Nemlineáris elliptikus vegyes peremértékfeladatok prekondicionálása

Diplomamunka

Írta: Perjés Balázs
Alkalmazott matematikus szak

Témavezető: Karátson János
egyetemi tanár
Alkalmazott Analízis és Számításmatematika Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2018

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Előszó

Szakdolgozatom a következő típusú vegyes nemlineáris elliptikus peremértékfeladatok megoldhatóságáról és iterációs közelítéséről szól:

$$\begin{cases} T(u) \equiv -\operatorname{div} f(x, \nabla u) + q(x, u) \;=\; g(x) & \text{in } \Omega \\ Q(u) \equiv \quad f(x, \nabla u) \cdot \nu + s(x, u) \;=\; \gamma(x) & \text{on } \Gamma_N \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad u \;=\; 0 & \text{on } \Gamma_D, \end{cases} \tag{1.1}$$

ahol $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ korlátos tartomány. Ez a feladat megtalálható Karátson János és Faragó István tanulmányában [12]. Ezen írás feldolgozása, tételek segítségével való levezetése szintén célja dolgozatomnak. Tehát munkám célja kettős, egyrészről munkámnak tartalmaznia kell minden olyan eredményt, amely közelebb visz az említett tanulmányban található állítások megértéséhez, illetve azok bizonyításához szükséges, másrészről a fentihez hasonló feladatok természetét, azok lényeges tulajdonságait kellett kutatnom és írásba foglalnom.

A nemlineáris elliptikus peremértékfeladatok megoldásánál, mivel legtöbbször nem ismert az egzakt megoldás, így közelítő módszerek, azaz iterációk alkalmazására van szükség, továbbá, ha szeretnénk képet alkotni a vizsgálandó feladatról, akkor diszkretizációra is szükségünk lesz, hiszen enélkül nem lehetséges a számítógépes modellezés. Az iterációk sok feladat esetén nem konvergálnak, illetve konvergálnak, de azt nagyon lassan teszik. Mindkét esetben segíthet a prekondicionálás alkalmazása. Az első esetben elengedhetetlenül szükséges, a másodikban pedig nagyon hasznos, illetve célszerű. Prekondicionálás alkalmazása esetén az az a megoldás terjedt el, hogy először diszkretizálnak és a már végessé tett feladatra keresnek alkalmas prekondicionáló mátrixot (tehát először végessé teszik a feladatot és utána próbálják javítani az iteráció konvergenciáját). Sok szempontból hasznos, ha nem így kezeljük a feladat megoldása során felmerülő problémákat. Nevezetesen, ha az absztrakt (végtelen dimenziós) feladatot próbáljuk meg kezelhetővé tenni, azaz először az eredeti peremértékfeladathoz (illetve annak gyenge alakjához) keresünk megfelelő prekondicionáló operátort és csak ezután tesszük végessé a már prekondicionált feladatot.

Dolgozatomban az utóbbi megközelítés egy alapvető irányzatát, a *prekondicionáló operátorok elvét* fogom vázolni, illetve bizonyos esetre (a fenti elliptikus vegyes peremértékfeladatra) kifejteni, azon belül is csupán az elvi (végtelen dimenziós) részéről írtam, a feladat diszkretizációs (véges dimenziós) szintjének (beleértve a végeselem módszert és a rácsfüggetlenség fogalmát) kifejtése már nem célja a dolgozatomnak. A fenti elv megvalósítása esetén a gyakorlatban a végtelen dimenziós feladatra alkalmazott iterációk levetítésével kapunk megfelelő iterációkat a végeselemes alterekben és a konvergencia öröklődik (rácsfüggetlenül). Az iterációk közül dolgozatomban csak az egyszerű iterációról (gradiens módszerről) írok, továbbá a megfelelő prekondicionáló operátor kiválasztásához is alapvetően egy fogalmat használok, nevezetesen a spektrális ekvivalenciát (bár ennek sok formája ismeretes, több fontos típus között lehet ekvivalenciát találni), amely feltétel megléte maga után vonja a megfelelő kondíciószám (itt is több definíció ismert, három fő eset van: 1. a mátrixok, 2. a lineáris operátorok és 3. nemlineáris operátorok kondiciószáma) korlátosságát, azaz felülről való becsülhetőségét. Továbbá, ha teljesül a spektrális ekvivalencia feltétel (illetve, ha a megfelelő kondíciószám korlátos), akkor lineáris és nemlineáris esetben is tétel mondja ki, hogy az egyszerű iteráció (gradiens módszer) lineárisan konvergál.

Dolgozatom vezérfonalát adja Karátson János és Faragó István műve [10], amelynek több fejezetét (nevezetesen a 3., 5., 6. és a 7.) használtam.

Dolgozatom második fejezetében mondom ki a kontraktivitási lemmát, továbbá az ezt használó Kantorovich-Akilov tételt, azaz az egyszerű iteráció lineáris esetére vonatkozó állítást, valamint lineáris operátorok prekondicionálásáról írok (egy nevezetes eredménnyel illusztrálom: Czách tételével). A harmadik fejezetben a nemlineáris operátorokról írok, azon belül is a monoton operátorok egy speciális típusáról, a potenciáloperátorokról (a fenti vegyes peremértékfeladat (1.1) is ilyen tulajdonságú). Itt mondom ki az egyszerű iteráció nemlineáris esetére vonatkozó állítást. A negyedik fejezetben a prekondicionálás fogalmát nemlineáris feladatokra vázolom, illetve mondom ki dolgozatom egyik alapvető, prekondicionálásról szóló tételét (többek közt kiderül, hogy reguláris esetben reprezentációk segítségével az erős feladat differenciáloperátorával is felírható az iteráció (segédegyenlete), valamint az arra vonatkozó konvergenciabecslés)[4.1 tétel]. Az ötödik fejezetben nemlineáris elliptikus parciális differenciálegyenletek megoldhatóságáról és tulajdonságairól, továbbá elliptikus peremértékfeladatok prekondicionálásáról és az egyszerű iteráció konvergenciájáról írok. Végül következik a függelék.

Ezúton is szeretném megköszönni témavezetőmnek Karátson Jánosnak a bátorítást, a segítőkészségét és a témában nyújtott értékes segítségét.

2. fejezet

Lineáris elliptikus feladatok alaptulajdonságai

2.1. Lineáris operátorok tulajdonságai Hilbert-téren

Ha külön nem jelezzük, akkor ebben az alfejezetben mindig feltesszük, hogy H egy adott Hilbert-tér.

2.1.1. Jelölések

Legyenek először X és Y vektorterek. Az alábbi jelöléseket használjuk majd: azt írjuk, hogy $A : X \to Y$, ha $D(A) = X$ és azt, hogy $A : X \supset\!\!\to Y$, ha $D(A) \subset X$ altér.

Speciálisan legyen X,Y:=H, ekkor

(i) ha $S : H \supset\!\!\to H$ operátor, azaz $D(S) \subset H$ ($S : D(S) \to H$), akkor azt mondjuk, hogy (S operátor) H-*ban* értelmezett.

(ii) ha $S : H \to H$ operátor, azaz $D(S)$=H, akkor azt mondjuk, hogy (S operátor) H-n értelmezett.

2.1. Megjegyzés. Nem korlátos esetben az operátort általában nem lehet az egész téren értelmezni. Egy S nem korlátos operátor $D(S) \subset H$ értelmezési tartományát gyakran úgy választják meg, hogy az H-ban mindenütt sűrű altér legyen.

Jelölés:

1. Korlátos lineáris leképezéseket a következőképp jelöljük: legyenek X és Y normált terek, ekkor B(X,Y) jelölje az $X \to Y$ korlátos lineáris leképezéseket. Speciálisan, ha X = Y = H, ahol H Hilbert-tér, akkor B(H)-t írunk B(X,Y) helyett. Ez vektortér.

2. A k-szor folytonosan differenciálható (Ω-n értelmezett valós értékű) függvények halmazát $C^k(\overline{\Omega})$-al jelöljük. Ez vektorteret alkot.

2.1.2. Nem korlátos operátorok alaptulajdonságai, energiatér

Az alábbiakat [11] alapján írtam.

2.1. Definíció. Egy $A : H \supset\!\!\to H$ lineáris operátor *szimmetrikus*, ha $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ teljesül minden $x, y \in D(A)$ esetén.

2.2. Definíció. Egy $S : H \supset\!\!\to H$ szimmetrikus (lineáris) operátor

(i) *pozitív*, ha
$$\langle Su, u\rangle \geq 0 \qquad (u \in D(S)).$$

(ii) *szigorúan pozitív*, ha
$$\langle Su, u\rangle > 0 \qquad (u \in D(S), u \neq 0).$$

(iii) *egyenletesen pozitív*, ha létezik olyan $p > 0$ állandó, hogy
$$\langle Su, u\rangle \geq p\|u\|^2 \qquad (u \in D(S)).$$

Ekkor ezt úgy jelöljük, hogy $S \geq pI$.

2.3. Definíció. Legyen H valós Hilbert-tér és $D(S) \subset H$ sűrű altér.
Legyen $S : D(S) \to H$ szigorúan pozitív szimmetrikus lineáris operátor. Az
$$\langle u, v\rangle_S \ := \langle Su, v\rangle \qquad (u, v \in D(S)).$$
formát az S-hez tartozó *energia-skalárszorzat*nak nevezzük, továbbá az ennek megfelelő $\|.\|_S$ normát *energianormá*nak hívjuk.

Az S-hez tartozó *energiatér* pedig $H_S := \overline{[D(S), \langle\ ,\ \rangle_S]}$, azaz $D(S)$ teljessé tétele az energia-skalárszorzattal.

2.2. Megjegyzés. Ha speciálisan S (lineáris) operátor egyenletesen pozitív, ($S \geq pI$, $p > 0$), akkor az energianorma erősebb az eredetinél D(S)-en, mert
$$\|u\|_S^2 = \langle u, u\rangle_S \ = \langle Su, u\rangle \geq p\|u\|^2 \qquad (u \in D(S)),$$

2.1. Állítás. *Ha S egyenletesen pozitív, akkor $H_S \subset H$, azaz H_S azonosítás erejéig beágyazható H-ba.*
$$\|u\|_S^2 = \langle u, u\rangle_S \ = \langle Su, u\rangle \geq p\|u\|^2 \qquad (u \in D(S)),$$

2.1. Következmény. *Ha $S \geq pI$, akkor az*
$$\|u\|_S^2 \geq p\|u\|^2 \qquad (u \in H_S), \tag{2.1}$$
tehát a becslés minden $(u \in H_S)$ esetén is fennáll.

2.2. Állítás. *Ha $S \geq pI$, akkor az*
$$\|u\|_S \leq p^{-1/2}\|Su\| \qquad (u \in D(S)), \tag{2.2}$$

Bizonyítás. A Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenségből kapjuk, hogy

$$\|u\|_S^2 = \langle Su, u\rangle \le \|Su\|\|u\| \qquad (u \in D(S)),$$

továbbá 2.1-ből adódik, hogy

$$\|u\| \le p^{-1/2}\|u\|_S \qquad (u \in D(S)), \tag{2.3}$$

ezekből a kívánt állításhoz jutunk. ∎

Ha A egyenletesen pozitív, akkor értelmezhető az operátoregyenlet gyenge megoldásának fogalma az elliptikus feladatoknál megszokottak analógiájára:

2.4. Definíció. Legyen $f \in H$ adott vektor. Az $u \in H_S$ vektor az $Su = g$ feladat *gyenge megoldása*, ha

$$\langle u, v\rangle_S = \langle f, v\rangle \qquad (\forall\ v \in H_S). \tag{2.4}$$

2.1. Tétel. *Legyen H valós Hilbert-tér, $D \subset H$ sűrű altér és $S : D \to H$ egyenletesen pozitív szimmetrikus lineáris operátor.*

Ekkor bármely $g \in H$ esetén az

$$Su = g$$

egyenletnek egyértelműen létezik $u^* \in H_S$ gyenge megoldása, azaz, amelyre teljesül, hogy

$$\langle u^*, v\rangle_S = \langle g, v\rangle \qquad (v \in H_S). \tag{2.5}$$

Bizonyítás. A

$$\phi : H_S \to \mathbf{R}, \quad \phi v := \langle g, v\rangle$$

funkcionál lineáris és korlátos (H_S-en) az alábbi becslésnek köszönhetően:

$$|\phi v| = |\langle g, v\rangle| \le \|g\|\|v\| \le p^{-1/2}\|g\|\|v\|_S\,,$$

a (2.1) egyenlőtlenség segítségével. Ezután a Riesz-tételből következik u^* létezése és egyértelműsége. ∎

2.1.3. Spektrális ekvivalencia és kontraktivitás

Ebben a szakaszban legyen $A, B \in B(H)$ (tehát korlátos lineáris operátor).

2.5. Definíció. *[Spektrális ekvivalenciafeltétel, lineáris eset]* Legyen A és B egyenletesen pozitív önadjungált lineáris operátor. A és B *spektrálisan ekvivalensek*, ha léteznek olyan $M \ge m > 0$ konstansok amelyekre teljesül, hogy

$$m\langle Bh, h\rangle \le \langle Ah, h\rangle \le M\langle Bh, h\rangle \qquad (h \in H). \tag{2.6}$$

Fontos speciális eset, ha az A operátor helyett az $F'(u)$ deriváltoperátort írjuk:

$$m\langle Bh, h\rangle \le \langle F'(u)h, h\rangle \le M\langle Bh, h\rangle \qquad (u, h \in H) \tag{2.7}$$

2.3. Állítás. *Ha A és B egyenletesen pozitív önadjungált lineáris operátorok spektrálisan ekvivalensek, akkor $H_A = H_B = H$ és*

$$m^{1/2}\|h\|_B \le \|h\|_A \le M^{1/2}\|h\|_B \qquad (h \in H). \tag{2.8}$$

BIZONYÍTÁS. Mivel A és B alulról és felülről korlátos, a 2.2 megjegyzésből következik, hogy $H_A = H_B = H$. Végül (2.6)-ból nyilvánvalóan következik (2.8). ■

2.1. Lemma. *Ha A és B egyenletesen pozitív önadjungált lineáris operátorok spektrálisan ekvivalensek, akkor*

$$m\langle A^{-1}h, h\rangle \le \langle B^{-1}h, h\rangle \le M\langle A^{-1}h, h\rangle \qquad (h \in H). \tag{2.9}$$

BIZONYÍTÁS. Csak (2.9) jobb oldalát bizonyítjuk, a bal oldal hasonló. Legyen $v \in H$. A $h = B^{-1/2}v$ helyettesítéssel (2.6) segítségével azt kapjuk, hogy

$$\|A^{1/2}B^{-1/2}v\|^2 = \|A^{1/2}h\|^2 \le M\|B^{1/2}h\|^2 = M\|v\|^2.$$

amelyből az következik, hogy

$$\|B^{-1/2}A^{1/2}\|^2 = \|(B^{-1/2}A^{1/2})^*\|^2 = \|A^{1/2}B^{-1/2}\|^2 \le M,$$

végül ebből megkapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget:

$$\langle B^{-1}h, h\rangle = \|B^{-1/2}A^{1/2}A^{-1/2}h\|^2 \le M\|A^{-1/2}h\|^2 = M\langle A^{-1}h, h\rangle \qquad (h \in H). ■$$

A 2.3 állításból és a 2.1 lemmából adódik:

2.2. Következmény. *Ha A és B egyenletesen pozitív önadjungált lineáris operátorok spektralisan ekvivalensek, akkor*

$$m^{1/2}\|h\|_{A^{-1}} \le \|h\|_{B^{-1}} \le M^{1/2}\|h\|_{A^{-1}} \qquad (h \in H). \tag{2.10}$$

Most következik egy alapvető kontraktivitási eredmény, amelyet az előző lemma segítségével bizonyítunk be. Ezt alkalmazza a Kantorovich-Akilov tétel, továbbá a 3.4 tételben is felhasználjuk:

2.2. Lemma. *Ha A és B egyenletesen pozitív önadjungált lineáris operátorok spektrálisan ekvivalensek, akkor a következő kontraktivitási becslések állnak fenn:*

$$\|I - \frac{2}{M+m}AB^{-1}\|_{A^{-1}} \le \frac{M-m}{M+m}\,, \tag{2.11}$$

$$\|I - \frac{2}{M+m}B^{-1}A\|_B \le \frac{M-m}{M+m}\,, \tag{2.12}$$

(ahol I az identitás-operátor).

Bizonyítás. Legyen $C = \frac{M+m}{2}B$. Először (2.11)-t igazoljuk.

Az $I - AC^{-1}$ operátor önadjungált az A^{-1} energianormával, mivel

$$\langle AC^{-1}h, v\rangle_{A^{-1}} = \langle C^{-1}h, v\rangle = \langle h, C^{-1}v\rangle = \langle h, AC^{-1}v\rangle_{A^{-1}} \qquad (h, v \in H).$$

Ebből kapjuk, hogy

$$\|I - AC^{-1}\|_{A^{-1}} = \sup_{h\neq 0} \frac{|\langle (I - AC^{-1})h, h\rangle_{A^{-1}}|}{\|h\|^2_{A^{-1}}} = \sup_{h\neq 0} \frac{|\langle (A^{-1} - C^{-1})h, h\rangle|}{\langle A^{-1}h, h\rangle}. \tag{2.13}$$

A $C^{-1} = \frac{2}{M+m}B^{-1}$-ból, (2.6)-ból és 2.1 lemmából következik, hogy

$$\frac{2m}{M+m}\langle A^{-1}h, h\rangle \leq \langle C^{-1}h, h\rangle \leq \frac{2M}{M+m}\langle A^{-1}h, h\rangle.$$

Ebből minden $h \in H$-ra

$$-\frac{M-m}{M+m}\langle A^{-1}h, h\rangle \leq \langle (A^{-1} - C^{-1})h, h\rangle \leq \frac{M-m}{M+m}\langle A^{-1}h, h\rangle,$$

azaz a (2.13)-beli szuprémum tényleg legfeljebb $\frac{M-m}{M+m}$.

Az (2.12) bizonyítása analóg (2.11)-ével. Azt kell belátni, hogy az $I - C^{-1}A$ operátor önadjungált a B energianormával és így

$$\|I - C^{-1}A\|_B = \sup_{h\neq 0} \frac{|\langle (I - C^{-1}A)h, h\rangle_B|}{\|h\|^2_B} = \sup_{h\neq 0} \frac{|\langle (B - \frac{2}{M+m}A)h, h\rangle|}{\langle Bh, h\rangle}, \tag{2.14}$$

felhasználva, hogy $C^{-1} = \frac{2}{M+m}B^{-1}$. $\langle Ah, h\rangle$-t (2.6)-al becsülve kaphatjuk, hogy

$$-\frac{M-m}{M+m}\langle Bh, h\rangle \leq \langle (B - \frac{2}{M+m}A)h, h\rangle \leq \frac{M-m}{M+m}\langle Bh, h\rangle \qquad (h \in H),$$

azaz a (2.14)-beli szuprémum tényleg legfeljebb $\frac{M-m}{M+m}$. ∎

A kapott kontraktivitási eredmény képessé tesz minket, hogy közvetlenül igazoljuk az egyszerű iteráció (gradiens módszer) konvergenciáját egyenletesen pozitív korlátos-lineáris operátorokra. A lépésköz legyen állandó.

2.2. Tétel. (Kantorovich-Akilov, [6]). *Legyen H valós Hilbert-tér és legyen $A : H \to H$ (egyenletesen pozitív) önadjungált korlátos lineáris operátor, amelyre teljesül a következő egyenlőtlenség:*

$$m\|h\|^2 \leq \langle Ah, h\rangle \leq M\|h\|^2 \qquad (u, h \in H), \tag{2.15}$$

ahol $M \geq m > 0$ állandók, melyek u, h-tól függetlenek. Legyen $b \in H$ tetszőleges és $u^* \in H$ jelölje az

$$Au = b$$

egyenlet egyértelműen létező megoldását.

Ekkor minden $u_0 \in H$ esetén az

$$u_{n+1} := u_n - \frac{2}{M+m}(Au_n - b) \qquad (n \in \mathbf{N}) \tag{2.16}$$

sorozat u^*-hoz konvergál, mégpedig a következő lineáris becslés szerint:

$$\|u_n - u^*\| \le \frac{1}{m}\|Au_0 - b\| \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Bizonyítás. Az $Au = b$ egyenlet megoldásának létezése és egyértelműsége a (2.15) egyenlőtlenségből következik, mivel A spektrumának 0 nem eleme. A (2.16) sorozat konstrukciójából az következik, hogy

$$u_{n+1} - u^* = \left(I - \frac{2}{M+m}A\right)(u_n - u^*) \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

így, a 2.2 lemmát alkalmazva, a $B = I$ helyettesítéssel (ahol I az identitás-operátor), azt kapjuk, hogy

$$\|u_{n+1} - u^*\| \le \frac{M-m}{M+m}\|u_n - u^*\| \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Amelyből indukció segítségével következik, hogy

$$\|u_n - u^*\| \le \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n \|u_0 - u^*\| \qquad (n \in \mathbf{N})$$

továbbá (2.15)-ből adódik, hogy

$$\|u_0 - u^*\| \le (1/m)\|Au_0 - b\|,$$

amely segítségével a bizonyítandó állításhoz jutunk. ■

2.2. Szoboljev-terek

Az alábbi alfejezetet Simon László előadásai, illetve [14] alapján írtam. Ebben az alfejezetben legyen $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ korlátos tartomány, k ≥ 0.

2.6. Definíció. Legyen $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ korlátos tartomány, k ≥ 0. Tekintsük a következő euklideszi-teret: $C^k(\overline{\Omega})$ vektorteret lássuk el az alábbi skaláris szorzattal:

$$\langle f, g \rangle := \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega (\partial^\alpha f)(\partial^\alpha g),$$

ahol f és g valós függvények. Ha ezt teljessé tesszük a fenti skalárszorzatból származtatott normával, akkor megkapjuk a *(k-ad rendű) Szoboljev-ter*et és $H^k(\Omega)$-val jelöljük.

2.3. Tétel. *$H^k(\Omega)$ izometrikusan izomorf a következő halmazzal: $X_1 := (f \in L^2(\Omega)$: $\partial^\alpha f \in L^2(\Omega)$ disztribúciós értelemben, a fenti skaláris szorzattal és tetszőleges pontossággal approximálható $C^k(\overline{\Omega})$-beli függvényekkel)*

2.7. Definíció. Tekintsük a következő euklideszi-teret: $C_0^k(\overline{\Omega})$ vektorteret a fenti skaláris szorzattal lássuk el (f és g valós függvények). Ha ezt teljessé tesszük a fenti skalárszorzatból származtatott normával, akkor kapjuk a $H_0^k(\Omega)$ Szoboljev-teret.

2.4. Tétel. *$H_0^k(\Omega)$ izometrikusan izomorf a következő halmazzal: $X_2 := (f \in L^2(\Omega)$: $\partial^\alpha f \in L^2(\Omega)$ disztribúciós értelemben, a fenti skaláris szorzattal, valamint tetszőleges pontossággal approximálható $C_0^k(\overline{\Omega})$-beli függvényekkel)*

2.3. Lineáris elliptikus feladatok megoldhatósága és egyértelműsége

Legyen $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ korlátos tartomány. Ebben a szakaszban a következő másodrendű lineáris elliptikus operátort tekintjük:

$$Su := -\mathrm{div}\,(K(x)\nabla u) \qquad (x \in \Omega) \tag{2.17}$$

tegyük fel továbbá, hogy S *egyenletesen elliptikus* , azaz a $K \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbf{R}^{N\times N})$ szimmetrikus mátrix értékű függvény teljesíti az alábbi feltételt:

$$\sigma(K(x)) \subset [m, M] \subset (0, \infty) \qquad (x \in \Omega). \tag{2.18}$$

2.3.1. Gyenge megoldás

Ennek a szakasznak alapvetően az a célja, hogy a később bizonyítandó eredmények segítségére legyen, azok alkalmazhassák ezeket.

Legyen $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ korlátos tartomány. Tekintsük a lineáris Dirichlet-feladatot:

$$\begin{cases} Su = g \qquad (x \in \Omega) \\ u_{|\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{2.19}$$

ahol az S operátor az (2.17)-beli, továbbá legyen $g \in L^2(\Omega)$.

2.5. Tétel. *Az (2.19) peremértékfeladatnak egyértelműen létezik $u^* \in H_0^1(\Omega)$ gyenge megoldása, azaz, amelyre teljesül, hogy*

$$\int_\Omega K(x)\,\nabla u^* \cdot \nabla v = \int_\Omega gv \qquad (v \in H_0^1(\Omega)). \tag{2.20}$$

2.4. Állítás. (Szoboljev-egyenlőtlenség) [10]. *Létezik olyan $\nu > 0$ konstans, amelyre*

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \geq \nu \int_\Omega u^2 \qquad (u \in H_0^1(\Omega)). \tag{2.21}$$

A megfordítás nem igaz, helyette a következő teljesül:

$$\sup_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega |u|^2} = +\infty. \tag{2.22}$$

2.5. Állítás. *Az*

$$Su := -\mathrm{div}\,(K(x)\nabla u) \qquad (u \in D(S) := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$$

operátor szimmetrikus lineáris és egyenletesen pozitív ($S \geq \varrho I, \varrho > 0$) $L^2(\Omega)$*-ben*

Az S operátor egyenletes pozitivitásának *éles* állandója a következőképp karakterizálható:

2.6. Állítás. *Tekintsük a (2.19)-es feladatot. Ha $\varrho > 0$, $(S \geq \varrho I)$ éles, akkor ez megegyezik S operátor legkisebb sajátértékével, ha $D(S) := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.*

2.3. Megjegyzés. A 2.6 állítást alkalmazva a Laplace-operátorra ($S = -\Delta$) és a Green-formulát használva kapjuk, hogy

$$-\int_\Omega (\Delta u)\, u = \int_\Omega |\nabla u|^2 \qquad (u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)),$$

így, tehát a 2.4 állításban szereplő ν alsó határ megegyezik $-\Delta$ operátor legkisebb sajátértékével ($H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$-n).

2.4. Megjegyzés. Megjegyeznénk, hogy ezen tételek mind speciális esetei a nemlineáris egzisztencia és unicitás tételeknek.

2.3.2. Regularitás

Idéznénk pár a (2.17) operátoral kapcsolatos peremértékfeladatra vonatkozó regularitási eredményt. Azt szeretnénk biztosítani, hogy a megoldás $H^2(\Omega)$-beli. Továbbá $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ legyen korlátos tartomány.

Először tekintsük a (2.19) Dirichlet-feladatot:

$$\begin{cases} Su = g \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{2.23}$$

2.6. Tétel. (Kadlec [5]). *Legyen Ω be C^2-diffeomorf egy konvex tartománnyal. Ekkor bármely $g \in L^2(\Omega)$ esetén az (2.23) feladat egyértelműen létező $u^* \in H_0^1(\Omega)$ gyenge megoldásra az is teljesül, hogy $u^* \in H^2(\Omega)$.*

Most tekintsük a következő vegyes peremérték-feladatot:

$$\begin{cases} Su = g & \text{in } \Omega \\ \partial_{K(x)\cdot\nu} u + \beta u = \varphi & \text{on } \Gamma_N \\ u = 0 & \text{on } \Gamma_D\,, \end{cases} \tag{2.24}$$

ahol $\partial_{K(x)\cdot\nu} u = K(x)\,\nu \cdot \nabla u$ az u x-beli konormális deriváltja. Abban az esetben, ha $\partial\Omega = \Gamma_N$ az alábbi eredmény érvényes:

2.7. Tétel. (Grisvard [4]). *Legyen $\partial\Omega = \Gamma_N \in C^{1,1}$ és $\beta \in C^{0,1}(\partial\Omega)$, $\beta > 0$ $\partial\Omega$-n. Ekkor bármely $g \in L^2(\Omega)$ és $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ esetén, az (2.24) feladat egyértelműen létező u^* gyenge megoldására az is igaz lesz, hogy $u^* \in H^2(\Omega)$.*

Végül tekintsük az előzőnek megfelelő Neumann-feladatot (azaz, ha $\beta \equiv 0$):

$$\begin{cases} Su = g \\ \partial_{K(x)\cdot\nu} u\big|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \tag{2.25}$$

Abban az esetben, ha $\partial\Omega \neq \Gamma_N$ a 2.7 tétel analógja igaz lesz a ($S = -\Delta$) Laplace-operátorra, ha (2.24)-ben teljesül a következő feltétel: $\beta \equiv \varphi \equiv 0$, ha $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ konvex síkbeli sokszög tartomány Γ_N és Γ_D uniója $\partial\Omega$ továbbá, a csúcsok $\overline{\Gamma}_N \cap \overline{\Gamma}_D$-beliek (lásd: [4]).

2.4. Iterációk és prekondicionálás Szoboljev-térben

2.4.1. Lineáris operátorok kondíciószáma

2.8. Definíció. Legyen H Hilbert-tér, S szimmetrikus szigorúan pozitív lineáris operátor H-ban. Ekkor S *kondíciószáma* az alábbi:

$$cond(S) = \frac{\Lambda(S)}{\lambda(S)},$$

ahol

$$\Lambda(S) = \sup_{x \in D(S)\setminus\{0\}} \frac{\langle Sx, x\rangle}{\|x\|^2}, \quad \lambda(S) = \inf_{x \in D(S)\setminus\{0\}} \frac{\langle Sx, x\rangle}{\|x\|^2}.$$

Mindig igaz rájuk, hogy $0 < \Lambda(F) \leq \infty$, $0 \leq \lambda(F) < \infty$. Így a kondíciószám végtelen is lehet.

Általánosabban is értelmezhető a kondíciószám: nevezetesen invertálható operátor esetén (szimmetriát nem szükséges feltenni) a következő definíció segítségével: legyen $A : H \supset\!\!\rightarrow H$ invertálható operátor. Ekkor A *kondíciószáma* a következő:

$$cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$

a fenti definíció formálisan megegyezik a mátrixok kondíciószámával, azonban Hilbert-térbeli operátorok esetén a kondíciószám értéke lehet végtelen.

Példa. Legyen S az (2.17)-ben definiált differenciál operátor, értelmezési tartománya: $D(S) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Ekkor

$$\Lambda(S) = \sup_{u \in D(S)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega K\, \nabla u \cdot \nabla u}{\int_\Omega |u|^2} \geq m \sup_{u \in D(S)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega |u|^2} = \infty$$

(2.22) alapján, így kaptuk, hogy $cond(S) = \infty$. (valamint minden nem korlátos operátor esetén is ez az eset áll fenn).

2.5. Megjegyzés. S végtelen kondíciószáma ($cond(S) = \infty$) áll azon jelenség hátterében, hogy $cond(S_h) = \mathcal{O}(h^{-2})$ nem korlátos, ha a S_h függvények az S operátor bizonyos diszkretizációi során keletkeznek, akkor

$$cond(S_h) \to \infty, \quad \text{ha} \quad h \to 0$$

mert a diszkretizáció finomításával S_h kondíciószáma S végtelen számához közelít.

2.4.2. Gradiens típusú módszerek prekondicionálása és rácsfüggetlensége

Az első Szoboljev-térben történő prekondicionálási eredmény Czách László nevéhez fűződik, a doktori disszertációjában írta le. (megtalálható Kantorovich–Akilov [6] XV. fejezetében).

A Laplace-operátorral való prekondicionálás

Tekintsük az (2.19) lineáris Dirichlet-feladatot:

$$\begin{cases} Lu \equiv -\mathrm{div}\,(K(x)\nabla u) = g & \Omega-\text{ban} \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{2.26}$$

ahol $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ korlátos tartomány, amely egy konvex tartománnyal C^2-diffeomorf, ahol $K(x)$ teljesíti (2.18)-at és $g \in L^2(\Omega)$.

Továbbá, a $-\Delta$ operátor értelmezési tartománya legyen $D(-\Delta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. (Ekkor 2.6 tételből kapjuk, hogy $R(-\Delta) = L^2(\Omega)$.) A $H_0^1(\Omega)$ Szoboljev-tér a következő skaláris szorzattal legyen ellátva:

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,.$$

Az $u^* \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ megoldás létezését és egyértelműségét 2.5 és 2.6 tételek garantálják.

2.8. Tétel. (Czách). *Tekintsük a következő operátort*

$$A = (-\Delta)^{-1} L$$

lineáris operátor $H_0^1(\Omega)$*-ban, amely értelmezési tartománya:* $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *(és így* $R(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$*.)*

1. *Ekkor igaz lesz rá a következő spektrális ekvivalencia feltételel:*

$$m\langle -\Delta u, u\rangle_{L^2} \le \langle Lu, u\rangle_{L^2} \le M\langle -\Delta u, u\rangle_{L^2} \qquad (u \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)), \quad (2.27)$$

amelyből kapjuk, hogy

$$cond(-\Delta^{-1}L) \le \frac{M}{m} \quad (2.28)$$

a $H_0^1(\Omega)$ normával.

2. *Következésképpen, bármely $g \in L^2(\Omega)$ és $u_0 \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ esetén az alábbi iteráció*

$$u_{n+1} = u_n - \frac{2}{M+m}(-\Delta)^{-1}(Lu_n - g) \ \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega) \quad (2.29)$$

lineárisan konvergál (2.26) feladat u^* megoldáshoz, a következő konvergenci hányadossal:

$$q = \frac{M-m}{M+m}$$

H_0^1 normában (és így L_2 norma szerint is).

Bizonyítás. A Green-formulát használva (2.27) a következő alakba írható:

$$m\int_\Omega |\nabla u|^2 \le \int_\Omega K\,\nabla u\cdot\nabla u \le M\int_\Omega |\nabla u|^2, \quad (2.30)$$

(2.18)-nak köszönhetően. Továbbá, felhasználva azt, hogy

$$\langle Au, u\rangle_{H_0^1} = \langle Lu, u\rangle_{L^2}\,,$$

(2.30) alapján azt kapjuk, hogy

$$m \le \frac{\langle Au, u\rangle_{H_0^1}}{\|u\|_{H_0^1}^2} \le M \qquad (u \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega),\ u \ne 0), \quad (2.31)$$

így tehát (2.28)-at beláttuk. Ekkor A-nak létezik korlátos önadjungál kiterjesztése $H_0^1(\Omega)$-ra, a konvergenciára vonatkozó állítás (2.31) alapján következik a Kantorovich-Akilov tételből. ■

2.6. Megjegyzés. (i) Ha csupán annyit teszünk fel, hogy $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, akkor (2.29) helyére a gyenge alakú segédegyenlet kerül

$$\langle u_{n+1}, v\rangle_{H_0^1} = \langle u_n, v\rangle_{H_0^1} - \frac{2}{M+m}\langle Au_n - b, v\rangle_{H_0^1}\,,$$

ahol az A operátort kiterjesztettük $H_0^1(\Omega)$-ra, amely az L operátor gyenge alakja és $\langle b, v\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega gv \quad (v \in H_0^1(\Omega))$.

(ii) A kiterjesztett $A : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ operátor a (2.26) feladatnak megfelelő általánosított differenciáloperátor. Ez azt jelenti, hogy reguláris esetben A felbontható a következőre:

$$Au = (-\Delta)^{-1}Lu \qquad (u \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)).$$

Így az előző tétel az általánosított differenciáloperátor egy konstuktív reprezentációját szolgáltatja.

3. fejezet

Nemlineáris operátorok

3.1. Nemlineáris operátorok alaptulajdonságai

A Gâteaux-derivált fogalma és alaptulajdonságai valamint a (bi)hemifolytonosság definíciója a függelékben található (6.2 alfejezet, illetve 6.3 definíció). Továbbá alapvető állítások: Lagrange-középértéktétel, a másodrendű Taylor-formula, valamint a Newton–Leibniz-formula normált-térbeli megfelelői is megtalálhatóak ugyanitt.

3.1.1. Monoton operátorok és konvex funkcionálok

Az alábbiakat [11] alapján írtam.

3.1. Definíció. Legyen X normált tér, $u, v \in X$. Ekkor

(i) $[u, v] = \{u + t(v - u) : \ t \in [0, 1]\}$ az u-t és v-t összekötő szakasz;

(ii) ha $\Phi : X \to \mathbb{R}$, akkor $\phi_{u,v} : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $\ \phi_{u,v}(t) := \Phi(u + t(v - u))$.

3.2. Definíció. A $\Phi : X \to \mathbb{R}$ funkcionál

(i) *konvex*, ha minden $u, v \in X$ esetén $\phi_{u,v}$ konvex;

(ii) *szigorúan konvex*, ha minden $u, v \in X$ esetén $\phi_{u,v}$ szigorúan konvex.

3.1. Állítás. *Ha $\Phi : X \to \mathbb{R}$ konvex és Gâteaux-deriválható, akkor minden $u, v \in X$ esetén $\Phi(v) - \Phi(u) \geq \langle \Phi'(u), v - u \rangle$.*

3.3. Definíció. Azt mondjuk, hogy $F : X \to X^*$

(i) *monoton* operátor, ha

$$\langle F(v) - F(u), v - u \rangle \geq 0 \quad (\forall u, v \in X);$$

(ii) *szigorúan monoton* operátor, ha

$$\langle F(v) - F(u), v - u \rangle > 0 \quad (\forall u \neq v \in X);$$

(iii) *egyenletesen monoton* operátor, ha létezik $m > 0$, hogy

$$\langle F(v) - F(u), v - u \rangle \geq m\|u - v\|^2 \quad (\forall u, v \in X).$$

3.2. Állítás. *Legyen $\Phi : X \to \mathbb{R}$ kétszer Gâteaux-deriválható. Ekkor az alábbi három állítás ekvivalens:*

(i) Φ konvex;

(ii) $\Phi' : X \to X^*$ monoton operátor;

(iii) $\Phi''(u) \geq 0$ minden $u \in X$-re, azaz $\langle \Phi''(u)h, h\rangle \geq 0$ minden $h \in X$-re.

3.1. Megjegyzés. Az (i) és (ii) tulajdonságok ekvivalenciájához elég, ha Φ egyszer Gâteaux-deriválható.

3.2. Megjegyzés. (1) Φ pontosan akkor szigorúan konvex, ha $\Phi' : X \to X^*$ szigorúan monoton operátor. Ilyenkor Φ' injektív is.

(2) $\Phi' : X \to X^*$ pontosan akkor egyenletesen monoton operátor, ha Φ'' egyenletesen pozitív, azaz létezik $m > 0$, hogy $\langle \Phi''(u)h, h\rangle \geq m\|h\|^2$ $(\forall u, h \in X)$. Ilyenkor Φ-t *egyenletesen konvexnek* hívjuk.

3.2. A potenciálos operátoregyenletek megoldhatósága

3.2.1. A potenciál fogalma és létezése

3.4. Definíció. Legyen X Banach-tér. Egy $F : X \to X^*$ (nemlineáris) operátort *potenciáloperátornak* nevezünk, ha van olyan $J : X \to \mathbb{R}$ Gâteaux-deriválható funkcionál, melyre $J' = F$, azaz $J'(u) = F(u)$ minden $u \in X$ esetén. Ekkor a J funkcionált *F potenciáljának* hívjuk.

3.3. Megjegyzés. Ha létezik potenciál, akkor additív konstans erejéig egyértelmű. (Ez a Lagrange-középértéktételből következik, és nemcsak az egész X-en, hanem egyszeresen összefüggő halmazon értelmezett operátorokra is igaz.)

3.1. Tétel. *(lásd: [3, 15]) Legyen $F : X \to X^*$ Gâteaux-deriválható és F' bihemifolytonos. Ekkor F pontosan akkor potenciáloperátor, ha F' szimmetrikus, azaz*

$$\langle F'(u)v, h\rangle = \langle F'(u)h, v\rangle \qquad (\forall u, h, v \in X). \tag{3.1}$$

3.4. Megjegyzés. A 3.1 feltétel valós Hilbert-térben $F'(u)$ önadjungáltságát jelenti.

3.2.2. Funkcionálok minimumhelye

3.2. Tétel. *Legyen X reflexív Banach-tér és tegyük fel, hogy $\Phi : X \to \mathbb{R}$ Gâteaux-deriválható, konvex és $\lim\limits_{\|u\|\to\infty} \Phi(u) = \infty$. Ekkor Φ-nek létezik minimuma.*

Bizonyítás. Legyen $\alpha = \inf_X \Phi \geq -\infty$. Ekkor van olyan $(u_n) \subset X$ sorozat, hogy $\Phi(u_n) \to \alpha$. Emiatt a $(\Phi(u_n))$ sorozat felülről korlátos, amiből következik, hogy $(u_n) \subset X$ korlátos sorozat. Ha ugyanis nem lenne korlátos, akkor $\|u_n\|$ nem lenne korlátos, azaz lenne egy végtelenhez tartó részsorozata; erre a részsorozatra $\Phi(u_n) \to \alpha$ teljesülne, ellentmondva a $\lim_{\|u\|\to\infty} \Phi(u) = \infty$ feltételnek.

A reflexivitás miatt a 6.1. tétel alapján kiválasztható gyengén konvergens részsorozat, azaz létezik $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ részsorozat és $u^* \in X$, hogy $\langle \psi, u_{n_k} \rangle \to \langle \psi, u^* \rangle$ minden $\psi \in X^*$ esetén. Speciálisan $\langle \Phi'(u^*), u_{n_k} \rangle \to \langle \Phi'(u^*), u^* \rangle$, amiből Φ konvexitását felhasználva kapjuk, hogy

$$\Phi(u_{n_k}) - \Phi(u^*) \geq \langle \Phi'(u^*), u_{n_k} - u^* \rangle \to 0,$$

amiből következik, hogy $\Phi(u^*) \leq \alpha = \inf \Phi$, vagyis $\Phi(u^*) = \min \Phi$. ■

3.5. Megjegyzés. Ha a fenti tételben Φ szigorúan konvex is, akkor a minimumhely egyértelmű.

3.2.3. A variációs elv

Legyen X reflexív Banach-tér, $F : X \to X^*$ adott (nemlineáris) operátor. Fontos speciális eset, ha $X := H$ Hilbert-tér, ekkor tudjuk, hogy $H^* = H$, tehát ekkor $F : H \to H$

Ha az adott F operátor potenciáloperátor, az $F(u) = b$ egyenletek megoldhatóságának és egyértelműségének kérdése átfogalmazható a potenciállal (megfelelő konvex funkcionál segítségével). *Ez a variációs elv.*

Legyen tehát $F : X \to X^*$ potenciáloperátor, amelynek $J : X \to \mathbf{R}$ egy potenciálja: $J'(u) = F(u) \quad (u \in X)$. Vezessük be a

$$\Phi : X \to \mathbf{R}, \qquad \Phi(u) := J(u) - \langle b, u \rangle \tag{3.2}$$

funkcionált, ezt a funkcionált gyakran *minimalizáló funkcionálnak* hívják. Ez potenciálja az $u \mapsto F(u) - b$ leképezésnek (lásd: 3.3 megjegyzést), azaz

$$\Phi'(u) = F(u) - b \qquad (u \in X). \tag{3.3}$$

Ez azt jelenti, hogy Φ ún. kritikus pontjai (ahol deriváltja 0) megegyeznek az $F(u) = b$ egyenlet megoldásaival.

Sok esetben a Φ funkcionál minimumhelyeire van szükség, pl. amikor Φ energia jellegű mennyiséget ír le.

3.6. Megjegyzés. (i) Ha u^* minimumhelye Φ-nek, akkor $\Phi'(u^*) = 0$, így u^* megoldása az egyenletnek: $F(u^*) = b$.

(ii) Monoton potenciáloperátorok esetén a megfordítás is igaz lesz, azaz a kettő egybeesik:

3.3. Állítás. *Legyen $A : X \to X^*$ monoton potenciáloperátor, J egy potenciálja és Φ az* (3.2)*-beli funkcionál. Az $u^* \in H$ vektor pontosan akkor megoldása az $A(u) = b$ egyenletnek, ha minimumhelye Φ-nek.*

Bizonyítás. Legyen először $A(u^*) = b$, azaz $\Phi'(u^*) = 0$. Itt A monotonitása miatt, a 3.2. állítás és 3.1. megjegyzés alapján J konvex, és mivel $u \mapsto \langle b, u\rangle$ lineáris, így Φ is konvex. A 3.1. állításból így $\Phi(u) - \Phi(u^*) \geq \langle \Phi'(u^*), u - u^*\rangle = 0 \quad (u \in X)$, azaz u^* minimumhely.

A másik irány: 3.6 megjegyzés (i) pontja. ■

A következő szakaszban a fenti elv alapján adunk megoldhatósági tételeket, vagyis az adott egyenlet megoldása helyett a megfelelő Φ funkcionált minimalizáljuk.

3.2.4. Monoton operátoregyenletek potenciáloperátorral

Most kimondjuk az alapvető egzisztencia és unicitás tételt bihemifolytonos szimmetrikus Gâteaux-deriválttal rendelkező operátorokra. (Hasonló eredmények itt találhatók: Gajewski–Gröger–Zacharias [3])

Az eredmények kényelmes megfogalmazása érdekében a következő elnevezést vezetjük be:

3.5. Definíció. Az $F : H \to H$ operátor *bihemifolytonos szimmetrikus Gâteaux-deriválttal rendelkezik*, ha

(i) F Gâteaux-deriválható;

(ii) F' bihemifolytonos;

(iii) minden $u \in H$ esetén $F'(u) \in B(H)$ önadjungált.

3.3. Tétel. *Legyen H valós Hilbert-tér és $F : H \to H$ operátor rendelkezzen a következő tulajdonságokkal:*

(i) F bihemifolytonos szimmetrikus Gâteaux-deriválttal rendelkezik;

(ii) létezik olyan $m > 0$ állandó, amelyre

$$\langle F'(u)h, h\rangle \geq m\|h\|^2 \qquad (u, h \in H). \tag{3.4}$$

Ekkor bármely $b \in H$ esetén az $F(u) = b$ egyenletnek egyértelműen létezik $u^* \in H$ megoldása.

Bizonyítás. A 3.1. tétel szerint az első két feltétel biztosítja, hogy A potenciáloperátor. Az 3.2 tétellel garantálhatjuk a minimum létét. Ehhez be kell látnunk, hogy konvex és $\lim\limits_{\|u\|\to\infty} \Phi(u) = \infty$.

Legyen $\Phi : H \to \mathbb{R}$, $\Phi(u) = J(u) - \langle b, u\rangle$, ahol $J' = F$. Ekkor $\Phi'(u) = F(u) - b$. Mivel Φ kétszer Gâteaux-deriválható, a Taylor-formula szerint minden $u \in H$ esetén

$$\Phi(u) = \Phi(0) + \langle \Phi'(0), u\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \Phi''(\theta u)u, u\right\rangle,$$

alkalmas $\theta \in [0,1]$ mellett, amiből a (iii) feltétel és $\Phi'' = F'$ miatt azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\Phi(u) &\geq \Phi(0) - \|\Phi'(0)\| \, \|u\| + \frac{m}{2}\|u\|^2 = \\ &= \Phi(0) + \|u\| \Big(- \|\Phi'(0)\| + \frac{m}{2}\|u\|\Big) \to \infty, \quad \text{ha } \|u\| \to \infty.\end{aligned}$$

Másrészt a 3.2. megjegyzésből következik, hogy Φ szigorúan konvex. A 3.2. tétel és 3.5. megjegyzés szerint egyértelműen létezik u^* minimumhelye Φ-nek, ami a 3.3. állítás szerint pontosan akkor igaz, ha $F(u^*) = b$. ∎

3.7. Megjegyzés. Megemlítjük, hogy ϕ növekedését négyzetesen lehet alulról becsülni. Nevezetesen, felhasználva, hogy $\phi'(u^*) = 0$, $\phi'' = F'$ és $F'(u)$ egyenletesen pozitiv (3.4), a Taylor-sorfejtésből kapható, hogy

$$\phi(u) - \phi(u^*) = \frac{1}{2}\langle \phi''(u^* + \theta(u-u^*))(u-u^*), u-u^*\rangle \geq \frac{m}{2}\|u-u^*\|^2 .$$

3.8. Megjegyzés. A 3.3 tétel akkor is igaz marad, ha a (ii) feltétel egyenlőtlenségét kicseréljük az alábbira:

$$\langle F'(u)h, h\rangle \geq m(\|u\|)\|h\|^2 \qquad (u, h \in H)$$

ahol m monoton növő függvény, amelyre $\lim_{r\to\infty} r\, m(r) = \infty$ teljesül. (Azonos módon lehet bizonyítani, mint a fenti tételt. Idevonatkozó eredmény: Gajewski–Gröger–Zacharias [3])

3.9. Megjegyzés. Könnyen belátható a 3.3 tétel F operátoráról, hogy egyenletesen monoton (amelyből következik, hogy koercív); továbbá, ha az 3.3 tétel (ii) feltételét a következő felső becsléssel egészítjük ki: $\langle F'(u)h, h\rangle \leq M(\|u\|)\|h\|^2$, ahol M monoton növő függvény, akkor ebből szintén következik, hogy F korlátos.

3.3. Egyszerű iteráció monoton operátorokra

3.3.1. Gradiens-módszer potenciáloperátor esetén

Most következik az 1.2 tétel nemlineáris megfelelője:

3.4. Tétel. (lásd: [3, 6]). *Legyen H valós Hilbert-tér és $F : H \to H$ operátor az alábbi tulajdonságokkal bírjon:*

(i) bihemifolytonos szimmetrikus Gâteaux-deriválttal rendelkezik,

(ii) léteznek olyan $M \geq m > 0$ állandók, minden $u, h \in H$-ra, hogy

$$m\|h\|^2 \leq \langle F'(u)h, h\rangle \leq M\|h\|^2. \tag{3.5}$$

Legyen $b \in H$ tetszőleges és jelölje $u^* \in H$ az

$$F(u) = b.$$

egyenlet egyértelműen létező megoldását.

Ekkor tetszőleges $u_0 \in H$ esetén az

$$u_{n+1} := u_n - \frac{2}{M+m}(F(u_n) - b) \qquad (n \in \mathbf{N}) \tag{3.6}$$

sorozat lineárisan konvergál u^*-hoz, a következő becslés szerint

$$\|u_n - u^*\| \leq \frac{1}{m}\|F(u_0) - b\| \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n \qquad (n \in \mathbf{N})\,. \tag{3.7}$$

Bizonyítás. u^* létezése és egyértelműsége az 3.3 tételből következik.

Legyen $J : H \to H$ operátor az alábbi:

$$J(u) \equiv u - \frac{2}{M+m}F(u) \qquad (u \in H).$$

Ekkor bármely u esetén a $J'(u)$ GD létezik és

$$J'(u)h = h - \frac{2}{M+m}F'(u)h \qquad (u \in H),$$

ebből könnyen látható, hogy $J'(u)$ önadjungált. (3.5) alapján alkalmazhatjuk a 2.2 lemmát az $A = F'(u)$ és $B = I$ (ahol I az identitás-operátor) helyettesítésekkel, és ebből azt kapjuk, hogy $J'(u)$ kontrakció $\frac{M-m}{M+m}$ konstanssal.

Ebből pedig az következik, hogy J kontrakció ugyanazzal a konstanssal ($\frac{M-m}{M+m}$), mivel

$$\|J(v) - J(u)\| = \| \int_0^1 J'(u + t(v-u))(v-u)dt\| \leq \int_0^1 \|J'(u + t(v-u))(v-u)\|dt$$

$$\leq \int_0^1 \frac{M-m}{M+m}\|v-u\|dt = \frac{M-m}{M+m}\|v-u\|.$$

A (3.6) sorozat konstrukciójából az következik, hogy

$$u_{n+1} - u^* = u_n - u^* - \frac{2}{M+m}(F(u_n) - F(u^*)) = J(u_n) - J(u^*), \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

amelyből azt kapjuk, hogy

$$\|u_{n+1} - u^*\| \leq \frac{M-m}{M+m}\|u_n - u^*\| \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

ebből indukcióval

$$\|u_n - u^*\| \leq \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n \|u_0 - u^*\| \qquad (n \in \mathbf{N})$$

Az (3.5) egyenlőtlenség alsó becsléséből az 4.1 állítás segítségével következik, hogy $m\|v-u\|^2 \le \langle F(v)-F(u), v-u\rangle \quad (u,v\in D(F))$, amelyből v:=$u_0$ és u:=u^* helyettesítéssel és a Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenség alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\|u_0-u^*\| \le (1/m)\|F(u_0)-b\|,$$

amelyet az előző becsléssel kombinálva a bizonyítandó becsléshez jutunk. ∎

Az 3.4 tétel általánosítható úgy is, hogy az 3.4 tétel (3.5) felső becslésében a konstans helyére egy monoton növő függvényt (mely csak az $\|u\|$-tól függ) teszünk (lásd: Gajewski–Gröger–Zacharias [3], Karátson [9]). A következő megfogalmazást [9]-ből idézzük , ahol a konvergenciabecslés hasonló a (3.7)-belihez (csupán annyi a különbség, hogy M helyére M_0 kerül).

3.5. Tétel. *(lásd: [9])*
Legyen H valós Hilbert-tér és $F: H\to H$ operátor az alábbi tulajdonságokkal bírjon:

(i) F bihemifolytonos szimmetrikus Gâteaux-deriválttal rendelkezik;

(ii) létezik olyan $m>0$ konstans és $M:[0,\infty)\to(0,\infty)$ monoton növő függvény, melyre bármely $u,h\in H$ esetén teljesül az

$$m\|h\|^2 \le \langle F'(u)h,h\rangle \le M(\|u\|)\|h\|^2\,. \tag{3.8}$$

egyenlőtlenség.

Legyen $b\in H$ tetszőleges és jelölje $u^*\in H$ az

$$F(u)=b.$$

egyenlet egyértelműen létező megoldását.

Bármely $u_0\in H$ esetén legyen

$$M_0 := M\left(\|u_0\| + \frac{1}{m}\|F(u_0)-b\|\right). \tag{3.9}$$

Ekkor az

$$u_{n+1} = u_n - \frac{2}{M_0+m}(F(u_n)-b) \qquad (n\in\mathbf{N}) \tag{3.10}$$

sorozat lineárisan konvergál u^*-hoz, a következő becslés szerint

$$\|u_n-u^*\| \le \frac{1}{m}\,\|F(u_0)-b\|\left(\frac{M_0-m}{M_0+m}\right)^n \qquad (n\in\mathbf{N})\,. \tag{3.11}$$

Bizonyítás. Hasonlóan megy a 3.4 tétel bizonyításához. Teljes indukcióval bizonyítható, hogy

$$u_n\in B(u_0,r_0) \qquad (n\in\mathbf{N})\,, \tag{3.12}$$

ahol

$$r_0 := (1/m)\|F(u_0)-b\|$$

és $B(u_0, r_0)$-vel jelöljük az r_0-sugarú és u_0 középpontú gömböt.

Az

$$\|u\| \leq \|u_0\| + r_0 \qquad (u \in B(u_0, r_0)) \tag{3.13}$$

becslést használva (3.8) és (3.9) segítségével $F'(u)$ felülről becsülhető M_0-val:

$$\langle F'(u)h, h\rangle \leq M(\|u\|)\|h\|^2 \leq M(\|u_0\| + r_0)\|h\|^2 = M_0\|h\|^2 \qquad (u \in B(u_0, r_0))). \tag{3.14}$$

Ezt a felső becslést az iteráció minden egyes lépésére lehet alkalmazni (3.12) miatt, így a bizonyítás kész, hasonlóan az 3.4 tételhez, azzal a különbséggel, hogy M_0 van M helyett. ■

4. fejezet

Prekondicionálás lineáris operátorokkal Hilbert-téren

Ismeretes a numerikus lineáris algebrából, hogy ha a mátrix kondíciószáma nagy, akkor szükséges az alkalmas prekondicionálás. Ennek nemlineáris operátorra való kiterjesztésével foglalkozunk.

4.1. A kondíciószám definíciója és tulajdonságai

A nemlineáris operátorok kondíciószáma lineáris eset közvetlen kiterjesztése.

4.1. Definíció. Legyen H valós Hilbert-tér és legyen $F : H \supset\!\!\to H$ (nemlineáris) operátor (azaz $D(F) \subset H$), amely szigorúan monoton. Ekkor F *kondíciószámát* a következőképp definiáljuk:

$$cond(F) = \frac{\Lambda(F)}{\lambda(F)},$$

ahol

$$\Lambda(F) = \sup_{u \neq v \in D(F)} \frac{\langle F(v) - F(u), v - u \rangle}{\|v - u\|^2}, \quad \lambda(F) = \inf_{u \neq v \in D(F)} \frac{\langle F(v) - F(u), v - u \rangle}{\|v - u\|^2}.$$

A $\Lambda(F)$ és $\lambda(F)$ számokat F *spektrális határainak*nak hívjuk. Hasonlóan a lineáris esethez, itt is igaz lesz, hogy $0 < \Lambda(F) \leq \infty$, $0 \leq \lambda(F) < \infty$. Hangsúlyozzuk, hogy a kondíciószám végtelen is lehet, például: differenciáloperátor erős alakjánál, valamint minden nemkorlátos nemlineáris operátor esetén is ez az eset áll fenn. Ezt a következő példával illusztrálhatjuk:

Példa. A következő nemlineáris differenciáloperátor (T) esetén

$$cond(T) = \infty. \tag{4.1}$$

Legyen $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ korlátos tartomány és $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbf{R}^N, \mathbf{R}^N)$ olyan függvény, amely $\frac{\partial f(x,\eta)}{\partial \eta}$ deriváltmátrixa szimmetrikus és ennek λ sajátértékeire teljesül a

$$0 < \mu_1 \leq \lambda \leq \mu_2 \tag{4.2}$$

egyenlőtlenség, ahol μ_1 es μ_2 állandók, melyek függetlenek (x,η)-tól. Legyen

$$T(u) \equiv -\text{div}\, f(x, \nabla u), \tag{4.3}$$

értelmezési tartománya pedig:

$$D(T) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

az $L^2(\Omega)$ valós Hilbert-téren.

Ekkor igaz lesz, hogy

$$\langle T(v) - T(u), v - u\rangle = \int_\Omega (f(x, \nabla v) - f(x, \nabla u)) \cdot (\nabla v - \nabla u) =$$

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial \eta}(x, \nabla u + \theta \nabla(v-u))\, (\nabla v - \nabla u) \cdot (\nabla v - \nabla u) \geq \mu_1 \int_\Omega |\nabla(v-u)|^2,$$

amelyből következik, hogy

$$\Lambda(T) \geq \mu_1 \sup_{u \neq v \in D(T)} \frac{\int_\Omega |\nabla(v-u)|^2}{\int_\Omega |v-u|^2} = \infty$$

amelyből a (2.22)-t használva azt kapjuk, hogy $cond(T) = \infty$. Megjegyeznénk, hogy T az erős alakja a a következő általánosított (gyenge) differenciáloperátornak:

$$\langle F(u), v\rangle_{H_0^1(\Omega)} := \int_\Omega f(x, \nabla u) \cdot \nabla v \qquad (u, v \in H_0^1(\Omega)). \tag{4.4}$$

A kondícionálás szempontjából az operátor erős alakja a releváns, a következő okból: T végtelen kondíciószáma ($cond(T) = \infty$) áll a diszkretizált elliptikus feladatokban előforduló nagy kondíciószámok hátterében. Nevezetesen, ha a T_h függvények a T operátor bizonyos diszkretizációi során keletkeznek, akkor

$$cond(T_h) \to \infty, \quad \text{ha} \quad h \to 0$$

mert a diszkretizáció finomításával T_h kondíciószáma a T végtelen számához közelít.

Differenciálható operátorok esetén a spektrális határok kifejezhetők a deriváltoperátor segítségével:

4.1. Állítás. *Legyen $F : H \supset\to H$ Gâteaux-deriválható, (nemlineáris) operátor és legyenek $M \geq m > 0$ konstansok. Ekkor a következő állítasok ekvivalensek:*

(i) $m\|v-u\|^2 \leq \langle F(v) - F(u), v-u\rangle \leq M\|v-u\|^2 \qquad (u, v \in D(F))$;

(ii) $m\|h\|^2 \leq \langle F'(u)h, h\rangle \leq M\|h\|^2 \qquad (u, h \in D(F))$.

Bizonyítás. A Gâteaux-derivált definíciójából és a középértéktételből közvetlenül következik ■

4.1. Megjegyzés. *Ha (i) vagy (ii) fennáll, akkor*

$$cond(F) \le \frac{M}{m}.$$

Továbbá, m és M egyszerre élesek vagy sem (i)-ben vagy (ii)-ben, a fenti ekvivalencia miatt. Ha élesek, akkor egybeesnek F spektrális határaival.

A kondíciószám fő tulajdonsága egyszerű iteráció (gradiens módszer) esetén az, hogy ha felülről becsülhető $\frac{M}{m}$-el, akkor abból az következik bizonyos technikai feltételek mellett, hogy a konvergencia hányadosa $\frac{M-m}{M+m}$, azaz megegyezik a lineáris eset eredményével.

Nevezetesen a 3.4 tételből következik, hogy

4.1. Következmény. *Legyen $F : H \to H$ olyan operátor, amely bihemifolytonos szimmetrikus Gâteaux-deriválttal rendelkezik. Ha F spektrális határai $m > 0$ és $M < \infty$ közé esnek, akkor bármely $b \in H$ és $u_0 \in H$ esetén, az alábbi sorozat*

$$u_{n+1} = u_n - \frac{2}{M+m}(F(u_n) - b) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

az $F(u) = b$ egyenlet egyértelműen létező megoldáshoz ($u^* \in H$) konvergál, a következő lineáris becslés szerint:

$$\|u_n - u^*\| \le \frac{1}{m}\|F(u_0) - b\| \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n \quad (n \in \mathbf{N})\,.$$

4.2. Fix prekondicionáló operátorok

Ezen alfejezet fő tétele segítségével egy T nemlineáris operátort prekondicionálunk egy alkalmas S lineáris operátor segítségével és a következő kondíciószám becslést kapjuk:

$$cond(S^{-1}T) \le \frac{M}{m}. \tag{4.5}$$

(Precízebben, ez csak reguláris esetben állhat fenn, azaz jelen esetben, ha feltesszük azt is, hogy $R(S) \supset R(T)$, mivel ekkor $S^{-1}T$ mindenképp értelmes lesz $D(T)$-n.

Ezt el lehet kerülni, ha (4.5)-et újradefiniáljuk általánosított értelemben. Erről írunk a 4.3 megjegyzésben.

4.2. Definíció. *[Spektrális ekvivalenciafeltétel, nemlineáris eset]* Legyen H valós Hilbert-tér, $D \subset H$ sűrű altér, $T : D \to H$ (nemlineáris) operátor. Tegyük fel, hogy $S : D \to H$ egyenletesen pozitív ($S \ge pI$), szimmetrikus lineáris operátor. Azt mondjuk, hogy *T nemlineáris és S lineáris operátorok spektrálisan ekvivalensek*, ha léteznek olyan $M \ge m > 0$ állandók, amelyekre teljesül az

$$m\langle S(v-u), v-u\rangle \le \langle T(v) - T(u), v-u\rangle \le M\langle S(v-u), v-u\rangle \qquad (u, v \in D) \tag{4.6}$$

egyenlőtlenség.

4.1. Tétel. *Legyen H valós Hilbert-tér, $D \subset H$ sűrű altér, $T : D \to H$ (nemlineáris) operátor. Tegyük fel, hogy $S : D \to H$ egyenletesen pozitív ($S \geq pI$), szimmetrikus lineáris operátor, továbbá T és S spektrálisan ekvivalensek, azaz teljesítik a (4.6) egyenlőtlenséget.*

Ekkor az

$$\langle F(u), v\rangle_S = \langle T(u), v\rangle \qquad (u, v \in D) \tag{4.7}$$

azonosság egy $F : D \to H_S$ operátort definiál. Ha F kiterjeszthető H_S-re úgy, hogy rendelkezik bihemifolytonos szimmetrikus Gâteaux-deriválttal, akkor

(1) bármely $g \in H$ esetén a $T(u) = g$ egyenletnek egyértelműen létezik $u^* \in H_S$ gyenge megoldása, azaz

$$\langle F(u^*), v\rangle_S = \langle g, v\rangle \qquad (v \in H_S). \tag{4.8}$$

(Ha $g \in R(T)$, akkor $T(u^*) = g$.)

(2) Bármely $u_0 \in H_S$ esetén az

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n - \tfrac{2}{M+m} z_n\,, \\ \textit{ahol}\ \ \langle z_n, v\rangle_S &= \langle F(u_n), v\rangle_S - \langle g, v\rangle \quad (v \in H_S), \end{aligned} \tag{4.9}$$

sorozat lineárisan tart u^*-hoz, nevezetesen

$$\|u_n - u^*\|_S \leq \frac{1}{m}\|F(u_0) - b\|_S \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n \qquad (n \in \mathbf{N})\,, \tag{4.10}$$

ahol $\langle b, v\rangle_S = \langle g, v\rangle \ \ (v \in H_S)$.

(3) Ha feltesszük azt is, hogy

$$R(S) \supset R(T), \tag{4.11}$$

és ha $g \in R(S)$ és $u_0 \in D$, akkor minden $n \in \mathbf{N}$ esetén a (4.9) z_n eleme kifejezhető úgy is, hogy

$$z_n = S^{-1}(T(u_n) - g),$$

azaz, a (4.9) sorozat úgy is írható, hogy

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n - \tfrac{2}{M+m} z_n\,, \\ \textit{ahol}\ \ S z_n &= T(u_n) - g, \end{aligned} \tag{4.12}$$

továbbá, az (4.10) becslés erős alakját kapjuk:

$$\|u_n - u^*\|_S \leq \frac{1}{mp^{1/2}}\|T(u_0) - g\| \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n \qquad (n \in \mathbf{N})\,, \tag{4.13}$$

ahol $p > 0$ az S alsó határa.

Bizonyítás. Legyen $u \in D$ rögzített. Ekkor a

$$\|v\| \le p^{-1/2}\|v\|_S \tag{4.14}$$

energianormás egyenlőtlenségből következik, hogy

$$|\langle T(u), v\rangle| \le p^{-1/2}\|T(u)\|\|v\|_S \qquad (v \in D),$$

így $v \mapsto \langle T(u), v\rangle$ korlátos lineáris funkcionál $D \subset H_S$-n. Tehát egyértelműen létezik korlátos lineáris kiterjesztése H_S-re: $\Phi_u : H_S \to \mathbf{R}$, a Riesz-tétel minden $u \in D$-hoz hozzárendel egy $F(u) \in H_S$ vektort (tehát definiálunk egy $F : D \to H_S$ függvényt), amely kielégíti az

$$\langle F(u), v\rangle_S = \Phi_u\, v \qquad (v \in H_S).$$

egyenletet. Az utóbbiból következik (4.7) minden $v \in D$ esetén, azaz F az az operátor, amit kerestünk. A 3.4 tétel segítségével igazolhatók az (1)–(3) feltevések (annyi a különbség, hogy H helyett H_S-re kell alkalmazni).

Legyen F kiterjesztve H_S-re úgy, hogy bihemifolytonos szimmetrikus Gâteaux-deriválttal rendelkezik. Ezt a kiterjesztést szintén F-el jelöljük, ez nem okoz félreértést.

Az (4.6)-ből következik, hogy

$$m\|v-u\|_S^2 \le \langle F(v) - F(u), v-u\rangle_S \le M\|v-u\|_S^2 \qquad (u, v \in H_S), \tag{4.15}$$

azaz F spektrális határai 0 és M között vannak, tehát a 4.1 következmény alkalmazható F-re (a Hilbert-terünk itt is H helyett H_S). Legyen $b \in H_S$ a következő módon definiálva

$$\langle b, v\rangle_S = \langle g, v\rangle \qquad (v \in H_S), \tag{4.16}$$

ahol b léte a következő becslésnek:

$$|\langle g, v\rangle| \le p^{-1/2}\|g\|\|v\|_S \qquad (v \in D)$$

és a Riesz-tételnek köszönhető.

(1) Az $F(u) = b$ egyenletnek egyértelműen létezik $u^* \in H_S$ megoldása, és az $F(u^*) = b$ egyenlőség (4.8)-al egybeesik. Ha $g \in R(T)$, akkor (4.8) azzal egyenértékű, hogy

$$\langle T(u^*), v\rangle = \langle g, v\rangle \qquad (v \in H_S),$$

így tehát $T(u^*) = g$.

(2) A (4.16) egyenlőségből az következik, hogy (4.9) sorozat egybeesik azzal a sorozattal, amelyet az 4.1 következményben definiáltunk, amelyből végül a (4.10) becslést kaphatjuk meg.

(3) A (4.11) feltétel segítségével azt kapjuk, hogy

$$\langle T(u), v\rangle = \langle S^{-1}T(u), v\rangle_S \qquad (u, v \in D),$$

így tehát (4.7)-ből következik, hogy

$$F_{|D} = S^{-1}T. \tag{4.17}$$

Ezért, ha $u_n \in D$, akkor a (4.9)-beli segédegyenlet a következő formába írható:

$$\langle z_n, v\rangle_S = \langle T(u_n) - g, v\rangle \quad (v \in H_S),$$

amelynek a megoldása:

$$z_n = S^{-1}(T(u_n) - g) \in D.$$

Így, ha tudjuk, hogy $u_0 \in D$, abból indukcióval kapjuk, hogy az (u_n) sorozat részhalmaza D-nek és ugyanez igaz lesz z_n-re is.

Továbbá, $g \in R(S)$ esetén (4.16)-ből az következik, hogy

$$\langle b, v\rangle_S = \langle g, v\rangle = \langle S(S^{-1}g), v\rangle_S = \langle S^{-1}g, v\rangle_S \qquad (v \in H_S),$$

amelyből kapjuk, hogy $b = S^{-1}g$. Az 2.2 állítás szerint az energianormára igaz lesz a

$$\|w\|_S \le p^{-1/2}\|Sw\| \qquad (u \in D) \tag{4.18}$$

egyenlőtlenség, ezt használhatjuk a következő helyettesítéssel: $w = F(u_0) - b = S^{-1}(T(u_0) - g)$ amelyből, (4.10) segítségével nyerhetjük a bizonyítandó becslést. ■

4.2. Megjegyzés.

(1) A fenti bizonyítás szerint reguláris esetben az $F(u)$ általánosított differenciáloperátor szétesik két erős alakban lévő operátor kompozíciójára. Az általánosított differenciáloperátor definíciója (4.7) segítségével kaptuk, hogy

$$\langle F(u), v\rangle_S = \langle T(u), v\rangle = \langle S^{-1}T(u), v\rangle_S \qquad (u, v \in D),$$

azaz

$$F_{|D} = S^{-1}T\,, \tag{4.19}$$

Hasonló megfeleltetés igaz a gyenge egyenlet jobboldalára ($b \in H_0^1(\Omega)$), amelyet az (4.16)-ban definiáltunk ($Sb = g$ egyenlet gyenge megoldása): $g \in R(S)$ esetén (4.16)-ből az következik, hogy

$$\langle b, v\rangle_S = \langle g, v\rangle = \langle S(S^{-1}g), v\rangle_S = \langle S^{-1}g, v\rangle_S \qquad (v \in H_S),$$

amelyből kapjuk, hogy $b = S^{-1}g$.

$$b = S^{-1}g \ \in H_S. \tag{4.20}$$

A segédegyenletek erős alakja a fenti két reprezentáció (4.19) és (4.20) segítségével kapható meg.

(2) Általános esetben (ha nem teljesülnek a regularitási feltételek) az iteráció segédegyenlete a következő:

$$\langle z_n, v\rangle_S = \langle F(u_n) - b, v\rangle_S \qquad (v \in H_S)$$

vagy a vele ekvivalens formában:

$$z_n = F(u_n) - b\,, \tag{4.21}$$

azonban reguláris esetben a fenti reprezentációk (4.19), (4.20) használata mellett (4.21) erős alakba írható:

$$z_n = S^{-1}(T(u_n) - g)\,.$$

4.3. Megjegyzés. A (4.1) tétel bizonyításában az is kijött, hogy

$$cond(F) \leq \frac{M}{m}, \tag{4.22}$$

(H_S-ben) és ennek az eredménynek köszönhető a (4.1) tétel konvergenciaeredménye. Itt F játssza a prekondicionált operátor szerepét, amely csak extra feltétel mellett írható erős alakba. Ha még feltesszük azt is, hogy $R(S) \supset R(T)$, akkor az (4.17) egyenlőség is fennáll és így az differenciáloperátor erős alakját használva is megfogalmazhatjuk (4.22)-t:

$$cond(S^{-1}T) \leq \frac{M}{m} \tag{4.23}$$

továbbá, ekkor a (4.12) iteráció nem megy ki D-ből ($u_n \in D\,(n \in \mathbf{N})$).

Ha az $R(S) \supset R(T)$ feltétel nem teljesül, akkor $S^{-1}T$ csak D egy részhalmazán értelmezhető és így az is lehet, hogy $cond(S^{-1}T)$ irreleváns lesz. (A prekondicionálás ezen nehézsége nem merül fel véges dimenziós esetben ($H = \mathbf{R}^k$), ahol S pozitivitásából következik, hogy $R(S) = H$.) Ezért hasznos újradefiniálni (4.23)-t általánosított értelemben, amely a 4.1 tétel (plusz feltétel nélküli) alapesetét fedi le, ahol nincs feltéve, hogy $R(S) \supset R(T)$.

Akkor jöjjön az általánosított definíció:

4.3. Definíció. Tegyük fel, hogy H valós Hilbert-tér, $D(T) \subset H$ és $D(S) \subset H$ (mindenütt) sűrű, $T : D(T) \to H$ (nemlineáris) operátor és $S : D(S) \to H$ szigorúan pozitív szimmetrikus lineáris operátor, amelyek teljesítik a következő feltételeket:

(1) létezik $F : H_S \to H_S$ operátor úgy, hogy

$$\langle F(u), v\rangle_S = \langle T(u), v\rangle \qquad (u, v \in D(T));$$

(2) $cond(F) = \kappa$, ahol $\kappa \geq 1$.

Ekkor azt mondjuk, hogy

$$cond(S^{-1}T) = \kappa$$

általánosított értelemben a H_S Hilbert-téren.

4.4. Megjegyzés. Ha a kondíciószámunk végtelen ($cond(T) = \infty$), és az a célunk, hogy azt prekondicionálással végessé (4.5) tegyük (S a prekondicionáló operátor), akkor olyan S-et kell választanunk, mely kondíciószáma szintén végtelen ($cond(S) = \infty$), azaz S nem lehet korlátos. Azonban az S operátort úgy kell választani, hogy a (4.12)-beli segédegyenletet viszonylag egyszerűen, legalábbis az eredetinél lényegesen könnyebben lehessen megoldani.

4.5. Megjegyzés. Ha az eredeti F operátorunk Gâteaux-deriválható, akkor a 4.1 tételt az F' derivált segítségével is megfogalmazhatjuk. A két eset megkülönböztetése céljából különböző jelöléseket használunk. Nevezetesen, tekintsünk egy $F : H \to H$ Gâteaux-deriválható operátort, amely teljesíti a (4.6) spektrális ekvivalenciafeltételt (a lineáris operátort most S helyett B-vel jelöljük):

$$m\langle B(v-u), v-u\rangle \le \langle F(v)-F(u), v-u\rangle \le M\langle B(v-u), v-u\rangle \qquad (u, v \in H).$$

Erre alkalmazhatjuk az 4.1 állítást, csak a $\|.\|_B$-normát kell használnunk, így tehát azt kapjuk, hogy

$$m\|h\|_B^2 \le \langle F'(u)h, h\rangle \le M\|h\|_B^2 \qquad (u, h \in H), \tag{4.24}$$

ekkor a $\|.\|_B$-normát skaláris szorzattá alakítva kapjuk az (2.7) spektrális ekvivalenciát:

$$m\langle Bh, h\rangle \le \langle F'(u)h, h\rangle \le M\langle Bh, h\rangle \qquad (u, h \in H) \tag{4.25}$$

amelyből adódik, hogy

$$cond\left(B^{-1}F'(u)\right) \le \frac{M}{m} \qquad (u \in H).$$

Ezt ki is mondhatjuk az alábbi következményben:

4.2. Következmény. *Legyen H valós Hilbert-tér. Legyen $F : H \to H$ bihemifolytonos szimmetrikus Gâteaux-deriválttal rendelkező (nemlineáris) operátor. Legyen $b \in H$ és jelölje u^* az $F(u) = b$ egyértelműen létező megoldását. Továbbá legyen B egyenletesen pozitív ($S \ge pI$), önadjungált korlátos lineáris operátor, amelyre teljesül a*

$$m\langle Bh, h\rangle \le \langle F'(u)h, h\rangle \le M\langle Bh, h\rangle \qquad (u, h \in H) \tag{4.26}$$

egyenlőtlenség, megfelelő $M \ge m > 0$ állandókkal. Ekkor bármely $u_0 \in H$ esetén az alábbi sorozat:

$$u_{n+1} = u_n - \frac{2}{M+m}\, B^{-1}(F(u_n) - b) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

lineárisan konvergál u^*-hoz, a következő becslés szerint:

$$\|u_n - u^*\|_B \le \frac{1}{mp^{1/2}}\|F(u_0) - b\| \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n \qquad (n \in \mathbf{N}). \tag{4.27}$$

Most általánosítjuk az előző 4.1 tételt úgy, hogy a (4.6) ekvivalencia feltételt gyengítjük:

4.2. Tétel. *(i) Legyen $D(S) \subset D$ a $D := D(T) \subset H$ részhalmaza. Ha az (4.6) feltételt a következőre cseréljük:*

$$m\|v-u\|_S^2 \le \langle T(v) - T(u), v-u\rangle \le M\|v-u\|_S^2 \qquad (u, v \in D), \tag{4.28}$$

és az 4.1 tétel további feltételeit is fenntartjuk, akkor a tétel (1) és (2) állítása (továbbra is) igaz marad.

(ii) Ha az (4.6) feltételt a következőre cseréljük: létezik olyan $m > 0$ konstans és $M : [0, \infty) \to (0, \infty)$ monoton növő függvény, melyekre teljesül, hogy

$$m \langle S(v-u), v-u \rangle \le \langle T(v) - T(u), v-u \rangle \le M(r) \langle S(v-u), v-u \rangle \qquad (u, v \in D,\ \|u\|_S, \|v\|_S \le r) \tag{4.29}$$

akkor az 4.1 tétel következő módosítása igaz marad: a (2) és (3) állításokban az M konstans helyére alább definiált, u_0-tól függő

$$M_0 := M\left(\|u_0\| + \frac{1}{m} \|F(u_0) - b\| \right).$$

állandót kell írni.

Bizonyítás. Hasonlóan megy, mint az 4.1 tétel bizonyítása. A (ii) részhez 3.5 tételt kell használni 3.4 tétel helyett. ■

4.6. Megjegyzés. Legyen H valós Hilbert-tér, $D \subset H$ sűrű altér. Legyen $S : D \to H$ szigorúan pozitív szimmetrikus lineáris operátor. F pedig legyen az az operátor, amelyet $T : D \to H$ (nemlineáris) operátor és (4.7) segítségével definiálunk:

$$\langle F(u), v \rangle_S = \langle T(u), v \rangle \qquad (u, v \in D) \tag{4.30}$$

ez az azonosság egy $F : D \to H_S$ operátort definiál. Az 4.2 tétel (i) és (ii) részének feltételeit megfogalmazhatjuk F deriváltjának segítségével. Nevezetesen:

(i) az (4.28) feltételt úgy írhatjuk, hogy

$$m\|v-u\|_S^2 \le \langle F(v) - F(u), v-u \rangle_S \le M\|v-u\|_S^2 \qquad (u, v \in H_S)$$

amely, az 4.1 állítás miatt ekvivalens a következővel:

$$m\|h\|_S^2 \le \langle F'(u)h, h \rangle_S \le M\|h\|_S^2 \qquad (u, h \in H_S); \tag{4.31}$$

(ii) az (4.29) feltételt úgy írhatjuk, hogy

$$m\|v-u\|_S^2 \le \langle F(v) - F(u), v-u \rangle_S \le M(r)\,\|v-u\|_S^2 \qquad (u, v \in H_S,\ \|u\|_S, \|v\|_S \le r)$$

amely, az 4.1 állítás miatt ekvivalens a következővel:

$$m\|h\|_S^2 \le \langle F'(u)h, h \rangle_S \le M(\|u\|_S)\|h\|_S^2 \qquad (u, h \in H_S). \tag{4.32}$$

5. fejezet

Nemlineáris elliptikus feladatok megoldhatósága és iterációs közelítése

5.1. Az általánosított differenciáloperátor néhány tulajdonsága

5.1.1. Általánosított deriválás

A multiindexek száma: d, multiindex: $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbf{N}^N$, (ahol $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_N \leq n$). Legyen $\xi \in \mathbf{R}^{rd}$ vektor a következőképp definiálva: $\xi := (\xi_{i,\alpha})_{i=1,..,r,\ |\alpha|\leq n} = \big((\xi_{1,\alpha})_{|\alpha|\leq n}, .., (\xi_{r,\alpha})_{|\alpha|\leq n}\big)$, ahol $\xi_{i,\alpha} \in \mathbf{R} \quad (i = 1, .., r, |\alpha| \leq n)$. A $\xi_{i,\alpha}$ változóra nézve való deriválást $\partial_{\xi_{i,\alpha}}$-val jelöljük, $(i = 1, .., r,\ |\alpha| \leq n)$. Legyen $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ korlátos tartomány. Továbbá legyen

$$D^{(n)}u := (\partial^\alpha u_i)_{i=1,..,r,\ |\alpha|\leq n}$$

bármely $u = (u_1, .., u_r) \in H_0^n(\Omega)^r$ esetén.

5.1.2. Az operátor differenciálhatósági tulajdonságai

Jelölések: a $H_0^n(\Omega)$ Szoboljev-teret a következő skaláris szorzatal lássuk el:

$$\langle w, v\rangle_{H_0^n(\Omega)} := \int_\Omega \sum_{i_1,..,i_n=1}^{N} (\partial_{i_1}..\partial_{i_n} w)(\partial_{i_1}..\partial_{i_n} v)$$

Most az előbbi terek r-tagból képzett szorzatterét értelmezzük:
$H_0^n(\Omega)^r := H_0^n(\Omega) \times \cdots \times H_0^n(\Omega)$, továbbá ezen teret lássuk el a következő skaláris szorzattal:

$$\langle w, v\rangle_{H_0^n(\Omega)^r} := \sum_{i=1}^{r} \langle w_i, v_i\rangle_{H_0^n(\Omega)} \ .$$

Az előbbieken kívül további két skaláris szorzatot is használni fogunk $H_0^n(\Omega)$-n:

$$\langle w, v\rangle^*_{H_0^n(\Omega)} := \int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq n} (\partial^\alpha w)(\partial^\alpha v), \text{ illetve } \langle w, v\rangle'_{H_0^n(\Omega)} := \int_\Omega \sum_{|\alpha|=n} (\partial^\alpha w)(\partial^\alpha v).$$

5.1. Állítás. *$H_0^n(\Omega)$-n ezek ekvivalensek az eredeti normával: léteznek olyan $\omega_1, \omega_2 > 0$ állandók, amelyekre teljesül a következő:*

$$\omega_1 \|w\|_{H_0^n(\Omega)} \le \|w\|'_{H_0^n(\Omega)} \le \|w\|^*_{H_0^n(\Omega)} \le \omega_2 \|w\|_{H_0^n(\Omega)} \,. \tag{5.1}$$

egyenlőtlenség.

5.1. feltételek. Legyen $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ korlátos tartomány. Az $f_{i,\alpha} : \Omega \times \mathbf{R}^{rd} \to \mathbf{R}$ függvények teljesítsék a következő feltételeket:

(i) $f_{i,\alpha} \in C^{|\alpha|}(\Omega \times \mathbf{R}^{rd})$, $\quad f_{i,0} \in C^1(\Omega \times \mathbf{R}^{rd}) \quad (i = 1, .., r,\ 0 < |\alpha| \le n)$;

(ii) $\partial_{\xi_{i,\alpha}} f_{j,\beta} = \partial_{\xi_{j,\beta}} f_{i,\alpha} \quad (i, j = 1, .., r;\ |\alpha|\,, |\beta| \le n)\,;$

(iii) Léteznek olyan $0 < \mu_1 \le \mu_2$ konstansok, melyekkel bármely $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbf{R}^{rd}$ és $\zeta \in \mathbf{R}^{rd}$ esetén

$$\mu_1 \sum_{i=1}^{r} \sum_{|\alpha|=n} |\zeta_{i,\alpha}|^2 \le \sum_{i,j=1}^{r} \sum_{|\alpha|,|\beta|\le n} \partial_{\xi_{j,\beta}} f_{i,\alpha}(x,\xi) \zeta_{j,\beta} \zeta_{i,\alpha} \le \mu_2 \sum_{i=1}^{r} \sum_{|\alpha|\le n} |\zeta_{i,\alpha}|^2.$$

5.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a 5.1 feltételek teljesülnek. Ekkor a következő képlet:*

$$\langle F(u), v \rangle_{H_0^n(\Omega)^r} := \int_\Omega f(x, D^{(n)}u) \cdot D^{(n)} v \, dx \tag{5.2}$$

$$\equiv \int_\Omega \sum_{i=1}^{r} \sum_{|\alpha|\le n} f_{i,\alpha}(x, D^{(n)}u)\, \partial^\alpha v_i \; dx \qquad (u, v \in H_0^n(\Omega)^r)$$

egy $F : H_0^n(\Omega)^r \to H_0^n(\Omega)^r$ operátort definiál, amely bihemifolytonos szimmetrikus Gâteaux-deriválttal rendelkezik, és teljesül az alábbi:

$$m \|h\|^2_{H_0^n(\Omega)^r} \le \langle F'(u)h, h \rangle_{H_0^n(\Omega)^r} \le M \|h\|^2_{H_0^n(\Omega)^r} \qquad (u, h \in H_0^n(\Omega)^r) \tag{5.3}$$

egyenlőtlenség, alkalmas $M \ge m > 0$ konstansokkal (konkrétan, $m := \mu_1 \omega_1^2$ és $M := \mu_2 \omega_2^2$, ahol ω_1 és ω_2 az (5.1)-beliek.)

Bizonyítás. Először pár megjegyzés: A (iii) feltételből következik, hogy minden $i, j = 1, .., r$, $|\alpha|\,, |\beta| \le n$-re és $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbf{R}^{rd}$-re

$$\left| \partial_{\xi_{j,\beta}} f_{i,\alpha}(x, \xi) \right| \le \mu_2 \,,$$

továbbá a Lagrange-egyenlőtlenségből következik, hogy bármely $i = 1, .., r$, $|\alpha| \le n\,,\quad (x, \xi) \in \Omega \times \mathbf{R}^{rd}$ esetén

$$|f_{i,\alpha}(x, \xi)| \le |f_{i,\alpha}(x, 0)| + \mu_2 \sum_{j=1}^{r} \sum_{|\beta|\le n} |\xi_{j,\beta}| \,.$$

Igazolni fogjuk, hogy a következő képlet bármely $i = 1, ..., r$ esetén a következő képlet

$$\langle F_i(u), v\rangle_{H_0^n(\Omega)} := \int_\Omega \sum_{|\alpha|\le n} f_{i,\alpha}(x, D^{(n)}u)\partial^\alpha v \; dx \qquad (v \in H_0^n(\Omega)) \tag{5.4}$$

egy $F_i : H_0^n(\Omega)^r \to H_0^n(\Omega)$ operátort definiál. Ez az operátor korlátos, mert bármely rögzített $u \in H_0^n(\Omega)^r$ esetén

$$|\langle F_i(u), v\rangle_{H_0^n(\Omega)}| = |\int_\Omega \sum_{|\alpha|\le n} f_{i,\alpha}(x, D^{(n)}u)\partial^\alpha v \; dx| \le$$

$$\le \int_\Omega \sum_{|\alpha|\le n} \left(|f_{i,\alpha}(x,0)| + \mu_2 \sum_{j=1}^r \sum_{|\beta|\le n} |\partial^\beta u_j(x)| \right) |\partial^\alpha v(x)| dx \le$$

$$\le \sqrt{d} \left(\max_{|\alpha|\le n} \|f_{i,\alpha}(id_\Omega, 0)\|_{L^2(\Omega)} + \mu_2 \sqrt{rd} \|u\|^*_{H_0^n(\Omega)^r} \right) \|v\|^*_{H_0^n(\Omega)},$$

tehát ez a v változó szerint egy ($H_0^n(\Omega)$ téren értelmezett) korlátos lineáris funkcionál. Így a Riesz-tételnek köszönhetően $F_i(u) \in H_0^n(\Omega)$ definiálható tetszőleges $u \in H_0^n(\Omega)^r$ esetén. Tehát az (5.2) operátor az (5.4) koordináták segítségével megadva jóldefiniált:

$$F(u) := (F_1(u), .., F_r(u)) \in H_0^n(\Omega)^r \qquad (u \in H_0^n(\Omega)^r). \tag{5.5}$$

Most belátjuk F-ről, hogy rendelkezik bihemifolytonos szimmetrikus Gâteaux-deriválttal és teljesül rá a (5.3) becslés,

(i) bármely $u \in H_0^n(\Omega)^r$ esetén legyen $S_i(u) \in L\left(H_0^n(\Omega)^r, H_0^n(\Omega)\right)$ korlátos lineáris operátor, melyet a következő képlet segítségével definiálunk:

$$\langle S_i(u)h, v\rangle_{H_0^n(\Omega)} := \int_\Omega \sum_{j=1}^r \sum_{|\alpha|,|\beta|\le n} \partial_{\xi_{j,\beta}} f_{i,\alpha}(x, D^{(n)}u)(\partial^\beta h_j)(\partial^\alpha v) \; dx$$

(bármely $h \in H_0^n(\Omega)^r, v \in H_0^n(\Omega)$ esetén). $S_i(u)$ létezét ismét a Riesz-tétel szolgáltatja. A jobboldali integrálra a következő becslést tehetjük: $\mu_2 \sqrt{r} d \|h\|^*_{H_0^n(\Omega)^r} \|v\|^*_{H_0^n(\Omega)}$.
Állítás: F_i Gâteaux-deriválható ($i = 1, .., r$), azaz

$$F_i'(u) = S_i(u) \qquad (u \in H_0^n(\Omega)^r). \tag{5.6}$$

Legyen $u, h \in H_0^n(\Omega)^r$ és $\mathcal{E} := \left\{ v \in H_0^n(\Omega) : \|v\|_{H_0^n(\Omega)} = 1 \right\}$. Ekkor

$$\delta^i_{u,h}(t) := \frac{1}{t} \|F_i(u + th) - F_i(u) - tS_i(u)h\|_{H_0^n(\Omega)}$$

$$= \frac{1}{t} \sup_{v\in\mathcal{E}} \langle F_i(u + th) - F_i(u) - tS_i(u)h, v\rangle_{H_0^n(\Omega)}$$

$$= \frac{1}{t} \sup_{v\in\mathcal{E}} \int_\Omega \sum_{|\alpha|\le n} \left[f_{i,\alpha}\left(x, D^{(n)}u(x) + tD^{(n)}h(x)\right) - f_{i,\alpha}\left(x, D^{(n)}u(x)\right) - \right.$$

$$-t\sum_{j=1}^{r}\sum_{|\alpha|,|\beta|\le n}\partial_{\xi_{j,\beta}}f_{i,\alpha}\left(x,D^{(n)}u(x)\right)\partial^\beta h_j(x)\Bigg]\partial^\alpha v(x)dx$$

$$=\sup_{v\in\mathcal{E}}\int_\Omega\sum_{\alpha,\beta,j}\left[\partial_{\xi_{j,\beta}}f_{i,\alpha}\left(x,D^{(n)}u(x)+t\theta(x,t)D^{(n)}h(x)\right)-\right.$$

$$\left.-\partial_{\xi_{j,\beta}}f_{i,\alpha}\left(x,D^{(n)}u(x)\right)\right]\partial^\beta h_j(x)\partial^\alpha v(x)dx$$

$$\le\sup_{v\in\mathcal{E}}\left\{\sum_{\alpha,\beta,j}\left\|\left(\partial_{\xi_{j,\beta}}f_{i,\alpha}(id,D^{(n)}u+t\theta D^{(n)}h)-\partial_{\xi_{j,\beta}}f_{i,\alpha}(id,D^{(n)}u)\right)\partial^\beta h_j\right\|_{L^2(\Omega)}\times\right.$$

$$\left.\times\|\partial^\alpha v\|_{L^2(\Omega)}\right\}\,.$$

Itt $\|\partial^\alpha v\|_{L^2(\Omega)}\le\|v\|^*_{H_0^n(\Omega)}\le\omega_2\quad(|\alpha|\le n)$, továbbá $|t\theta(x,t)D^{(n)}h(x)|\le|tD^{(n)}h(x)|\to 0\quad(\text{ha } t\to 0)$ mm. (majdnem mindenütt) Ω -n, így $\partial_{\xi_{j,\beta}}f_{i,\alpha}$ folytonosságából következik, hogy az összeg minden tagjában az első tényező 0-hoz konvergál mm., ha $t\to 0$. Mivel az integrandus felülről becsülhető a következővel: $\left(2\mu_2|\partial^\beta h_j(x)|\right)^2$, amely $L^1(\Omega)$-beli (bármely $|\beta|\le n$ és $j=1,..,r$ esetén), tehát van $L^1(\Omega)$-beli majoránsunk, így a Lebesgue-tételből következik, hogy a kapott kifejezés 0-hoz tart, ha $t\to 0$. Így azt kaptuk, hogy

$$\lim_{t\to 0}\delta^i_{u,h}(t)=0\ ,$$

azaz (5.6)-t beláttuk. Végül, (5.6) és (5.5)-ből következik, hogy F Gâteaux-deriválható, továbbá az is, hogy

$$F'(u)=S(u)\equiv(S_1(u),..,S_r(u))\qquad(u\in H_0^n(\Omega)^r).$$

(ii) - Az (i) ponthoz hasonlóan bizonyítható, hogy F' bihemifolytonos. Nevezetesen az $u,k,w,h\in H_0^n(\Omega)^r$ függvények legyenek rögzítve. Ekkor

$$\omega^i_{u,k,w,h}(s,t):=\|F_i'(u+sk+tw)h-F_i'(u)h\|_{H_0^n(\Omega)}=$$

$$=\sup_{v\in\mathcal{E}}\langle F_i'(u+sk+tw)h-F_i'(u)h,v\rangle_{H_0^n(\Omega)}=$$

$$=\sup_{v\in\mathcal{E}}\int_\Omega\sum_{\alpha,\beta,j}\left[\partial_{\xi_{j,\beta}}f_{i,\alpha}\left(x,D^{(n)}u(x)+sD^{(n)}k(x)+tD^{(n)}w(x)\right)-\right.$$

$$\left.-\partial_{\xi_{j,\beta}}f_{i,\alpha}\left(x,D^{(n)}u(x)\right)\right]\partial^\beta h_j(x)\partial^\alpha v(x)dx\,.$$

A $\partial_{\xi_{j,\beta}}f_{i,\alpha}$ függvények folytonosságából, illetve a Lebesgue-tételből kapjuk (hasonlóan a fentiekhez), hogy

$$\lim_{s,t\to 0}\omega^i_{u,k,w,h}(s,t)=0\,,$$

azaz, az

$$(s,t)\mapsto F_i'(u+sk+tw)h$$

függvény folytonos lesz $\mathbf{R}^2$-rol $H_0^n(\Omega)$-ra. Végül (5.5) alapján kapjuk, hogy F' bihemifolytonos.

(iii) - Az önadjungáltság a (ii) feltételből következik, ugyanis minden $u, h, v \in H_0^n(\Omega)^r$-re

$$\langle F'(u)h, v\rangle_{H_0^n(\Omega)^r} = \sum_{i=1}^{r} \langle F_i'(u)h, v_i\rangle_{H_0^n(\Omega)}$$

$$= \int_\Omega \sum_{i,j} \sum_{|\alpha|,|\beta|} \partial_{\xi_{j,\beta}} f_{i,\alpha}(x, D^{(n)}u)(\partial^\beta h_j)(\partial^\alpha v_i)dx$$

$$= \int_\Omega \sum_{i,j} \sum_{|\alpha|,|\beta|} \partial_{\xi_{i,\alpha}} f_{j,\beta}(x, D^{(n)}u)(\partial^\beta h_j)(\partial^\alpha v_i)dx$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \left\langle h_j, F_j'(u)v\right\rangle_{H_0^n(\Omega)} = \langle F'(u)v, h\rangle_{H_0^n(\Omega)^r},$$

azaz $F'(u)$ önadjungált. Így igazoltuk, hogy F bihemifolytonos szimmetrikus Gâteaux-deriválttal rendelkezik.

(iv) A fenti képletben a $v = h$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\langle F'(u)h, h\rangle_{H_0^n(\Omega)^r} = \int_\Omega \sum_{i,j} \sum_{\alpha,\beta} \partial_{\xi_{j,\beta}} f_{i,\alpha}(x, D^{(n)}u)(\partial^\beta h_j)(\partial^\alpha h_i)dx\,.$$

Így a (iii) feltételből következik, hogy

$$\mu_1 \left(\|h\|'_{H_0^n(\Omega)^r}\right)^2 \le \langle F'(u)h, h\rangle_{H_0^n(\Omega)^r} \le \mu_2 \left(\|h\|^*_{H_0^n(\Omega)^r}\right)^2 \quad \left(h \in H_0^n(\Omega)^r\right),$$

ebből (5.1) segítségével azt kapjuk, hogy

$$m\|h\|^2_{H_0^n(\Omega)^r} \le \langle F'(u)h, h\rangle_{H_0^n(\Omega)^r} \le M\|h\|^2_{H_0^n(\Omega)^r} \qquad \left(h \in H_0^n(\Omega)^r\right),$$

ahol $m = \mu_1\omega_1^2$ es $M = \mu_2\omega_2^2$. Azaz (5.3)-t is beláttuk, így kész a bizonyítás. ∎

5.2. feltételek. Legyen $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ korlátos tartomány, az f_i, q_i és s_i $(i = 1, ..., r)$ függvények teljesítsék a következő feltételeket:

(i) $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ korlátos tartomány szakaszonként sima peremmel, $\Gamma_N, \Gamma_D \subset \partial\Omega$ mérhető, $\Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset$ és $\Gamma_N \cup \Gamma_D = \partial\Omega$.

(ii) $f_i : \Omega \times \mathbf{R}^{Nr} \to \mathbf{R}^N$, $q_i : \Omega \times \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}$ és $s_i : \Gamma_N \times \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}$ függvények mérhetőek és korlátosak $x \in \Omega$ változóra vonatkozóan (illetve $x \in \Gamma_N$, megfelelően) és C^1-beliek a többi változóban.

(iii) Legyen $f_i = (f_{i1}, ..., f_{iN})$ és $f = (f_{11}, ..., f_{1N}, f_{21}, ..., f_{2N}, ..., f_{r1}, ..., f_{rN}) : \Omega \times \mathbf{R}^{Nr} \to \mathbf{R}^{Nr}$. Bármely $(x, \eta) \in \Omega \times \mathbf{R}^{Nr}$ esetén, a $\{\partial_{\eta_k} f_j(x, \eta)\}_{j,k=1,...,Nr}$ derivált-mátrixok szimmetrikusak és $\lambda_j^{(f)}(x, \eta)$ $(j = 1, ..., rN)$ sajátértékeik teljesítik a következő egyenlőtlenséget:

$$\mu_1 \le \lambda_j^{(f)}(x, \eta) \le \mu_2,$$

ahol $\mu_2 \ge \mu_1 > 0$ konstansok függetlenek (x, η)-től.

(iv) Legyen $2 \le p$ (ha $N=2$) vagy $2 \le p \le \frac{2N}{N-2}$ (ha $N>2$). Valamint olyan $c_i, d_i \ge 0$ és $2 \le p_i \le p$ $(i=1,2)$ állandók léteznek, amelyekre bármely $(x,\xi) \in \Omega \times \mathbf{R}^r$ esetén a $\{\partial_{\xi_k} q_j(x,\xi)\}_{j,k=1,...,r}$ deriváltmátrixok szimmetrikusak és $\lambda_j^{(q)}(x,\xi)$ $(j = 1,...,r)$ sajátértékeik teljesítik az alábbi egyenlőtlenséget:

$$0 \le \lambda_j^{(q)}(x,\xi) \le c_1 + c_2 \sum_{j=1}^{r} |\xi_j|^{p_1-2},$$

továbbá, bármely $(x,\xi) \in \Gamma_N \times \mathbf{R}^r$ esetén a $\{\partial_{\xi_k} s_j(x,\xi)\}_{j,k=1,...,r}$ deriváltmátrixok szimmetrikusak és $\lambda_j^{(s)}(x,\xi)$ $(j = 1,...,r)$ sajátértékek teljesítik a következő egyenlőtlenséget:

$$0 \le \lambda_j^{(s)}(x,\xi) \le d_1 + d_2 \sum_{j=1}^{r} |\xi_j|^{p_2-2}.$$

(v) Vagy $\Gamma_D \ne \emptyset$, vagy $x \mapsto \inf_{\xi \in \mathbf{R}^r, j=1,..,r} \lambda_j^{(s)}(x,\xi)$ függvény nem azonosan 0 mm. Γ_N-n.

Legyen

$$H_D^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) :\ u_{|\Gamma_D} = 0\} \tag{5.7}$$

Szoboljev-tér a következő skaláris szorzattal

$$\langle u,v\rangle_{H_D^1(\Omega)} := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma_N} \beta uv \, d\sigma \qquad (u,v \in H_D^1(\Omega)), \tag{5.8}$$

ahol

$$\beta(x) \equiv \frac{1}{\mu_1} \inf_{\xi \in \mathbf{R}^r, j=1,..,r} \lambda_j^{(s)}(x,\xi) \qquad (x \in \Gamma_N), \tag{5.9}$$

továbbá μ_1 -et és $\lambda_j^{(s)}(x,\xi)$-t rendre a (iii) és (iv) feltevésekben vezettük be. (Megjegyzés: (v) feltétel biztosítja (5.8) skaláris szorzat pozitív definitségét.)

$H_D^1(\Omega)^r$ Szoboljev-tér az alábbi skaláris szorzattal:

$$\langle u,v\rangle_{H_D^1(\Omega)^r} := \sum_{i=1}^{r} \langle u_i, v_i\rangle_{H_D^1(\Omega)} \qquad (u,v \in H_D^1(\Omega)^r).$$

A következő Szoboljev-beágyazások (ill. becslések) állnak fenn:

$$H_D^1(\Omega) \subset L^p(\Omega), \qquad \|u\|_{L^p(\Omega)} \le K_{p,\Omega} \|u\|_{H_D^1} \quad (u \in H_D^1(\Omega)), \tag{5.10}$$

$$H_D^1(\Omega)_{|\Gamma_N} \subset L^p(\Gamma_N), \qquad \|u\|_{L^p(\Gamma_N)} \le K_{p,\Gamma_N} \|u\|_{H_D^1} \quad (u \in H_D^1(\Omega)_{|\Gamma_N}) \quad , \tag{5.11}$$

ahol $K_{p,\Omega} > 0$ és $K_{p,\Gamma_N} > 0$ a megfelelő konstansok és $H_D^1(\Omega)_{|\Gamma_N}$ jelöli $H_D^1(\Omega)$ nyomát Γ_N-n.

5.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy az 5.2 feltételek teljesülnek, ekkor a következő képlet*

$$\langle F(u),v\rangle_{H^1_D(\Omega)^r} := \int\limits_\Omega \big(f(x,\nabla u)\cdot\nabla v + q(x,u)\cdot v\big)\ dx + \int\limits_{\Gamma_N} s(x,u)\cdot v\, d\sigma$$

$$\equiv \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^r \big(f_i(x,\nabla u_1,..,\nabla u_r)\cdot\nabla v_i + q_i(x,u_1,..,u_r)v_i\big)\ dx + \int\limits_{\Gamma_N}\sum_{i=1}^r s_i(x,u_1,..,u_r)v_i\, d\sigma$$

$$(u,v\in H^1_D(\Omega)^r) \tag{5.12}$$

egy $F : H^1_D(\Omega)^r \to H^1_D(\Omega)^r$ operátort definiál, amely bihemifolytonos szimmetrikus Gâteaux-deriválttal rendelkezik, amely teljesíti a következő egyenlőtlenséget:

$$m\|h\|^2_{H^1_D(\Omega)^r} \le \langle F'(u)h,h\rangle_{H^1_D(\Omega)^r} \le M(\|u\|_{H^1_D(\Omega)^r})\|h\|^2_{H^1_D(\Omega)^r} \qquad (u,h\in H^1_D(\Omega)^r) \tag{5.13}$$

ahol $m=\mu_1>0$ konstans és

$$M(r) := \mu_2 + c_1K^2_{2,\Omega} + d_1K^2_{2,\Gamma_N} + c_2C^*K^{p_1}_{p_1,\Omega}r^{p_1-2} + d_2C^*K^{p_2}_{p_2,\Gamma_N}r^{p_2-2} \qquad (r>0), \tag{5.14}$$

monoton növő függvény, ahol $K_{2,\Omega}, K_{2,\Gamma_N}, K_{p_1,\Omega}, K_{p_2,\Gamma_N} > 0$ az (5.71)–(5.72)-ben szereplő beágyazási konstansok, C^* a 5.2 bizonyításában szereplő állandó.

Bizonyítás. Hasonló az 5.1 tétel bizonyításához megfelelő változtatásokkal. Bontsuk az F operátort három tagra

$$F(u) = A(u) + B(u) + C(u) \qquad (u\in H^1_D(\Omega)^r),$$

mégpedig úgy, hogy

$$\langle A(u),v\rangle_{H^1_D(\Omega)^r} = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^r f_i(x,\nabla u_1,..,\nabla u_r)\cdot\nabla v_i\, dx \qquad (u,v\in H^1_D(\Omega)^r) \tag{5.15}$$

$$\langle B(u),v\rangle_{H^1_D(\Omega)^r} = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^r q_i(x,u_1,..,u_r)v_i\, dx\,, \qquad (u,v\in H^1_D(\Omega)^r) \tag{5.16}$$

$$\langle C(u),v\rangle_{H^1_D(\Omega)^r} = \int\limits_{\Gamma_N} \sum_{i=1}^r s_i(x,u_1,..,u_r)v_i\, d\sigma \qquad (u,v\in H^1_D(\Omega)^r). \tag{5.17}$$

(Jelölés: A következőkben elhagyjuk a dx-et az integrálokban.)
A három tagra egyenként fogjuk igazolni a bizonyítandó tulajdonságokat.
(A) Az f függvény egyenletesen elliptikus a (iii) feltételnek köszönhetően, így az A operátor bizonyítása a 5.1 tétel speciális esete lesz. A Gâteaux-deriváltja:

$$\langle A'(u)h,v\rangle_{H^1_D(\Omega)^r} = \int_\Omega \sum_{j,k=1}^{Nr} \partial_{\eta_k} f_j(x,\nabla u_1,..,\nabla u_r)\,\partial_k v\,\partial_k v\,, \tag{5.18}$$

(iii) feltétel jelöléseit használjuk, beleértve az indexelést is, a ∇v gradiens vektor koordinátáit $\{\partial_k v\}_{k=1}^{Nr}$-vel jelöljük $v \in H_D^1(\Omega)^r$ függvény esetén. Továbbá a $\partial_{\eta_k} f_j$ mátrix sajátértékeinek spektrális határai: μ_1, μ_2, továbbá a következő újraindexelés:

$$\sum_{j,k=1}^{Nr} |\partial_k h|^2 = \sum_{i=1}^{r} |\nabla h_i|^2 \qquad (h \in H_D^1(\Omega)^r)$$

segítségével kapjuk, hogy

$$\mu_1 \sum_{i=1}^{r} \int_\Omega |\nabla h_i|^2 \le \langle A'(u)h, h\rangle_{H_D^1(\Omega)^r} \le \mu_2 \sum_{i=1}^{r} \int_\Omega |\nabla h_i|^2 \qquad (h \in H_D^1(\Omega)^r). \qquad (5.19)$$

(B) Az 5.1 tétel bizonyítását követve igazoljuk, hogy bármely $(i = 1, ..., r)$ esetén a következő képlet:

$$\langle B_i(u), v\rangle_{H_D^1(\Omega)} := \int_\Omega q_i(x, u_1, .., u_r) v_i \qquad (u \in H_D^1(\Omega)^r,\ v \in H_D^1(\Omega)) \qquad (5.20)$$

egy $B_i : H_D^1(\Omega)^r \to H_D^1(\Omega)$ operátort definiál.

A bizonyításhoz pár észrévetelre van szükség:

1. A (iv) feltételből következik, hogy bármely $i, k = 1, \ldots, r$ és $(x, \xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbf{R}^r$ esetén
$$|\partial_{\xi_k} q_i(x, \xi)| \le c_1 + c_2 \sum_{j=1}^{r} |\xi_j|^{p_1 - 2}. \qquad (5.21)$$

2. Ebből az következik, a Lagrange-egyenlőtlenség segítségével, hogy minden $i = 1, \ldots, r$, $(x, \xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbf{R}^r$-re
$$|q_i(x, \xi)| \le |q_i(x, 0)| + \left(c_1 + c_2 \sum_{j=1}^{r} |\xi_j|^{p_1 - 2}\right) \sum_{k=1}^{r} |\xi_k| \le c_1' + c_2' \sum_{j=1}^{r} |\xi_j|^{p_1 - 1}, \quad (5.22)$$
ahol $c_1', c_2' > 0$ alkalmas konstansok.

3. Legyen $q_1 > 1$ úgy definiálva, hogy ${p_1}^{-1} + {q_1}^{-1} = 1$. Bármely $u \in H_D^1(\Omega)^r$ esetén legyen
$$Q(u) \equiv c_2' \sum_{j=1}^{r} |u_j|^{p_1 - 1} = c_2' \sum_{j=1}^{r} |u_j|^{p_1/q_1}.$$

Ebből és (5.22)-ből azt kapjuk, hogy $|q_i(x, u)| \le c_1' + Q(u)$, ahol $Q(u) \in L^{q_1}(\Omega)$, így (5.20) jobboldalát a következő kifejezéssel becsülhetjük felülről:

$$c_1' |\Omega|^{1/2} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|Q(u)\|_{L^{q_1}(\Omega)} \|v\|_{L^{p_1}(\Omega)},$$

ahol $|\Omega|$ az Ω mértéket jelöli. (5.71)-et használva $p = p_1$ helyettesítés mellett láthatjuk, hogy bármely rögzített $u \in H_D^1(\Omega)^r$ esetén (5.20) jobboldala egy $(H_D^1(\Omega)^r$-téren értelmezett) korlátos lineáris funkcionált definiál. Így a Riesz-tételből következik, hogy $B_i : H^1_D(\Omega)^r \to H^1_D(\Omega)$ operátor jóldefiniált.

Most ellenőrizzük, hogy B rendelkezik bihemifolytonos szimmetrikus Gâteaux-deriválttal.

(i) Belátjuk, hogy B Gâteaux-deriválható. Elég: B_i $(i = 1, ..., r)$-ről bebizonyítani, hogy Gâteaux-deriválható. Bármely $u \in H^1_D(\Omega)^r$ esetén legyen $S_i(u) : H^1_D(\Omega)^r \to H^1_D(\Omega)$ operátor, melyet a következő képlettel definiálunk:

$$\langle S_i(u)h, v\rangle_{H^1_D} = \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^r \partial_{\xi_k} q_i(x,u)h_k v \qquad (u \in H^1_D(\Omega)^r, v \in H^1_D(\Omega)). \tag{5.23}$$

Állítás: ez az operátor jóldefiniált, továbbá korlátos és lineáris.

$S_i(u)$ létét a Riesz-tétel biztosítja a fentiekhez hasonlóan, mivel itt a következő becslést tehetjük:

$$\int\limits_\Omega |\partial_{\xi_k} q_i(x,u)h_k v| \le c_1' \|h_k\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + c_2 \left\| \sum_{k=1}^r |u_j|^{p_1-2} \right\|_{L^{\frac{p_1}{p_1-2}}(\Omega)} \|h_k\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|v\|_{L^{p_1}(\Omega)}$$

(5.21) és $\left(\frac{p_1}{p_1-2}\right)^{-1} + {p_1}^{-1} + {p_1}^{1} = 1$ segítségével.

Bebizonyítjuk, hogy

$$B_i'(u) = S_i(u) \qquad \left(u \in H^1_D(\Omega)^r\right) .$$

Legyen $u, h \in H^1_D(\Omega)^r$, továbbá, $\mathcal{E} \equiv \left\{v \in H^1_D(\Omega) : \|v\|_{H^1_D(\Omega)} = 1\right\}$ és

$$\delta^i_{u,h}(t) \equiv \frac{1}{t} \|B_i(u+th) - B_i(u) - tS_i(u)h\|_{H^1_D(\Omega)}$$

$$= \frac{1}{t} \sup_{v\in\mathcal{E}} \langle B_i(u+th) - B_i(u) - tS_i(u)h, v\rangle_{H^1_D(\Omega)}$$

ezt tovább alakítva kapjuk, hogy

$$\delta^i_{u,h}(t) = \frac{1}{t} \sup_{v\in\mathcal{E}} \int\limits_\Omega \left(q_i(x, u+th) - q_i(x,u) - t\sum_{k=1}^r \partial_{\xi_k} q_i(x,u)h_k \right) v$$

$$= \sup_{v\in\mathcal{E}} \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^r \left(\partial_{\xi_k} q_i(x, u+\theta th) - \partial_{\xi_k} q_i(x,u)\right) h_k v$$

$$\le \sup_{v\in\mathcal{E}} \sum_{k=1}^r \left(\int\limits_\Omega |\partial_{\xi_k} q_i(x,u+\theta th) - \partial_{\xi_k} q_i(x,u)|^{\frac{p_1}{p_1-2}} dx \right)^{\frac{p_1-2}{p_1}} \|h_k\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|v\|_{L^{p_1}(\Omega)} .erivlt$$

(5.71)-et használva a $p = p_1$ helyettesítéssel adódik, hogy $\|v\|_{L^{p_1}(\Omega)} \le K_{p_1,\Omega}$, továbbá, $|\theta th| \le |th| \to 0$ mm. Ω-n, így $\partial_{\xi_k} q_i$ folytonosságából következik, hogy az integrandus 0-hoz tart mm., ha $t \to 0$. Az integrandus felülről becsülhető $t \le t_0$-ra a következővel:

$\left|2(c_1+c_2\sum_{j=1}^r |u_j+t_0h_j|^{p_1-2})\right|^{\frac{p_1}{p_1-2}} \le \tilde{c}_1+\tilde{c}_2\sum_{j=1}^r |u_j+t_0h_j|^{p_1} \in L^1(\Omega)$, így a Lebesgue-tételből kapjuk, hogy a kapott kifejezés 0-hoz tart, ha $t\to 0$. Így tehát

$$\lim_{t\to 0}\delta^i_{u,h}(t)=0\,,$$

azaz B_i Gâteaux-deriválható.

(ii) B_i bihemifolytonossága (i)-hez hasonlóan következik. Nevezetesen, legyen $u,k,w\in H^1_D(\Omega)^r$ és $h\in H^1_D(\Omega)$ rögzített függvény. Ekkor

$$\omega_{u,k,w,h}(s,t)\equiv \|B_i'(u+sk+tw)h-B_i'(u)h\|_{H^1_D(\Omega)}$$

$$=\sup_{v\in\mathcal{E}}\langle B_i'(u+sk+tw)h-B_i'(u)h,v\rangle_{H^1_D(\Omega)}$$

$$=\sup_{v\in\mathcal{E}}\int_\Omega\sum_{k=1}^r\left(\partial_{\xi_k}q_i(x,u+sk+tw)-\partial_{\xi_k}q_i(x,u)\right)h_kv\,.$$

Ezután a fentiekhez hasonlóan kaphatjuk $\partial_{\xi_k}q_i$ folytonosságából és a Lebesgue-tételből, hogy

$$\lim_{s,t\to 0}\omega_{u,k,w,h}(s,t)=0\,,$$

azaz a következő:

$$(s,t)\mapsto B_i'(u+sk+tw)h$$

függvény folytonos $\mathbf{R}^2$-rol $H^1_D(\Omega)$-ra. Továbbá B_i bihemifolytonosságát B örökli.

(iii) következik abból, hogy (5.23)-ban $B_i'(u)=S_i(u)$ ill. abból, hogy a $\partial_\xi q(x,\xi)$ deriváltmátrixok szimmetriáját feltettük, azaz bármely $u,h,v\in H^1_D(\Omega)^r$ esetén

$$\langle B'(u)h,v\rangle_{H^1_D(\Omega)^r}=\sum_{i=1}^r\langle B_i'(u)h,v_i\rangle_{H^1_D(\Omega)}=\sum_{i=1}^r\langle B_i'(u)v,h_i\rangle_{H^1_D(\Omega)}$$

$$=\langle B'(u)v,h\rangle_{H^1_D(\Omega)^r}.$$

(iv) $B'(u)$ spektrális határainak becslése: bármely $u,h\in H^1_D(\Omega)^r$ esetén

$$\langle B'(u)h,h\rangle_{H^1_D(\Omega)^r}=\int_\Omega\sum_{i,k=1}^r\partial_{\xi_k}q_i(x,u)h_kh_i\,,$$

amelyből (iv) feltétel segítségével kapjuk, hogy

$$\langle B'(u)h,h\rangle_{H^1_D(\Omega)^r}\ge 0. \tag{5.24}$$

Továbbá

$$\langle B'(u)h,h\rangle_{H^1_D(\Omega)^r}\le\int_\Omega\left(c_1+c_2\sum_{j=1}^r|u_j|^{p_1-2}\right)\sum_{k=1}^r h_k^2. \tag{5.25}$$

$= c_1 \sum\limits_{k=1}^{r} \int\limits_{\Omega} h_k^2 \; + c_2 \sum\limits_{j,k=1}^{r} \int\limits_{\Omega} |u_j|^{p_1-2} h_k^2$. Az első tag becsülhető a Szoboljev-beágyazás (5.71) segítségével, $p=2$ esetén.

$$c_1 \sum_{k=1}^{r} \int\limits_{\Omega} h_k^2 \le c_1 K_{2,\Omega}^2 \|h\|^2_{H_D^1(\Omega)^r}$$

A második tag becslését a Hölder-egyenlőtlenség szolgáltatja

$$\sum_{j,k=1}^{r} \int\limits_{\Omega} |u_j|^{p_1-2} h_k^2 \le \sum_{j,k=1}^{r} \|u_j\|^{p_1-2}_{L^{p_1}(\Omega)} \|h_k\|^2_{L^{p_1}(\Omega)} = \left(\sum_{j=1}^{r} \|u_j\|^{p_1-2}_{L^{p_1}(\Omega)} \right) \left(\sum_{k=1}^{r} \|h_k\|^2_{L^{p_1}(\Omega)} \right).$$

A [15]-ben található a következő elemi azonosság:
ha r>0, a,b ≥ 0, akkor

$$(a+b)^r \le C(a^r + b^r), \tag{5.26}$$

így $\|x_i\| = a_i$ a helyettesítés mellett $\left(\sum_{i=1}^{r} \|x_i\|^{p-2}\right)^{\frac{2}{p-2}} = \left(\sum_{i=1}^{r} a_i^{p-2}\right)^{\frac{2}{p-2}} \le C\left(\sum_{i=1}^{r} \|x_i\|^2\right)$

amelyből következik, hogy $\left(\sum\limits_{i=1}^{r} \|x_i\|^{p_1-2}_{L^{p_1}(\Omega)}\right)^{\frac{2}{p_1-2}} \le C \left(\sum\limits_{i=1}^{r} \|x_i\|^2_{L^{p_1}(\Omega)}\right)$, amelyből kapjuk, hogy létezik olyan $C^*>0$ állandó, hogy $\left(\sum\limits_{i=1}^{r} \|x_i\|^{p_1-2}_{L^{p_1}(\Omega)}\right) \le C^* \left(\sum\limits_{i=1}^{r} \|x_i\|^2_{L^{p_1}(\Omega)}\right)^{\frac{p_1-2}{2}}$, mivel az $x^{\frac{p-2}{2}}$ monoton nő, ha x ≥ 0 és ha p>2 az előző egyenlőtlenségből kapjuk, hogy

$$\sum_{j,k=1}^{r} \|u_j\|^{p_1-2}_{L^{p_1}(\Omega)} \|h_k\|^2_{L^{p_1}(\Omega)} \le C^* \left(\sum_{j=1}^{r} \|u_j\|^2_{L^{p_1}(\Omega)} \right)^{\frac{p_1-2}{2}} \left(\sum_{k=1}^{r} \|h_k\|^2_{L^{p_1}(\Omega)} \right).$$

ebből adódik, hogy

$$\sum_{j,k=1}^{r} \int\limits_{\Omega} |u_j|^{p_1-2} h_k^2 \le C^* \left(\sum_{j=1}^{r} \|u_j\|^2_{L^{p_1}(\Omega)} \right)^{\frac{p_1-2}{2}} \left(\sum_{k=1}^{r} \|h_k\|^2_{L^{p_1}(\Omega)} \right).$$

$$\le c_2 C^* K^{p_1}_{p_1,\Omega} \left(\sum_{j=1}^{r} \|u_j\|^2_{H_D^1} \right)^{\frac{p_1-2}{2}} \left(\sum_{k=1}^{r} \|h_k\|^2_{H_D^1} \right) = c_2 C^* K^{p_1}_{p_1,\Omega} \|u\|^{p_1-2}_{H_D^1(\Omega)^r} \|h\|^2_{H_D^1(\Omega)^r}.$$

Így végül (5.25) a következőképpen becsülhető

$$\langle B'(u)h,h\rangle_{H_D^1(\Omega)^r} \le M_B(\|u\|_{H_D^1(\Omega)^r})\|h\|^2_{H_D^1(\Omega)^r} \qquad (u,h \in H_D^1(\Omega)^r), \tag{5.27}$$

ahol

$$M_B(r) = c_1 K_{2,\Omega}^2 + c_2 C^* K^{p_1}_{p_1,\Omega} r^{p_1-2}_{H_D^1(\Omega)^r} \qquad (r>0).$$

valós függvény. Az alsó és a felső becslést összerakva, (5.24) és (5.25) alapján kapjuk, hogy

$$0 \le \langle B'(u)h,h\rangle_{H_D^1(\Omega)^r} \le M_B(\|u\|_{H_D^1(\Omega)^r})\|h\|^2_{H_D^1(\Omega)^r} \qquad (u,h \in H_D^1(\Omega)^r). \tag{5.28}$$

(C) A C operátor elvárt tulajdonságait hasonló módon lehet bizonyítani, mint B esetében, csak ki kell cserélnünk Ω-t Γ_N-ra és p_1-t p_2-re (mivel hasonló becslések vannak q_i-re és s_i-re). Az alsó becslés menete azonban eltérő.

Így a fentiek alapján C bihemifolytonos szimmetrikus Gâteaux-deriválttal rendelkezik, deriváltja a következő:

$$\langle C'(u)h, v\rangle_{H^1_D} = \int_{\Gamma_N} \sum_{i,k=1}^{r} \partial_{\xi_k} s_i(x,u) h_k v \, d\sigma \qquad (u \in H^1_D(\Omega)^r, h, v \in H^1_D(\Omega)). \quad (5.29)$$

Az alsó spektrális becsléshez a (iv) feltételt és (5.74)-et használjuk:

$$\langle C'(u)h, h\rangle_{H^1_D} \geq \int_{\Gamma_N} \inf_{\xi \in \mathbf{R}^r, j=1,..,r} \lambda_j^{(s)}(x,\xi) \sum_{k=1}^{r} h_k^2 \, d\sigma$$

$$= \mu_1 \sum_{k=1}^{r} \int_{\Gamma_N} \beta h_k^2 \, d\sigma.$$

A felső becslés analóg (5.27)-tel, annyi az eltérés, hogy M_B-t ki kell cserélni az alábbira:

$$M_C(r) = d_1 K_{2,\Gamma_N}^2 + d_2 C^* K_{p_2,\Gamma_N}^{p_2} r^{p_2-2} \qquad (r > 0).$$

Így ebből azt kapjuk, hogy

$$\mu_1 \sum_{k=1}^{r} \int_{\Gamma_N} \beta h_k^2 \, d\sigma \leq \langle B'(u)h, h\rangle_{H^1_D(\Omega)^r} \leq M_C(\|u\|_{H^1_D(\Omega)^r}) \|h\|^2_{H^1_D(\Omega)^r} \qquad (u, h \in H^1_D(\Omega)^r). \quad (5.30)$$

Végül, összegezve a három tagot ($F = A + B + C$) azt kapjuk, hogy F bihemifolytonos szimmetrikus Gâteaux-deriválttal rendelkezik, továbbá, (5.19), (5.28) és (5.30)-ból adódik

$$\mu_1 \|h\|^2_{H^1_D(\Omega)^r} = \mu_1 \sum_{k=1}^{r} \int_{\Omega} |\nabla h_k|^2 + \mu_1 \sum_{k=1}^{r} \int_{\Gamma_N} \beta h_k^2 \, d\sigma \leq \langle F'(u)h, h\rangle_{H^1_D(\Omega)^r}$$

$$\leq \Big(\mu_2 + M_B(\|u\|_{H^1_D(\Omega)^r}) + M_C(\|u\|_{H^1_D(\Omega)^r})\Big) \sum_{k=1}^{r} \int_{\Omega} |\nabla h_k|^2 = M(\|u\|_{H^1_D(\Omega)^r}) \|h\|^2_{H^1_D(\Omega)^r}$$

ahol $M(r)$ az (5.88)-beli. Azaz (5.13)-at megkaptuk és a 5.2 tétel bizonyítása kész. ■

5.2. Megoldhatósági tételek

5.3. Tétel. *Legyen $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ korlátos tartomány és az $f_{i,\alpha} : \Omega \times \mathbf{R}^{rd} \to \mathbf{R}$ függvények teljesítsék a következő feltételeket [azaz az 5.1 tétel feltételeit]:*

(i) $f_{i,\alpha} \in C^{|\alpha|}(\Omega \times \mathbf{R}^{rd}),\quad f_{i,0} \in C^1(\Omega \times \mathbf{R}^{rd}) \quad (i = 1, .., r,\ 0 < |\alpha| \leq n);$

(ii) $\partial_{\xi_{i,\alpha}} f_{j,\beta} = \partial_{\xi_{j,\beta}} f_{i,\alpha} \quad (i, j = 1, .., r;\ |\alpha|, |\beta| \le n)$;

(iii) Léteznek olyan $0 < \mu_1 \le \mu_2$ *állandók, amelyek bármely* $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbf{R}^{rd}$ *és* $\zeta \in \mathbf{R}^{rd}$ *esetén teljesítik a következő egyenlőtlenséget:*

$$\mu_1 \sum_{i=1}^{r} \sum_{|\alpha|=n} |\zeta_{i,\alpha}|^2 \le \sum_{i,j=1}^{r} \sum_{|\alpha|,|\beta|\le n} \partial_{\xi_{j,\beta}} f_{i,\alpha}(x,\xi) \zeta_{j,\beta}\zeta_{i,\alpha} \le \mu_2 \sum_{i=1}^{r} \sum_{|\alpha|\le n} |\zeta_{i,\alpha}|^2.$$

Továbbá, legyen $g_i \in L^2(\Omega) \quad (i = 1, .., r)$.

Ekkor a

$$\begin{cases} T_i(u_1, .., u_r) := \sum_{|\alpha|\le n} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \left(f_{i,\alpha}(x, D^{(n)}u) \right) = g_i(x) \qquad (i = 1, .., r) \\ \partial^\alpha u_{i|\partial\Omega} = 0 \qquad (i = 1, .., r,\ |\alpha| \le n-1) \end{cases} \tag{5.31}$$

rendszernek egyértelműen létezik $u^* = (u_1^*, .., u_r^*) \in H_0^n(\Omega)^r$ *gyenge megoldása, azaz* u^* *teljesíti a alábbi formulát:*

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|\le n} f_{i,\alpha}(x, D^{(n)}u^*)\, \partial^\alpha v \; dx = \int_\Omega g_i v \; dx \qquad (i = 1, .., r,\ v \in H_0^n(\Omega)). \tag{5.32}$$

Bizonyítás. Az 5.1-es tételben (5.2) által definiált $F : H_0^n(\Omega)^r \to H_0^n(\Omega)^r$ operátorról beláttuk, hogy kielégíti az 3.3 tétel feltételeit. Továbbá, a

$$v \mapsto \sum_{i=1}^{r} \int_\Omega g_i v_i \; dx$$

leképezés egy ($H_0^n(\Omega)^r$-téren értelmezett) korlátos lineáris funkcionált definiál, mivel az abszolútértéke a következő módon becsülhető:

$$\sum_{i=1}^{r} \|g_i\|_{L^2(\Omega)} \|v_i\|_{L^2(\Omega)} \le K_{2,\Omega} \sum_{i=1}^{r} \|g_i\|_{L^2(\Omega)} \|v_i\|_{H_0^n(\Omega)} \le K_{2,\Omega} \|g\|_{L^2(\Omega)^r} \|v\|_{H_0^n(\Omega)^r},$$

ahol $K_{2,\Omega} > 0$ a $H_0^n(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ Szoboljev-beágyazás konstansa. Így a Riesz-tételből adódik, hogy létezik olyan $b \in H_0^n(\Omega)^r$ amely teljesíti a következő egyenletet:

$$\langle b, v \rangle_{H_0^n(\Omega)^r} = \sum_{i=1}^{r} \int_\Omega g_i v_i \; dx \qquad (v \in H_0^n(\Omega)^r).$$

a 3.3 tételből következik, hogy az

$$F(u) = b \tag{5.33}$$

egyenletnek egyértelműen létezik $u^* \in H_0^n(\Omega)^r$ megoldása. Itt (5.33) ekvivalens az alábbival:

$$\langle F(u), v \rangle_{H_0^n(\Omega)^r} = \langle b, v \rangle_{H_0^n(\Omega)^r} \qquad (v \in H_0^n(\Omega)^r),$$

azaz

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{r} \sum_{|\alpha|\le n} f_{i,\alpha}(x, D^{(n)}u)\, \partial^\alpha v_i \; dx \;=\; \sum_{i=1}^{r} \int_\Omega g_i v_i \; dx, \qquad (v \in H_0^n(\Omega)^r) \tag{5.34}$$

és $u = u^*$ esetén ez ekvivalens a (5.32) rendszerrel mivel (5.34)-ben a v_i függvények egymástól függetlenül változhatnak.

Így tehát u^* az általunk keresett megoldás, azaz a (5.31) egyenlet(rendszer) gyenge megoldása. ■

5.4. Tétel. *Legyen $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ korlátos tartomány, az f_i, q_i és s_i $(i = 1, ..., r)$ függvények teljesítsék a 5.2 feltételeket. Továbbá, legyen $g_i \in L^2(\Omega)$ és $\gamma_i \in L^2(\Gamma_N)$ $\;(i = 1, .., r)$. Ekkor a*

$$\begin{cases} T_i(u_1, .., u_r) := -\operatorname{div} f_i(x, \nabla u_1, .., \nabla u_r) + q_i(x, u_1, .., u_r) \;=\; g_i(x) & \text{in } \Omega \\ Q_i(u_1, .., u_r) \equiv \quad f_i(x, \nabla u_1, .., \nabla u_r) \cdot \nu + s_i(x, u_1, .., u_r) \;=\; \gamma_i(x) & \text{on } \Gamma_N \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u_i \;=\; 0 & \text{on } \Gamma_D \end{cases} \tag{5.35}$$

$(i = 1, .., r)$ rendszernek egyértelműen létezik $u^* = (u_1^*, .., u_r^*) \in H^1(\Omega)^r$ gyenge megoldása , amely teljesíti az alábbi:

$$\begin{gathered} \int\limits_{\Omega} \big(f_i(x, \nabla u_1^*, .., \nabla u_r^*) \cdot \nabla v + q_i(x, u_1^*, .., u_r^*) v\big)\; dx + \int\limits_{\Gamma_N} s_i(x, u_1^*, .., u_r^*) v \, d\sigma \;= \\ \int\limits_{\Omega} g_i v \; dx + \int\limits_{\Gamma_N} \gamma_i v \, d\sigma \qquad (i = 1, .., r,\;\; v \in H_D^1(\Omega)). \end{gathered} \tag{5.36}$$

egyenletet.

Bizonyítás. 5.2 tételből következik, hogy az (5.12)-beli F operátor teljesíti a 3.3 tétel feltételeit, továbbá a

$$v \mapsto \sum_{i=1}^{r} \left(\int_\Omega g_i v_i \; dx + \int\limits_{\Gamma_N} \gamma_i v_i \, d\sigma \right)$$

leképezés egy $(H_D^1(\Omega)^r$ téren értelmezett) korlátos lineáris funkcionált definiál, mivel az abszolútértékét a következőképp lehet becsülni:

$$\sum_{i=1}^{r} \big(\|g_i\|_{L^2(\Omega)} \|v_i\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma_i\|_{L^2(\Gamma_N)} \|v_i\|_{L^2(\Gamma_N)} \big)$$

$$\le \big(K_{2,\Omega} \|g\|_{L^2(\Omega)^r} + K_{2,\Gamma_N} \|\gamma\|_{L^2(\Gamma_N)^r} \big)\, \|v\|_{H_D^1(\Omega)^r}$$

hasonlóképpen, mint az 5.3 tételben, ahol $K_{2,\Omega} > 0$ és $K_{2,\Gamma_N} > 0$ a Szoboljev-beágyazás konstansai, melyek rendre a $H_0^n(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ és a $H_0^n(\Omega) \subset L^2(\Gamma_N)$-beágyazásokhoz tartoznak. Így a Riesz-tételből következik, hogy létezik $b \in H_D^1(\Omega)^r$ amelyre igaz lesz, hogy

$$\langle b, v\rangle_{H_D^1(\Omega)^r} = \sum_{i=1}^r \left(\int_\Omega g_i v_i \, dx + \int_{\Gamma_N} \gamma_i v_i \, d\sigma \right) \qquad (v \in H_D^1(\Omega)^r).$$

Az 3.3 tételből következik, hogy az

$$F(u) = b \tag{5.37}$$

egyenletnek egyértelműen létezik $u^* \in H_D^1(\Omega)^r$ megoldása. Itt (5.37) ekvivalens azzal, hogy

$$\langle F(u), v\rangle_{H_D^1(\Omega)^r} = \langle b, v\rangle_{H_D^1(\Omega)^r} \qquad (v \in H_D^1(\Omega)^r),$$

azaz a következővel:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \sum_{i=1}^r \big(f_i(x, \nabla u_1, .., \nabla u_r) \cdot \nabla v_i + q_i(x, u_1, .., u_r) v_i\big) \, dx + \int_{\Gamma_N} \sum_{i=1}^r s_i(x, u_1, .., u_r) v_i \, d\sigma \\ &= \int_\Omega \sum_{i=1}^r g_i v \, dx + \int_{\Gamma_N} \sum_{i=1}^r \gamma_i v \, d\sigma \qquad (v \in H_D^1(\Omega)^r) \end{aligned} \tag{5.38}$$

és ez $u = u^*$ esetén ekvivalens a (5.36) rendszerrel mivel (5.38)-ban a v_i függvények egymástól függetlenül változhatnak. Így tehát u^* az általunk keresett megoldás, azaz a (5.35) egyenlet(rendszer) gyenge megoldása. ■

5.2.1. A vizsgált fő speciális eset

A dolgozatom témáját adó nemlineáris elliptikus vegyes peremértékfeladatra vonatkozó egzisztencia és unicitási tételről van szó. A következő szakaszban megvizsgáljuk ezen feladat iterációval való megoldhatóságát, nevezetesen egy tételt mondunk ki az egyszerű iteráció konvergenciájáról.

5.5. Tétel. *Az alábbi vegyes feladat:*

$$\begin{cases} -\operatorname{div} f(x, \nabla u) + q(x, u) = g(x) & \text{in } \Omega \\ f(x, \nabla u) \cdot \nu + s(x, u) = \gamma(x) & \text{on } \Gamma_N \\ u = 0 & \text{on } \Gamma_D \end{cases} \tag{5.39}$$

teljesítse a következő feltételeket:

(i) $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ *korlátos tartomány szakaszonként sima peremmel,* $\Gamma_N, \Gamma_D \subset \partial\Omega$ *mérhető,* $\Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset$ *és* $\Gamma_N \cup \Gamma_D = \partial\Omega$.

(ii) Az $f : \Omega \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$, $q : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *és* $s : \Gamma_N \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *függvények mérhetőek és korlátosak* $x \in \Omega$ *változóra vonatkozóan (illetve* $x \in \Gamma_N$*, megfelelően) és* C^1*-beliek a többi változóban.*

(iii) *Bármely* $(x,\eta) \in \Omega \times \mathbf{R}^N$ *esetén az* $\frac{\partial f(x,\eta)}{\partial \eta}$ *deriváltmátrixok szimmetrikusak és* λ *sajátértékeik teljesítik a következőt:*

$$0 < \mu_1 \le \lambda \le \mu_2 < \infty$$

ahol $\mu_2 \ge \mu_1 > 0$ *konstansok függetlenek* (x,η)*-től.*

(iv) *Legyen* $2 \le p$ *(ha* $N = 2$*) vagy* $2 \le p \le \frac{2N}{N-2}$ *(ha* $N > 2$*). Léteznek olyan* $c_i, d_i \ge 0$ *és* $2 \le p_i \le p$ $(i = 1,2)$ *konstansok, amelyekre bármely* $x \in \Omega$ *(illetve* $x \in \Gamma_N$*, megfelelően) és* $\xi \in \mathbf{R}$ *esetén teljesül, hogy*

$$0 \le \partial_\xi q(x,\xi) \le c_1 + c_2|\xi|^{p_1-2}, \qquad 0 \le \partial_\xi s(x,\xi) \le d_1 + d_2|\xi|^{p_2-2}$$

ahol p*-t a (5.70)-ben definiáltuk.*

(v) *Vagy* $\Gamma_D \ne \emptyset$*, vagy* $x \mapsto \inf\limits_{\xi \in \mathbf{R}^r, j=1,..,r} \lambda_j^{(s)}(x,\xi)$ *függvény nem azonosan 0 mm.* Γ_N*-n.*

(vi) $g \in L^2(\Omega)$ *és* $\gamma \in L^2(\Gamma_N)$*.*

Ekkor az (5.39) feladatnak egyértelműen létezik $u^* \in H^1_D(\Omega)$ *gyenge megoldása, azaz olyan* $u^* \in H^1(\Omega)$*, amelyre teljesülnek az alábbiak:*

$$u^*{}_{|\Gamma_D} = 0$$

és

$$\int\limits_\Omega \left[f(x,\nabla u^*) \cdot \nabla v + q(x,u^*)v \right] + \int\limits_{\Gamma_N} s(x,u^*)v\, d\sigma = \int\limits_\Omega gv + \int\limits_{\Gamma_N} \gamma v\, d\sigma \qquad (v \in H^1_D(\Omega)).$$

Bizonyítás. Az előző (5.4) tétel speciális $(r = 1)$ esete. ■

5.1. Megjegyzés. Az 5.2 tételben az (5.12) speciális eseteként az (5.39) feladatnak megfelelő $F : H^1_D(\Omega) \to H^1_D(\Omega)$ általánosított differenciáloperátor a következő képlettel adható meg:

$$\langle F(u), v \rangle_{H^1_D} = \int\limits_\Omega \left[f(x,\nabla u) \cdot \nabla v + q(x,u)v \right] + \int\limits_{\Gamma_N} s(x,u)v\, d\sigma \qquad (u, v \in H^1_D(\Omega)).$$

Jelölés: Legyen

$$H^1_D(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \; u_{|\Gamma_D} = 0\} \tag{5.40}$$

és

$$H^2_D(\Omega) := H^2(\Omega) \cap H^1_D(\Omega)$$

Szoboljev-tér.

5.3. Iterációk konvergenciája

5.3.1. Másodrendű Dirichlet-feladatok

Tekintsük a következő másodrendű 1. típusú peremértékfeladatot:

$$\begin{cases} T(u) \equiv -\mathrm{div}\, f(x, \nabla u) = g(x) \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{5.41}$$

ahol $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ korlátos tartomány. Továbbá a következő feltételek teljesülnek:

5.6 feltételek .

(i) Az $f : \Omega \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ függvény mérhető és korlátos $x \in \Omega$ változóra vonatkozóan és C^1-beli a $\eta \in \mathbf{R}^N$ változóra vonatkozóan, továbbá bármely $(x, \eta) \in \Omega \times \mathbf{R}^N$ esetén az $\frac{\partial f(x,\eta)}{\partial \eta}$ deriváltmátrixok szimmetrikusak és λ sajátértékeik teljesítik a következőt:

$$0 < \mu_1 \leq \lambda \leq \mu_2 < \infty$$

ahol $\mu_2 \geq \mu_1 > 0$ konstansok függetlenek (x, η)-től.

(ii) $g \in L^2(\Omega)$.

5.6 Konstrukció . Legyen $G \in L^\infty(\Omega, \mathbf{R}^{N\times N})$ szimmetrikus mátrix-értékű függvény, amely teljesíti az alábbi egyenlőtlenséget: léteznek olyan $m' \geq m > 0$ állandók, amelyre

$$m\langle G(x)\xi, \xi\rangle \leq \langle \frac{\partial f(x, \eta)}{\partial \eta}\xi, \xi\rangle \leq M\langle G(x)\xi, \xi\rangle \qquad ((x, \eta) \in \Omega \times \mathbf{R}^N, \xi \in \mathbf{R}^N). \tag{5.42}$$

A következő lineáris operátort definiáljuk:

$$Su := -\mathrm{div}\,(G(x)\nabla u) = 0 \qquad (x \in \Omega) \tag{5.43}$$

Legyen S értelmezési tartománya a következő: $u \in H^2(\Omega)$ és legyen $G(x)\nabla u \in H^1(\Omega)$. Ekkor a megfelelő energiatér $H_0^1(\Omega)$, amelyet a következő skaláris szorzattal látjuk el:

$$\langle u, v\rangle_G := \int_\Omega G(x)\,\nabla u \cdot \nabla v \,(u, v \in H_0^1(\Omega)). \tag{5.44}$$

(Ez ekvivalens $H_0^1(\Omega)$-val.)
(Jelölés: Az egyszerűség kedvéért a következőkben elhagyjuk az Ω-n értelmezett integráloknál a dx-et.)

A T-nek megfelelő $F : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ általánosított differenciáloperátort a következő képlettel adjuk meg:

$$\langle F(u), v\rangle_G = \int_\Omega f(x, \nabla u) \cdot \nabla v \qquad (u, v \in H_0^1(\Omega)), \tag{5.45}$$

és hasonlóan, a gyenge alak jobboldalát az alábbi képlettel definiáljuk: $b \in H_0^1(\Omega)$ teljesítse a következőt:

$$\langle b, v\rangle_G = \int_\Omega gv \qquad (v \in H_0^1(\Omega)). \tag{5.46}$$

5.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy a 5.6 feltételek teljesülnek. Ekkor a 5.6 konstrukciójából kapjuk, hogy*

$$cond\left(S^{-1}T\right) \leq \frac{M}{m}, \tag{5.47}$$

illetve adódik a következő konvergencia eredmény:

(1) Legyen $u_0 \in H_0^1(\Omega)$

ekkor az $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ *sorozat legyen a következő képlettel definiálva:*

$$u_{n+1} = u_n - \frac{2}{M+m} z_n \qquad (n \in \mathbf{N}) \tag{5.48}$$

ahol $z_n \in H_0^1(\Omega)$ *teljesíti a következő segédfeladatot:*

$$\int_\Omega G(x)\, \nabla z_n \cdot \nabla v = \int_\Omega f(x, \nabla u_n) \cdot \nabla v - \int_\Omega gv \qquad (v \in H_0^1(\Omega)), \tag{5.49}$$

Ekkor az $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ *sorozat lineárisan konvergál az (5.41) feladat* $u^* \in H_0^1(\Omega)$ *gyenge megoldásához, az alábbi becslés szerint:*

$$\|u_n - u^*\|_G \leq \frac{1}{m} \|F(u_0) - b\|_G \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n \qquad (n \in \mathbf{N}), \tag{5.50}$$

ahol F-et és b-t (5.45)-ben és (5.46)-ban definiáltuk.

(2) Tegyük fel továbbá, hogy $G \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbf{R}^{N\times N})$ *és* Ω *egy konvex tartománnyal* C^2*-diffeomorf. Ekkor bármely* $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *esetén a (5.49) segédfeladat az iteráció során erős alakba írható:*

$$\begin{cases} S z_n = T(u_n) - g \\ z_{n|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{5.51}$$

ahol $z_n \in H^2(\Omega)$*, és (5.50)-et a következőre cserélhetjük:*

$$\|u_n - u^*\|_G \leq \frac{1}{m\varrho^{1/2}} \|T(u_0) - g\|_{L^2(\Omega)} \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n \qquad (n \in \mathbf{N}), \tag{5.52}$$

ahol $\varrho > 0$ *az S operátor legkisebb sajátértéke (*$H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$*-n)*

Bizonyítás. Igazolni fogjuk, hogy T és S teljesítik a 4.2 tétel (i) állításának feltételeit. Így le kell ellenőriznünk az 4.1 tétel feltételeit, egy eltéréssel: az (4.6) helyére a (4.28) került.

A (5.42) egyenlőtlenségből következik, hogy a $G(x)$ mátrixok sajátértékei egy pozitív konstanssal egyenletesen becsülhetők alulról és felülről, hasonlóan a $\frac{\partial f(x,\eta)}{\partial \eta}$ derivált-mátrixokhoz. Így tehát S egyenletesen elliptikus, amelyből az 2.5 állítás segítségével kapjuk, hogy (5.43)-ban definiált S operátor egyenletesen pozitív ($S \geq \varrho I, \varrho > 0$), szimmetrikus, lineáris $L^2(\Omega)$-ben.

A divergencia tételből kapjuk, hogy

$$\int_\Omega T(u)v = \int_\Omega f(x,\nabla u)\cdot\nabla v \qquad (u,v\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)) \tag{5.53}$$

és (5.42) feltétel segítségével adódik, hogy

$$\begin{aligned} m\,G(x)(\nabla v-\nabla u)\cdot(\nabla v-\nabla u) &\le (f(x,\nabla v)-f(x,\nabla u))\cdot(\nabla v-\nabla u)\\ &\le M\,G(x)(\nabla v-\nabla u)\cdot(\nabla v-\nabla u), \end{aligned}$$

így (5.53)-ből kapjuk, hogy

$$m\|v-u\|_G^2 \le \int_\Omega (T(v)-T(u))(v-u) \le M\|v-u\|_G^2 \quad (u,v\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)), \tag{5.54}$$

azaz (4.28) egyenlőtlenséget beláttuk. Továbbá (5.53) miatt és F operátor (4.7)-beli definíciója miatt (5.45)-höz jutottunk. Mivel feltettük, hogy $f\in C^1$, így az 5.1 tétel bizonyításához hasonló számolással kaphatjuk, hogy F Gâteaux-deriválható, valamint a derivált a következőképp néz ki:

$$\langle F'(u)h,v\rangle_G = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial\eta}(x,\nabla u)\,\nabla h\cdot\nabla v \quad (u,h,v\in H_0^1(\Omega)) \tag{5.55}$$

így tehát F' bihemifolytonos és szimmetrikus. A 4.1 tétel feltételeit így beláttuk.

A 4.1 tétel (2) állítása szerint a (5.49) sorozat a (5.50) becslés szerint konvergál. Továbbá, ha $G\in C^1(\overline{\Omega},\mathbf{R}^{N\times N})$ és Ω egy konvex tartománnyal C^2-diffeomorf, akkor a 2.6 tételből kapjuk, hogy $R(S)=L^2(\Omega)$ amely alapján a (4.11) feltétel teljesül. Ekkor a 4.1 tétel (3) állítása szerint, ha $u_0\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, akkor a segédfeladat írható az (5.51) erős alakba , továbbá az (5.52) becslés is teljesül, ahol $\varrho>0$ az S operátor alsó határa ($S\ge\varrho I,\varrho>0$), amely 2.6 állítás szerint megegyezik S legkisebb sajátértékével ($H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$-n). Így a tétel (1) és (2) állítását beláttuk. Végül a fenti (5.47) kondíciószám becslés a 4.3 megjegyzés alapján a 4.3 definíció szerint értendő . ■

Tekintsük az (5.41) feladat módosítását:

$$\begin{cases} T(u)\equiv -\operatorname{div} f(x,\nabla u)+q(x,u)=g(x)\\ u_{|\partial\Omega}=0. \end{cases} \tag{5.56}$$

Ehhez a feladathoz 5.6 tételt módosítani fogjuk.

5.7 feltételek. A 5.6 tétel (i) és (ii) feltételei teljesüljenek, továbbá legyen $q:\Omega\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény mérhető és korlátos $x\in\Omega$ szerint és C^1-beli $\xi\in\mathbf{R}$ szerint.

Legyen

$$2\le p \quad (\text{ha } N=2) \quad \text{vagy} \quad 2\le p\le\frac{2N}{N-2} \quad (\text{ha } N>2). \tag{5.57}$$

A következő Szoboljev-beágyazás teljesül:

$$H_0^1(\Omega)\subset L^p(\Omega) \tag{5.58}$$

Valamint léteznek olyan $c_1, c_2 \geq 0$ állandók, amelyekre teljesül, hogy

$$0 \leq \partial_\xi q(x,\xi) \leq c_1 + c_2|\xi|^{p-2} \qquad ((x,\xi) \in \Omega \times \mathbf{R}).$$

5.7 Konstrukció . Legyen $G \in L^\infty(\Omega, \mathbf{R}^{N\times N})$ szimmetrikus mátrix-értékű függvény. amely teljesíti az alábbi egyenlőtlenséget: léteznek olyan $m' \geq m > 0$ állandók, hogy

$$m\langle G(x)\xi,\xi\rangle \leq \langle \frac{\partial f(x,\eta)}{\partial \eta}\xi,\xi\rangle \leq m'\langle G(x)\xi,\xi\rangle \qquad ((x,\eta) \in \Omega \times \mathbf{R}^N, \xi \in \mathbf{R}^N). \quad (5.59)$$

a megfelező S lineáris operátor és skaláris szorzat $\langle .,.\rangle_G$ legyen az (5.43) és (5.44)-ben definiált. Végül legyen

$$M(r) = m' + c_1\varrho^{-1} + c_2 C^* K_{p,\Omega}^p r^{p-2} \qquad (r > 0), \quad (5.60)$$

monoton növő függvény, ahol $K_{p,\Omega}$ az (5.58)-ban szereplő beágyazási konstans:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq K_{p,\Omega}\|u\|_G \qquad (u \in H_0^1(\Omega)) \quad (5.61)$$

C^* a 5.2 bizonyításában szereplő állandó és $\varrho > 0$ jelölje az S operátor legkisebb sajátértékét. Az általánosított differenciáloperátor $F : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ megfelelő módosítással kapható (5.45)-ból, azaz

$$\langle F(u), v\rangle_G = \int_\Omega (f(x,\nabla u)\cdot \nabla v + q(x,u)v) \qquad (u,v \in H_0^1(\Omega)). \quad (5.62)$$

A gyenge alak jobboldala $b \in H_0^1(\Omega)$ ugyanaz, mint (5.46)-ban.

5.7. Tétel. *Tegyük fel, hogy a 5.7 feltételek teljesülnek. Ekkor a 5.7 konstrukciójából adódik a következő konvergencia eredmény:*

bármely $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ esetén, az 5.6 tétel (1) és (2) állítása igaz marad M helyett az alábbi állíndóval:

$$M_0 := M\left(\|u_0\|_G + \frac{1}{m}\|F(u_0) - b\|_G\right) \quad (5.63)$$

Nevezetesen,

(1) Legyen $u_0 \in H_0^1(\Omega)$

ekkor az $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ sorozat legyen a következő képlettel definiálva:

$$u_{n+1} = u_n - \frac{2}{M+m}z_n \qquad (n \in \mathbf{N}) \quad (5.64)$$

ahol $z_n \in H_0^1(\Omega)$ teljesíti a következő segédfeladatot:

$$\int_\Omega G(x)\,\nabla z_n \cdot \nabla v = \int_\Omega (f(x,\nabla u_n)\cdot \nabla v + q(x,u_n)v) - \int_\Omega gv \quad (v \in H_0^1(\Omega)) \quad (5.65)$$

a fenti sorozat lineárisan konvergál az (5.56) feladat $u^* \in H_D^1(\Omega)$ gyenge megoldásához az alábbi becslés szerint:

$$\|u_n - u^*\|_G \leq \frac{1}{m}\|F(u_0) - b\|_G \left(\frac{M_0 - m}{M_0 + m}\right)^n \qquad (n \in \mathbf{N}). \quad (5.66)$$

(2) Ha az 5.6 tétel (2) részében található regularitási feltételek teljesülnek, akkor (5.63)-est kicserélhetjük a következőre:

$$M_0 := M\left(\|u_0\|_G + \frac{1}{m\varrho^{1/2}}\|T(u_0) - g\|_{L^2(\Omega)}\right), \tag{5.67}$$

és (5.51)–(5.52) is igaz lesz, csak M helyére M_0 kerül.

Bizonyítás. Hasonló módon történik, mint 5.6 tételnél. Most 4.2 tétel (ii) részét alkalmazzuk. Azaz ismét 4.1 tétel feltételeit kell leellenőriznünk, azzal az eltéréssel, hogy (4.6) helyére (4.29) került. A 4.6 megjegyzés miatt az utóbbi ekvivalens (4.32)-el, amely jelen esetben azt jelenti, hogy

$$m\|h\|_G^2 \leq \langle F'(u)h, h\rangle_G \leq M(\|u\|_G)\|h\|_G^2 \qquad (u, h \in H_0^1(\Omega)), \tag{5.68}$$

ahol az $F : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ általánosított differenciáloperátort az (5.62)-ben definiáltunk. Az (5.68) becslés következőik az 5.2 tételből ((5.13) speciális esete: $r = 1$ és $\Gamma_N = \emptyset$), valamint a skaláris szorzatot (azaz $\langle ., .\rangle_G$-t) kell $H_0^1(\Omega)$-ra változtatnunk, végül (6.10) alapján $K_{2,\Omega}^2$ helyére ϱ^{-1}-t írunk . ■

5.2. Megjegyzés. Általános esetben, azaz, ha nem teljesülnek a regularitást biztosító feltételek, akkor az (5.63)-ban található normát a következőképp lehet kiszámítani: Az $\|F(u_0) - b\|_G$ normát az első iterációs lépés után számítjuk ki, mivel a $z_0 = F(u_0) - b$ függvényt (5.65) határozza meg $n = 0$ esetben. Azaz az iterációnak a következő módon kell kezdődnie:

$u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tetszőleges;

$z_0 = F(u_0) - b$ meghatározása (5.65) alapján;

$M_0 = M\left(\|u_0\|_G + \frac{1}{m}\|z_0\|_G\right)$;

$u_1 = u_0 - \frac{2}{M_0 + m} z_0$.

(Ezután $n \geq 1$ esetén az iteráció az (5.64)–(5.65) lépésekkel folytatódhat.)

Az $\|F(u_0) - b\|_G$ most ismertetett kiszámítási módja a fenti (5.50) és (5.66) becslésekben is működik.

5.3.2. Vegyes feladatok

Másodrendű, 3. típusú feladatok

Tekintsük a következő másodrendű, 3. típusú peremértékfeladatot:

$$\begin{cases} T(u) \equiv -\mathrm{div}\, f(x, \nabla u) + q(x, u) = g(x) & \text{in } \Omega \\ Q(u) \equiv \quad f(x, \nabla u) \cdot \nu + s(x, u) = \gamma(x) & \text{on } \Gamma_N \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u = 0 & \text{on } \Gamma_D, \end{cases} \tag{5.69}$$

ahol $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ korlátos tartomány.

Legyen

$$2 \leq p \quad (\text{ha } N = 2) \quad \text{vagy} \quad 2 \leq p \leq \frac{2N}{N-2} \quad (\text{ha } N > 2). \tag{5.70}$$

A következő Szoboljev-beágyazások (ill. becslések) állnak fenn:

$$H_D^1(\Omega) \subset L^p(\Omega), \qquad \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq K_{p,\Omega} \|u\|_{H_D^1} \quad (u \in H_D^1(\Omega)), \tag{5.71}$$

$$H_D^1(\Omega)_{|\Gamma_N} \subset L^p(\Gamma_N), \qquad \|u\|_{L^p(\Gamma_N)} \leq K_{p,\Gamma_N} \|u\|_{H_D^1} \quad (u \in H_D^1(\Omega)_{|\Gamma_N}) \quad , \tag{5.72}$$

ahol $K_{p,\Omega} > 0$ és $K_{p,\Gamma_N} > 0$ a megfelelő konstansok és $H_D^1(\Omega)_{|\Gamma_N}$ jelöli $H_D^1(\Omega)$ nyomát Γ_N-n.

5.8 feltételek . Az (1.1) feladatra teljesüljenek a következő feltételek:

(i) $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ korlátos tartomány szakaszonként sima peremmel, $\Gamma_N, \Gamma_D \subset \partial\Omega$ mérheto, $\Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset$ és $\Gamma_N \cup \Gamma_D = \partial\Omega$.

(ii) Az $f : \Omega \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$, $q : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ és $s : \Gamma_N \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvények mérhetőek és korlátosak $x \in \Omega$ változóra vonatkozóan (illetve $x \in \Gamma_N$, megfelelően) és C^1-beliek a többi változóban.

(iii) Bármely $(x, \eta) \in \Omega \times \mathbf{R}^N$ esetén az $\frac{\partial f(x,\eta)}{\partial \eta}$ deriváltmátrixok szimmetrikusak és λ sajátértékeik teljesítik a következőt:

$$0 < \mu_1 \leq \lambda \leq \mu_2 < \infty$$

ahol $\mu_2 \geq \mu_1 > 0$ konstansok függetlenek (x, η)-től.

(iv) Léteznek olyan $c_i, d_i \geq 0$ és $2 \leq p_i \leq p$ $(i = 1, 2)$ konstansok, amelyekre bármely $x \in \Omega$ (illetve $x \in \Gamma_N$, megfelelően) és $\xi \in \mathbf{R}$ esetén teljesül, hogy

$$0 \leq \partial_\xi q(x, \xi) \leq c_1 + c_2|\xi|^{p_1-2}, \qquad 0 \leq \partial_\xi s(x, \xi) \leq d_1 + d_2|\xi|^{p_2-2}$$

ahol p-t a (5.70)-ben definiáltuk.

(v) Vagy $\Gamma_D \neq \emptyset$, vagy $x \mapsto \inf\limits_{\xi \in \mathbf{R}^r, j=1,..,r} \lambda_j^{(s)}(x, \xi)$ függvény nem azonosan 0 mm. Γ_N-n.

(vi) $g \in L^2(\Omega)$ és $\gamma \in L^2(\Gamma_N)$.

5.8 Konstrukció. Legyen $G \in L^\infty(\Omega, \mathbf{R}^{N \times N})$ szimmetrikus mátrix-értékű függvény. amely teljesíti az alábbi egyenlőtlenséget: léteznek olyan $m' \geq m > 0$ állandók, amelyre

$$m\langle G(x)\xi, \xi\rangle \leq \langle \frac{\partial f(x, \eta)}{\partial \eta} \xi, \xi\rangle \leq m'\langle G(x)\xi, \xi\rangle \qquad ((x, \eta) \in \Omega \times \mathbf{R}^N, \xi \in \mathbf{R}^N). \tag{5.73}$$

Legyen $\beta \in L^\infty(\Gamma_N)$ és

$$\beta(x) \leq \frac{1}{m} \inf_{\xi \in \mathbf{R}} \partial_\xi s(x,\xi) \qquad (x \in \Gamma_N). \tag{5.74}$$

A következő vegyes lineáris peremértékfeladatot definiáljuk:

$$\begin{cases} Su \;:=\; -\mathrm{div}\,(G(x)\nabla u) \;=\; 0 & (x \in \Omega) \\ Ru \;:=\; \partial_{G(x)\cdot\nu} u + \beta(x) u \;=\; 0 & (x \in \Gamma_N), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u \;=\; 0 & (x \in \Gamma_D) \end{cases} \tag{5.75}$$

(ahol $\partial_{G(x)\cdot\nu} u = G(x)\,\nu \cdot \nabla u$ az u x-beli konormális deriváltja).

Legyen S értelmezési tartománya a következő: $u \in H^2(\Omega)$ és legyen $G(x)\nabla u \in H^1(\Omega)$. Ekkor legyen a megfelelő skaláris szorzat, amelyet a $H^1_D(\Omega)$ energiatéren értelmezünk, a következő:

$$\langle u, v\rangle_{H^1_D(\Omega)} := \int_\Omega G(x)\,\nabla u \cdot \nabla v \;+ \int_{\Gamma_N} \beta(x) uv\,d\sigma \qquad (u, v \in H^1_D(\Omega)). \tag{5.76}$$

(Megjegyzés: Az (v) feltétel biztosítja (5.76) skaláris szorzat pozitív definitségét.)
(Jelölés: Az egyszerűség kedvéért a következőkben elhagyjuk az Ω-n értelmezett integráloknál a dx-et.)

Az (1.1) feladatot *reguláris*-nak nevezzük, ha
bármely $f \in L^2(\Omega)$ és $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_N)$ esetén, a következő lineáris feladat

$$\begin{cases} Su \;=\; f & \text{in } \Omega \\ Ru \;=\; \varphi & \text{on } \Gamma_N \end{cases} \tag{5.77}$$

$u \in H^1_D(\Omega)$ gyenge megoldására teljesül, hogy $u \in H^2(\Omega)$. (elégséges feltételek megtalálhatóak az 2.3.2 szakaszban.)

Végül legyen

$$M(r) = m' + c_1\varrho^{-1} + d_1 K^2_{2,\Gamma_N} + c_2 C^* K^{p_1}_{p_1,\Omega} r^{p_1-2} + d_2 C^* K^{p_2}_{p_2,\Gamma_N} r^{p_2-2} \quad (r > 0), \tag{5.78}$$

monoton növő függvény, ahol $K_{p_1,\Omega}, K_{p_2,\Gamma_N} > 0$ az (5.71)–(5.72)-ben szereplő beágyazási konstansok és C^* a 5.2 bizonyításában szereplő állandó, $\varrho > 0$ jelölje az S operátor legkisebb sajátértékét.

5.8. Tétel. *Tegyük fel, hogy a 5.8 feltételek teljesülnek. Ekkor a 5.8 konstrukciójából adódik a következő konvergencia eredmény:*

(1) Legyen $u_0 \in H^1_D(\Omega)$, és

$$M_0 := M\left(\|u_0\|_{H^1_D(\Omega)} + \frac{1}{m}\|F(u_0) - b\|_{H^1_D(\Omega)}\right), \tag{5.79}$$

ahol $M(r)$ a (5.78)-ben definiált, F jelöli a T-nek megfelelő általánosított differenciáloperátort és $b \in H_D^1(\Omega)$ pedig legyen a következő:

$$\langle b, v\rangle_{H_D^1(\Omega)} = \int_\Omega gv + \int_{\Gamma_N} \gamma v \, d\sigma \qquad (v \in H_D^1(\Omega)).$$

Legyen

$$u_{n+1} = u_n - \frac{2}{M_0 + m} z_n \,, \qquad (n \in \mathbf{N}) \tag{5.80}$$

ahol $z_n \in H_D^1(\Omega)$-re teljesül, hogy

$$\int_\Omega G(x) \nabla z_n \cdot \nabla v + \int_{\Gamma_N} \beta(x) z_n v \, d\sigma = \tag{5.81}$$

$$\int_\Omega \big[f(x, \nabla u_n) \cdot \nabla v + (q(x, u_n) - g)v\big] + \int_{\Gamma_N} (s(x, u_n) - \gamma) v \, d\sigma \quad (v \in H_D^1(\Omega)).$$

Ekkor az $(u_n) \subset H_D^1(\Omega)$ sorozat lineárisan konvergál az (1.1) feladat $u^* \in H_D^1(\Omega)$ gyenge megoldásához, az alábbi becslés szerint:

$$\|u_n - u^*\|_{H_D^1(\Omega)} \le \frac{1}{m} \|F(u_0) - b\|_{H_D^1(\Omega)} \left(\frac{M_0 - m}{M_0 + m}\right)^n \qquad (n \in \mathbf{N}) \,. \tag{5.82}$$

(2) Tegyük fel továbbá, hogy $G \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbf{R}^{N \times N})$ és a peremfeltételek legyenek regulárisak, azaz (5.77) teljesítsék. Ekkor bármely $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_D^1(\Omega)$ esetén a (5.81) segédfeladat az iteráció során írható erős alakba:

$$\left\{ \begin{aligned} Sz_n \equiv \; -\mathrm{div}\,(G(x) \nabla z_n) &= T(u_n) - g \quad \text{in } \Omega \\ Rz_n \equiv \; \partial_{G(x)\cdot\nu} z_n + \beta(x) z_n &= Q(u_n) - \gamma \quad \text{on } \Gamma_N \\ z_n &= 0 \qquad\qquad\quad \text{on } \Gamma_D \end{aligned} \right. \tag{5.83}$$

ahol $z_n \in H^2(\Omega)$, és (5.82)-t a következőre cserélhetjük:

$$\|u_n - u^*\|_{H_D^1(\Omega)} \le \frac{1}{m\varrho^{1/2}} \left(\|T(u_0) - g\|^2_{L^2(\Omega)} + \|Q(u_0) - \gamma\|^2_{L^2(\Gamma_N)}\right)^{1/2} \left(\frac{M_0 - m}{M_0 + m}\right)^n \tag{5.84}$$

($n \in \mathbf{N}$).

Bizonyítás. A bizonyítás a 5.7 tétel bizonyításának megfelelő módosításával kapható. (1) Mivel a (1.1) feladat megegyezik a 5.5 tétel feladatával (a feltételek is megegyeznek), ezért az utóbbiból tudjuk hogy az (1.1) feladatnak egyértelműen létezik $u^* \in H_D^1(\Omega)$ gyenge megoldása, azaz olyan $u^* \in H^1(\Omega)$, amelyre teljesülnek az alábbiak:

$$u^*{}_{|\Gamma_D} = 0$$

és

$$\int_\Omega \big[f(x, \nabla u^*) \cdot \nabla v + q(x, u^*)v\big] + \int_{\Gamma_N} s(x, u^*) v \, d\sigma = \int_\Omega gv + \int_{\Gamma_N} \gamma v \, d\sigma \qquad (v \in H_D^1(\Omega)). \tag{5.85}$$

Ekkor a fenti (5.85) egyenlet baloldala az 5.2 tétel speciális (r=1) esete, (az 5.2 tétel feltételei teljesülnek a 5.8 feltételek alapján), továbbá a (5.76) skaláris szorzat is megegyezik a tételbelivel. Így a 5.2 tétel szerint a (5.85) baloldalával a következő $F : H^1_D(\Omega) \to H^1_D(\Omega)$ általánosított differenciáloperátort definiálhatjuk:

$$\langle F(u), v\rangle_{H^1_D} = \int_\Omega (f(x, \nabla u) \cdot \nabla v + q(x, u)v) + \int_{\Gamma_N} s(x, u)v\, d\sigma \tag{5.86}$$

$(u, v \in H^1_D(\Omega))$, amely bihemifolytonos szimmetrikus Gâteaux-deriválttal rendelkezik, és teljesül rá az

$$m\|h\|^2_{H^1_D(\Omega)^r} \le \langle F'(u)h, h\rangle_{H^1_D(\Omega)^r} \le M(\|u\|_{H^1_D(\Omega)^r})\|h\|^2_{H^1_D(\Omega)^r} \qquad (u, h \in H^1_D(\Omega)^r) \tag{5.87}$$

egyenlőtlenség, ahol $m = \mu_1 > 0$ konstans és

$$M(r) := \mu_2 + c_1 K^2_{2,\Omega} + d_1 K^2_{2,\Gamma_N} + c_2 C^* K^{p_1}_{p_1,\Omega} r^{p_1-2} + d_2 C^* K^{p_2}_{p_2,\Gamma_N} r^{p_2-2} \qquad (r > 0), \tag{5.88}$$

monoton növő függvény, ahol $K_{2,\Omega}, K_{2,\Gamma_N}, K_{p_1,\Omega}, K_{p_2,\Gamma_N} > 0$ az (5.71)–(5.72)-ban szereplő beágyazási konstansok. Továbbá a (6.10) összefüggésnek köszönhetően $K^2_{2,\Omega}$ helyére ϱ^{-1} kerülhetett, így tehát kaptuk, hogy

$$M(r) = m' + c_1\varrho^{-1} + d_1 K^2_{2,\Gamma_N} + c_2 C^* K^{p_1}_{p_1,\Omega} r^{p_1-2} + d_2 C^* K^{p_2}_{p_2,\Gamma_N} r^{p_2-2} \quad (r > 0), 5.78 \tag{5.89}$$

Végül a 3.5 tétel segítségével kaphatjuk meg az első állítást, a tétel feltételei teljesülnek (H helyére $H^1_D(\Omega)$ kerül).

(2) A segédfeladat erős alakját indukcióval kaphatjuk, hasonlóan, 5.6 és 5.7 tétel bizonyításához. Nevezetesen, ha a peremfeltételek regulárisak (5.77)-értelemben, az 5.3 megjegyzés szerint a segédfeladatot a következő alakba írhatjuk:

$$u_{n+1} = u_n - \frac{2}{M_0 + m} \begin{pmatrix} S \\ R \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} T \\ Q \end{pmatrix} (u_n) := \begin{pmatrix} g \\ \gamma \end{pmatrix} \right],$$

így, ha $u_n \in H^2(\Omega) \cap H^1_D(\Omega)$, akkor tehát $u_{n+1} \in H^2(\Omega) \cap H^1_D(\Omega)$, amelyből, ha feltesszük, hogy $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H^1_D(\Omega)$, akkor tudjuk, hogy $u_n \in H^2(\Omega) \cap H^1_D(\Omega) \quad (n \in \mathbf{N})$. Továbbá (5.86)-ból kapjuk, hogy

$$\langle F(u), v\rangle_{H^1_D} = \langle T(u), v\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle Q(u), v\rangle_{L^2(\Gamma_N)} \qquad (u, v \in H^2(\Omega) \cap H^1_D(\Omega))$$

(azaz, az általánosított differenciáloperátor (4.7)-beli definíciója helyére a fenti került), így (5.52)-ben a $\|T(u_0) - g\|_{L^2(\Omega)}$ tag helyére a $(T(u_0) - g, Q(u_0) - \gamma)$ páron értelmezett szorzat-norma kerül, amelyből következik (5.84). ■

5.3. Megjegyzés. A (5.83) erős alak megvilágítja az F, T és S operátorok szerepét a segédfeladatban. Nevezetesen definiáljunk operátor párokat, amelyek szorzattérbe (két tér direkt szorzata) képeznek

$$\begin{pmatrix} T \\ Q \end{pmatrix}, \text{illetve} \begin{pmatrix} S \\ R \end{pmatrix} : H^2_D(\Omega) \to L^2(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma_N)$$

$$\begin{pmatrix} T \\ Q \end{pmatrix}(u) := \begin{pmatrix} T(u) \\ Q(u) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S \\ R \end{pmatrix}(u) := \begin{pmatrix} S(u) \\ R(u) \end{pmatrix}$$

Ha a peremfeltételek regulárisak (5.77)-értelemben, akkor $\begin{pmatrix} S \\ R \end{pmatrix}$ pár bijektív. Ennek köszönhetően (5.81) egybeesik (5.83)-al, továbbá a (5.80)–(5.81) iterációt írhatjuk erős alakba:

$$u_{n+1} = u_n - \frac{2}{M_0 + m} \begin{pmatrix} S \\ R \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} T \\ Q \end{pmatrix}(u_n) := \begin{pmatrix} g \\ \gamma \end{pmatrix} \right]$$

továbbá, a kapott (5.84) konvergencia becslésnek megfelelő kondíciószám a következő:

$$cond \left(\begin{pmatrix} S \\ R \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} T \\ Q \end{pmatrix} \right) \leq \frac{M_0}{m}$$

amely függ u_0-tól.

5.4. Megjegyzés. Reguláris esetben a (5.82)-beli $\|F(u_0) - b\|_{H^1_D(\Omega)}$ normát becsülhetjük a következő normával:

$$\varrho^{-1/2} \left(\|T(u_0) - g\|^2_{L^2(\Omega)} + \|Q(u_0) - \gamma\|^2_{L^2(\Gamma_N)} \right)^{1/2}$$

amely segítségével (5.84)-t megkaphatjuk. Ezt a becslést lehet használni a (5.79)-ben is. Ha a regularitási feltétel nem teljesül, akkor $\|F(u_0) - b\|_{H^1_D(\Omega)}$-t az 5.2 megjegyzéshez hasonlóan lehet kiszámítani.

6. fejezet

Függelék

A következő két alfejezetet [11] alapján írtam.

6.1. Reflexív Banach-terek

6.1. Definíció. Ha X normált tér, akkor $X^{**} := (X^*)^*$ az X második duális tere.

A definíció értelmes, mert X^* is normált tér, így van duálisa. Szintén igaz itt is, hogy a második duális mindig Banach-tér.

Példa X^{**}-beli funkcionálra. Legyen $x \in X$ adott, és $x^{**} : X^* \to \mathbb{K}$ az a funkcionál, amely minden ϕ-hez ϕx-et rendeli hozzá, azaz

$$x^{**}\phi := \phi x. \tag{6.1}$$

Jelölés (gyakran használatos): ha X normált tér, $\phi \in X^*$ és $x \in X$, akkor legyen

$$\langle \phi, x \rangle := \phi x. \tag{6.2}$$

Ha X Hilbert-tér, akkor az $X^* = X$ azonosítás mellett ez valóban skalárszorzat. (Előfordul ugyanerre a fordított jelölés is, azaz $\langle x, \phi \rangle = \phi x$.) A fenti jelölés elsősorban reflexív Banach-terek esetén szemléletes, ha ugyanis nemcsak az X^{**} és X tereket, hanem az x^{**} és x elemeket is azonosítjuk, akkor (**??**) úgy írható, hogy

$$\langle x, \phi \rangle = \langle \phi, x \rangle \qquad (\forall x \in X,\, \phi \in X^*),$$

ami szemlélteti X és X^* szerepének szimmetriáját és a „duális tér" elnevezést.

6.1. Megjegyzés. A Gâteaux-deriválásnál is használjuk ezt a jelölést (lásd: 6.3).

6.1. Tétel. *Reflexív Banach-térben minden korlátos sorozatnak van gyengén konvergens részsorozata.*

6.2. Gâteaux-derivált

6.2. Definíció. Legyenek X, Y normált terek. Egy $F : X \to Y$ (nemlineáris) operátor
(a) *Gâteaux-deriválható* az $u \in X$ pontban, ha

(i) bármely $v \in X$ esetén létezik

$$\partial_v F(u) = \lim_{t \to 0} \frac{(F(u+tv) - F(u))}{t} \in Y;$$

(ii) a $v \mapsto \partial_v F(u)$ hozzárendelés folytonos lineáris operátor X-ből Y-ba.
A második tulajdonság szerinti operátort $F'(u)$-val jelölve

$$F'(u)v := \partial_v F(u) \quad \text{és} \quad F'(u) \in B(X, Y).$$

(b) *Fréchet-deriválható* (vagy csak egyszerűen *deriválható*) az $u \in X$ pontban, ha van olyan $A \in B(X, Y)$ folytonos lineáris operátor, hogy

$$\lim_{v \to 0} \frac{\|F(u+v) - F(u) - Av\|}{\|v\|} = 0.$$

Ekkor A egyértelmű, és szintén $F'(u)$-val jelöljük. (Ez az alábbiak miatt nem okoz félreértést.)

6.2. Megjegyzés. (i) A Fréchet-deriválhatóságból következik a Gâteaux-deriválhatóság, és a kétféle derivált egybeesik. Visszafelé viszont nem következik, már $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ függvények esetén is előfordul, hogy f Gâteaux-deriválható, de nem Fréchet-deriválható.

(ii) Magasabbrendű deriváltak a definíció ismételt alkalmazásával értelmezhetők. Ha például $\Phi : X \to \mathbb{R}$ Gâteaux-deriválható és $\Phi' : X \to B(X, \mathbb{R}) = X^*$ is Gâteaux-deriválható valamely $u \in X$ pontban, akkor $\Phi''(u) := (\Phi')'(u) \in B(X, X^*)$.

Legyen $\Phi : X \to \mathbb{R}$ számértékű leképezés (funkcionál). Ekkor a Gâteaux-derivált definíciójában $Y = \mathbb{R}$, és $\Phi'(u) \in B(X, \mathbb{R}) = X^*$.

A reflexív Banach-tereknél bevezetett (6.2) jelölést használjuk

$$\langle \Phi'(u), v \rangle := \Phi'(u)v, \tag{6.3}$$

ami Hilbert-tér esetén valóban skalárszorzat.

6.1. Állítás (Lagrange-középértéktétel). *Legyen $\Phi : X \to \mathbb{R}$ Gâteaux-differenciálható, $u, v \in X$. Ekkor létezik $\xi \in [u, v]$, hogy $\Phi(v) - \Phi(u) = \langle \Phi'(\xi), v - u \rangle$.*

6.2. Állítás (másodrendű Taylor-formula). *Legyen $\Phi : X \to \mathbb{R}$ kétszer Gâteaux-differenciálható, $u, v \in X$. Ekkor létezik $\xi \in [u, v]$, hogy*

$$\Phi(v) - \Phi(u) = \langle \Phi'(u), v - u \rangle + \frac{1}{2} \langle \Phi''(\xi)(v - u), v - u \rangle .$$

6.3. Definíció. Legyenek X, Y és Z normált terek, $A : X \to B(Y, Z)$ leképezés. Azt mondjuk, hogy

(i) *A hemifolytonos*, ha minden $u, v \in X$ és minden $w \in Y$ esetén a $t \mapsto A(u+tv)w$ leképezés folytonos $\mathbf{R}$-ből Z-be;

(ii) *A bihemifolytonos*, ha minden $u, v, w \in X$, $z \in Y$ esetén az $(s,t) \mapsto A(u + tv + sw)z$ leképezés folytonos $\mathbf{R}^2$-ből Z-be.

A fenti definíció általánossága arra jó, hogy többféle szokásos helyzetben is értelmezhessünk (bi)hemifolytonosságot. Legyen például $\Phi : X \to \mathbb{R}$ adott funkcionál.

- Ha $Y = Z = \mathbb{R}$, akkor $B(Y, Z) = B(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$, így értelmezhető a $\Phi : X \to \mathbb{R}$ (bi)hemifolytonossága.
- Ha $X = Y$ és $Z = \mathbb{R}$, akkor $B(Y, Z) = B(X, \mathbb{R}) = X^*$, így értelmezhető a $\Phi' : X \to X^*$ Gâteaux-derivált (bi)hemifolytonossága.
- Ha $X = Y$ és $Z = X^*$, akkor $B(Y, Z) = B(X, X^*)$, így értelmezhető a $\Phi'' : X \to B(X, X^*)$ második Gâteaux-derivált (bi)hemifolytonossága.

6.2. Tétel (Newton–Leibniz). *Legyen $\Phi : X \to \mathbb{R}$, $u, v \in X$.*

(1) Ha Φ Gâteaux-deriválható és Φ' hemifolytonos, akkor

$$\Phi(v) - \Phi(u) = \int_0^1 \langle \Phi'(u + t(v-u)), v-u \rangle \, dt.$$

(2) Ha Φ kétszer Gâteaux-deriválható és Φ'' hemifolytonos, akkor

$$\Phi'(v) - \Phi'(u) = \int_0^1 \Phi''(u + t(v-u))(v-u) dt,$$

amin azt értjük, hogy minden $z \in X$ esetén

$$\langle \Phi'(v) - \Phi'(u), z \rangle = \int_0^1 \langle \Phi''(u + t(v-u))(v-u), z \rangle \, dt.$$

6.3. Szoboljev-terek

Az alábbiakat [1, 11] alapján írtam.

Legyen p egy valós szám, amely teljesül, hogy

$$2 \le p \quad (\text{if } N = 2) \quad \text{vagy} \quad 2 \le p \le \frac{2N}{N-2} \quad (\text{if } N > 2). \tag{6.4}$$

A következő Szoboljev-beágyazások (ill. becslések) állnak fenn:

$$H^1(\Omega) \subset L^p(\Omega), \qquad \|u\|_{L^p(\Omega)} \le K_{p,\Omega} \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad (u \in H^1(\Omega)), \tag{6.5}$$

$$H^1(\Omega)_{|\Gamma} \subset L^p(\Gamma), \qquad \|u\|_{L^p(\Gamma)} \le K_{p,\Gamma} \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad (u \in H^1(\Omega)_{|\Gamma}) \tag{6.6}$$

ahol $\Gamma \subset \partial\Omega$ a perem mérhető részhalmaza és $K_{p,\Omega} > 0$ és $K_{p,\Gamma} > 0$ a megfelelő konstansok és $H^1(\Omega)_{|\Gamma}$ jelöli $H^1(\Omega)$ nyomát Γ-n.

Ezekben feltételezzük, hogy a $H^1(\Omega)$ és a $H^1_0(\Omega)$ terek, olyan normával legyenek ellátva, amelyre teljesül $\|.\|$ a következő egyenlőtlenség:

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \|u\|^2. \tag{6.7}$$

6.1. Lemma. *Legyen $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ korlátos tartomány, szakaszonként sima peremmel. Tekintsünk egy olyan normát, amelyre teljesül az előző (6.7) egyenlőtlenség, valamint tekintsük a következő Szoboljev beágyazást a megfelelő Dirichlet-peremfeltételek mellett:*

$$H^1_0(\Omega) \subset L^p(\Omega), \qquad \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq K_{p,\Omega}\|u\| \quad (u \in H^1_0(\Omega)). \tag{6.8}$$

Ekkor

$$K^{p_1+p_2}_{p_1+p_2,\Omega} \leq \frac{p_1 p_2}{2} K^{p_1-1}_{2(p_1-1),\Omega} K^{p_2-1}_{2(p_2-1),\Omega}\,. \tag{6.9}$$

Példa. A (6.8)-ban szereplő $K_{p,\Omega}$ beágyazási konstans becsülhető a következő módon:

(a) $(p = 2)$. Legyen $\varrho > 0$ $-\Delta$ operátor ($H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$-n értelmezett) legkisebb sajátértéke. Ekkor 2.3 megjegyzés alapján kapjuk, hogy

$$K^2_{2,\Omega} \leq \frac{1}{\varrho}. \tag{6.10}$$

Irodalomjegyzék

[1] Adams, R.A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.
109

[2] Faber, V., Manteuffel, T., Parter, S.V., On the theory of equivalent operators and application to the numerical solution of uniformly elliptic partial differential equations, *Adv. in Appl. Math.,* 11 (1990), 109-163.

[3] Gajewski, H., Gröger, K., Zacharias, K., *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen,* Akademie-Verlag, Berlin, 1974

[4] Grisvard, P., *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains,* Pitman, 1985.

[5] Kadlec, J., On the regularity of the solution of the Poisson problem on a domain with boundary locally similar to the boundary of a convex open set, *Czechosl. Math. J.*, 14 (89), (1964), pp. 386-393.

[6] Kantorovich, L.V., Akilov, G.P., *Functional Analysis,* Pergamon Press, 1982.

[7] Karátson, J., The gradient method for a class of nonlinear operators in Hilbert space and applications to quasilinear differential equations, *Pure Math. Appl.*, **6** (1995), No. 2, 191–201.

[8] Karátson, J., The gradient method for non-differentiable operators in product Hilbert spaces and applications to elliptic systems of quasilinear differential equations, *J. Appl. Anal.*, 3 (1997) No. 2., pp. 205-217.

[9] Karátson, J., Gradient method for non-uniformly convex functionals in Hilbert space, *Pure Math. Appl.*, Vol. 11 (2000), No. 2., 309-316.

[10] Karátson J., Faragó I., *Numerical solution of nonlinear elliptic problems via preconditioning operators. Theory and applications.* Nova Science Publisher, New York, 402 p. 2002.

[11] Karátson J. (2014) *Numerikus funkcionálanalízis*, Typotex Kiadó, 2014

[12] Karátson J., Faragó I., Sobolev space preconditioning for nonlinear mixed boundary value problems, in: *Large-scale Scientific Computing, LSSC 2001,* eds. S. Margenov, J. Wasniewski, P. Yalamov, pp. 104-112, *Lecture Notes Comp. Sci.* Vol. 2179, Springer, 2001.

[13] Neuberger, J. W., *Sobolev gradients and differential equations*, Lecture Notes in Math., No. 1670, Springer, 1997.

[14] Simon L., Baderko, E., *Linear Partial Differential Equations of Second Order* (in Hungarian), Tankönyvkiadó, Budapest, 1983

[15] Zeidler, E., *Nonlinear functional analysis and its applications,* Springer, 1986

NYILATKOZAT

Név: Perjés Balázs

ELTE Természettudományi Kar, szak: Alkalmazott matematikus

NEPTUN azonosító: OUL159

Szakdolgozat címe:
Nemlineáris elliptikus vegyes peremértékfeladatok prekondicionálása

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2018.05.31

____

a hallgató aláírása