $IIIIF$ | 5 | $2^4 = 16$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $II\dots IF$ | $n$ | $2^{n-1}$ |

A tanulók tippelhetnek arra, hogy szerintük mennyi az igazságos díj a Szentpétervári játék esetén, ha 50 játékot játszunk. A tippek kerüljenek fel a táblára, így a tanulók izgatottabban várhatják a csoportmunka utáni következtetések levonását.

### Csoportmunka

Ezután következik egy csoportmunka, melynek célja a Szentpétervári játék lejátszatása a diákokkal, melyet a tanulók 3 fős csoportokban hajtanak végre. Minden csoport kap egy pénzérmét, és az alábbi táblázatokból egyet-egyet. A csoportmunka az 50. fej dobásával ér véget, ami azt jelenti, hogy minden csoport 50 játékot játszik, hiszen az 1. fej megjelenése zár le egy játékot. A csoporton belül egy ember a pénzérmét dobálja, egy az eredményeket írja, a harmadik időt mér és felügyeli, hogy minden szabályos-e (minden új játék új sorba kerül-e a táblázatban stb.).

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | | | | | | | | |
| 2. | | | | | | | | |
| 3. | | | | | | | | |
| 4. | | | | | | | | |
| 5. | | | | | | | | |
| 6. | | | | | | | | |
| 7. | | | | | | | | |
| 8. | | | | | | | | |
| 9. | | | | | | | | |
| 10. | | | | | | | | |
| 11. | | | | | | | | |
| 12. | | | | | | | | |
| 13. | | | | | | | | |
| 14. | | | | | | | | |
| 15. | | | | | | | | |
| 16. | | | | | | | | |
| 17. | | | | | | | | |
| 18. | | | | | | | | |
| 19. | | | | | | | | |
| 20. | | | | | | | | |
| 21. | | | | | | | | |
| 22. | | | | | | | | |
| 23. | | | | | | | | |
| 24. | | | | | | | | |
| 25. | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 26. | | | | | | | | |
| 27. | | | | | | | | |
| 28. | | | | | | | | |
| 29. | | | | | | | | |
| 30. | | | | | | | | |
| 31. | | | | | | | | |
| 32. | | | | | | | | |
| 33. | | | | | | | | |
| 34. | | | | | | | | |
| 35. | | | | | | | | |
| 36. | | | | | | | | |
| 37. | | | | | | | | |
| 38. | | | | | | | | |
| 39. | | | | | | | | |
| 40. | | | | | | | | |
| 41. | | | | | | | | |
| 42. | | | | | | | | |
| 43. | | | | | | | | |
| 44. | | | | | | | | |
| 45. | | | | | | | | |
| 46. | | | | | | | | |
| 47. | | | | | | | | |
| 48. | | | | | | | | |
| 49. | | | | | | | | |
| 50. | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |

A táblázatban szereplő plusz sorok azoknak a játékoknak vannak fenntartva, amelyek nyolcnál hosszabb dobássorozat után érnek véget, azaz a fej megjelenése több mint hét írás után következik.

Miután a tanulók lejátszották az 50 játékot, az alábbi táblázat kitöltésével összesítik az eredményeket. A harmadik „gyak." jelzésű oszlopba kerülnek az egyes játékok gyakoriságai, azaz, hogy melyik dobássorozat hányszor fordult elő. A negyedik „értéke" nevű oszlopba kerülnek az egyes dobássorozatokhoz tartozó összkifizetések, azaz a második és harmadik oszlop szorzata. Az ötödik oszlop a dobássorozat hossza és a gyakoriságának szorzata. Az utolsó sorba kerülnek az egyes oszlopok összegei, melyből megtudhatjuk, hogy azt, hogy az 50 játék alatt mennyi volt az össsznyeremény, valamint azt is, hogy összesen hány dobás kellett az 50 játékhoz. Az utolsó előtti sorba az esetlegesen előforduló tíz dobásnál hosszabb játék kerül beírásra.

| dobás sorozat | nyeremény | gyak. | értéke | dobás |
|---|---|---|---|---|
| $F$ | 1 | | | |
| $IF$ | 2 | | | |
| $IIF$ | 4 | | | |
| $IIIF$ | 8 | | | |
| $IIIIF$ | 16 | | | |
| $IIIIIF$ | 32 | | | |
| $IIIIIIF$ | 64 | | | |
| $IIIIIIIF$ | 128 | | | |
| $IIIIIIIIF$ | 256 | | | |
| $IIIIIIIIIF$ | 512 | | | |
| ................. | ......... | | | |
| Összeg: | $\diagdown$ | 50 | | |

A játék lejátszása és az eredmények összesítése körülbelül 25 percet vesz igénybe.

Miután minden csoport kitöltötte az összesítő táblázatot, gyorsan kiszámolható az 50 játék alapján egy játék átlagos ára. A csoportok átlagos jegyárai, az össznyeremények és az össz dobásszámok kerüljenek fel a táblára. A csoportok eredményeit tovább átlagoljuk, így tapasztalatilag statisztikai módszerekkel meghatározhatjuk 50 játék esetén egy játék átlagos árát.

Érdemes az órán arról is szót ejteni, hogy a Szentpérvári játék átlagos ára függ a játszani kívánt játékok számától.

Matematika faktos oszályokban a játék árának meghatározására a Steinhausnak és Fellernek a megoldásait is meg lehetne osztani.

### Házi feladat

Az 50 játék során nyert legnagyobb nyeremény hány százaléka az össznyereménynek?

# 6. Függelék

## R program

```
##defining parameters
simul_num <- 100000
num_games <- 10000
output_file_name_csv <- "C:/scen_sim.csv"
prize_array_total = matrix(nrow=0, ncol=4)
colnames(prize_array_total) <-c("max_prize", "total_prize", "total_prize-1",
"total_prize-2")
##simulation of games
for(k in seq(1:simul_num))
{
v_game <- c(2^(ceiling(log(runif(num_games),0.5))-1))
v_game_sorted = sort(v_game)
prize_array <- c( v_game_sorted[num_games],
sum(v_game),
sum(v_game) - v_game_sorted[num_games],
sum(v_game) - v_game_sorted[num_games] - v_game_sorted[num_games-1])
prize_array_total <- rbind(prize_array_total, prize_array)
}
##export
write.csv(prize_array_total, file = output_file_name_csv)
```

# Hivatkozások

[1] Csörgő S. (1995), A szentpétervári paradoxon, Polygon V. kötet 1. szám

[2] Peters O. (2011), Menger 1934 revisited, arXiv1110.1578P.

[3] Peters O. (2011), The time resolution of the St. Petersburg paradox, Phil. Trans. R. Soc A, arXiv:10114404.

[4] Feller W. (1968), An Introduction to Probability Theory and its Applications, Wiley, New York.

[5] Menger K. (1934), Das Unsicherheitsmoment in der Wertlehre, J. Econ. 5(4):459–485.

[6] Arrow K. (1951), Alternative approaches to the theory of choice in risk-taking situations, Econometrica, 19, (4):404-437. .

[7] Samuelson P. (1977), St. Petersburg paradoxes: Defanged, dissected, and historically described, J. Econ. Lit. 15(1): 24–55.

[8] Durand, D. (1957), Growth Stocks and the Petersburg Paradox, The Journal of Finance (12),348-363.

[9] Eisdorfer A., and Giaccotto C. (2016), The St. Petersburg paradox and capital asset pricing, Ann. Finance (12):1-16.

[10] Székely G. J., and Richards D. St. P. (2004), The St. Petersburg Paradox and the Crash of High-Tech Stocks in 2000, The American Statistician, (58), 225-231.

[11] Whitworth W. A. (1965), Choice and Chance (3th ed.), Cambridge: Deighton, Bell, & Co. .

[12] Williams JB.(1938), The Theory of Investment Value. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

[13] Belden S. (2005), Discussion: Remain Steadfast with the St. Petersburg Paradox to Quantify Irrational Exuberance, The American Statistician, (59), 233-234.

[14] Laplace PS. (1814), Théorie analytique des probabilités, 2nd edn. Paris, Ve. Courcier.

[15] Kelly Jr., J. L. (1956), New Interpretation of Information Rate, The Bell System Technical Journal, (35):917-926.

[16] Tijms H. (2004), Understanding Probability: Chance Rules in Everyday Life, Cambridge: Cambridge University Press.