

LOKÁLIS BIFURKÁCIÓK

Szakdolgozat

Írta: Csépany Viktória

Matematika BSc, Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Dr. Kovács Sándor

Numerikus Analízis Tanszék



Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2010.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Lokális bifurkációk	7
2.1. Nyereg-csomó-bifurkáció	7
2.2. Transzkritikus bifurkáció	9
2.3. Vasvilla bifurkáció	10
2.4. Poincare-Andronov-Hopf bifurkáció	11

Köszönetnyilvánítás

Köszönetemet szeretném kifejezni témavezetőmnek, Kovács Sándor Tanár Úrnak, aki bevezetett a lokális bifurkációk elméletébe, és hasznos tanácsaival, precíz magyarázataival nagyban hozzájárult dolgozatom elkészüléséhez.

1. Bevezetés

Tacoma-híd, gőzgép, centrifugális szabályozó, paraméter, bifurkációk, ... Ezen szak kifejezések között látszólag nincs semmilyen kapcsolat, de ha jobban elmélyedünk tanulmányozásukban, kiderül, nem is állnak oly távol egymástól. Dolgozatomban a paramétertől függő differenciálegyenlet-rendszerek vizsgálatán keresztül keresem ezek kapcsolatát. Mit is értünk ilyen rendszerek alatt? Adott egy differenciálegyenlet-rendszer, legalább egy ismeretlen paraméterrel. A paraméter ill. paraméterek módosításakor bekövetkező változásokra vagyunk kíváncsiak, ha vannak. Előfordulhat ugyanis, hogy a paraméter kis változtatása súlyos következményekkel jár. Így történt ez annak idején a gőzgép működésével is, mely a konstrukciós változtatások miatt egyre megbízhatatlanabban kezdett működni. Számos szakember és mérnök dolgozott a probléma megoldásán. Végül Visnyegradszkij, az automatikus szabályozások elméletének egyik megalapozója találta meg a kiutat a válságból. Volt ugyanis a gőzgépnek egy centrifugális szabályozó alkatrésze, mely feladata a következő volt: növelni tudta a gőz adagolását, ha csökkent a lendítőkerék sebessége, illetve csökkentette a gőzadagolást, ha nőtt a sebesség. Azt várnánk, hogy egy idő után stabilizálódik a szabályozó sebessége. Az első időkben ez így is történt. A XIX. század második felében megfigyelt zavar okainak feltárásához viszont Visnyegradszkijnak meg kellett vizsgálni a géprendszer dinamikai működését és annak stabilitását. Arra a következtetésre jutott, hogy a technika fejlődése következtében a rendszert leíró egyenletek paraméterei stabilitást rontó irányba kezdtek változni. A paraméterváltoztatás során az az eset is előfordulhat, hogy bizonyos értékekre a rendszernek periodikus megoldása lesz. A Tacoma-híd tragédiájának magyarázatakor is találunk olyan érveléseket, amelyek nem a "periodikus széllekedésekre" alapozzák a hídszerkezet periodikus mozgását, hanem egy paraméter változása okozta Hopf-bifurkáció kialakulására. A paraméterek megváltozása a megoldások kvalitatív viselkedésének megváltozását vonja maga után a viszonylag egyszerű $\dot{x} = ax$ egyenlet esetében is: az

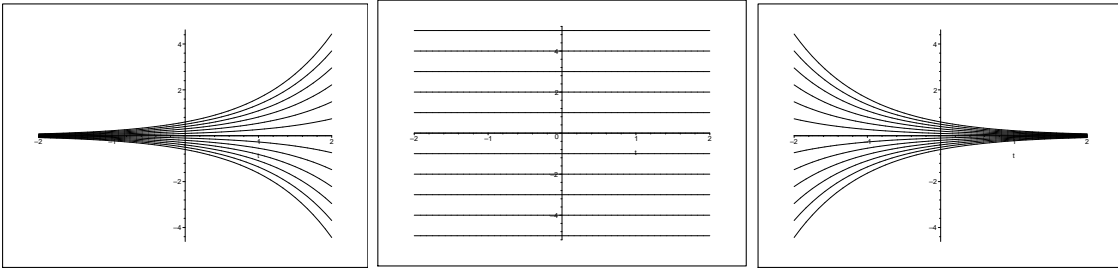
$$\dot{x} = ax, \quad x(\tau) = \xi$$

kezdetiérték-feladat megoldása a

$$\varphi(t) := \xi e^{a(t-\tau)} \quad (t \in \mathbb{R})$$

függvény. Könnyű kiszámolni, hogy ha

1. $a > 0$, akkor $\lim_{+\infty} \varphi = \operatorname{sgn}(\xi)\infty$, $\lim_{-\infty} \varphi = 0$,
2. $a = 0$, akkor $\lim_{+\infty} \varphi = \xi$, $\lim_{-\infty} \varphi = \xi$,
3. $a < 0$, akkor $\lim_{+\infty} \varphi = 0$, $\lim_{-\infty} \varphi = \operatorname{sgn}(\xi)\infty$.



1. ábra. Az $\dot{x} = ax$ megoldásainak grafikonjai $a > 0$, $a = 0$ ill. $a < 0$ esetén.

Világos, hogy ha egy (autonóm) differenciálegyenlet(-rendszer) esetében a paramétereket változtatjuk, akkor a a rendszer "alakja" is megváltozik. Kérdés, hogy a különböző paraméterértékekhez tartozó dinamikai rendszerek kvalitatív tulajdonságai ugyanazok maradnak-e. Nézzük most azt az esetet, ha a paramétereket csak kicsit módosítjuk, azaz a rendszert csak "kicsit" változtatjuk meg. Ennek a "kicsi"-nek a pontos matematikai megfogalmazását írjuk le a következő bekezdésben.

1.1. Definíció. Legyen M n -dimenziós irányítható kompakt C^2 -sokaság, $f, g \in C^1(M, \mathbb{R}^n)$. Az

$$\dot{x} = f \circ x \quad \text{és} \quad \dot{x} = g \circ x \quad (1.1)$$

dinamikai rendszerek C^1 -távolságán a következőt értjük:

$$\operatorname{dist}(f, g) := \max_{x \in M} |f(x) - g(x)| + \max_{x \in M} \|f'_x(x) - g'_x(x)\|, \quad (1.2)$$

ahol az $x \in \mathbb{R}^n$ vektor ill. az $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mátrix esetében

$$|x| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \quad \text{ill.} \quad \|A\| := \max_{|x| \leq 1} |Ax|.$$

Megjegyezzük, hogy M kompaktsága miatt a C^1 -távolság jóldefiniált, továbbá az első deriváltak feltűnése a definícióban természetes, ha biztosítani akarjuk, hogy a közeli rendszerek egyensúlyi állapotai ugyanolyan típusúak legyenek.

1.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy az f vektormező ill. az $\dot{x} = f(x)$ dinamikai rendszer **strukturálisan stabilis (robosztus)**, ha létezik f -nek olyan C^1 -környezete, hogy bármely ebből a környezetből vett g -nek megfelelő dinamikai rendszer topologikusan ekvivalens az f generálta dinamikai rendszerrel.

1.1. Példa. Az

$$f(x) := (-x_2, x_1) \quad ((x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2)$$

vektormező generálta dinamikai rendszer nem strukturálisan stabilis, ugyanis

- ha $K \subset \mathbb{R}^2$ olyan kompakt halmaz, amely belsejében tartalmazza az origót, és

$$g(x) := (-x_2 + \mu x_1, x_1 + \mu x_2) \quad ((x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2),$$

akkor

$$\begin{aligned} \text{dist}(f, g) &= |(-\mu x_1, -\mu x_2)| + \max_{|x| \leq 1} \left| \begin{bmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right| = \\ &= \sqrt{(-\mu)^2 x_1^2 + (-\mu)^2 x_2^2} + \max_{|x| \leq 1} \sqrt{(-\mu)^2 x_1^2 + (-\mu)^2 x_2^2} = \\ &= |\mu| |x| + |\mu| = |\mu| (|x| + 1) \end{aligned}$$

és ha $d := \max_{x \in K} |x|$, ill. ha $\epsilon > 0$, akkor $|\mu| := \epsilon / (d + 2)$ választás esetén

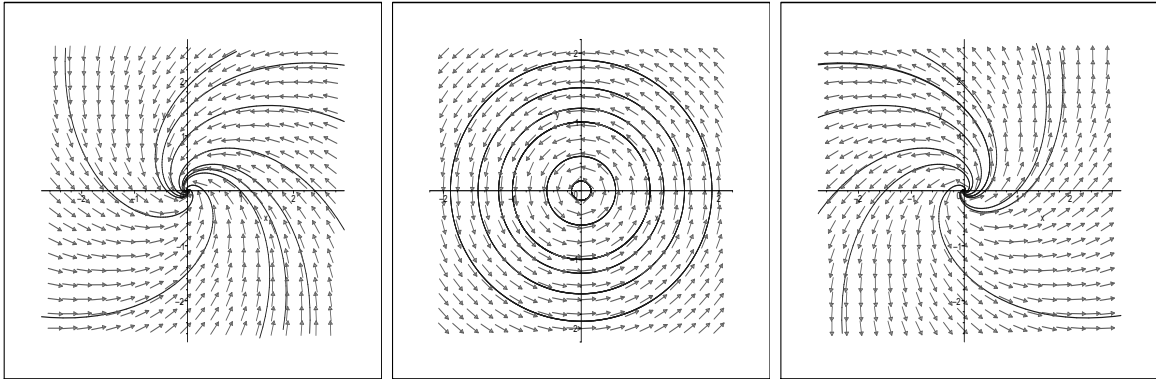
$$\text{dist}(f, g) < \epsilon;$$

- az f ill. a g -nek megfelelő dinamikai rendszerek nem topologikusan ekvivalensek (vö. 2. ábra).

A továbbiakban legyen $f \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^1$ és tekintsük az

$$\dot{x} = f \circ (x, \mu) \tag{1.3}$$

(μ) paramétertől függő dinamikai rendszert.



2. ábra. Az $\dot{x} = (-x_2 + \mu x_1, x_1 + \mu x_2)$ rendszer fázisportréja $\mu < 0$, $\mu = 0$ és a $\mu > 0$ esetén.

1.3. Definíció. Azt mondjuk, hogy a μ_0 paraméterérték az (1.3)-beli $f(\cdot, \mu_0)$ vektormező ill. a hozzá tartozó dinamikai rendszer **bifurkációs pontja**, ha az $f(\cdot, \mu_0)$ vektormezőnek megfelelő dinamikai rendszer nem strukturálisan stabilis.

2. Lokális bifurkációk

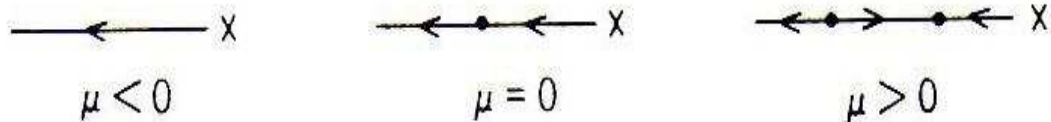
2.1. Nyereg-csomó-bifurkáció

A μ paramétertől függő

$$\dot{x} = f(x, \mu) \equiv \mu - x^2 \quad (2.4)$$

differenciálegyenletnek az egyensúlyi helyzeteire vonatkozóan a következők igazak

1. $\mu < 0$, nem létezik egyensúlyi pont;
2. ha $\mu = 0$, pontosan egy egyensúlyi pont létezik: $x = 0$, ami nem stabilis (lásd 3. ábra)
3. ha $\mu > 0$, akkor két egyensúlyi pont létezik: $x = \pm\sqrt{\mu}$ és $f'(x) = -2x$ miatt az $x = \sqrt{\mu}$ egyensúlyi helyzet stabilis, az $x = -\sqrt{\mu}$ viszont nem (vö. 4. ábra).



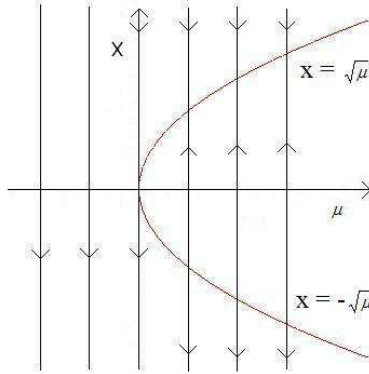
3. ábra. Nyereg-csomó-bifurkáció fázisportréja

Látható, hogy a $\mu = 0$ értéknél az egyenlet nem strukturálisan stabilis: bifurkáció következik be. Az ilyen típusú bifurkációt **nyereg-csomó-bifurkáció**nak nevezik.

Az implicit függvényre vonatkozó tétel alapján könnyen belátható a következő

2.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$, az $(x_0, \mu_0) \in \Omega$ pont pedig az*

$$\dot{x} = f \circ (x, \mu) \quad (2.5)$$



4. ábra. Nyereg-csomó-bifurkáció a μ, x fázissíkon

paraméterfüggő egyenlet nemhiberbolikus egyensúlyi helyzete:

$$f(x_0, \mu_0) = 0, \quad \partial_1 f(x_0, \mu_0) = 0.$$

Ha

$$\partial_2 f(x_0, \mu_0) \neq 0 \quad \text{és} \quad \partial_{11} f(x_0, \mu_0) \neq 0,$$

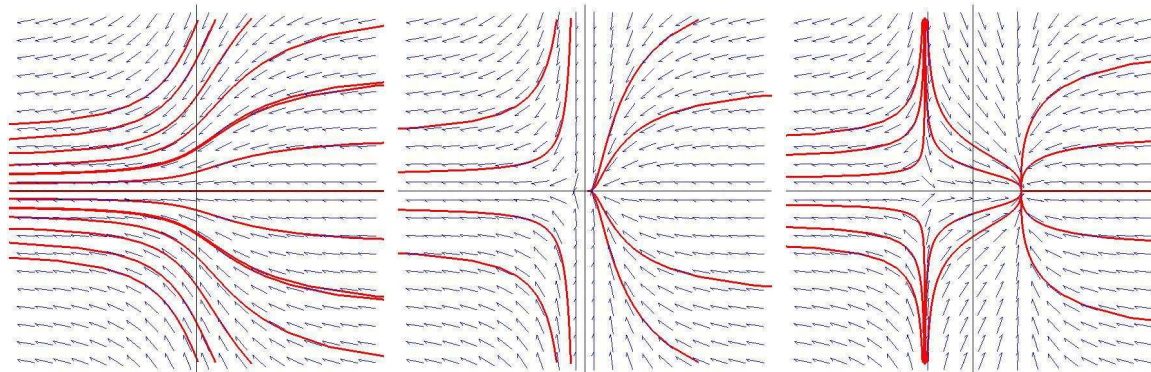
akkor $\mu = \mu_0$ a (2.5) bifurkációs pontja, $\mu = \mu_0$ esetén nyereg-csomó bifurkáció lép fel.

Hogy a jelenséget jobban tudjuk szemléltetni, tekintsük következő kétdimenziós rendszert:

$$\dot{x} = -x^2 + \mu, \quad \dot{y} = -y. \quad (2.6)$$

A $\mu < 0$ -ra a rendszernek nem létezik egyensúlyi pontja. Ahogy μ növekszik, és eléri 0-t, az origó válik a rendszer egyetlen egyensúlyi pontjává. Amennyiben μ tovább nő, már két egyensúlyi pont figyelhető meg: az $E_1 = (-\sqrt{\mu}, 0)$, és az $E_2 = (\sqrt{\mu}, 0)$. A $\mu = 0$ -ban a rendszer tehát nem strukturálisan stabilis: bifurkáció lép fel. A $\mu < 0$ -ra még nem volt egyensúlyi pont, $\mu > 0$ -ra meg már kettő is. Az E_1 a linearizált rendszer nyeregpontja, ugyanis sajátértékek: $\lambda_1^{(1)}(\mu) = 2\sqrt{\mu}$, és $\lambda_1^{(1)}(\mu) = -1$. A két különböző előjelű sajátértékhez pedig a nyeregyszerű fáziskép tartozik. Az E_2 egyensúlyi helyzet linearizált rendszer esetében csomó, ugyanis a sajátértékek ebben az esetben: $\lambda_1^{(2)}(\mu) = -2\sqrt{\mu}$, és $\lambda_2^{(2)}(\mu) = -1$. A két negatív sajátértékről pedig tudjuk, hogy csomószerű

fázisképet takar. Az előbbieket az 5. ábrán is jól láthatók: a bal félsíkban ($x < 0$) nyereg-re emlékeztető trajektóriák figyelhetők meg, a jobb félsíkbeli fáziskép pedig csomó.



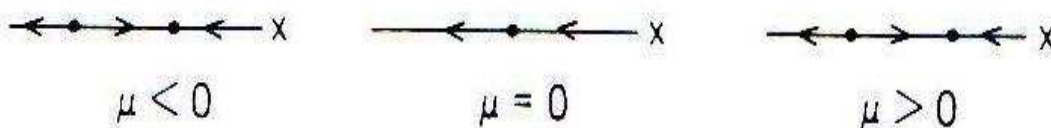
5. ábra. Nyereg-csomó-bifurkáció két dimenzióban: a $\mu < 0$, $\mu = 0$, és a $\mu > 0$ esetekben.

2.2. Transzkritikus bifurkáció

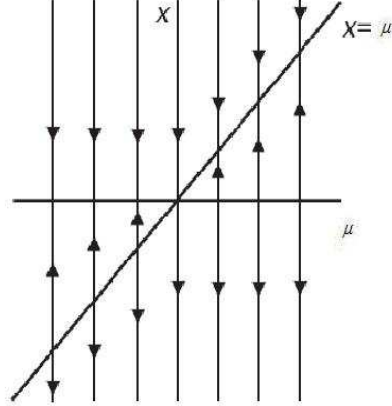
A rendszerünk legyen a következő:

$$\dot{x} = \mu x - x^2. \quad (2.7)$$

Két egyensúlyi helyzet van: $x = 0$ és $x = \mu$. $\mu = 0$ paraméterértékre egyetlen kritikus pont van: $x = 0$. Az $f(x) \equiv -x^2$ vektormező nem strukturálisan stabilis, $\mu = 0$ a bifurkációs pont. A bifurkáció ezen típusát nevezzük **transzkritikus bifurkációnak**. A 6. ábrán látható a rendszer fázisportréja.



6. ábra. Transzkritikus bifurkáció fázisportréja.



7. ábra. Transzkritikus bifurkáció bifurkációs diagramja.

2.3. Vasvilla bifurkáció

Tekintsük a következő differenciálegyenletet:

$$\dot{x} = f(x, \mu) := -x^3 + \mu x. \quad (2.8)$$

Látható, hogy az $x = 0$ mindig egyensúlyi pont, továbbá szerinti: $\partial_1 f(x, \mu) = -3x^2 + \mu$ miatt $x = 0$ aszimptotikusan stabilis minden $\mu < 0$ esetén, és nem stabilis minden $\mu > 0$ esetén (lásd 8.ábra). Az is látható, hogy $\mu = 0$ -ra az $x = 0$ még aszimptotikusan stabilis (vö. 9.ábra). Tovább vizsgálva a paraméter értékeit $\mu > 0$ -ra két másik egyensúlyi pont is feltűnik az $x = 0$ mellett: az $x = \pm\sqrt{\mu}$. Világos, hogy $\partial_1 f(\pm\sqrt{\mu}, \mu) = -2\mu < 0$; így mindkettő aszimptotikusan stabilis. Összefoglalva, mikor a μ áthalad az origón, az $x = 0$ egyensúlyi pont elveszti stabilitását, és helyette két új aszimptotikusan stabilis egyensúlyi pont jelenik meg. Ebben a példában is a 0 bifurkációs pont. A bifurkáció ezen fajtáját nevezik **vasvilla bifurkációnak**. Ez a bifurkáció *szuperkritikus*, mely azt jelenti, hogy az új egyensúlyi pontok a kritikus paraméterérték $\mu = 0$ után jelennek meg, és az $x = 0$ még aszimptotikusan stabilis egyensúlyi pont.

Változtassuk meg x^3 előjelét, tehát legyen a rendszerünk:

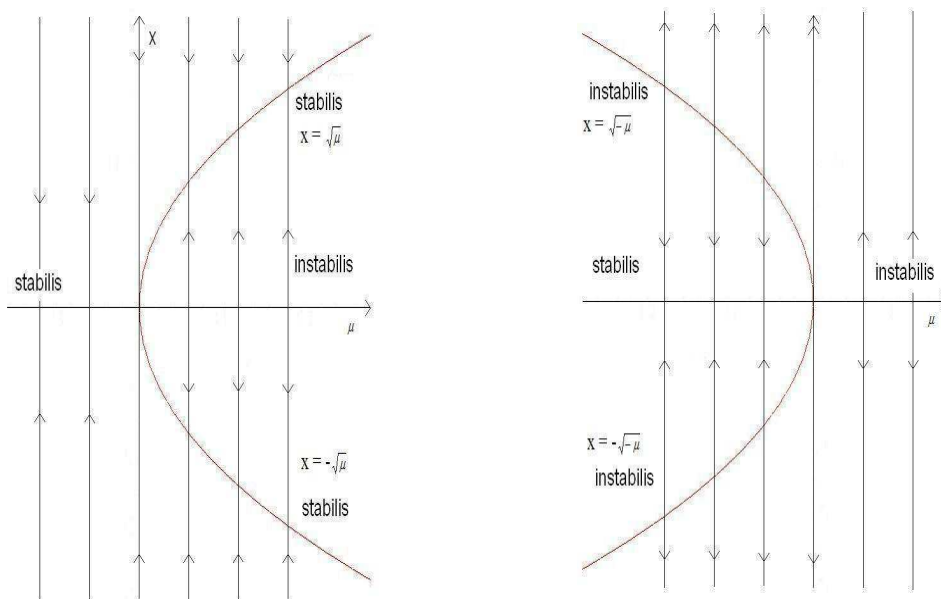
$$\dot{x} = x^3 + \mu x. \quad (2.9)$$

Ez az eset analóg az előzővel, annyi különbséggel, hogy az új egyensúlyi pontok megjelenése a kritikus paraméterérték előtt történik, és az $x = 0$ egyensúlyi pont még nem



8. ábra. Vasvilla-bifurkáció fázisportréja

lesz stabilis $\mu = 0$ esetén. Ez a *szubkritikus* eset.



9. ábra. Vasvilla-bifurkáció: az első ábrán a szuperkritikus eset (2.8), a másodikikon a szubkritikus eset (2.9) látható.

2.4. Poincare-Andronov-Hopf bifurkáció

Legyen a rendszerünk a következő:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + \mu y - y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

Látható, hogy az $(x, y) = (0, 0)$ mindig egyensúlyi pont. A linearizált rendszer:

$$X' = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix} X.$$

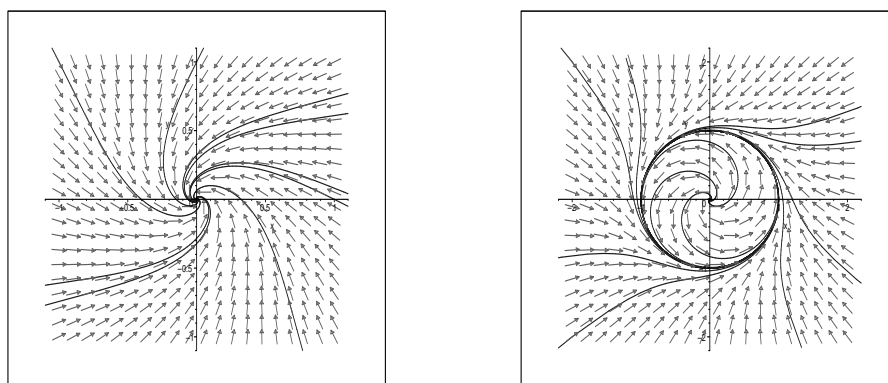
A linearizált rendszer sajátértékei $\mu \pm i$, így a $\mu = 0$ paraméterértékre bifurkáció lép fel.

A könnyebb érthetőség kedvéért, írjuk át a rendszert polárkoordinátás alakba:

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r - r^3, \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

- Ha $\mu < 0$, az origó nyelő, mivel $\mu r - r^3 < 0$ minden $r > 0$ értékre, azaz minden megoldás 0-hoz tart.
- Ha $\mu > 0$ az origó forrássá változik.

Mi a helyzet $\mu = 0$ esetén? Amikor $\mu > 0$ az $r' = 0$, ha $r = \sqrt{\mu}$. A $\sqrt{\mu}$ sugarú kör egy periodikus megoldás 2π periódussal. Tehát $r' > 0$, ha $0 < r < \sqrt{\mu}$, és $r' < 0$, ha $r > \sqrt{\mu}$. Vagyis minden nemnulla megoldás a $\sqrt{\mu}$ sugarú körhöz tart. A bifurkáció ezen típusát **Hopf-bifurkációnak** nevezzük.



10. ábra. Hopf-bifurkáció $\mu < 0$ és $\mu > 0$ paraméterértékekre

2.2. Tétel. Legyen $2 \leq n \in \mathbb{N}$ és $f \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^5$, majd tegyük fel, hogy az

$$\dot{x} = f \circ (x, \mu)$$

rendszert esetében $f(0, \mu) \equiv 0$ és az $\partial_1 f(0, \mu)$ mátrixnak két komplex-konjugált sajátértéke van: $\alpha(\mu) \pm i\omega(\mu)$, ahol $\omega(\mu) > 0$, $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) \neq 0$ (ún. transzverzalitási feltétel), és a többi $(n - 2)$ darab sajátérték valósrésze negatív. Ekkor

1. létezik olyan $\delta > 0$ és $\mu : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ C^3 -függvény, hogy minden $\epsilon \in (-\delta, \delta)$ -ra az

$$\dot{x} = f \circ (x, \mu(\epsilon))$$

rendszernek van $p(\cdot, \epsilon)$ periodikus megoldása, melynek periódusa $T(\epsilon) > 0$, azaz $T \in C^3$, $\mu(0) = 0$, $T(0) = 2\pi/\omega(0)$, p amplitúdója $\sqrt{|\mu(\epsilon)|}$ -nal arányos;

2. $(0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ -nak van olyan környezete, amelyben nincs más nem állandó periodikus megoldás, csak $p(\cdot, \epsilon)$.

A kialakuló periodikus megoldás (pályamenti) stabilitását illetően a következő mondható: ha

- $l_1 < 0$, akkor $p(\cdot, \epsilon)$ orbitálisan aszimptotikusan stabilis ill. az eredeti egyensúlyi helyzet már nem stabilis (**szuperkritikus Hopf-bifurkáció**),
- $l_1 > 0$, akkor $p(\cdot, \epsilon)$ nem stabilis ill. az eredeti egyensúlyi helyzet még stabilis (**szubkritikus Hopf-bifurkáció**),

ahol

$$l_1 = \frac{1}{2\omega} \text{Re}[\langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - 2 \langle p, B(q, s) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, r) \rangle],$$

ahol $\omega > 0$, B és C koordinátafüggvényei:

$$B_i(x, y) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f_i(\xi, 0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\xi=0} x_j y_k \quad (x, y \in \mathbb{K}^n),$$

és

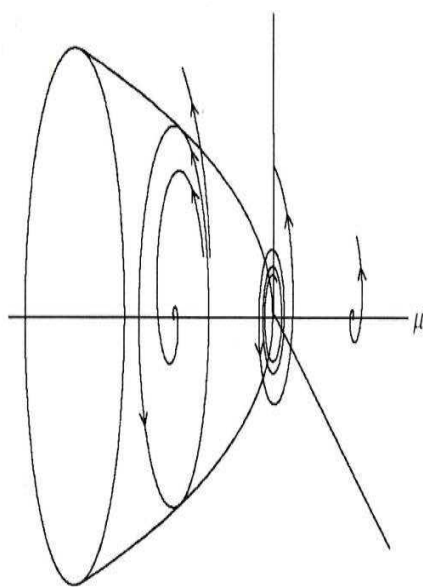
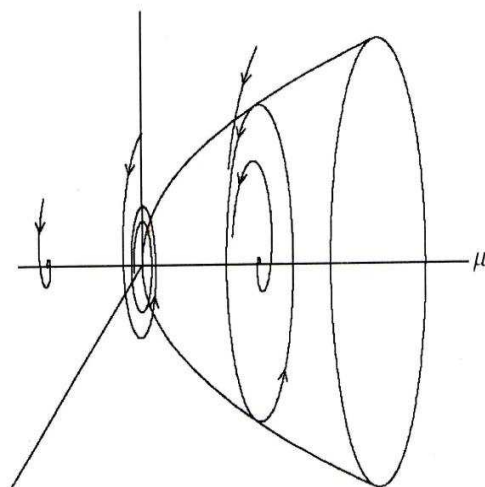
$$C_i(x, y, z) = \sum_{j,k,l=1}^n \frac{\partial^3 f_i(\xi, 0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\xi=0} x_j y_k z_l \quad (x, y, z \in \mathbb{K}^n)$$

($i = 1, 2, \dots, n$), továbbá $p, q \in \mathbb{C}^n$ az $A := \partial_1 f(0, \mu)$ Jacobi-mátrixnak az $i\omega$ ill. a $-i\omega$ sajátértékekhez tartozó bal- ill. jobboldali normált sajátvektora, azaz $\langle p, q \rangle = 1$ és

$$Aq = i\omega q, \quad A^T p = -i\omega p$$

valamint

$$s := A^{-1}B(q, \bar{q}), \quad r := (2i\omega I - A)^{-1}B(q, q).$$



11. ábra. A szuper- és szubkritikus Hopf-bifurkáció kétdimenziós rendszerekben

A következő alkalmazások kapcsán megmutatható, hogy Hopf bifurkáció lép fel. Minden egyes esetben kiszámítjuk l_1 -et.

2.4.1. Hopf-bifurkáció kimutatása visszajelző-ellenőrző rendszereknél

Tekintsük a következő differenciálegyenletet, mely a pozitív α és β paramétereiktől függ:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + \alpha \frac{d^2 y}{dt^2} + \beta \frac{dy}{dt} + y(1 - y) = 0. \quad (2.10)$$

Ez írja le a Lur-típusú visszajelző-ellenőrző rendszert. Bevezetve az $x_1 = y$, $x_2 = \dot{x}_1$, és $x_3 = \dot{x}_2$ jelöléseket, az egyenlet a következő differenciálegyenlet-rendszerrel ekvivalens:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \equiv f_1(x, \alpha, \beta) \\ \dot{x}_2 = x_3 \equiv f_2(x, \alpha, \beta) \\ \dot{x}_3 = -\alpha x_3 - \beta x_2 - x_1 + x_1^2 \equiv f_3(x, \alpha, \beta) \end{cases}$$

A rendszernek két egyensúlyi pontja van minden (α, β) értékpárra: $x^{(0)} = (0, 0, 0)$ és $x^{(1)} = (1, 0, 0)$. Vizsgáljuk az egyensúlyi helyzetet az origóban. A rendszer Jacobi-mátrixa az $x^{(0)}$ pontban:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -\beta & -\alpha \end{pmatrix},$$

karakterisztikus polinomja:

$$\lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + 1 = 0. \quad (2.11)$$

A következő lépésekben kiszámítjuk l_1 -et, mely előjele segít eldönteni, hogy a Hopf-bifurkáció szuper- vagy szubkritikus.

- 0. lépés: Keressünk olyan (α, β) paraméterértékpárt, melyre a karakterisztikus polinomnak két komplex konjugált sajátértéke van: $\pm i\omega$, ahol $\omega > 0$, és nincs más ilyen típusú sajátérték. $\alpha = \frac{1}{\beta}$, $\beta > 0$, valamint $\beta = \omega^2$, $\omega > 0$ esetén pontosan ez a helyzet. Fixáljuk α -t a kritikus paraméterértékre, $\frac{1}{\beta}$ -ra. Beírva ezt a rendszer

Jacobi-mátrixába, valamint felhasználva, hogy $\beta = \omega^2$, azt kapjuk, hogy

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -\omega^2 & -1/\omega^2 \end{pmatrix}.$$

- 1. lépés: Kiszámoljuk az előzőekben definiált p, q sajátvektorokat. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$q \sim \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \\ -\omega^2 \end{pmatrix}, \quad p \sim \begin{pmatrix} i\omega \\ i\omega^3 - 1 \\ -\omega^2 \end{pmatrix}$$

valóban sajátvektorai az A és A^T mátrixoknak, de még nem teljesül rájuk, hogy $\langle p, q \rangle = 1$. A normálás után:

$$q = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \\ -\omega^2 \end{pmatrix}, \quad p = \frac{1}{2\omega(\omega^3 + i)} \begin{pmatrix} i\omega \\ i\omega^3 - 1 \\ -\omega^2 \end{pmatrix}$$

már igen.

- 2. lépés: Kiszámoljuk az $s \in \mathbb{R}^n$ és $r \in \mathbb{C}^n$ vektorokat. Mivel a differenciálegyenlet-rendszerünkben csak a harmadik egyenlet tartalmaz nemlineáris tagot, a B bilineáris függvényünk ill. C 3-lineáris függvényünk a következő alakú lesz:

$$B(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x_1y_1 \end{pmatrix} \quad (x, y \in \mathbb{K}^3)$$

mivel $C(x, y, z) \equiv 0$. A

$$B(q, q) = B(q, \bar{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2q_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

behelyettesítve s és r képletébe, kapjuk:

$$s = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad r = -\frac{2}{3(1+2i\omega^3)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i\omega \\ -4\omega^2 \end{pmatrix}.$$

- 3. lépés: l_1 meghatározása. Ezek alapján:

$$l_1 = \frac{1}{2\omega} \operatorname{Re}(-4\bar{p}_3 q_1 s_1 + 2\bar{p}_3 \bar{q}_1 r_1) = -\frac{\omega^3(1+8\omega^6)}{(1+4\omega^6)(1+\omega^6)}.$$

Elvégezve az $\omega^2 = \beta$ helyettesítést:

$$l_1 = -\frac{(1+8\beta^3)\beta\sqrt{\beta}}{(1+4\beta^3)(1+\beta^3)} < 0,$$

vagyis a bifurkáció szuperkritikus.

2.4.2. További alkalmazások

Brüsszelátor. A következő kémiai modellről van szó:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A - (B+1)x_1 + x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 = Bx_1 - x_1^2 x_2 \end{cases}$$

ahol $A > 0$ fix, B pedig a bifurkációs paraméter. A következő Maple alkalmazás segítségével láthatjuk, hogy $B = 1 + A^2$ paraméterértékre a rendszerben szuperkritikus Hopf-bifurkáció jelensége figyelhető meg.

```
>restart:
```

```
>with(linalg):
```

```
>readlib(mtaylor):
```

```
>readlib(coeftayl):
```

```
>F[1]:=A-(B+1)*X[1]+X[1]^2*X[2];
```

$$F_1 := A - (B + 1)X_1 + X_1^2 X_2$$

```
>F[2]:=B*X[1]-X[1]^2*X[2];
```

$$F_2 := BX_1 - X_1^2 X_2$$

```
>J:=jacobian([F[1],F[2]], [X[1],X[2]]);
```

$$J := \begin{bmatrix} -B - 1 + 2X_1X_2 & X_1^2 \\ B - 2X_1X_2 & -X_1^2 \end{bmatrix}$$

```
>K:=transpose(J);
```

$$K := \begin{bmatrix} -B - 1 + 2X_1X_2 & B - 2X_1X_2 \\ X_1^2 & -X_1^2 \end{bmatrix}$$

```
>sol:=solve({F[1]=0,F[2]=0},{X[1],X[2]});
```

$$sol := \{X_1 = A, X_2 = \frac{B}{A}\}$$

```
>assign(sol);
```

```
>T:=trace(J);
```

$$T := B - 1 - A^2$$

```
>diff(T,B);
```

$$1$$

```
>sol:=solve({T=0},{B});
```

$$sol := \{B = 1 + A^2\}$$

```
>assign(sol);
```

```
>assume(A>0);
```

```
>omega:=sqrt(det(J));
```

$$\omega := A^{-}$$

A Brüsszelátornak a $B = 1 + A^2$ paraméterérték esetén az egyensúlyi helyzete:

$$\left(A, \frac{1 + A^2}{A} \right)^T,$$

a rendszer Jacobi-mátrixának sajátértékei $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, ahol $\omega = \sqrt{\det(J)} = A > 0$.

```
>ev:=eigenvects(map(eval,J));
```

$$ev := \left[A^{-}I, 1, \left\{ \left[1, -\frac{-A^{-}I + A^{-2}}{A^{-2}} \right] \right\}, \left[-IA^{-}, 1, \left\{ \left[1, -\frac{-A^{-}I + A^{-2}}{A^{-2}} \right] \right\} \right] \right]$$

```
>q:=ev[1][3][1];
```

$$q := \left[1, -\frac{-A^{-}I + A^{-2}}{A^{-2}} \right]$$

```
>q:=evalm(1/q[2]*q): q:=map(simplify,map(evalc,q));
```

$$q := \left[-\frac{A^{-}(A^{-} + I)}{1 + A^{-2}}, 1 \right]$$

```
>et:=eigenvects(map(eval,K));
```

$$et := \left[A^{-}I, 1, \left\{ \left[\frac{A^{-}I + A^{-2}}{A^{-2}} \right] \right\}, \left[-IA^{-}, 1, \left\{ \left[\frac{-A^{-}I + A^{-2}}{A^{-2}} \right] \right\} \right] \right]$$

```
>P:=et[2][3][1];
```

$$p := \left[\frac{-A^{-}I + A^{-2}}{A^{-2}}, 1 \right]$$

Ezen parancssorokkal kiszámoljuk a J Jacobi-mátrix p és q sajátvektorait, melyekre

$$Jq = i\omega q, \quad J^T p = -i\omega p.$$

```
>s1:=simplify(evalc(conjugate(P[1])*q[1]+conjugate(P[2])*q[2]));
```

$$s1 := -\frac{2(-1A^{-}I)}{1 + A^{-2}}$$

```
>p:=evalm(1/conjugate(s1)*p): p:=map(simplify,map(evalc,p));
```

$$p := \left[\frac{\frac{-1}{2}I(1 + A^{-2})}{A^{-}}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}IA^{-} \right]$$

>simplify(evalc(conjugate(p[1])*q[1]+conjugate(p[2])*q[2]));

1

Ahhoz, hogy teljesülhessen, hogy a $\langle p, q \rangle = 1$, megtörténik a p és q megfelelő normálása.

>F[1]:=A-(B+1)*x[1]+x[1]^2*x[2];

$$F_1 := A^-(2 + A^{-2})x_1 + x_1^2x_2$$

>F[2]:=B*x[1]-x[1]^2*x[2];

$$F_1 := (1 + A^{-2})x_1 - x_1^2x_2$$

>x[1]:=evalc(X[1]+z*q[1]+z1*conjugate(q[1]));

$$x_1 := A^- - \frac{zA^{-2}}{1 + A^{-2}} - \frac{z1A^{-2}}{1 + A^{-2}} + \left(-\frac{zA^-}{1 + A^{-2}} + \frac{z1A^-}{1 + A^{-2}} \right) I$$

>x[2]:=evalc(X[2]+z*q[2]+z1*conjugate(q[2]));

$$x_2 := \frac{1}{A^-} + A^- + z + z1$$

>H:=simplify(evalc(conjugate(p[1])*F[1]+conjugate(p[2])*F[2]));

$$\begin{aligned} H := & -\frac{1}{2}(-z1^2A^{-2}z + 2zz1A^- + 3z^2A^{-2}z1 - 2z1^2A^{-3} \\ & - 2z^2A^{-3} + Iz^2 - z^2A^- - z1^2A^- + z^3A^{-2} - 3z1^3A^{-2} + 3A^{-4}z^2z1 \\ & + 3A^{-4}z1^2z - 2zA^{-5}z1 + 2Iz^2A^{-2} - 2Izz1 - 2IzA^- \\ & + Iz1^2A^{-4} + Iz^3A^- + Iz1^3A^- - 2IzA^{-5} - 3Iz1^3A^{-3} + Iz^3A^{-3} \\ & - 4IzA^{-3} + Iz^2A^{-4} + 2Iz1A^{-2} - Iz^2A^-z1 - 5Iz1^2A^{-3}z \\ & - Iz1^2A^-z + 2IzA^{-4}z1 - Iz^2A^{-3}z1 + A^{-4}z^3 + A^{-4}z1^3 \\ & - z1^2A^{-5} - z^2A^{-5})/(1 + A^{-2})^2 \end{aligned}$$

>g[2,0]:=simplify(2*evalc(coeftayl(H,[z,z1]=[0,0],[2,0])));

$$g_{2,0} := A^- - I$$

>g[1,1]:=simplify(evalc(coeftayl(H,[z,z1]=[0,0],[1,1])));

$$g_{1,1} := \frac{(A^{-2} - 1)(A^{-} - I)}{1 + A^{-2}}$$

`>g[2,1]:=simplify(2*evalc(coeftayl(H,[z,z1]=[0,0],[2,1])));`

$$g_{2,1} := -\frac{A^{-}(3A^{-} - I)}{1 + A^{-2}}$$

Az l_1 kiszámítása a következő jelölésekkel történik:

$$g_{20} = \langle p, B(q, q) \rangle, \quad g_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle$$

és

$$\begin{aligned} g_{21} = & \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - 2 \langle p, B(A^{-1}B(q, \bar{q})) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega_0 I - A)^{-1}B(q, q)) \rangle \\ & + \frac{1}{i\omega_0} \langle p, B(q, q) \rangle \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle - \frac{2}{i\omega_0} |\langle p, B(q, \bar{q}) \rangle|^2 - \frac{1}{3i\omega_0} |\langle p, B(q, \bar{q}) \rangle|^2. \end{aligned}$$

Ezen jelölésekkel l_1 képlete a következő alakot ölti:

$$l_1 = \frac{1}{\omega^2} \text{Re}(ig_{20}g_{11} + \omega g_{21}).$$

`>l[1]:=simplify(1/(2*omega^2)Re(I*g[2,0]*g[1,1]+omega*g[2,1]));`

$$l_1 := -\frac{2 + A^{-2}}{2A^{-}(1 + A^{-2})}$$

Ragadozó-zsákmány modell. Az előzőek alapján több hasonló problémát oldhatunk meg. Egy ilyen a ragadozó-zsákmány modell:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = rx_1(\alpha + x_1)(1 - x_1) - c_1x_1x_2 \equiv f_1(x_1, x_2, \alpha) \\ \dot{x}_2 = -\alpha dx_2 + (c - d)x_1x_2 \equiv f_2(x_1, x_2, \alpha). \end{cases}$$

A rendszerben x_1 és x_2 a ragadozók és zsákmányok, mint populációk számát jelöli, r, c, d olyan pozitív paraméterek, melyek a populációk viselkedéseinek paraméterei, α pedig egy szabályozó paraméternek tekinthető. Feltehetjük továbbá, hogy $c > d$. Ha

alkalmazzuk az előző Maple parancssort a paraméterek módosításával, kapjuk, hogy a megfelelő paraméterérték, ahol a Hopf-bifurkáció jelensége fennáll:

$$\alpha_0 = \frac{c-d}{c+d}$$

melyre létezik a rendszernek olyan x_0 egyensúlyi pontja, hogy a sajátértékek $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, $\omega > 0$, és

$$\omega^2 = \frac{rc^2d(c-d)}{(c+d)^3}.$$

A transzverzálitási feltétel is teljesül:

$$\mu'(\alpha_0) = -\frac{\alpha_0 rd(c+d)}{2(c-d)^2} < 0.$$

A rendszer Jacobi-mátrixa az x_0 pontban, és α_0 értéket is behelyettesítve:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{cd}{c+d} \\ \frac{\omega^2(c+d)}{cd} & 0 \end{pmatrix}.$$

Mint az előbbi esetben, a parancssor lefuttatásával megkapjuk a megfelelő p és q sajátvektorokat, és a g_{jk} értékeket. Végül kiszámítható l_1 is:

$$l_1 = -\frac{c^2d^2r}{\omega^3(c+d)^2} < 0,$$

minden pozitív ω esetén, vagyis a Hopf-bifurkáció ismét szuperkritikus.

Bautin példája.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \alpha y + y + xy + y^2 \end{cases}$$

A Bautin-példa egyenleteit írva a Maple parancssorba kapjuk, hogy a rendszer Jacobi-mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 2X_1 + X_2 & \alpha + X_1 + 2X_2 \end{pmatrix},$$

X_1, X_2 helyére a megoldások értékét írva:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

A parancssor ismét kiszámolja nekünk a sajátvektorokat, g_{ij} együtthatókat, és végül megkapjuk l_1 értékét:

$$l_1 = \frac{\omega^2 + 1}{2\omega^5} > 0.$$

A Ljapunov-együttható tehát minden pozitív ω értékre pozitív, vagyis a bifurkáció szubkritikus.

Rayleigh egyenlete.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x^3 + 2\alpha y - x \end{cases}$$

A rendszer Jacobi mátrixa, az $X_2 = 0$ megoldást is behelyettesítve:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\alpha \end{pmatrix}.$$

A keresett Ljapunov-együttható:

$$l_1 = -\frac{3}{2}\omega < 0.$$

A Hopf-bifurkáció superkritikus fajtája jelenik meg ismét. A 12.ábrán látható a kritikus érték előtti állapot, mikor a 0 még stabilis egyensúlyi pont, majd a kritikus érték utáni állapot, mikorra már kialakul a határciklus. A kívülről induló megoldások "rátekerednek", a belülről induló megoldások pedig a körvonalhoz konvergálnak.

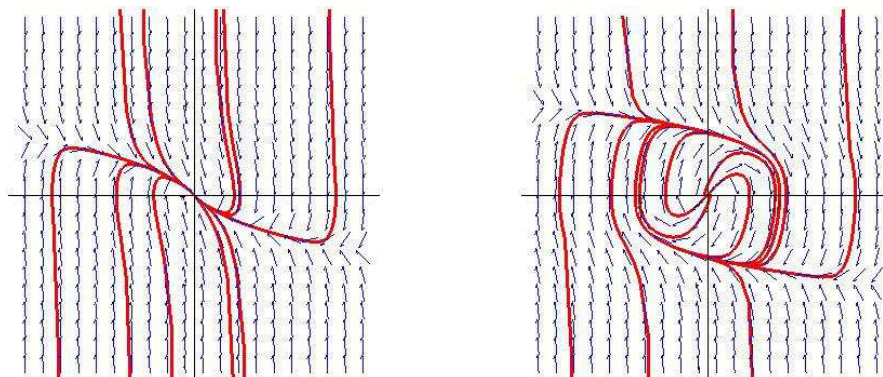
Van der Pol oszcillátor. Az egyenletrendszerünk:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y^2 x - y \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

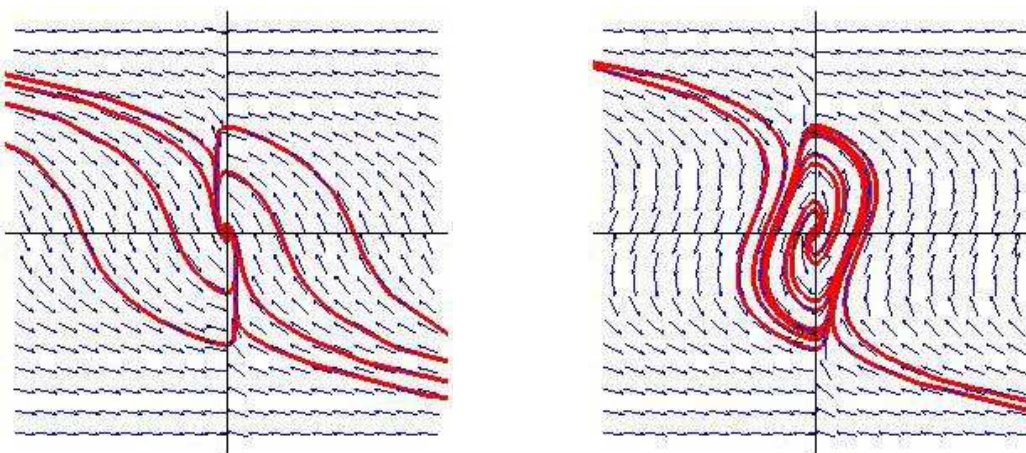
A már ismert Maple parancssor segítségével könnyen láthatjuk, hogy ismét superkritikus Hopf-bifurkációval állunk szemben. Az első Ljapunov-együttható:

$$l_1 = -\frac{1}{2}\omega < 0$$

minden pozitív ω -ra.



12. ábra. Rayleigh egyenlete: az $\alpha < 0$ és az $\alpha > 0$ esetekben.



13. ábra. Van der Pol oszcillátor: az $\alpha < 0$ és az $\alpha > 0$ esetekben.

Hivatkozások

- [1] FARKAS, M.: *Periodic Motions*, Berlin, Heidelberg and New York: Springer-Verlag (1994).
- [2] HIRSCH, W., SMALE S. AND DEVANEY, ROBERT L.: *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*, Pure and Applied Mathematics (Amsterdam) 60. Amsterdam: Elsevier/Academic Press (2004).
- [3] KUZNETSOV, Y. A.: *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Berlin, Heidelberg and New York: Springer-Verlag (1998).
- [4] PERKO, L.: *Differential Equations and Dynamical Systems*, Texts in Applied Mathematics: Springer-Verlag (1991).