Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Retek Dávid

Jordan görbe tétel

BSc szakdolgozat

Témavezető: Sigray István
műszaki gazdasági tanár
Analízis Tanszék

Budapest, 2009

Bevezető

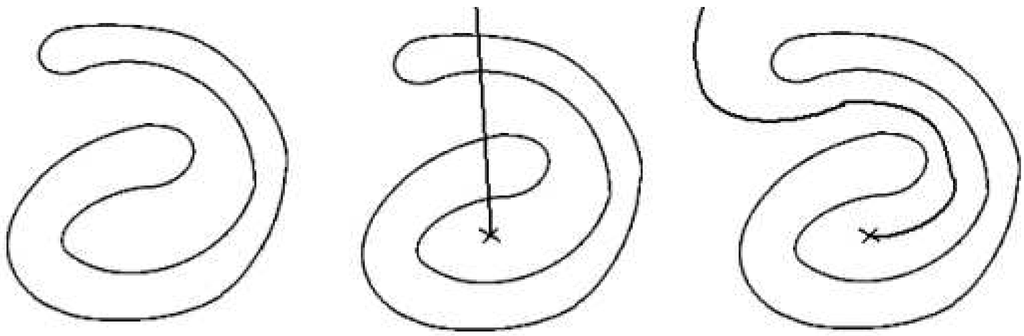
A későbbiekben jelentős szerepet kap az összefüggőség vizsgálata, így elsőként tekintsük át az összefüggőség különböző definiálásait.

Egy M metrikus teret összefüggőnek nevezünk, ha $M = U \bigcup V$ egyenlőség, ahol $U \bigcap V = \emptyset$ és U, V nyílt halmazok csak akkor teljesülhet, ha $U = \emptyset$ vagy $V = \emptyset$. Jelen esetben csak a sík nyílt részhalmazain kell az összefüggőséget értelmeznünk, így a fenti definíció helyett, egy azzal ekvivalens, de szemléletesebb definíciót használhatunk. Pontosabban egy $M \subset \mathbb{C}$ nyílt halmaz akkor és csakis akkor összefüggő, ha tetszőleges két pontja összeköthető egy halmazbeli görbével.

Jordan görbe tétel:
"Egyszerű zárt γ görbe komplementere két nem üres összefüggő nyílt halmazból áll, melyek közül pontosan az egyik korlátos, ezt nevezzük a γ belsejének, ezt jelöli $B(\gamma)$, a nem-korlátos $K(\gamma)$ pedig a γ görbe külseje"

A fenti állítás igazsága, bár szemléletesen nyilvánvaló, egzakt bizonyítása meglepően nehéz és hosszadalmas. A bizonyítás már önmagában is több ötletet igényel, a legjelentősebb nehézség mégsem magában a bizonyításban, hanem a "belső" ill. "külső" jelentésének matematikailag precíz meghatározásában kell keresni. Vegyünk egy "kellően bonyolult" egyszerű zárt görbét (jelöljük γ-val), melynél már nem lehet "ránézésre" eldönteni, hogy egy adott pont benne van-e a görbében, vagy sem. Ekkor lényegében nincs módunk (a szemléletes jelentésből adódó hiányosságok miatt) eldönteni a kérdést. A tétel igazolása pedig reménytelen, amíg egyetlen, jól meghatározott pontra sem tudjuk eldönteni, hogy mely halmazba tartozik. Így a legjelentősebb, és koránt sem evidens $B(\gamma)$ és $K(\gamma)$ precíz meghatározása. Hamar észrevehető hogy a szemléletes jelentésből direkt módon képzett definíciók vagy hibásak, vagy épp annyira eldönthetetlenek, mint az eredeti.

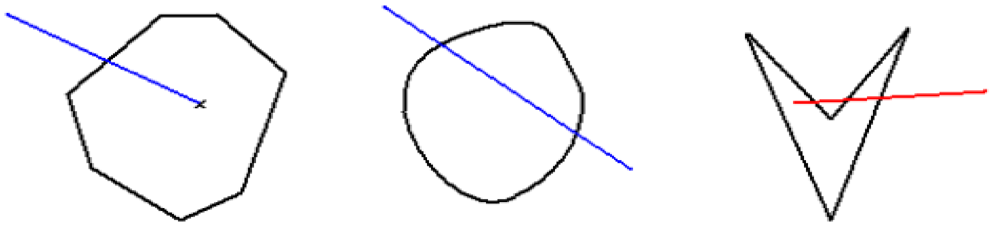
Első kísérletként, értelmezve $B(\gamma)$ jelentését, ha egy z pont benne van γ-ban, akkor γ ”körülöleli” a z pontot. Ekkor megpróbálhatjuk $B(\gamma)$-t úgy definiálni, hogy ha minden z-ből kiinduló félegyenes metszi γ-t, akkor $z \in B(\gamma)$.
Ez nyílván hibás, ezt jól mutatja az alábbi ábra.



1. ábra. Téves azonosítás ill. javítási kisérlet

Megpróbálható az előbbi kísérlet finomítása, hogy a félegyenes helyett egy a ”végtelenbe tartó” tetszőleges görbét veszünk. Bár így megszabadultunk a hibás besorolásoktól, viszont az így kapott definíció leellenőrzése még nehezebb, mint a szemléletes meghatározásé.

A definiáláshoz jó kiindulást ad, ha egy jóval egyszerűbb zárt görbét, egy konvex sokszöget vizsgálunk. Ekkor azt tapasztaljuk, hogy egy belső pontból kiinduló félegyenes pontosan egyszer metszi a sokszöget, míg egy külső pontból kiinduló félegyenes (véges sok esetet nem számítva) 0 vagy 2 pontban metszi a sokszöget.



2. ábra. Egyszerűbb esetek

Ezen elgondolás konvex görbékre is teljesül, hiszen konvex görbe bármely két pontját összekötő egyenes pontosan 2 pontban metszi a görbét.

Viszont hiányosságai is nyílvánvalók, hiszen a fenti állítás már konkáv sokszögekre sem teljesül. Ebben az esetben pontosítást jelenthet, ha a metszéspontok paritását nézzük. Ekkor bár megnő a problémás félegyenesek száma, egy adott z pont esetén, de még mindig véges sok lesz belőlük. (lásd ábra)

A fenti rész alapján már érezhető, hogy $B(\gamma)$, ill. $K(\gamma)$ definiálása nem reménytelen, de sokkal körültekintőbben kell eljárnunk. Ezért a bizonyítással együtt szükséges e két definíció meghatározása is.

Ezen felvetéssel elérkeztünk a szakdolgozat második fő céljához, hogy a tétel igazolása mellett, a bizonyításban szereplő részállítások alapján megbizonyosodhatunk róla, hogy a definiálásra kerülő halmazok kielégítik az egyszerű zárt görbéken vett ”belső” ill. ”külső” pontoktól elvárt elemi tulajdonságokat.

$K(\gamma)$, $B(\gamma)$ definiálása

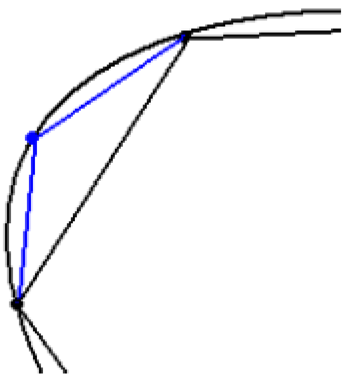
A bevezetőben már láttuk, hogy $B(\gamma)$ és $K(\gamma)$ definiálása sok veszélyt rejt. Legjelentősebb probléma, hogy γ görbe nagyon sokféle lehet. Így általános görbe helyett elsőnek határozzuk meg egy jóval egyszerűbb alakzatra, egy zárt töröttvonalra a belső ill. külső pontok halmazát. Az így szerzett ismeretekkel a későbbiekben már vizsgálhatunk tetszőleges zárt görbéket.

Legyen γ zárt görbe, $\mathbb{F} = \{z_0 ... z_n \in \gamma\}$ osztópontok véges rendszere. Legyen p a $\mathbb{F}$ osztópontok alapján γ-ba írt zárt törött vonal, z a sík egy nem p-beli pontja.
Definíció: l (z-ből induló) megengedett félegyenes, ha l nem tartalmaz egyetlen p-beli töréspontot sem.
Definíció: $B(p)$ ill. $K(p)$ legyen azon $z \notin \gamma$ pontok halmaza, melyek a γ-ba írt p töröttvonalra nézve $N(z, l)$ parítása páratlan ill. páros. Ahol l egy megengedett félegyenes és $N(z, l)$ a z pontból kiinduló l megengedett félegyenes és a p töröttvonal metszéspontjainak száma.
1. állítás: ***definíció értelmességének vizsgálata***
Tetszőleges l és l' z-ből induló megengedett félegyenesekre:

$$N(z, l) \equiv N(z, l') \quad mod(2)$$

Bizonyítás: Teljes indukcióval:
Háromszögekre triviálisan adódik, a belsejében lévő pontból kiinduló félegyenes minden esetben 1-szer, a külsejéből kiinduló félegyenes 0-szor vagy 2-szer metszi a háromszöget. Tekintsünk egy n pontú törött vonalat. Ennek vegyük 3 egymás melletti pontját, ezeket jelöljük rendre p_{k-1}, p_k, p_{k+1}-el. Ebből képezzünk a p_k pont kihagyásával egy n-1 pontú törött vonalat, melyre az indukciós feltevés miatt

igaz az állítás.



3. ábra. Háromszög keletkezése

Ha a z pont a $p_{k-1}p_kp_{k+1}$ háromszögön kívül helyezkedett el(azaz a háromszöget 0-szor vagy 2-szer metszi a megengedett felagyenes). Ekkor ha metszette mindkét $p_{k-1}p_k$; p_kp_{k+1} szakaszt, illetve egyiket sem, ezek elhagyásával l és l' paritása nem változik, ha csak az egyiket metszette, akkor szükségképpen az új $p_{k-1}p_{k+1}$ szakaszt is metszenie kell, így a paritás szintén nem változik

Ha a z pont a $p_{k-1}p_kp_{k+1}$ háromszög belsejében van, akkor

- vagy mindkettő metszette $p_{k-1}p_k$, p_kp_{k+1} szakaszok valamelyikét, ekkor mindkettőn eggyel csökkent a metszésekpontok száma, vagyis továbbra is megegyezik a paritásuk.
- vagy egyik sem metszette, ekkor mindkettőnek metszenie kell az új $p_{k-1}p_{k+1}$ szakaszt, és ismételten mindkettőnek eggyel nő a metszéspontjainak száma, vagyis továbbra is megegyezik a paritásuk.
- vagy egyik metszette a $p_{k-1}p_k$, p_kp_{k+1} szakaszok valamelyikét, a másik pedig nem, ekkor az elsőnek eggyel csökken, a másodiknak eggyel nő a metszéspontok száma, tehát az eltérés közöttük pont 2 lesz, vagyis továbbra is megegyezik a paritásuk.■

1. Megj.: Az előző érvelésből látszik, hogy ha z a $p_{k-1}p_kp_{k+1}$ háromszög belsejében van, akkor az új töröttvonal létrehozásakor változik a paritása (a régi töröttvonalhoz képest), ha a háromszögön kívül helyezkedik el, akkor változatlan marad.

2. Megj.:$N(z, l)$ kiszámítása nyílván könnyen algoritmizálható, számítógéppel kiszámíttatható. Így $N(z, l)$ parításának vizsgálata "bonyolult" zárt töröttvonalak esetén is megoldható.

A fenti állítás biztosítja a definíció értelmességét, hiszen egy adott z pontra és p töröttvonalra nézve, a definícióban lévő egyetlen szabad választás (a megengedett félegyenes kiválasztása) nem befolyásolja z besorolását.

1. Köv.: Ezen összefüggés alapján, adott p töröttvonal esetén, a sík tetszőleges pontjáról egyértelműen eldönthető, hogy $B(p)$,$K(p)$ ill. p-beli-e, így ezen halmazok a sík diszjunkt felbontását adják.

A fenti definícióról bár láttuk, hogy értelmes, de számunkra még korántsem elegendő. Azt leszámítva, hogy p osztópontjait γ-ból vettük, a definíció még nem mutat kapcsolatot a görbével. Érdemes megvizsgálni, hogy a görbébe írt töröttvonalak között milyen kapcsolat van. Természetesen az eredeti töröttvonaltól teljesen különböző, tőle független új töröttvonalról reménytelen vállalkozás érdemi eredményeket várni. Evidens, hogy valamilyen korlátot kell szabni a változtatásoknak. A töröttvonalak jó mérőszáma a finomságuk, így érdemes ezt korlátkén adni.

Jelölje γ_k a z_{k-1} és z_k osztópontok közötti részívet.
Definíció: γ_k átmérője: $atm(\gamma_k) = max\{|z_1 - z_2| : z_1, z_2 \in \gamma_k\}$
Definíció: p töröttvonal finomsága: $\delta(p) = \max_{1\leq k\leq n} atm(\gamma_k)$

2.állítás
γ zárt görbére $\rho = \rho(z, \gamma) > 0$, ekkor egy p γ-ba írt ρ-nál finomabb töröttvonalra vagy mindig $z \in B(p)$ vagy mindig $z \in K(p)$ teljesül.

Bizonyítás:
Indirekt tegyük fel hogy $\exists p_1, p_2$ ρ-nál finomabb töröttvonalak, hogy: $z \in B(p_1)$

és $z \in K(p_2)$ Ekkor tekintsük a p_1, p_2 közös finomításával képzet p_3 töröttvonalat. Nyílván $z \in B(p_3)$ vagy $z \in K(p_3)$. Tegyük fel hogy, pl. $z \in B(p_3)$(a másik eset azonos módon bizonyítható). Vegyük, a $p_2 = q_1, q_2, ..., q_n = p_3$ töröttvonal sorozatot, melyet úgy kapunk, hogy q_i-hez minden lépésben hozzáveszünk egy újabb osztópontot. Mivel $z \in K(p_2)$ de $z \in B(p_3)$ így létezik egy olyan k index, hogy $z \in K(q_{k-1})$ és $z \in B(q_k)$. De ez akkor és csakis akkor lehetséges, ha a z pont a finomításkor létrejövő háromszögben van.(lásd 1. Megj.; 3. ábra)

Ezen új osztópont görbén való mozgatásával, kapunk egy olyan p' törött vonalat, mely nyílván továbbra is ρ-nál finomabb, azaz $\delta(p') < \rho$ valamint $z \in \rho'$ teljesül. Viszont mivel $\delta(p) < \rho$, azaz p minden pontja ρ-nál közelebb van γ-hoz, így ez z-re is teljesül, azaz definíció szerint $\rho(z, \gamma) < \rho$, ami ellentmond a feltevésnek.■

Ezen érvelést végig gondolva, észrevehető, hogy ha veszünk egy finomodó töröttvonal sorozatot, melynek finomsága 0-hoz tart. Ekkor a sík tetszőleges, $z \notin \gamma$ adott pontjához, bármilyen közel is legyen γ-hoz, e töröttvonal sorozat kellően távoli elemeire a fenti állítás teljesül.

Továbbá látszik, hogy a pont ilyen módú besorolása csak a töröttvonal finomságától függ. Azaz független az osztópontok számától, valamint konkrét helyzetétől mindaddig, amíg ezen osztópontok teljesítik a megkívánt finomságot.
Ezt az észrevételt kihasználva általánosíthatjuk $B(p)$ és $K(p)$ definícióját zárt görbékre. Tisztán halmazelméleti megfontolásokkal látszik, hogy adott γ zárt görbe, $\{p_n\}$ törött vonal sorozata, melyre $\delta(p_n) \to 0$ $(n \to \infty)$.

$$\textbf{Def.}: B(\gamma) := \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} B(p_n) = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} B(p_n)$$

$$\textbf{Def.}: K(\gamma) := \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} K(p_n) = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} K(p_n)$$

Bizonyítás:
Legyen $z \in B(\gamma)$ ekkor az előző észrevétel szerint egy kellő finomságtól kezdve, (mely finomság $\rho := \rho(z, \gamma)$-tól függ) $z \in B(p_n)$, mivel $\exists N \quad \forall n > N \quad \delta(p_n) < \rho$.

Ebből adódik, hogy

$$z \in B(p_n) \quad \forall n > N \Rightarrow z \in \bigcap_{n=N}^{\infty} B(p_n) \Rightarrow z \in \bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty} B(p_n),$$

másrészt mivel $z \in B(p_n) \quad \forall n > N$-re így tetszőleges K-ra $z \in \bigcup_{n=K}^{\infty} B(p_n)$, azaz $\forall \quad k \in \mathbb{N}$-re $z \in \bigcup_{n=K}^{\infty} B(p_n)$ tehát $z \in \bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty} B(p_n)$ is teljesül.

Ezzel az egyik irányú tartalmazást beláttuk, az ellenkező irányú tartalmazás bizonyítása a fentivel lényegében megegyező módon történik, tehát:

Ha

$$z \in \bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty} B(p_n) \Rightarrow \exists N \quad z \in \bigcap_{n=N}^{\infty} B(p_n) \Rightarrow \exists N \quad \forall n > N \quad z \in B(p_n)$$

Másrészt pedig

$$z \in \bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty} B(p_n) \Rightarrow \forall N \quad z \in \bigcup_{n=K}^{\infty} B(p_n) \Rightarrow \forall N \quad \exists n > N \quad z \in B(p_n)$$

Mindkét esetben arra jutottunk, hogy tetszőlegesen nagy n-re (vagyis tetszőlegesen finom γ-ba illesztett töröttvonalra) $z \in B(p_n)$ azaz $z \in B(\gamma)$. Ezzel beláttuk a kölcsönös tartalmazást.■

Technikai megj.: Az állítás $K(\gamma)$-ra történő bizonyítása a fentivel megegyező módon történik, így ennek levezetésétől tekintsünk el.

3. Megj.: Vegyük észre, hogy $B(\gamma)$ ill. $K(\gamma)$ definiálásában nem szerepelt a görbe egyszerűségére való megkötés. Tehát a fenti meghatározások tetszőleges zárt görbéken értelmezhető. Éppen ezért a későbbiekben is(ameddig lehetséges), tekintsünk tetszőleges zárt görbét.

2. Köv.:A definíció kiterjesztése után is érvényes az 1. következményben szereplő tulajdonság. Ugyanis vegyünk egy tetszőleges z pontot a síkból, ha $z \in \gamma$, akkor z-t vegyük be az osztópontok közé. Ekkor nyílván nem kerülhet bele sem $B(\gamma)$-ba, sem $K(\gamma)$-ba. Ha $z \notin \gamma$, akkor $\rho(z, \gamma) > 0$, ebből adódik, hogy kellően nagy N-re z besorolása fix. Ez legyen például $z \in B(p_n) \quad \forall n > N$, viszon ekkor

$z \in \bigcap_{n=N}^{\infty} B(p_n)$ tehát

$$z \in \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} B(p_n) = B(\gamma).$$

Nyílván ha $z \in B(p_n)$, akkor $z \notin K(p_n)$, tehát $B(\gamma)$ és $K(\gamma)$ diszjunkt

Ezzel beláttuk a tétel azon részét, miszerint a γ görbe komplementere két halmazból áll. Érdemes most megnézni, hogy ezen halmazok nyíltak.

3. Állítás: $K(\gamma)$ és $B(\gamma)$ nyílt halmazok.

Biz.: Ugyanis ha $|z_1 - z_2| < \rho(z_1, \gamma)$ és $z_1 \in B(\gamma)$ akkor $z_2 \in B(\gamma)$ tehát z_1 egy környezete is $B(\gamma)$ beli. Indirekt tegyük fel hogy létezik olyan z_2 pont, mely teljesíti a feltételeket, de $z_2 \in K(\gamma)$-beli, ekkor tekintsük a z_1-ből kiinduló és z_2 ponton átmenő félegyenest. Erről feltehetjük, hogy megengedett félegyenes . Ekkor definíció szerint a z_1-hez és a z_2-höz tartozó félegyenes paritása különböző, de nyílván a közös részre (közös félegyenesre) eső metszéspontokat mindkettőnél beszámítjuk, így az eltérő paritás csak úgy keletkezhet, ha a $z_1 z_2$ szakaszon is van metszéspont, pontosabban páratlan sok metszéspont. Itt elegendő, hogy legalább egy metszéspont van, ezt jelöljük v-vel. Azonban, ha tekintjük a $|z_1 - v|$ távolságot, akkor:

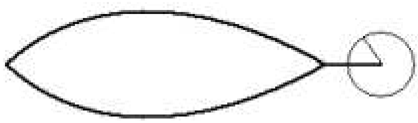
$$|z_1 - v| < |z_1 - z_2| < \rho(z_1, \gamma)$$

ami ellentmondás, mivel $v \in \gamma$ ■

$K(\gamma), B(\gamma) \neq \emptyset$ valamint $B(\gamma)$ korlátosságának igazolása

$K(\gamma) \neq \emptyset$ igazolása viszonylag könnyen elvégezhető tetszőleges zárt görbére. Ennél lényegesen nehezebb $B(\gamma) \neq \emptyset$ igazolása. . Mely tetszőleges zárt görbére nem is teljesül. Vegyünk például egy szakaszt, ami tekinthető egy speciális zárt görbének is. Ennek a görbének nyílván nincs belső pontja.

A következő lépés megtétele előtt érdemes néhány - a szemléletes jelentésbe belefoglalt - elemi tulajdonságra belátni, hogy a fent definiált $B(\gamma)$ ill. $K(\gamma)$ is rendelkezik vele. Elvárjuk, hogy a belső és külső pontok határa lényegében γ legyen. A teljes egyezést nyílván nem követelhetjük meg (γ zárt, de **nem** feltétlenül egyszerű görbe). Hiszen létrehozható olyan zárt görbe, melynek van olyan $z \in \gamma$ pontja, hogy ezen pont egy kis környezetébe nincs pl. $B(\gamma)$-beli pont. Így e pont nyílván nem is állhat elő $B(\gamma)$ határaként (lásd ábra).



4. ábra. $B(\gamma)$-ba nem metsző

A következő, egyenlőre elegendő tartalmazás viszont tetszőleges zárt görbére igaz:
4. Állítás:

$$\partial K(\gamma) \subseteq \gamma \quad ill. \quad \partial B(\gamma) \subseteq \gamma$$

Bizonyítás:
Legyen $z \in \partial K(\gamma) = \overline{K(\gamma)} \setminus K(\gamma) = \overline{K(\gamma)} \setminus int(K(\gamma))$ ekkor $\exists \quad z_n \in K(\gamma)$, hogy $z_n \to z$. Mivel $z \notin K(\gamma)$ így $z \in B(\gamma)$ vagy $z \in \gamma$, de $z \in B(\gamma)$ nem lehetséges, mivel $B(\gamma)$ nyílt, így szükségképpen lennie kellene egy olyan N-nek, hogy $n > N$ $z_n \in B(\gamma)$, tehát $z \in \gamma$.■
Technikai megj.: az analóg állítás azonos módon.

A következő ugyan csak elem tulajdonság, mely két tetszőlegesen kiválasztott pont között kapcsolatot vizsgálja. Vagyis ha ezen két pont kellően távol van egymástól, akkor legalább az egyiknek ”túl kell lógnia” γ belsején.

5. Állítás:
Ha $|z_1 - z_2| > atm(\gamma)$ akkor z_1 és z_2 egyike $K(\gamma)$-hoz tartozik.

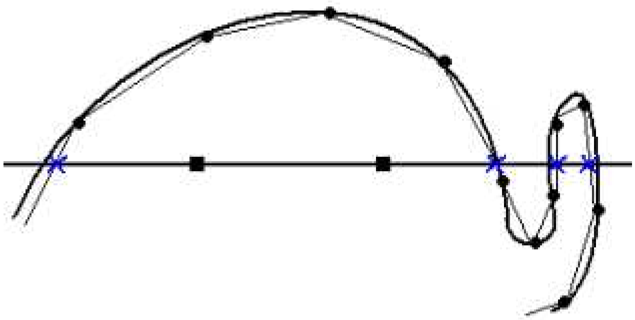
Bizonyítás:
Indirekt tegyük fel hogy $z_1 \in B(\gamma)$ és z_2 $B(\gamma)$ vagy γ beli($z_1, z_2 \in \gamma$ nyílván nem teljesülhet). Ekkor tekintsük a z_1,z_2-t összekötő egyenest, így kapunk két: l és l' félegyeneseket, melyekre teljesül, hogy $z_1 \in l, z_2 \notin l$ ill. $z_2 \in l', z_1 \notin l'$(lásd 5. ábra) valamint feltehető, hogy ezek megengedett félegyenesek. Ha nem lenne megyengetedd félegyenes, perturbáljuk a z_1 pontot. Ezzel nyílván kontinuum sok egyenest (félegyeneseket) hozhatunk létre, és ezek közül csak véges sok lehet nem megengedett. Mivel $B(\gamma)$ nyílvt, így z_1^* továbbra is $B(\gamma)$ beli.

Mivel $z_1 \in B(\gamma)$ így l páratlan sokszor metszi a γ-ba írt kellően finom töröttvonalat. Vegyük ezen metszéspontok közül a z_1-hez legközelebb levő metszéspontot. Jelöljük v-vel. $z_2 \in B(\gamma)$ így a fentiek miatt itt is kell lennie egy metszéspontnak, melyet jelöljünk w-vel. Azonban ekkor

$$|z_1 - z_2| < |v - w| < atm(\gamma)$$

ellentmondásra jutunk. Tehát $z_2 \in K(\gamma)$.■

3. Köv.: A fenti észrevételből adódik, hogy ha z γ-tól kellően nagy távolságra



5. ábra.

van, akkor automatikusan $z \in K(\gamma)$ teljesül, hiszen tetszőleges $z_0 \in B(\gamma) \bigcup \gamma$ választása esetén a fenti állítás feltételei teljesülnek. Tehát $K(\gamma) \neq \emptyset$

4. Köv.: Az előbbi állítás további következménye, mintegy megfordíttása, hogy tetszőleges két $z_1, z_2 \in B(\gamma)$ pontokra $|z_1 - z_2| \leq atm(\gamma)$. Speciálisan a két legtávolabbi pontra is igaz, ami pont $B(\gamma)$ átmérőjét adja, azaz

$$atm(B(\gamma)) \leq atm(\gamma)$$

Tehát $B(\gamma)$ korlátos.

Ezzel elérkeztünk $B(\gamma) \neq \emptyset$ igazolásához. Mint már említettem ezt nem lehet tetszőleges zárt görbére belátni. Így lassan szükséges lesz a γ zárt görbére az egyszerűségi megszorítást alkalmazni. Mielőtt még élnénk ezzel a lehetőséggel, tekintsük a következő két segédállítást, melyek még tetszőleges zárt görbére érvényesek.

6. Állítás:

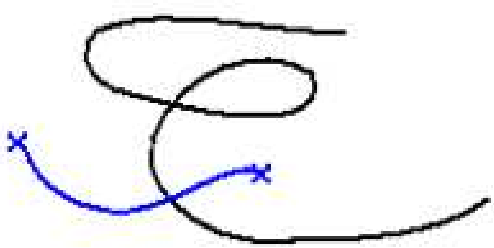
Legyen γ zárt görbe, $z_1 \in B(\gamma)$, $z_2 \in K(\gamma)$. Ha a γ^* görbe z_1-ből z_2-be fut (lásd 6. ábra), akkor

$$\gamma \bigcap \gamma^* \neq \emptyset.$$

Biz.: Ugyanis vegyük a γ^* görbe egy $[0, 1]$ paraméterezését, hogy $\gamma^*(0) := z_1$ és $\gamma^*(1) := z_2$. Indirekt tegyük fel hogy $\gamma \bigcap \gamma^* = \emptyset$. Legyen

$$t^* = \sup\{t : \gamma^*(t) \in B(\gamma)\} < 1$$

Ekkor t^* definicója alapján $\gamma^*(t^*) \in B(\gamma)$ mivel $\gamma^*(t^* - \varepsilon) \in B(\gamma)$ és $B(\gamma)$ nyilt. Továbbá $\gamma^*(t^* + \varepsilon) \in K(\gamma)$ és $K(\gamma)$ is nyilt, azaz $\gamma^*(t^*) \in K(\gamma)$ ellentmondást kapjuk. ■

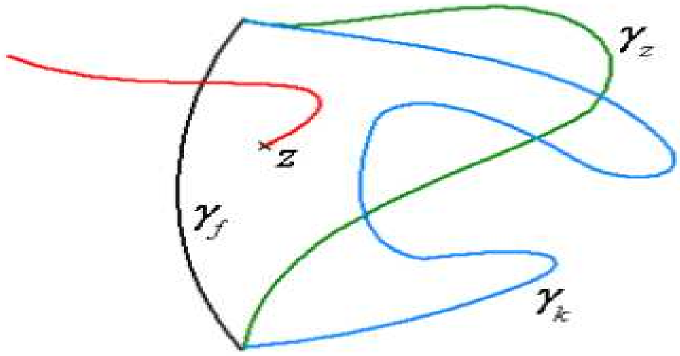


6. ábra.

A fenti állítással egy új elemi tulajdonságot is beláttunk. Ha átfogalmazzuk a feltételeket, azon szemléletes tulajdonsághoz jutunk, hogy az úgymond határ két oldalán lévő pontokat csak úgy tudjuk összekötni, hogy a határon is átmegyünk.

7. Állítás:

Legyen γ_f a γ_1 és γ_2 zárt körbék közös részíve, γ_f kiegészítő íveit jelöljük γ_z-vel ill. γ_k-val. Ha z pontból egy távoli pontba futó Γ görbe nem metszi sem γ_z-t, semm γ_k-t és $z \in B(\gamma_1)$, akkor $z \in B(\gamma_2)$. ($\gamma_1 := \gamma_f \bigcup \gamma_z, \gamma_2 := \gamma_f \bigcup \gamma_k$)



7. ábra.

Bizonyítás:

Tekintsük $\gamma_{z\bigcup k} := \gamma_z \bigcup \gamma_k$ zárt görbét. Mivel a Γ görbe nem metszi sem γ_z-t, sem γ_k-t így az előző állítás alapján $z \notin \gamma_{z\bigcup k}$-nek. Ekkor vegyünk egy $\gamma_{z\bigcup k}$-ba írt kellően finom töröttvonalat. E töröttvonalra z paritása páros.

Egészítsük ki a fenti töröttvonalat γ_f-beli töréspontokkal (a két érintkezési pontot is jelöljük ki, ha eddig még nem szerepeltek), úgy hogy továbbra is elérjük a szükséges finomságot. Az így képzett töröttvonalakat jelöljük rendre p_f,p_z és p_k-val. Mint szerepelt egy l megengedett félegyenes a $gamma_{z\bigcup k}$-ba írt $p_z \bigcup p_k$ finom töröttvonalat páros sokszor metszi, azaz

$$\sharp(l \bigcap p_z) + \sharp(l \bigcap p_k) \equiv 0 \quad mod(2).$$

Továbbá $z \in B(\gamma_1)$ így az l megengedett félegyenes a γ_1-be írt $p_f \bigcup p_z$ finom töröttvonalat páratlan sokszor metszi, azaz

$$\sharp(l \bigcap p_f) + \sharp(l \bigcap p_z) \equiv 1 \quad mod(2).$$

E két egyenletet összeadva kapjuk, hogy

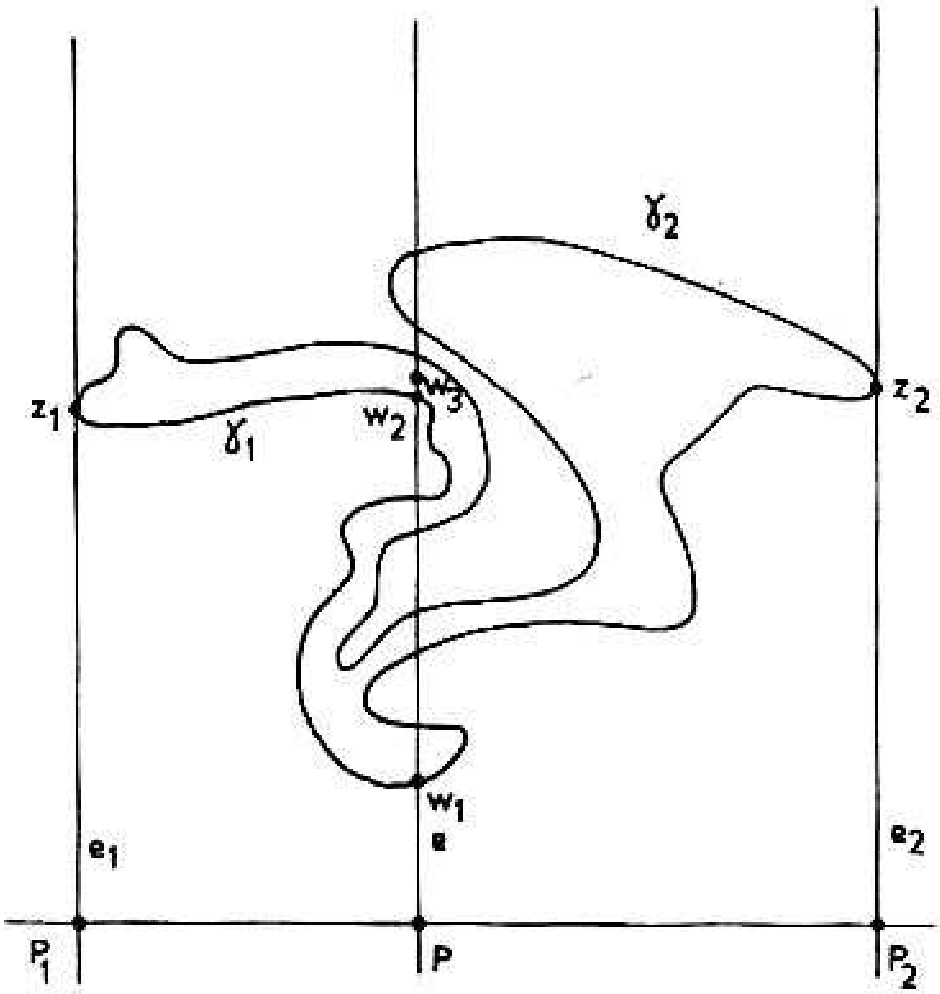
$$\sharp(l \bigcap p_f) + \sharp(l \bigcap p_k) \equiv 1 \quad mod(2)$$

azaz l páratlan sokszor metszi $p_f \bigcup p_k$-t, ami egy γ_2-be írt kellően finom töröttvonal. Tehát $z \in B(\gamma_2)$.■

Az előbbi állításokkal, illetve γ **egyszerű** zárt görbe megkötés alkalmazásával már igazolható, hogy $B(\gamma) \neq \emptyset$. Pontosabban:

8. állítás:

Legyen γ egyszerű zárt görbe, $z_1, z_2 \in \gamma \quad |z_1 - z_2| = atm(\gamma)$ e_k a z_k-n átmenő $[z_1, z_2]$-re merőleges egyenes ($k = 1, 2$), e pedig közöttük futó, velük párhuzamos egyenes. Legyen P az e-nek egy távoli pontja, legyen w_1 az $e \bigcap \gamma$ p-hez legközelebbi pontja és jelölje γ_1 a γ-nak azt a részívét, mely z_1-ből z_2-be fut és tartalmazza a w_1 pontot. Legyen γ_2 a kiegészítő ív és jelölje w_2 az $e \bigcap \gamma_2$-nek a P-től legtávolabbi pontját. Legyen w_3 az e egyenesen egy olyan pont, amely w_2-nél messzebb van P-től és a $[w_3, w_2)$ intervallumon γ-nak nincs pontja. P_1 és P_2 jelöli e_1-en ill. e_2-n azt a pontot, amelyet a P-ben emelt e_1-re merőleges egyenes kimetsz. Végül legyen Γ a γ_2 $[z_1, p_1], [p_1, p_2], [p_2, z_2]$ csatlakozásával nyert egyszerű zárt görbe(lásd 8. ábra). Ekkor $w_1, w_2, w_3 \in B(\Gamma)$ és $w_3 \in B(\gamma)$



8. ábra.

(forrás: Petruska Gy.: Komplex függvénytan 1987)

Bizonyítás:

► $w_1 \in B(\Gamma)$: mivel az e egyenes w_1-ből induló P-n átmenő része bármely P_1, P_2 egymást követő osztópontokat tartlamazó beírt zárt töröttvonal esetén megengedett félegyenes, ami nyílván csak $[p_1, p_2]$ részívéhez tartozó töröttvonal részt metszi. Ott pontosan egyszer (P-nél), azaz páratlan sokszor.

► $w_2 \in B(\Gamma)$: Tekintsük a w_1-et w_2-vel összekötő γ_1 részívet, jelölje γ_1^* . Vegyük ennek egy paraméterezését, hogy $w_1 := \gamma_1^*(0)$; $w_2 := \gamma_1^*(1)$. Nyílván $\gamma_1 \notin \Gamma$. Továbbá $\gamma_1^*(0) = w_1 \in B(\Gamma)$. Indirekt tegyük fel hogy $w_2 \in K(\Gamma)$ ekkor legyen

$$t^* = \sup\{t : \gamma_1^*(t) \in B(\Gamma)\} < 1$$

a már ismert módon $B(\Gamma), K(\Gamma)$ nyiltságát kihasználva $\gamma_1^*(t^*) \in B(\Gamma)$ és $\gamma_1^*(t^*) \in K(\Gamma)$ ellentmondsára jutunk.

► $w_3 \in B(\Gamma)$: Az előző érveléssel megegyező módon w_2-t w_3-mal összekötő e-beli szakaszt tekintve.

► $w_3 \in B(\gamma)$: Mivel γ és Γ zárt görbék, γ_2 közös részívvel és w_3-tól vett e egyenssel, mint speciális, w_3-ból egy távoli pontba futó görbe, mely nem metszi a kiegészítő íveket, teljesítve az előző állítás feltételeit. Így a 7. állítás alapján $w_3 \in B(\gamma)$. ■

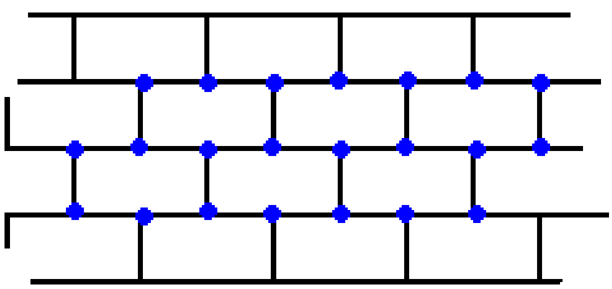
Ezzel tetszőleges egyszerű zárt γ görbéhez megadtunk egy w_3 pontot, melyre $w_3 \in B(\gamma)$, tehát $B(\gamma) \neq \emptyset$.

Összefüggőség igazolása

A tétel egy részét már beláttuk, azonban legkomplikátabb része, az összefüggőség igazolása még hátra van. Ennek megtételéhez az egyszerű zárt görbéket, pontosabban a beléjük írt kellően finom zárt töröttvonalak más irányú megközelítésére van szükség. A bizonyítás jelentős része, ezen új modell megalkotássa. Így az összefüggőség tényleges igazolása előtt tekintsük át a síkon vetített (speciális) rács néhány alaptulajdonságát. A könyebb hivatkozás miatt lássuk el a síkot egy koordinátarendszerrel.

Vegyünk a síkon egybevágó tengely-párhuzamos téglalapokból álló rácsot, melyben az x-tengellyel párhuzamosan álló minden második sor el van csúsztatva úgy, hogy a téglalapok csúcspontjai a feljebb, ill. lejjebb álló téglalapok oldalfelező pontjára kerüljenek. Ekkor minden téglalap határán hat rácspont keletkezik. A fenti rács hatrácsnak is tekinthető. Ekkor a hatszög az (elemi) rácstéglalapokat jelenti, a rács finomsága a rácshatszögek átmérőjével adható meg.

Megj.: A továbbiakban hatszögrácson mindig ilyen alakzat értendő.



9. ábra.

Az így képzett hatszögrács minden pontjának elég kis környereze legfeljebb három rácshatszöget metsz. Továbbá rácspont elég kis környezete pontosan három hatszöget metsz.
Ui.: Vegyük az oldalhosszak minimumának a felét, az ilyen sugarú körök nyílván teljesítik a fenti tulajdonságokat.
Nyílván a rácspontok és az őket összekötő oldalak olyan gráfot alkotnak, melynek minden szögpontjából pontosan három él fut ki.

4. Megj.:A fenti gráfos modellben, egy séta, az eredeti hálón egy, a háló csúcsaiból és éleiből álló összefüggő töröttvonalat határoz meg. Egy zárt séte pedig egy zárt töröttvonalat

9. állítás:
Jelöljünk ki egy hatszögrácsban véges sok hatszöget, ezeket nevezzük fekete hatszögnek, a többi hatszög legyen fehér. Ekkor a hatszögoldalak, melyek különböző színű hatszögeket határolnak, olyan gráfot alkotnak, melyben minden szögpontból pontosan két el fut ki.

Biz.: Tetszőleges v hatszögcsúcsra, ha v teljesíti a fentieket, akkor az őt határoló hátrom hatszögből az egyik biztosan fekete, a másik biztosan fehér. A fenti két hatszög közös éle nyílván éle a gráfnak. Valamint a 3. hatszögnek, függetlenül hogy fehér vagy fekete, a színe különbözik az 1. ill. 2. hatszög valamelyikétől, pontosabban csak az egyik színétől. Így ehhez a két hatszöghöz tartozó közös él is éle a gráfnak, valamint a harmadik él nyilván nem lehet éle a gráfnak.■

10. állítás:
Véges sok rácshatszög egyesítéséből álló halmaz határa véges sok, páronként diszjunkt egyszerű zárt töröttvonalra bontható fel.

Biz.: Ugyanis, ezen véges sok rácshatszöget tekintsük a fekete rácshatszögeknek, a többi legyen a fehér. Ekkor a alábbi halmaz határát alkotó élek, pont a fentebb meghatározott speciális tulajdonságú élek lesznek. Mint az már szerepel, az ezen éleket és csúcsokat modellező G gráf minden csúcsának a foka 2.(Ha nem összefüggő, akkor tekintsük az összefüggő részgráfjait külön-külön.) Az így kapott összefüggő gráf(ok) minden foka páros, így létezik benne Euler-kör. Továbbá mivel minden csúcs foka pont 2, így ezen (rész)gráf(ok) egy kört alkot(nak). A 4. Megjegyzés alapján a fenti kör(ök) meghatároznak egy(több) töröttvonal(ak)at, mivel a kezdő és a végpont azonos, így zárt, valamint egyszerű, azaz nem metszi önmagát, hiszen minden csúcson legfeljebb egyszer érint.■

11. állítás:
Legyen A véges sok rácshatszög egyesítése és legyen A összefüggő. Ekkor az A határát alkotó egyszerű zárt töröttvonalak között van pontosan egy (jelölje p), mely az összes többit és az $A \setminus p$ halmazt is belsejében tartlamazza.

Bizonyítás:
Az előző állítás alapján ismert, hogy véges sok, diszjunkt egyszerű zárt töröttvonal (*eztv*) keletkezik. E törttvonalak közül szeretnénk találni a feltételeket kielégítő törtöttvonalat.

Az előzőekkel hasonló módon itt is alkalmazzuk a szinezés terminológiáját. Az A rácshatszög halmazt vegyük fekete mezőknek, a többit fehérnek.

Válaszunk egy tetszőleges *eztv*-t, vizsgáljuk meg, hogy van-e ezt tartalmazó (ennél nagyobb) *eztv*. Ha találunk ilyet, cseréljük le arra, valamint időlegesen, színezzük át feketére (ha eddig nem volt az) az új *eztv* belső rácshatszögeit. A továbbiakban az így kizárt *eztv*-tól tekintsünk el. Egy ilyen lépés után, az átszínezést követően a kibővített fekete rácshatszögek továbbra is összefüggőek maradnak, hiszen csak olyan fehér mezőket színezhetünk át, amelyeket eredetileg fekete mezők határoltak. Továbbá e mezők színezésével csak lokálisan, a nagyobb *eztv* belsejében változnak a határok, pontosabban ott eltűnnek, új határ nem keletkezik. Folytassuk a szelektálást, ill. a színezést, amíg csak lehetséges. Mivel véges sok *eztv*-ból választunk, így két esetben akadhatunk meg.

- Vagy elfogytak az *eztv*-ak, azaz találtunk egy olyan *eztv*-at, ami tartalmazza az összes többit, és ebből adódóan tartalmazza a teljes A halmazt. Ekkor az állítást beláttuk.

- Vagy találtunk két diszjunkt rácscsoportot határoló *eztv*-t, hogy mindkettő maximális, azaz mindkét csoporton elvégeztük a fenti eljárást.

Azonban a második lehetősen nem következhet be, ugyanis a két csoportban lévő fekete hatszögrácsok összefüggőségén a belső mezők átszínezése nem változtatott, így lennie kell, egy a két csoportot összekötő fekete hatszögrácsokból álló összefüggő mezősorozatnak. De ekkor szükségképpen a csoportot határoló *eztv*-lal is lenne szomszédos fekete mező, ami pedig ellentmond a csoport maximális méretének.■

A fenti elveket szem előtt tartva, elkezdhetjük $K(\gamma)$ összefüggőségének bizonyítását, pontosabban annak előkészítését. Végső célunk nyílván, hogy megmutassuk,hogy tetszőleges két külső pont összeköthető egy $K(\gamma)$-beli görbével.

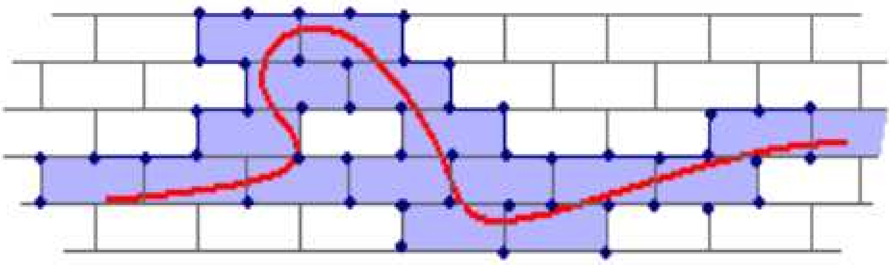
Mint azt már a bevezetőben láttuk, a γ görbe igen bonyolult is lehet, és ennek megfelelően $K(\gamma)$ is. Így direkt bizonyítása reménytelen. A 2. állításból kiindúlva érdemes lenne helyettesítetni egy megfelelő töröttvonallal. Itt már nyílván nem elegendő, hogy csak kellően finom legyen, külsejének jól kell közelítenie $K(\gamma)$-t. Tehát szükség van egy konstrukcióra, amivel megkaphatjuk a kívánt töröttvonalat.

konstrukció

Legyen γ egyszerű zárt görbe. Legyen $0 < \varepsilon < \frac{1}{10} atm(\gamma)$, és ε-hoz $\delta < \varepsilon$ olyan, hogy $z_1, z_2 \in \gamma$, $|z_1 - z_2| < 3\delta$ esetén a z_1 és z_2 közötti ívek egyikának átmérője kisebb ε-nál (ezt nevezzük rövid ívnek). Boritsunk a síkra δ-nál finomabb hatszögrácsot és jelölje p a γ-t metsző hatszögek egyesítésének külső határát.

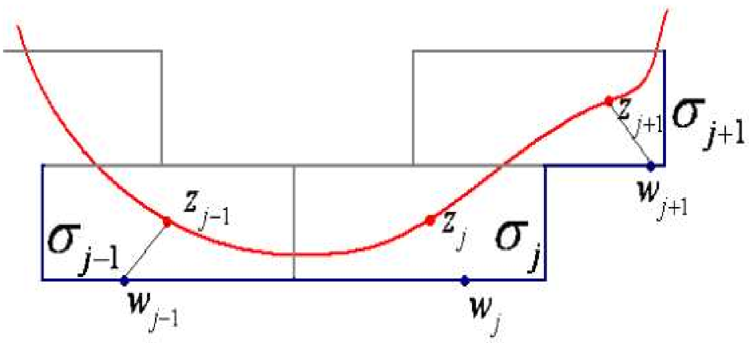
12. állítás:

Ekkor ha $z \in K(\gamma)$ és $\rho(z, \gamma) > 6\varepsilon$, akkor $z \in K(p)$(biz később)



10. ábra. Fedő hatszögrácsok

Legyen p a $p_1...p_n$ ívek csatlakozása, ahol mindegyik p_j pontosan a σ_j fedőhatszög határán fekvő oldalak csatlakozása. Jelölje w_j a p_j ív felezőpontját (ívhosszúság szerint) és legyen z_j a $\gamma \bigcap \sigma_j$-nek a w_j-hez legközelebbi pontja.
A könnyebb érthetőség miatt, használva az előző terminológiát σ_j rácshatszögeket nevezzük fekete rácshatszögeknek, a többit fehérnek.



11. ábra. Felosztások

1. segédállítás:

$$|z_{j-1} - z_{j+1}| < 3\delta$$

indexek *mod n* értendő

Biz.:
A konstrukcióból adódik, hogy $z_i \in \sigma_i \quad 1 \leq i \leq n$. Mivel γ folytonos, így σ_i és σ_{i+1}-nek van közös oldala $\forall i$-re *mod n*. Azaz z_{j-1}, z_{j+1} legfeljebb 3 rácshatszög távolságra van egymástól, ami kisebb 3δ.■

Tekintsük p-nek a w_{j-1}-ből w_{j+1}-be futó részívét (w_j-n keresztül; jelölje $p_{j-1,j+1}$), ehhez csatlakozzon a $[w_{j+1}, z_{j+1}]$ szakasz, ehhez γ-nak a z_{j+1}-ből z_{j-1}-be futó rövid íve(jelölje $\gamma_{j+1,j-1}$), majd ehhez a $[z_{j-1}, w_{j-1}]$ szakasz. Jelöljük γ_j-vel

2. segédállítás:
γ_j egyszerű zárt görbe, és $atm(\gamma_j) < 4\varepsilon < atm(\gamma)$
Biz.:
γ_j nyílván zárt, továbbá $\gamma_{j+1,j-1}$ nem metszheti $p_{j-1,j+1}$-t a konstrukcióból adódóan. $[w_{j+1}, z_{j+1}]$, $[z_{j-1}, w_{j-1}]$ szakaszokat sem metszheti $\gamma_{j+1,j-1}$, hiszen különben lenne, egy z_{j+1} ill. z_{j-1} -nél közelebbi pont is w_{j+1} ill. w_{j-1}-höz, ami nyílván ellentmondásra vezet. $[w_{j+1}, z_{j+1}]$, $[z_{j-1}, w_{j-1}]$ szakaszok $p_{j-1,j+1}$-t sem metszik, mivel w_{j+1}, w_{j-1} kapcsolódási pontokat leszámítva $[w_{j+1}, z_{j+1}] \in B(\sigma_{j+1})$ ill. $[z_{j-1}, w_{j-1}] \in B(\sigma_{j-1})$ és mivel $B(\sigma_{j+1}) \bigcap B(\sigma_{j-1}) = \emptyset$ így $[w_{j+1}, z_{j+1}] \bigcap [z_{j-1}, w_{j-1}] = \emptyset$. Továbbá a részívek önmagukat sem metszik, azaz γ_j egyszerű zárt görbe.

Az előbbiekből látszik, hogy $\gamma_j \subset \overline{B(\sigma_{j-1})} \bigcup \overline{B(\sigma_j)} \bigcup \overline{B(\sigma_{j+1})}$. Mivel δ-nál finomabb hálót vettünk, így $atm(\overline{B(\sigma_j)}) \leq \delta < \varepsilon$. Azaz $atm(\overline{B(\sigma_{j-1})} \bigcup \overline{B(\sigma_j)} \bigcup \overline{B(\sigma_{j+1})}) < 3\varepsilon$. Továbbá $\partial(\overline{B(\sigma_{j-1})} \bigcup \overline{B(\sigma_j)} \bigcup \overline{B(\sigma_{j+1})})$ nyílván egyszerű zárt görbét alkota közös éleknek köszönhetően. Indirekt tegyük fel, hogy $\exists \quad u_1, u_1 \in \gamma_j$ hogy $|u_1 - u_2| > 4\varepsilon$. Mivel $u_1 \in \overline{B(\sigma_{j-1})} \bigcup \overline{B(\sigma_j)} \bigcup \overline{B(\sigma_{j+1})}$ az 5. állítás alaján ekkor u_2 a hatszögrácsokon kívül van, ami ellentmondásra vezet. Tehát $atm(\gamma_j) < 4\varepsilon < atm(\gamma)$. ■

3. segédállítás:

$[w_k, z_k]$ szakaszok a w_k ponttól eltekintve $B(p)$-ben vannak, és $B(\gamma_j) \bigcap \gamma = \emptyset$

Biz.:

$(w_k, z_k] \subset B(\sigma_k \subset B(p)$. Továbbá, ha $B(\gamma_j) \bigcap \gamma \neq \emptyset$ akkor γ hosszú íve metszené γ_j-t. Azonban egyetlen részívet sem metszhet,mert ellentmondana γ egyszerűségének ill. a konstrukciónak.(lásd 5. segédállítás bizonyítása)■

4. segédállítás:

$B(\gamma_j) \subset B(p) \quad (j = 1, 2..., n)$

Biz.:

Indirekt tfh. $\exists\, z \in B(\gamma_j)$, hogy $z \in K(\gamma)$ ($z \in \gamma_j \Rightarrow z \notin p$). Használva a 9-11. állítás terminológiáját, ez pont azt jelenti, hogy z fehér mezőben van. Továbbá z összeköthető a sík egy távoli pontjával, hogy végig fehér mezőkben haladunk. Azonban a teljes γ_j fekete mezőkben van. Ezzel ellentmondásra jutottunk, mivel a fehér és a fekete mezők nem metszhetik egymást.■

5. segédállítás:

A z_j pont a z_{j-1} és z_{j+1} közötti rövid ívre esik

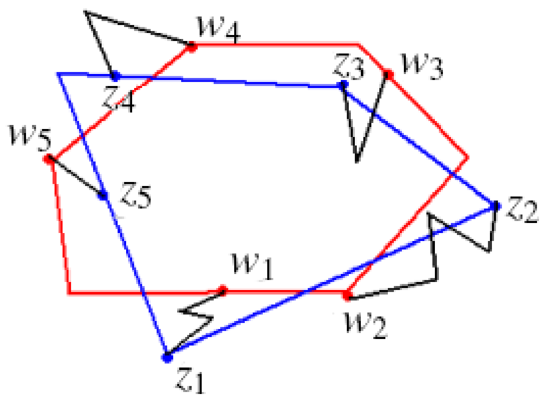
Biz.:

Paraméterezzük a hosszabb ívet, a szokásos módon $[0, 1]$, legyen $\Gamma(0) := z_{j+1}$ és $\Gamma(1) := z_{j-1}$. Indirekt tegyük fel, hogy $\exists \quad i \in [0, 1]$, hogy $z_j = \Gamma(i)$. Mintegy visszakanyarodik a hosszabb ív. Ekkor szükségképpen a $\Gamma(\widehat{0 + \varepsilon)\Gamma}(i)$ ív metszi γ_j-t. $\Gamma(\widehat{0 + \varepsilon)\Gamma}(i) \subset \gamma$ így nem metszheti p-t. Továbbá w_{j+1} ill. w_{j-1}-t sem metszheti, z_{j+1} ill. z_{j-1} választásából adódóan. Tehát $\gamma_{j+1,j-1}$-t metszi, ami ellentmond γ egyszerűségének. Azaz, $z_j \in \gamma_{j+1,j-1}$ a rövid ívre esik.■

5. Köv.$\{z_1, z_2..., z_n\}$ γ görbe egy felosztását adja.

13. állítás:

Legyen $\{z_1, z_2 ..., z_n\}$ a p, és $\{w_1, w_2 ..., w_n\}$ a q zárt töröttvonal egy felosztása. Jelölje p_j ill. q_j a z_{j-1}, z_j ill. a w_{j-1}, w_j pontok közötti részívet($z_0 = z_n; w_0 = w_n$) ($j = 1, .., n$). Legyen továbbá t_j tetszőleges töröttvonal, mely a z_j-ből w_j-be fut, és jelölje γ_j a $p_j, t_j, q_{j-1}, t_{j-1}$ töröttvonalak csatlakozásával adódó zárt töröttvonalat.



12. ábra.

Ekkor

$$N_p(z, l) - N_q(z, l) \equiv \sum_{j=0}^{n} N_{\gamma_j}(z, l) \quad mod(2),$$

ha az l félegyenes megengedett valamennyi szóbajövő töröttvonalra.
($N_p(z, l)$ jelöli a p töröttvonalra vett $N(z, l)$-t)

Bizonyítás:

Vegyük észre, hogy $\sum_{j=0}^{n} N_{\gamma_j}(z, l)$-en $mod(2)$ a t_j-beli metszéspontok nem változtatnak, hiszen $t_j \in \gamma_j$ és $t_j \in \gamma_{j+1}$ teljeül, azaz minten ilyen metszéspontot kétszer számolunk.

Továbbá felhasználva azon számelméleti azonosságot, hogy

$$N_p(z, l) - N_q(z, l) \equiv N_p(z, l) + N_q(z, l) \quad mod(2),$$

azaz két szám összege illetve különbsége megegyezik $mod(2)$. Az előbbi észrevételek alapján az állítás igazsága már nyilvánvaló, mivel az l megengedett félegyenes tetszőleges metszéspontja p-vel ill. q-val metszéspont lesz pontosan egy γ_j-vel is. A p és q egyértelmű felbontásából adódóan. Valamint minden ezen kívüli(t_k-n történő) metszéspontot kétszer számolunk. ■

5. Megj.:A fenti állítás szemléletes jelentése, hogy annak eldöntése, hogy a két töröttvonalra egy z pont azonos halmazban van-e, azaz $z \in (B(p) \bigcup B(q)) \bigcap (K(p) \bigcup K(q))$ teljesül-e, elegendő a két tötötvonal közti részt vizsgálni.

A 13. állítást, az 5. következményt ill. a segédállításokat fölhasználva, már könnyen igazolható a 12. állítás.

Bizonyítás:

Legyen $z \in K(\gamma)$. Vegyünk egy γ-ba írt $\{z_0, ..., z_n\}$ osztópontú töröttvonalat (jelöljük q-val). Ennek a γ-ba írt töröttvonalnak a finomsága legalább ε . Továbbá tekintsük a konstrukcióban szereplő p töröttvonalat, $\{w_1, ..., w_n\}$ osztópontokkal. Az előző állításban szereplő módon képzett p_j zárt töröttvonalak pont γ_j-be írt töröttvonalakat alkotnak legalább ε finomsággal. Ha $\rho(z, \gamma) > 6\varepsilon$ feltétel mellett $z \in K(\gamma_j)$ teljesül $j = (1, ..., n)$-re akkor az előző állítást alkalmazva kapjuk, hogy a γ-ba írt kellően finom q töröttvonalat és p töröttvonalat azonos paritással metszi az l megengedett félegyenes. Tehát $z \in K(p)$ teljesül.

$z \in K(\gamma_j)$ $j = (1, ..., n)$ ugyanis indirekt, ha lenne olyan $gamma_j$ hogy $z \in B(\gamma_j) \bigcup \gamma_j$ akkor fölhasználva, hogy $z_j \in (\gamma \bigcup \gamma_j) \neq \emptyset$ valamint a 2. segédállíttásban és 2. következményben szereplő összefüggéseket $\rho(z, \gamma) < 6\varepsilon$ ellentmondásra jutnánk.■

14. állítás:

Legyen p egyszerű zárt töröttvonal. Ekkor $K(p)$ összefüggő

Bizonyítás:
Legyen $p_1 \in p$. Ekkor képezzük egy p_1 középpontú, ε sugarú k kört, hogy $\sharp(p \bigcap k) = 2$. E két metszéspont a kört egyértelműen felbontja egy $B(p)$ és egy $K(p)$-beli körívre.

Legyen $z_0, z_1 \in K(p)$ tetszőleges pontok. Az összefüggőség igazolásához készítsünk egy $K(p)$-beli görbét, mely összeköti z_0-t z_1-el. Tekintsük a z_0z_1 szakaszt. Ha $\sharp(p \bigcap z_0z_1) = 0$, akkor összekötöttük $K(p)$-ben.(A $K(p)$-beliség a 6. állítás bizonyításában szereplő elvek alapján könnyen igazolható.) Ha van metszéspont, akkor vegyük az első és az utolsó metszéspontot. Jelölje rendre p_0, p_1 ($p_0 = p_1$ lehetséges). Képezzük a fent említett k köröket a p_0 és p_1 pontok közötti töröttvonal részen, illetve a p_0, p_1 pontban úgy, hogy azok belseje lefedje a teljes részívet. A szokásos kompaktsági technikával találunk véges sok kört, melyek rendelkeznek a kívánt tulajdonsággal. Evidens, hogy az így képzett szomszédos körök p-n kívül metszik egymást. A p_0-ra ill. p_1-re felállított körök nyílván metszik a z_0z_1 szakaszt. Ekkor induljunk ki z_0-ból, haladjunk a szakaszon, amíg nem metszi a p_0 középpontú kör. Ez a metszéspont, ill. a hozzá tatrozó körív $K(p)$ nyíltsága miatt $K(p)$-ben van. Haladjunk tovább az egymásba kapcsolódó köríveken egészen a p_1 középpontú kör z_0z_1 szakasszal vett metszéspontjáig. $K(p)$ nyíltsága miatt továbbra is $K(p)$-ben vagyunk. Majd haladjunk tovább a z_0z_1 szakaszon z_1-be. Ezzel egy olyan z_0-t z_1-el összekötő görbét kaptunk, amelynek minden pontja $K(p)$-ben van. Tehát $K(p)$ összefüggő.$\blacksquare$

6. Megj.:A $B(p)$-re vonatkozó analóg állítás a fentikkel azonos módon igazolható.

15. állítás: ***főállítás***
Legyen γ egyszerű zárt görbe. Ekkor $K(\gamma)$ összefüggő.

Bizonyítás:
Legyen $z_0, z_1 \in K(\gamma)$. Készítsük el a 12. álliátsban szereplő p külső határt

(töröttvonalat). Válasszuk ε-t úgy, hogy $\rho(z_0, \gamma) > 6\varepsilon$; $\rho(z_1, \gamma) > 6\varepsilon$ egyenlőtlenségek is teljesüljenek. Ez nyílván lehetséges, hiszen $\rho(z_i, \gamma) \neq 0 \quad i = 0, 1$. Ekkor már láttuk, hogy $z_0, z_1 \in K(p)$. Továbbá $z \in K(p) \Rightarrow z \in K(\gamma)$ teljesül. Ekkor z_0, z_1-re valamint p-re használva a 14. állításban szereplő eljárást, kapunk egy görbét ami végig $K(p)$-ben van.
Összefoglalva tetszőleges $z_0, z_1 \in K(\gamma)$ pontokra tudunk adni egy olyan görbét, ami végig $K(p)$-ben van, ezáltal végig $K(\gamma)$-ban van. Ezzel pont az összefüggőség definícóját kaptuk. Tehát $K(\gamma)$ összefüggő.■

7. Megj.:$B(\gamma)$ összefüggőségének igazolása, bár technikaila kissé más, a fentiekkel megegyező elv alapján történik. A terjedelmére való tekintettel bizonyítását nem részletezem.

Utószó

Az összefüggőség igazolásával a tétel bizonyításának végére érkeztünk. Az első fejezetben sikeresen definiálásra került a γ görbe belseje, ill. külseje. Megmutattuk részben még az első fejezetben, részben a rákövetkezőkben, hogy e definíció teljesíti a tőle elvárható elemi tulajdonságok. Még az első fejezetben belátásra kerültek a tétel azon részei, melyek a már egzakt definícióból közvetlenül adódtak. Ezt követően a második fejezetben több, egyszerűbb tulajdonság belátása mellett a fő célkitűzést, $B(\gamma) \neq \emptyset$ tételrészt is beláttuk. Végül az összefüggőség, nehézségére való tekintettel külön fejezetben kertült tárgyalásra. Itt szükségessé vált új modellek, illetve új konstrukciók bevezetése is.

Személyes véleményem, hogy bár a tétel igazságához a bizonyítás nélkül sem fér kétség, mindazonáltal végiggondolása korántsem haszontalan. Jó képet kapunk a használt fogalmak kapcsolatáról, továbbá jól reprezentálja az egyes bizonyítási módok használhatóságát, pontosabban azok használhatóságának korlátait is.

A szakdolgozat írása során nagyban támaszkodtam Petruska György Komplex Függvénytan című egyetemi jegyzetére. A bizonyításban szereplő egyes részállítások, valamin azok sorrendje, bár kissé módosítva szintén e jegyzetből származnak.

Külön köszönettel tartozom témavezetőmnek, Sigray Istvánnak segítőkészségéért, türelméért. Mindenre kiterjedő figyelme, tanácsai nagy segítséget nyújtottak a szakdolgozat írása során.

Köszönettel: Retek Dávid