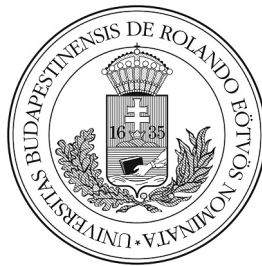


Szakdolgozat
Kombinatorikai problémák a 3-dimenziós VLSI
huzalozásban.

Írta: Kiss Attila

Matematika BSc szak, Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető: Dr. Recski András
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar



Tartalomjegyzék

1. Bevezető	2
2. A huzalozási probléma	4
2.1. A probléma meghatározása	4
2.2. A megoldás fázisai	5
2.3. Áramkör partícionálása	5
2.4. Elhelyezés	6
2.5. Globális huzalozás	7
3. Részletes huzalozás	8
3.1. A Switchbox huzalozási feladat	9
3.2. Soros huzalozás	10
3.3. Csatornahuzalozás	13
3.3.1. 2-rétegű, Manhattan model	14
3.3.2. 2-rétegű megszorítás nélküli model	18
3.3.3. k-rétegű Manhattan model	18
3.4. Switchbox huzalozás	20
3.5. Gamma huzalozás	22
4. Átmenet a 2-dimenzióból a 3-dimenzióba	24
4.1. Az aktív réteg huzalozási feladat	26
5. A 3-dimenziós huzalozásról	29
5.1. A 3-dimenziós csatornahuzalozás	29
5.2. A 3-dimenziós gamma huzalozás	31
5.2.1. A korlátok nélküli model	32
5.2.2. A rögzített él model	36

1. fejezet

Bevezető

A VLSI (*Very Large Scale Integrated*) áramkörök tervezése az egyik legszélesebb terület, ahol a kombinatorikus optimalizálás módszereit alkalmazhatjuk. Rengeteg eredmény van ebből a témakörből az elmúlt évtizedekből. Annak ellenére, hogy az NP-teljes problémák száma egyre jobban növekszik ezen a területen, rengeteg heurisztikus megoldással rendelkezünk, melyek egész jó eredménnyel kezelik ezeket.

Ez a dolgozat a részletes huzalozásra (*detailed routing*) helyezi a hangsúlyt, a tervezési folyamat egyik utolsó fázisára.

Azt is figyelembe kell vennünk, hogy egy elektromos eszköz részeinek megtervezése négy határ közé van szorítva egy négyzetes áramkörlapon. A részletes huzalozási problémában a feladatunk összekötni vezetékekkel (*wire*) ezeknek az eszközöknek a csúcsainak (vagy *termináljainak*) az egyértelműen meghatározott részhalmozait (vagy *netjeit*). A különböző netekhez tartozó vezetékek sosem kerülhetnek egy meghatározott távolságnál közelebb egymáshoz. Ebből kifolyólag a vezetékek gyakran egy kockarácsra illeszkednek. Mivel ez a rács nem sík (ez ugyanis a legtöbb problémát megoldhatatlanná tenné), ezért sík rétegekből áll, amelyek párhuzamosak az áramkörlappal. A vezetékekkel bármely rácspontban tudunk váltani a szomszédos rétegek között. Gráfelméleti szempontból összefoglalva, a részletes huzalozási probléma pont-diszjunkt Steiner-fák (fák megadott terminálpontokat tartalmazó halmazokkal) megkereséséből áll, egy 3-dimenziós kockarácson. A Steiner-fa keresés problémája még precízebben le van írva az 4. Fejezetben.

A „valódi” három dimenziós problémák közül, mint például a csatorna huzalozás általánosításaként tekinthető 3DCRP (*3-Dimensional Channel Routing Problem*), mi most szeretnénk egyet kiemelni, amit jelöljünk 3D Γ RP (*3-Dimensional Γ Routing Problem*) jelöléssel. Ezen szakdolgozat célja a 3D Γ RP probléma bemutatása, és egy ezt a problémát polinomiális futásidőben megoldó algoritmus bemutatása lesz, amely Reiss Attila és Szeszlér Dávid [36] ötletére épül.

Hagyományosan a részletes huzalozást 2-dimenziós problémának tartották, mi-

vel a rétegek száma sokkal kisebb volt a lap hosszához (*length*) és szélességéhez (*width*) képest. (Eredetileg a nyomtatott áramkörös technológia hőskorában csak két réteg volt: a lap két oldala. Később a rétegek száma fokozatosan kiterjedt 3-ra, 4-re. . .) Mivel a jelenlegi technológia egyre több réteget enged meg (6,8 vagy akár még több) egy „valódi” 3-dimenziós megközelítés vált szükségessé. Az utolsó fejezetekben ennek a kifejtését célozzuk meg.

Az 5.1 Fejezetben a 3-dimenziós Csatorna Huzalozás (vagy röviden *3DCRP*) problémakörét tárgyaljuk. Bemutatunk két eredményt, amelyet Reiss Attila és Szeszlér Dávid cikke [36] segítségével ismertetünk.

Ezután az 5.2 Fejezetben a 3-dimenziós Γ huzalozás (vagy röviden *3D Γ RP*) témakörére helyezük a hangsúlyt. Ismertetünk benne egy általam kidolgozott algoritmust, amivel polinomiális időben találhatunk egy *3D Γ RP* problémához optimális huzalozást.

Ezúton szeretném kifejezni hálás köszönetemet a témavezetőmnek Dr. Recski Andrásnak, aki sok cikkel és segítséggel járult hozzá a szakdolgozatom megvalósulásához. Segített egy-egy témakör jobb megértésében, feldolgozásában, valamint a szakdolgozatom tartalmi és stilisztikai hibáinak a korrigálásában. Valamint szeretném megköszönni Szeszlér Dávidnak is, hogy doktori disszertációjának [40] egy példányát megosztotta velem, ezzel is segítve a munkámat. Az ő segítsége is elengedhetetlen volt ehhez a szakdolgozathoz.

2. fejezet

A huzalozási probléma

2.1. A probléma meghatározása

Az integrált áramkörök tervezésének problémája nagyon összetett feladat, és rengeteg különböző részproblémát tartalmaz, amelyek lényegesen különböző megközelítési módot és megoldási technikákat igényelnek. Éppen ezért nem éri meg formalizálni a huzalozási problémát teljes általánosságban, mert még egy definíciónak is olyan technikainak kellene lennie, hogy használhatatlan lenne minden gyakorlati szempontból.

Mindanozáltal egy durva megfogalmazása a problémának lehetne a következő: Adott áramköri elemek egy halmaza. Minden áramköri elemnek van pár terminálja (vagy csúcsa). Továbbá, a megtervezendő áramkör egy leírása is adott, ami nem más, mint egy a terminálok páronként pontdiszjunkt részalmazait tartalmazó lista. Ezeket a részalmazokat neteknek hívjuk. Az egyes netekhez tartozó terminálokat szeretnénk összekötni síkba ágyazott, vagy sokkal inkább néhány párhuzamos síkba ágyazott vezetékekkel. Sőt, a megvalósításhoz használt technológia természetes követelményeit is figyelembe kell venni. A leglényegesebb követelmény ezek közül, hogy minimum mekkora távolságot kell tartani két különböző vezeték között. A legkönnyebb és legáltalánosabban használt módszer erre, hogy a vezetékeknek illeszkedniük kell egy adott kockarácsra.

Rengeteg költségfüggvény van amit minimalizálni kell (együttesen, vagy egy prioritási sort követve) a különböző részfeladatokban. A legfontosabb ezek közül a terület (*area*), ami a rácspontok száma egy rétegen. (Ismert tény, hogy a miniaturizálás fontos a számítógépes chipok tervezésében mert alaposan megváltoztatja a gép teljesítményét.) Egyéb költségfüggvények, mint a teljes huzalhossz, a leghosszabb huzalrész, vagy a rétegek közötti összeköttetésekre szolgáló huzalrészek (*via*) száma, szintén fontosak lehetnek.

Természetesen, a fenti meghatározás csak egyfajta keretnek tekinthető. Sokfé-

leképpen javítható, módosítható, ahogy a huzalozási problémának a különböző részfeladatait vizsgáljuk.

2.2. A megoldás fázisai

A gyakorlatban a huzalozási problémának a fent vázolt általános megfogalmazása NP-nehéz. Mindazonáltal az integrált áramkörök tervezésének sokáig tartó kutatásának eredményeként kifejlesztettek egy széleskörűen elfogadott megoldási sémát. Ezt a sémát használva a probléma több apró fázisra bomlott.

Az első az elhelyezési (*placement*) fázis, amikor a megtervezendő áramkör elemeit elhelyezzük a lapon. A globális huzalozási (*global routing*) fázisban a meghatározott eszközök összeköttetésére szolgáló vezetékek útvonalát tervezük meg, de csak nagyjából próbáljuk meg ezeket meghatározni, nem pontosan. A vezetékek végleges helyzetét a részletes huzalozás (*detailed routing*) fázisában határozzuk meg. Mind a globális mind a részletes huzalozás fázisát követheti egy tömörítő (*compaction*) fázis, hogy csökkentsük a huzalozáshoz szükséges területet.

Egy másik, széles körűen alkalmazott eljárás, hogy felbontjuk az áramkört több apró részre (mielőtt megkezdénénk a huzalozást, vagy egy fázison belül), és a részeket külön-külön vizsgáljuk. Ezt az áramkör partícionálós (*circuit partitioning*) algoritmusok végzik el.

A következő részekben szeretnék egy kis ízelítőt adni a különböző optimalizálási feladatokból, amelyek a különböző huzalozási fázisok közben merülnek fel.

2.3. Áramkör partícionálása

Nézzünk egy tipikus partícionálási feladatot. Adott egy hipergráf $H=(V, E)$, aminek a pontjain értelmezve van egy $w : V \mapsto \mathbf{N}$ súlyfüggvény, az élein pedig egy $c : E \mapsto \mathbf{N}$ költségfüggvény, a partíció osztályok (*partition class*) kívánt száma $r \in \mathbf{N}$, valamint a partíció osztályok minimális és maximális súlya $b(i) \in \mathbf{N}$ és $B(i) \in \mathbf{N}$, $i = 1, \dots, r$. A V halmaz egy $\bigcup_{i=1}^r V_i$ partícióját keressük, amelyre $b(i) \leq w(V_i) \leq B(i)$ teljesül minden $i = 1, \dots, r$ -re és minimalizálandó az olyan hiperélek összköltsége, melyek több partíciót kötnek össze. (A probléma NP-nehéz, még akkor is ha r -et fixen $r = 2$ -nek választjuk, és csak gráfokra szorítkozunk hipergráfok helyett [7])

Ennek a problémának egy lehetséges alkalmazása (vagyis egy heurisztikus algoritmus, ami megoldja a feladatot) az, hogy felbontjuk az áramkört nagyon kis részekre, először ezeket kiosztjuk, majd ezeket összekombináljuk, hogy nagyobbakat nyerjünk hasonló eljárásokkal, stb. Rengeteg alkalmazás van arra az esetre ahol r kicsi (például $r = 2$) többek közt azért, hogy legyen eszközünk az elhelyezési fázishoz.

2.4. Elhelyezés

Az elhelyezési feladat definiálásának nehézségei abban rejlenek, hogy amikor elhelyezzük az áramkör elemeit a lapon, lényegében még semmit nem tudunk az őket összekötő huzalok útjáról. Éppen ezért elég nehéz megfelelő optimalizációs kritériumot találni. Az egyetlen használható megközelítés, hogy hozzárendelünk egy költséget minden egyes elhelyezéshez, ami valószínűleg többé kevésbé jellemzi annak a helyigényét, és aztán minimalizálunk arra a költségfüggvényre.

Összhangban az előzőkkel, egy tipikus elhelyezési feladat a következő. Ismét adott egy hipergráf $H=(V, E)$, valamint $r, s \in \mathbf{N}$ egészek, amik az áramkör lapjának dimenzióit adják meg. Egy elhelyezésen (*placement*) egy $p : V \mapsto \{1, 2, \dots, r\} \times \{1, 2, \dots, s\}$ injektív függvényt értünk. Tetszőleges adott p elhelyezésnél, megfeleltetünk minden H -beli e élhez a legkisebb olyan téglalapnak a $c(e, p)$ félkerületét, amely tartalmazza az összes $p(v)$ -t minden e -hez tartozó v -re. Definiáljuk a p elhelyezés $c(p)$ költségét a következőképpen: $c(p) = \sum_{e \in E} c(e, p)$. Most már tudunk minimális költségű elhelyezést keresni. (Természetesen ez a probléma is NP-nehéz.[16]) Természetesen, a különböző alkalmazásoktól függően teljesen különböző költségfüggvények is előtérbe kerülhetnek.

Egy másik teljesen különböző típusa az elhelyezési problémának a parkettázás (*floorplanning*). Ez olyankor merül fel, amikor az áramkör blokkokra van osztva, amelyeket külön-külön kell huzalozni. Először ezeket a blokkokat szeretnénk elhelyezni az áramkörbe. Tegyük fel, hogy mindegyik blokk egy téglalap alakú területet foglal el. Ezután mindegyik blokkhoz rendeljünk hozzá egy függvényt, ami egy felső korlát a téglalap hosszára, és a blokkot a téglalap szélességének egy függvényének értelmezzük. Úgy szeretnénk megválasztani a blokkok dimenzióit, és aztán elhelyezni őket a lapon, hogy a felhasznált terület minimális legyen.

2.5. Globális huzalozás

Ez a huzalozási fázis azoknál a technológiáknál hasznos, amelyeknél az áramkör lap könnyen felbontható kisebb részekre (például az elhelyezési fázisban). Ezekben az esetekben a globális huzalozás csak annyit határoz meg, hogy milyen irányba kell a huzaloknak manőverezni ezek között a részek között (például egy főleg vízszintes hosszabb huzalrész felfelé vagy lefelé kerüljön ki egy akadályt.) A végső útirányt a huzaloknál majd a részletes huzalozási fázisban határozzuk meg.

Egy tipikus globális huzalozási probléma formalizálásánál adott egy $G = (V, E)$ gráf, amelynek a pontjai az áramkör kisebb részeit reprezentálják, az élei pedig az ezen részek közötti összeköttetést. (Azaz G a síkbeli duálisa az áramkör kisebb részeit reprezentáló gráfnak; lásd[27]) Adott egy $c : E \mapsto \mathbf{R}_+$ kapacitásfüggvény, valamint egy $N \subseteq 2^V$ halmazrendszer a netekhez tartozó elemekből. Úgy keresünk Steiner-fákat a netekhez, hogy minden e élre G -ből az e -t tartalmazó Steiner-fák száma nem éri el az e él $c(e)$ kapacitását. Sőt, általában az adott költségfüggvények minimalizálása is követelmény, de a részletekre most nem térnénk ki. (Az eldönthetősége a feladatnak azaz a minimalizálási előírások nélküli verziója szintén NP-teljes[23]) Az alkalmazásoknál az élkapacitásokat az alapján számítják, hogy hány huzal keresztezheti a következő területet.

3. fejezet

Részletes huzalozás

A részletes huzalozási fázisban az áramköri elemek már megkapták végleges helyüket a lapon, és az őket összekötő huzalok útját kell meghatározni. Mivel a szakdolgozatom ezzel a fázissal szeretne foglalkozni bővebben, ezért ezt a fázist részletesebben tárgyalnám.

Definíció 1: Tegyük fel, hogy adott egy G gráf (általában huzalozási gráfnak (*routing graph*) szokás nevezni). Egy net az G pontjainak egy halmaza (legalább kételemű). A részletes huzalozási feladat páronként diszjunkt netek egy $N = \{N_1, N_2, \dots, N_t\}$ családja. Az N_i netek pontjait termináloknak nevezzük.

A huzalozási gráf egy 3-dimenziós kockarácsból nyerhető kisebb módosításokkal (például hagynak helyet az áramköri elemeknek vagy bármely rétegből elérhetőnek hagyják a terminálokat; részletesebben lásd a 3. definícióban)

Definíció 2: Egy $N = \{N_1, \dots, N_t\}$ huzalozási feladat megoldása (vagy huzalozása (*routing*), vagy kiosztása (*layout*)) a G huzalozási gráf páronként pontdiszjunkt összefüggő részgráfjainak $H = \{H_1, \dots, H_t\}$ halmaza, ahol $N_i \subset V(H_i)$ ha H_i összeköti N_i pontjait. A H_i részgráfokat huzaloknak hívjuk.

Ahogy már említettük, a huzalokat általában minimálisnak választják, mivel Steiner-fák. Azt is megemlítettük, hogy a fenti definícióval ellentétben, néhány esetben a huzaloktól csak az éldiszjunkszágot követeljük meg.

A második definíció szerint, a részletes huzalozási feladat egy döntési feladat. Ennek ellenére, ahogy látni fogjuk a következő részekben, a különböző részfeladatai gyakran minimalizálási feladatként vannak megadva. Ezt úgy érik el, hogy a készülő G huzalozási gráfot egy paraméter függvényében keresik (például a rétegek számától, vagy a rácsban lévő sorok számától), és erre a paraméterre keresünk egy optimális értéket úgy, hogy a szóban forgó részletes huzalozási feladat megoldható legyen.

3.1. A Switchbox huzalozási feladat

Említettük, hogy a huzalozási gráf struktúrája sokkal bonyolultabb lehet egy 3-dimenziós rácsnál. Továbbá gyakorlati alkalmazásokban a huzalozási terület gyakran felbomlik kisebb részekre amelyeket egymás után kell huzalozni meghatározott sorrendben. Ezek a kisebb részek sokkal egyszerűbb struktúrák (gyakran csatornák vagy switchboxok, lásd a következő definíciókban). Ezzel az eljárással egy nagyon speciális esetre egyszerűsíthető a feladat, amikor a terminálok egy téglalap alakú terület határán helyezkednek el.

A következő definíciókat a már említett, és az alábbi technikai követelmények figyelembe vételével alkották. Egy ilyen, hogy nincsenek terminálok a lap „sarkain”, és a huzalok sem használhatják azokat. A másik, hogy a huzalok hozzáférhetnek a terminálokhoz akármelyik rétegről. A *k*-rétegű kockarács gráf (*k*-layer rectangular grid graph) definíciója így szükségessé vált.

Definíció 3: Legyen a $\{0, \dots, n + 1\} \times \{0, \dots, w + 1\} \times \{1, \dots, k\}$ ponthalmaz pontjainak a halmaza egy gráf. Legyen két pont szomszédos akkor és csak akkor, ha pontosan egy koordinátában különböznek és pontosan eggyel. Töröljük a gráf „sarkok” pontjait, azaz a $(0, 0, l)$, $(n + 1, 0, l)$, $(0, w + 1, l)$, és az $(n + 1, w + 1, l)$ pontokat, ahol $l = 1, \dots, k$. Aztán a maradék gráfban húzzuk össze az $\{(i, j, l) : l = 1, \dots, k\}$ részhalmaz pontjait egyetlen pontba, ahol

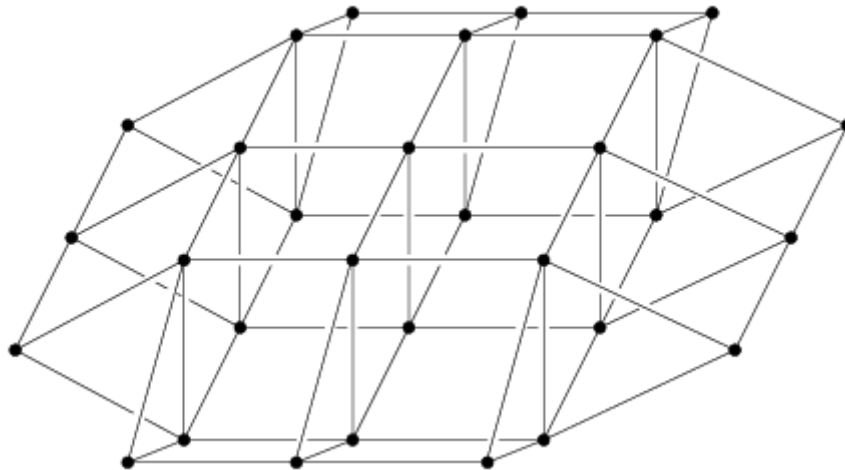
- $i = 0$ vagy $i = n + 1$ és $j = 1, \dots, w$; vagy
- $j = 0$ vagy $j = w + 1$ és $i = 1, \dots, n$.

Az így meghatározott G_k gráfot nevezzük *k*-rétegű kockarács gráfnak. w és n rendre a rács szélessége és hosszúsága. Jelöljük az összehúzott $\{(i, j, l) : l = 1, \dots, k\}$ halmaz pontjait $t_{i,j}$ -vel. A $t_{i,j}$ pontokat nevezzük termináloknak. A $t_{i,j}$ terminál lehet:

- északi, ha $j = w + 1$;
- déli, ha $j = 0$;
- nyugati, ha $i = 0$;
- keleti, ha $i = n + 1$.

Az összes közös z -koordinátájú nem-terminál pontok halmazát nevezzük rétegnek. Az összes közös x -koordinátával vagy y -koordinátával rendelkező pontot rendre oszlopnak illetve sornak nevezzük.

A 3.1 ábrán a 2-rétegű négyzetrács látható $w = n = 3$ paraméterekkel.



3.1. ábra.

(forrás: Jordán Tibor, Recski András, Szeszlér Dávid: Rendszeroptimalizálás, Typotex Kiadó, Budapest, 2004, 141. oldal, 6.3 ábra)

Definíció 4: Egy switchbox huzalozási feladat speciális esete a részletes huzalozási feladatnak (lásd az 1. definíciónál) ahol a huzalozási gráf egy k -rétegű kockarács gráf (valamilyen k értékre) és minden egyes net részhalmaza a $t_{i,j}$ terminálok halmazának. (lásd a 3. definíciónál).

Sok megszorítása ismert a fent definiált problémának a szakirodalomban, amiket huzalozási modelleknek (*routing model*) nevezünk. Ha nincs semmi megszorítás megkövetelve a switchbox huzalozási feladat megoldásától, akkor azt megszorítás nélküli (*unconstrained*) modellnek nevezzük.

Definíció 5: Azt mondjuk, hogy egy switchbox huzalozási probléma egy megoldása a Manhattan model szerinti, ha a szomszédos rétegek különböző irányítású huzalrészeket tartalmaznak. Azaz a vízszintes (kelet-nyugati) és a függőleges (észak-déli) huzalrészt tartalmazó rétegek váltakoznak. (Az elnevezés onnan ered, hogy Manhattan utcái a Broadwaytől eltekintve lényegében derékszögű rácsot határoznak meg. Ráadásul az észak-déli irányú utakat *avenue*-nak, a kelet-nyugati irányúakat *street*-nek nevezik; ez pedig azzal analóg, hogy a Manhattan modellben a függőleges és vízszintes irányú huzalok más-más rétegre kerülnek.[22])

3.2. Soros huzalozás

Soros huzalozási problémán (*single row routing problem*) a switchbox huzalozás egy olyan speciális esetét értjük, amikor minden egyes net összes terminálja mondjuk északi. Ebben az esetben a huzalozási feladat specifikációja csak

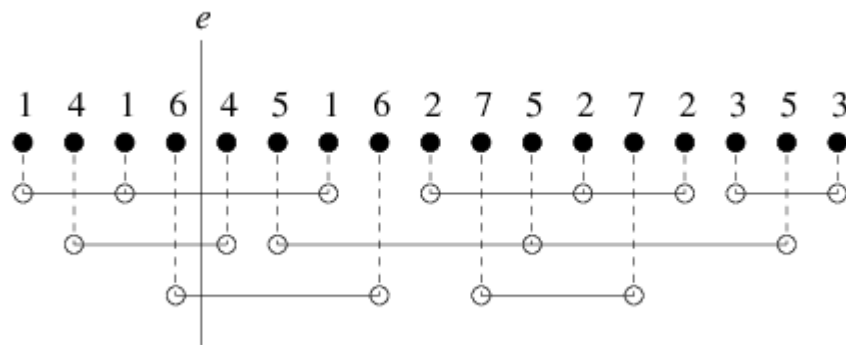
a hosszúságot (n) rögzíti. Emellett általában a probléma felírása a rétegek számát is rögzíti, és a huzalozás minimális szélességét keressük.

A VLSI huzalozás első klasszikus eredménye feltehetően Gallai Tibor lineáris idejű algoritmus volt, ami a soros huzalozási problémát optimális szélességgel oldja meg a 2-rétegű Manhattan modellben. Minden függőleges e egyenesre, amely kettévágja a rácsot, definiáljuk a $c(e)$ terhelést (*congestion*): azaz az e által kettévágott netek számát (azaz az olyan netek száma, amelyeknek vannak termináljai e bal illetve jobb oldalán is). Például az e egyenes terhelése a 3.2 ábrán $c(e) = 3$. Az összes a rácsot ketté vágó függőleges egyenes maximális terhelését a feladat sűrűségének (*density*) nevezzük. A sűrűség egyébként egy alsó korlát bármely huzalozási feladat szélességére (részletesebben a 2-rétegű Manhattan modellben).

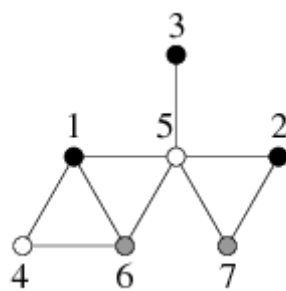
Tétel 1: [12] Egy soros huzalozási feladat megoldásának minimális szélessége a 2-rétegű Manhattan modellben megegyezik a feladat sűrűségével. Sőt egy ilyen minimális szélességű huzalozás lineáris időben megtalálható.

Bizonyítás: A bizonyítás kihasználja azt, hogy az intervallumgráfok perfekt gráfok. Egy vízszintes intervallumot feleltetünk meg minden egyes netnek, a leginkább balra lévő termináljától a leginkább jobbra lévőig. A hozzájuk tartozó intervallumgráfot a következőképpen definiáljuk: a pontthalmaz intervallumaihoz tartozó két pont akkor és csak akkor szomszédos ha a hozzájuk tartozó intervallumok metszik egymást. Ennek a gráfnak a klikkszám megegyezik a huzalozási feladat sűrűségével. Az ugyanennyi színnel való színezhetőség az intervallumgráfok perfektségén múlik. Egy színezés könnyedén transzformálható át egy optimális szélességű huzalozássá: egy azonos színosztályhoz tartozó neteket meg lehet huzalozni ugyanazon sorban.

Egy példa látható a 3.2 és 3.3-as ábrákon. A 3.3-as ábra intervallumgráfja, ami a 3.2 ábra huzalozási feladatához tartozik, három színnel ki lett színezve; a huzalozási feladat megoldása, amit ebből a színezésből olvastunk ki a 3.2 ábrán látható. (A 3.2 ábra sötét pontjai felelnek meg a termináloknak és a közös számmal jelzett terminálok halmazai a netek. A két réteg huzalrészeit rendre folytonos illetve szaggatott vonalakkal jelöljük. Az üres pontok a két réteg közötti átvezetéseknek (*via*) felelnek meg. Hasonló jelöléseket használunk a későbbi fejezetek ábráinál is.)



3.2. ábra.



3.3. ábra.

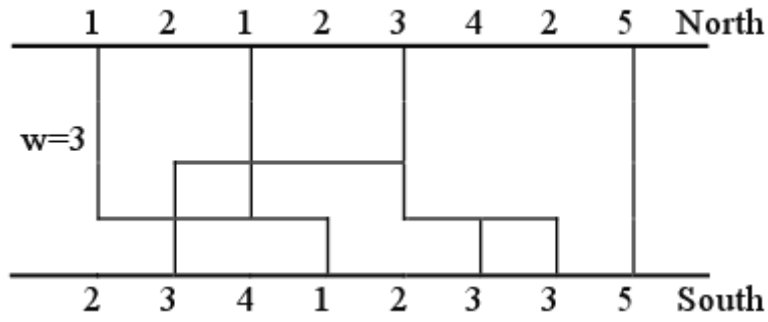
Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy a fent leírt huzalozás megvalósítható lineáris időben, csak le kell ellenőriznünk, hogy a hozzá tartozó intervallumgráf optimális színezése lineáris időben megtalálható, azaz $O(n)$ lépésben, ahol n az adott feladat hosszúságát jelöli. (A munka többi része konstans időt igényel minden egyes terminálhoz, ha a huzalrészek a végpontok koordinátáiból adódnak.) Tegyük fel, hogy az intervallumgráf, amit ki kell színezni, adott úgy, hogy egy rendezett L lista tartalmazza az intervallumok összes végpontjának a helyzetét. (Azaz mind a bal mind a jobb oldali végpontok egy közös L listában.) L -t triviálisan nyerhetjük a soros huzalozási feladat specifikációjából végigolvasva a terminálok sorát. Az intervallumgráf egy színezését úgy kapjuk, hogy végigolvassuk L elemeit. Pozitív egész számokkal jelöljük a színeket. Elkészítünk egy (C) listát a szabad színekből, valamint hozzáadjuk azt a legnagyobb M színt, ami már használva volt. Kezdetben $C = \emptyset$ és $M = 0$. Ha L végigolvasása közben elérjük egy I intervallum bal végpontját, és $C = \emptyset$, akkor vesszük az új $M + 1$ színt, hozzárendeljük I -hez, és megnöveljük M értékét $M + 1$ -re. Ha elérünk egy balvégpontot, és $C \neq \emptyset$ akkor kiválasztunk egy k színt C -ből, hozzárendeljük k -t I -hez, és töröljük k -t C -ből. Másrésztől, ha elérjük az I intervallum egy jobb végpontját, akkor egyszerűen belerakjuk I színét C -be. Könnyű belátni, hogy az így kapott színezés optimális: azt a függőleges egyenest, amely átmegy annak az intervallumnak bal végpontján, amelyhez a legnagyobb M színt legelőször használtuk, M darab intervallum metszi, valamint az intervallumgráf klikkszáma is szintén M . \square

Megjegyezzük, hogy a megszorítás nélküli 2-rétegű modellben nem ismert polinomiális idejű algoritmus, ami megoldja a soros huzalozási feladatot optimális szélességgel.

3.3. Csatornahuzalozás

Csatornahuzalozási feladaton (*channel routing problem*), a switchbox huzalozási feladatnak azt a speciális esetét értjük, amikor minden egyes net összes terminálja, a rács két szemközti határán helyezkednek el (mondjuk a déli és az északi oldalon). Ebben az esetben is a feladat felvetésénél általában rögzítik a rétegek számát, és minimális szélességű huzalozást keresnek (feltéve, hogy létezik huzalozás).

Példa egy általános csatornahuzalozási feladatra:



3.4. ábra.

3.3.1. 2-rétegű, Manhattan model

A csatornahuzalozás a 2-rétegű Manhattan modellben egyike a VLSI huzalozásban a legnépszerűbb és legkutatottabb problémáknak. Triviális példák léteznek arra, hogy ennek a modellnek néhány specifikációja megoldhatatlan még akkor is, ha tetszőleges szélességet engedélyezünk meg (annak ellenére, hogy ezeknek a száma igen korlátozott). Mindemellett a feladat meghatározása, amit rengeteg cikkben átvettek, tetszőleges számú extra üres oszlopot engedélyez hozzávenni a nyugati és a keleti végein az adott csatornahuzalozási feladatnak.

Láttuk, hogy soros huzalozás esetében a 2-rétegű Manhattan modellben mindig meg tudtuk találni az optimális szélességű huzalozást lineáris időben. Ezzel szemben, a csatornahuzalozás sokkal összetettebb mint a soros huzalozás, ahogy ezt a következő tétel is mutatja.

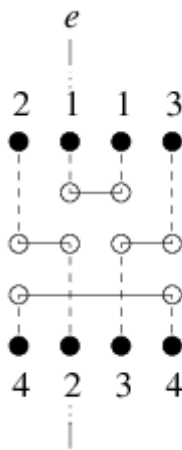
Tétel 2: [43] NP-teljes eldönteni egy csatornahuzalozási feladatról, hogy megoldható-e a 2-rétegű Manhattan modelben legfeljebb w szélességben (ahol w az input része).

Számos kiterjesztése ismert a fenti eredménynek. Például tegyük fel, hogy a csatornahuzalozási feladat netjei mind „egyoldalúak” (*one-sided*), azaz minden egyes net termináljai vagy csak az északi, vagy csak a déli oldalon helyezkednek el. Egy ilyen feladat megközelítése érthető okokból, hogy használjuk Galjai algoritmusát (1. Tétel) kétszer (mindkét oldalra). Könnyű belátni, hogy az előbb leírt huzalozás szélessége legfeljebb kétszerese az optimális szélességnek. Mindazonáltal fontos megemlíteni azt is, hogy egy ilyen feladathoz megtalálni a minimális szélességet szintén NP-nehéz, még akkor is, ha a netek csak két-két terminált tartalmaznak. [31]

A fenti tények ismeretében, rengeteg a gyakorlatban hasznos heurisztikus algoritmus készült, ami meg tud oldani „nehéz” feladatokat körülbelül 20-as szélességgel [10, 19, 28, 37]. Továbbá, létezik pár pozitív eredmény is a 2-rétegű Manhattan model alkalmazásának a csatornahuzalozásban.

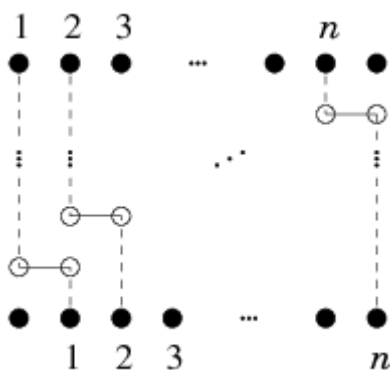
Létezik egy lineáris futásidőjű algoritmus, amely eldönti, hogy a csatornahuzalozási feladat megoldható-e ebben a modellben adott w szélességben [41]. (Azaz az algoritmus az n hosszúságban lineáris ideig fut minden konstans w szélességre, de a futásidő szuperpolinomiálisan függ w méretétől.)

A legismertebb pozitív eredmény a Manhattan-modellben a csatornahuzalozásban Baker, Bhatt és Leighton approximáló algoritmus. Ahhoz, hogy kimondjuk a következő tételt, a sűrűség fogalmát (lásd a 11. oldalon) ki kell terjesztenünk a csatornahuzalozásra is, hogy meghatározzunk egy alsó korlátot a minimális szélességre. Minden egyes nethez a vízszintes intervallumokat jelöljük egy a leginkább balra lévő termináltól a leginkább jobbra lévő terminálig tartó egyenessel (ahol az egyes netek termináljait mindkét oldalon vizsgáljuk). Egy függőleges e egyenes terhelése, az e -t metsző intervallumok száma. A huzalozási feladat sűrűsége legyen a maximális terhelés. Meg kell említenünk, hogy egy a rácshoz tartozó függőleges egyenes terhelése legfeljebb eggyel nagyobb lehet, mint a maximális terhelése a rácshoz nem tartozó összes függőleges vonalnak. Ezért a soros huzalozással ellentétben a csatornahuzalozási feladatban csak a rácshoz tartozó függőleges egyeneseket kell figyelembe venni, amikor meghatározzuk a feladat sűrűségét. Például a 3.5 ábrán az e egyenes terhelése 3 (ami bizonyítja, hogy a talált megoldás optimális), amíg az összes a rácshoz nem tartozó függőleges egyenes terhelése legfeljebb 2.



3.5. ábra.

Mivel a sűrűség alsó korlát a minimális szélességre, ezért természetes kérdésként merül fel, hogy lehetséges-e felső korlátot adni a minimális szélességre a sűrűség függvényében. Sajnos, a válasz nemleges. Brown és Rivest bizonyította [6], hogy a 3.6-os ábrán látható csatornahuzalozási feladatnak (amire gyakran *shift - right - 1* feladatként hivatkoznak) a minimális szélességű megoldásához $\Theta(\sqrt{n})$ sor szükséges, míg a sűrűsége konstans 2.



3.6. ábra.

Ezt az ötletet terjesztette ki később Baker, Bhatt és Leighton [3]. Definiáltak egy alsó korlátot a minimális szélességre, amit fluxusnak (*flux*) neveztek el, ami független a sűrűségtől. A következő állítás előkészít valamilyen technikai definíciót erre az ötletre. Egy netet triviálisnak (*trivial*) hívunk, ha tartalmaz két terminált, amelyek ugyanazon oszlopban helyezkednek el.

Állítás 3: [3] Válasszunk ki k darab szomszédos terminált egy adott csatornahuzalozási feladat egyik oldalán; jelöljük ezeknek a termináloknak a halmazát S -sel. Jelöljük l -l az azon nem triviális netek számát, amelyeknek van terminálja az S -ben és az S -en kívül is. Ha létezik egy w szélességű megoldás, akkor

$$w(k - l) + w(w + l) \geq l.$$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy S termináljai az északi oldalon vannak. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy minden egyes net nem triviális, és hogy minden egyes net pontosan két terminált tartalmaz: egyet S -ben és egyet S -en kívül. (Ha nem ez a helyzet, akkor minden nem triviális netből válasszunk ki egy olyan terminált ami S -ben van valamint egy olyat ami S -en kívül van, és töröljük az összes többi terminált minden egyes netből.) Így a netek száma l .

Mivel minden egyes net pontosan két terminált tartalmaz, ezért minden huzal választható egy útnak. Ezekre az utakra úgy fogunk gondolni, hogy ezek meg vannak irányítva S belsejéből S külsejébe. Minden egyes net huzalozása vízszintes és függőleges huzalrészek váltakozó sorozata (eltekintve a két réteg közti átvezetésektől (*via*)). Mivel nincsenek triviális netek, ezért minden egyes út legalább egy vízszintes részt tartalmaz. Azt mondjuk, hogy egy N net a j . sorban van huzalozva, ha az N huzalozásához tartozó legelső vízszintes rész a j . sorban van.

Jelöljük az S -hez tartozó k darab szomszédos oszlop halmazát C -vel. Számozzuk meg a csatornahuzalozási feladat sorait északról dél felé növekvő irányban. Tegyük fel, hogy az N net az 1. sorban van huzalozva. Ekkor az 1. sorban

lévő vízszintes rész vagy C -ben végződik, vagy egy olyan oszlopban, amelynek az északi terminálját nem használja egyik net sem. Mivel legfeljebb két huzal hagyhatja el C -t az 1. sorban, és a nem foglalt terminálok száma S -ben $k - l$, az első sorban huzalozott netek száma legfeljebb $k - l + 2$.

Most válasszuk a j . sort, bármelyik $2 \leq j \leq w$ esetén. Mivel legfeljebb két vezeték tudja elhagyni C -t minden sorban $1, 2, \dots, j - 1$ -ig, legalább $l - 2(j - 1)$ netnek kell belépnie C -be a j . sorban. Ezek a belépési pontok legalább $l - 2j + 2$ rácpontot foglalnak le a j . sorban (a rétegen függőleges huzalrészeket helyezzünk el) Ezért, ha egy net a j . sorban van huzalozva, akkor a hozzá tartozó vízszintes rész a j . sorban vagy elhagyja C -t (az ilyen netek száma legfeljebb 2), vagypedig a maradék $k - l + 2j - 2$ oszlopban végződik. Ezért a j . sorban huzalozott netek száma legfeljebb $k - l + 2j$ ($j = 1, 2, \dots, w$).

Mivel minden egyes net valamelyik sorban van huzalozva, ezért a következő képletet kapjuk

$$\sum_{j=1}^w (k - l + 2j) \geq l,$$

ami ekvivalens a bizonyítandó állítással. \square

Összhangban a fenti állítással egy adott csatornahuzalozási feladatnak az f fluxusát úgy definiáljuk, mint a minimális (egész) értékét w -nek, ahol a 3. állítás egyenlőtlensége fennáll, tetszőlegesen választott szomszédos terminálok egy számára, bármelyik oldalon. (Itt a [27] definícióját követjük, a [3] definíció a jelenlegitől csak egy konstanstól tér el.) Például a *shift - right - 1* feladat (3.6 ábra) fluxusa $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ vagy $\lceil \sqrt{n} \rceil$. A definícióból következik, hogy a fluxus mindig legfeljebb $\sqrt{t} + 1$, ahol t a netek száma.

Az f fluxus létezése bizonyítja, hogy nincs olyan felső korlátja a minimális szélességnek, ami csak a d sűrűség függvénye. Ennek ellenére Baker, Bhatt és Leighton [3] bizonyította a következő tételt:

Tétel 4: [3] Minden csatornahuzalozási feladat megoldható a 2-rétegű Manhattan-modellben, legfeljebb $2d + O(f)$ szélességben. Továbbá, a szélesség korlátja legfeljebb $d + O(f)$ ha minden egyes net csak pontosan két terminált tartalmaz.

A fenti tétel bizonyítása tartalmaz egy algoritmust, ami a megvalósítandó huzalozás területének függvényében lineáris ideig fut. Ennek az eljárásnak a hátránya, hogy az eredeti feladathoz hozzáadandó extra oszlopok száma $O(f)$ nagyságú lehet (ami legrosszabb esetben $O(\sqrt{t})$ nagyságú lehet). Másrészt, a fenti tétel szerzői azt állítják, hogy a gyakorlatban a csatornahuzalozási feladat fluxusa nem halad meg egy kis konstans értéket.

Lényegében a 4. tétel eredményére világít rá [44] is, csak jobb konstansokkal. A szélesség felső korlátja lényegesen javult $\frac{3}{2}d + O(\sqrt{d \log d}) + O(f)$ -re [14, 15]-ben.

3.3.2. 2-rétegű megszorítás nélküli model

A megszorítás nélküli modellben igaz, a Manhattan modellel ellentétben, hogy minden csatornahuzalozási feladat megoldható polinomiális időben 2 rétegen kellően nagy szélességben (anélkül hogy megnövelnénk a csatorna hosszát). Ezt először M. Marek-Sadowska és E. Kuh bizonyította [30]. Később Recski András és F. Strzyzewski a következő lineáris idejű algoritmust találták:

Tétel 5: [33] Minden l hosszúságú csatornahuzalozási feladat megoldható $O(l)$ időben, a 2-rétegű megszorítás nélküli modellben, akkor is, ha az adódó huzalozásnak a w szélességére $w \leq \frac{3}{2}l$ teljesül. Továbbá, ha minden egyes net csak két terminált tartalmaz, egyet a felső (északi) és egyet az alsó (déli) oldalon, akkor a szélesség $w \leq l$ -re javítható.

Az algoritmusuk nem ad optimális szélességű megoldást (annak ellenére, hogy az elkészítendő szélesség felülről korlátozható n -nel a kétoldali (*bipartite*) és $\frac{3}{2}n$ -nel általános esetben). Annak a természetesen felmerülő kérdésnek a bonyolultsága nem ismert, hogy mekkora a minimális szélességű huzalozás mérete, de D.S. Johnson széleskörűen elfogadott sejtése [20] szerint NP-nehéz.

3.3.3. k-rétegű Manhattan model

Minden csatornahuzalozási feladat megoldható a k -rétegű Manhattan modellben minden $k \geq 3$ -ra. Ez Gallai algoritmusának (1. tétel) egy egyszerű módosításával könnyen bebizonyítható.

Jelölje a vízszintes illetve függőleges rétegek (azaz az olyan rétegek, amelyek csak vízszintes vagy csak függőleges huzalrészeket tartalmaznak) számát rendre h és v . Nyilvánvalóan $h + v = k$ és $|h - v| \leq 1$. Ekkor egy triviális alsó korlát a minimális szélességre $\lceil \frac{d}{h} \rceil$ (ahol d szintén a sűrűséget jelöli). A következő állítás közismert:

Állítás 6: [40] Minden csatornahuzalozási feladat megoldható $\lceil \frac{d}{(v-1)} \rceil$ szélességben a Manhattan modellben (ha $v \geq 2$). És egy ilyen huzalozás lineáris időben található.

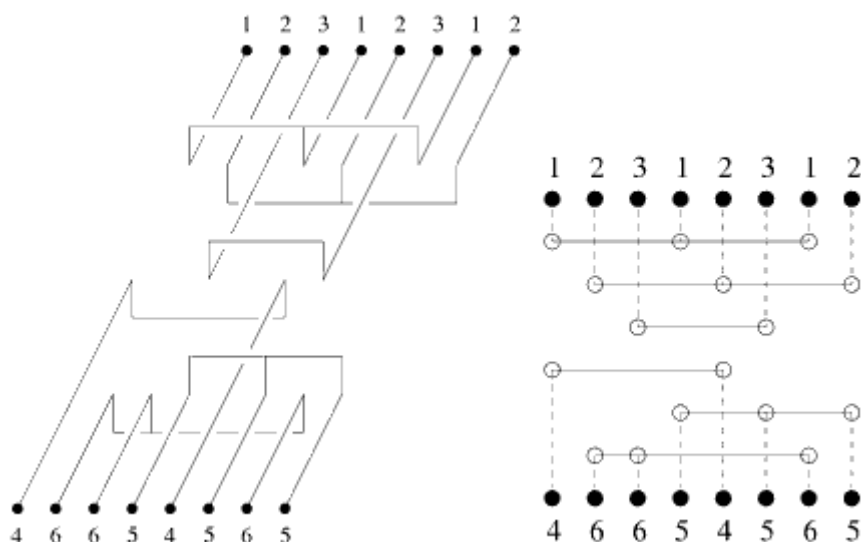
Bizonyítás: Számozzuk a rétegeket $1, 2, \dots, k$ -val. Tegyük fel, hogy k páratlan; ha nem ez a helyzet, akkor egy réteg majd nem lesz használva. A következő konstrukcióban a páratlan sorszámú rétegek függőleges részeket tartalmaznak, míg a többi réteg vízszintes részeket.

A netekhez rendelt intervallumokat (a definíciót lásd a 11. oldalon) d darab színosztályba sorolhatjuk Gallai algoritmusának (1. tétel) a felhasználásával. Használjuk a páros sorszámú rétegek sorait, hogy lefoglaljuk a színosztályokat.

(Precízebben, minden egyes színosztály vízszintes huzalrészek egy halmazának felel meg, és a huzalrészeknek ezen halmazai az említett sorokban helyezkednek el.) Mivel a vízszintes rétegek száma $v - 1$, a $\left\lceil \frac{d}{(v-1)} \right\rceil$ szélesség kétségtelenül elégséges ahhoz, hogy minden színosztálynak legyen helye.

Helyezzünk egy függőleges huzalrészlet minden páratlan számmal jelzett réteg minden oszlopába; az 1,5,9,... rétegekben induljon ez a huzalrészlet az északi termináltól, míg a 3,7,11,... rétegekben a huzalrészlet induljon a déli termináltól. Most már minden egyes hálózat könnyedén meghuzalozható úgy, hogy elkészítjük a végleges utakat a terminálokból induló függőleges huzalrészletek, valamint a netek intervallumainak megfelelő vízszintes huzalrészletek között. (Vegyük észre, hogy a legtöbb függőleges huzalrészlet, amit használtunk a fenti konstrukcióban fölöslegesek; azért lettek bevezetve, hogy a konstrukció egyszerűbben leírható legyen.) \square

Példa 3-rétegű Manhattan modellre:



3.7. ábra.

(forrás: Jordán Tibor, Recski András, Szeszlér Dávid: Rendszeroptimalizálás, Typotex kiadó, Budapest, 2004, 151. oldal, 6.9a és 6.9b ábrák)

A fenti konstrukció csak akkor ad optimális megoldást, ha k páratlan, és $v = h + 1$ egy további korlátja a huzalozási modellnek. Általánosságban annyit kaptunk csak, hogy

$$\left\lceil \frac{d}{\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil} \right\rceil \leq \min w \leq \left\lceil \frac{d}{\left\lceil \frac{k}{2} - 1 \right\rceil} \right\rceil.$$

Így a fenti algoritmus egy $\frac{\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil}{\left\lceil \frac{k}{2} - 1 \right\rceil}$ szorzóval megközelíti az optimális szélességet. Sajnos úgy tudjuk, hogy a minimális szélességű huzalozás megtalálásának

bonyolultsága NP-nehéz [32].

3.4. Switchbox huzalozás

Ebben a részben az általános switchbox huzalozási feladatra helyezzük a hangsúlyt, azaz amelyben a terminálok a rácsnak mind a négy oldalán helyezkednek el. (A szakirodalomban általában csak erre az általános esetre használják a switchbox huzalozás kifejezést.)

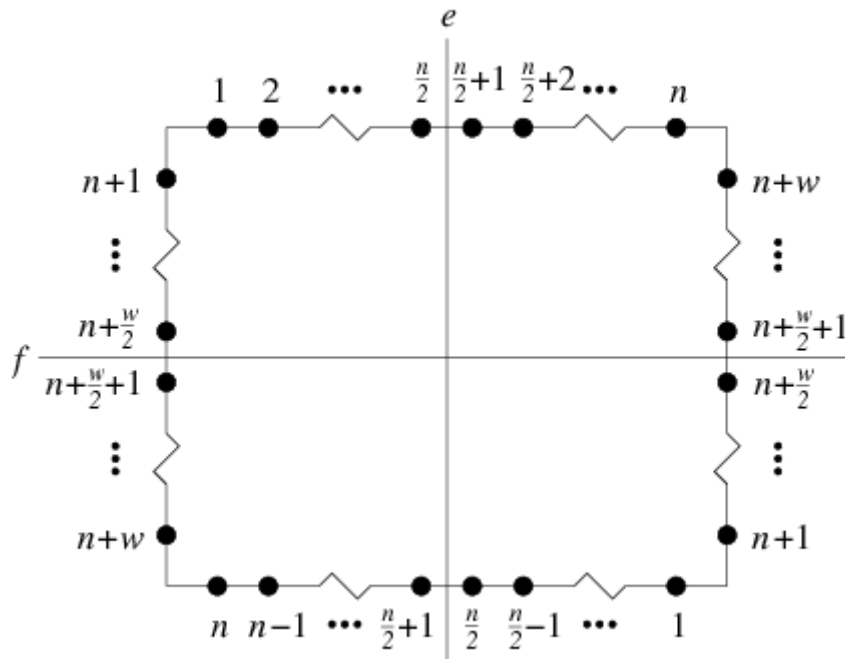
Ellentétben a soros illetve a csatornahuzalozással, itt mind az n hosszúság, mind a w szélesség fix, a probléma specifikációja miatt. Ezért a cél a szükséges rétegek számának minimalizálása. (Vagy eldönteni egy feladatról, hogy megoldható-e adott számú rétegen.)

Mivel a switchbox huzalozás a csatornahuzalozás egy általánosítása, ezért a 2. tételből következik, hogy a megoldhatósága a 2-rétegű Manhattan modellben NP-teljes. Itt is rengeteg heurisztika készült el jó teljesítménnyel, példaként lásd [8, 17, 21, 29].

Láttuk, hogy soros és csatornahuzalozás esetében két réteg bármilyen probléma megoldásához elégséges volt (Ha megszorítottuk magunkat a Manhattan modellre, akkor a csatornahuzalozás esetében három rétegre volt szükségünk.) Ez sajnos nem igaz az általános switchbox huzalozási feladatra. Sőt, nincs fixen elégséges száma a rétegeknek, amit a következő tétel is mutat:

Tétel 7: [18] Minden pozitív egész k -ra létezik olyan switchbox huzalozási feladat, ami nem oldható meg k rétegen a megszorítás nélküli modellben.

Bizonyítás: Tekintsük a 3.8 ábra switchbox huzalozási feladatát. Az e egyenes terhelése $n + w$, azaz mind az $n + w$ netnek van terminálja az e két oldalán. Ebből következne, hogy ha létezne huzalozás k rétegen, akkor $n + w \leq kw$ mivel w sor van minden rétegen. Ebből kapjuk, hogy $\frac{n}{w} + 1 \leq k$. Az n és w paraméterek értéke választható úgy, hogy ez az egyenlőtlenség ne legyen igaz, ami igazolja a fenti tételt. \square



3.8. ábra.

(forrás: Szeszlér Dávid: Combinatorial algorithms in VLSI routing, Ph.D. Dissertation, 2005, 31. oldal, 8. ábra)

Nyilván, ha k -t elég nagyra választjuk, akkor a fenti bizonyítás konstrukciója nagyon teoretikussá válik, mivel a gyakorlati problémákban az n hosszúság nem lehet túl nagy a w szélességhez képest. Jelöljük a $\max\left(\frac{n}{w}, \frac{w}{n}\right)$ hányadost m -el. A fenti tétel bizonyítása az alábbi állítást is tartalmazza: legrosszabb esetben $\lceil m \rceil + 1$ egy alsó korlát egy megoldás rétegeinek a minimális számára. A bizonyítás kis módosítása megmutatja, hogy ha korlátozzuk magunkat a Manhattan modellre, akkor legrosszabb esetben legalább $2\lceil m \rceil + 1$ réteg szükséges ha $m > 1$, és 4 réteg szükséges, ha $m = 1$ (mivel ez utóbbi esetben mind az e illetve f egyenesek terhelése $2n = 2w$). A következő megfigyelés azt állítja, hogy 4 egy alsó korlát a megszorítás nélküli esetben (ezzel a fenti $\lceil m \rceil + 1$ alsó korlát javítható, ha $m \leq 2$).

Állítás 8: [40] A 3.8 ábra switchbox huzalozási feladatának bármely megoldása legalább 4 réteget használ (a megszorítások nélküli modellben).

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy adott egy huzalozás $k \leq 3$ rétegen. Mivel minden egyes netnek csak két terminálja van, feltehető, hogy a huzalok utak. Jelöljük N -el a k -rétegű huzalozáshoz használt rács nem terminál pontjait. Könnyen igazolható, hogy minden $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$ paraméterre $n + w + 1 - 2i$ a száma az olyan (nem terminál) pontoknak, amelyek egy legrövidebb úttal kötik össze az i vagy az $n + 1 - i$ neteket. Hasonlóan, minden $1 \leq i \leq \frac{w}{2}$ paraméterre $n + w + 1 - 2i$ a száma az olyan (nem terminál) pontoknak, amelyek

az $n + i$ vagy az $n + w + 1 - i$ neteket kötik össze. Ebből következik, hogy $N \geq 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} (n + w + 1 - 2i) + 2 \sum_{i=1}^{\frac{w}{2}} (n + w + 1 - 2i) = 2nw + \frac{n^2+w^2}{2}$. Sőt, ha egy netet a legrövidebb úton huzalozunk meg, akkor a huzalozása egy réteghez tartozik. Megjegyezzük, hogy az ilyen netek száma legfeljebb k , mivel két net nem huzalozható meg egy és ugyanazon rétegen, egyszerű topológiai okokból. Ekkor $n + w > 3 \geq k$ -ből következik, hogy $N > 2nw + \frac{n^2+w^2}{2}$. Másrészt, $N \leq knw$, mivel minden rétegnek nw pontja van. Ebből következik, hogy $k > 2 + \frac{n^2+w^2}{2nw} \geq 3$, ami ellentmondás. \square

A fenti határok mutatják, hogy a switchbox feladat huzalozásához legrosszabb esetben minimálisan használt rétegszáma lejjebb szorítható az $m = \max\left(\frac{n}{w}, \frac{w}{n}\right)$ hányados függvényében. Természetesen merül fel a kérdés, hogy vajon létezik-e egy felső korlát a szükséges rétegek számára az m függvényében. A következő tétel igenlő választ ad erre a kérdésre:

Tétel 9: [4] Bármely switchbox huzalozási feladat megoldható a megszorítás nélküli modellben lineáris időben, legfeljebb 18 rétegen, ha $m \leq 2$ és legfeljebb $2m + 14$ rétegen, ha $m > 2$.

A szerzők sejtése szerint valójában már $\lceil m \rceil + 3$ réteg is elegendő; mindazonáltal ez a kérdés még máig nyitott.

3.5. Gamma huzalozás

A switchbox huzalozási feladatnak azon speciális esetét, ahol minden egyes net termináljai a rács két szomszédos szélén helyezkednek el (mondjuk mind északi vagy nyugati) gamma huzalozásnak (*gamma routing*) nevezzük. A gamma huzalozási feladatban a cél ismét a szükséges rétegek számának minimalizálása (mivel mind az n hosszúság, mind a w szélesség fix)

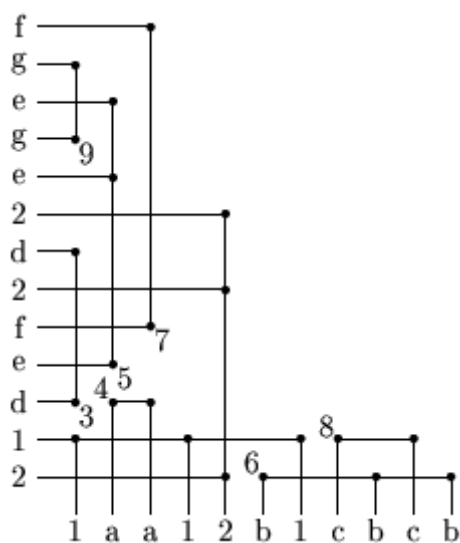
Annak ellenére, hogy a gamma huzalozási feladat bonyolultsága nem ismert, lényegesen egyszerűbbnek tűnik az általános switchbox huzalozásnál (vagy éppen a csatornahuzalozásnál) és léteznek speciális esetei, amelyek köztudottan polinomiálisan megoldhatók. Például a következő megfigyelés triviális: ha minden egyes netnek legalább egy terminálja van mind az északi mind a nyugati oldalon, akkor az adott feladat megoldható a 2-rétegű Manhattan modelben.

A gamma huzalozási feladat teljesen megoldottnak tűnik, a 2-rétegű Manhattan modelben, ha minden egyes net csak két terminált tartalmaz: S. A. Wu és J. Jájá [45] adott egy algoritmust, hogy egy adott probléma megoldható-e, és konstruál egy megoldást, ha ez lehetséges. Az algoritmusuk futásideje lineáris a netek számában, valamint minimális számú utat használ. Az algoritmus magja Gallai eljárásának (1. tétel) egy kiterjesztése.

Boros Endre, Recski András, Szkaliczki Tibor és Wettl Ferenc [4] megoldást ad-

tak részben általánosabb feltételekre: megengedték, hogy minden egyes netnek egynél több terminálja legyen az északi vagy a nyugati oldalán (de nem mindkettőn). Másrészt a huzalozási modellt megszorították a 2-rétegű „*dogleg free*” Manhattan modellre, ahol a huzalozás egy *dogleg free* megoldása azt jelenti, hogy egy k terminálú net $k - 1$ utat használ. Adtak egy algoritmust, ami eldönti egy feladat megoldhatóságát, és ha lehet, konstruál rá egy megoldást. Az algoritmusuk futásideje $O(nwt)$, ahol n és w a lap hossza illetve szélessége, és t a netek száma. Az eljárásuk leegyszerűsítve, és kevésbé részletesen kifejtve a [42]-ben található.

Példa Γ huzalozásra:



3.9. ábra.

4. fejezet

Átmenet a 2-dimenzióból a 3-dimenzióba

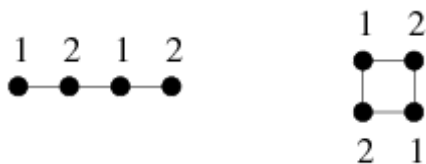
Annak ellenére, hogy egy switchbox huzalozási feladat megoldása tetszőlegesen sok réteget igényelhet, a switchbox huzalozásra tekinthetünk úgy, mint 2-dimenziós huzalozásra: az input négy sorozatból áll (a terminálok a négy oldalon) és a kimenet a síkrétegek egy fix számát tartalmazza (feltéve, hogy az m értékét rögzítjük).

A huzalozási technológiák gyors fejlődésének köszönhetően, a kutatások átfordultak a valódi 3-dimenziós problémák felé. Rengeteg mély eredmény van erről a területről, például [1, 2, 9, 11, 13, 24, 25, 26, 38, 39]. Legtöbbjük „univerzális-célú” („*universal – purpose*”) gráfokat használnak (*n-permuters*, *n-rearrangeable permutation networks*, *shuffle-exchange graphs*) 3-dimenziós rácsként, biztosítva azt, hogy a terminálpárok összeköthetők legyenek, sőt, néhány cikkben él-diszjunkt utakat is megengednek. Ebben a fejezetben többterminálos netek (*multiterminal nets*) is lesznek, és pontdiszjunkt utak (vagy Steiner-fák) biztosítják az összeköttetést az egyes netek termináljai között.

Az aktív réteg (*single active layer*) huzalozási feladatban az összekötésre váró terminálok egy $n \times w$ méretű négyszög alakú síkrácson helyezkednek el, és a huzalozást egy h magasságú kocka rácson kell megvalósítani, a terminálokat tartalmazó eredeti rács fölött. Evidens, hogy a h magasságot szeretnénk optimalizálni. A 'függőleges irány' kifejezést a h irányára fogjuk használni (azaz az $n \times w$ négyszögre merőleges irányra) és nem pedig w irányára.

Már egészen kis feladatoknál is mint a 4×1 , 2×2 is könnyen látható (lásd 4.2 ábra), hogy egy átlagos huzalozási feladat általában megoldhatatlan, anélkül hogy az n hosszúságot és a w szélességet ki ne terjesztenénk extra sorok és oszlopok bevezetésével. Ezek az extra sorok és oszlopok az eredeti rács sorai és oszlopai között kell hogy elhelyezkedjenek. Úgy látszik a huzalozási feladatok

viselkedése nagyban függ attól, hogy az n és w dimenziók közül csak az egyiket, vagy mindkettőt kiterjesztjük egy konstans szorzó segítségével.



4.1. ábra.

De még mielőtt részleteznénk az aktív réteg huzalozási feladatot, leírnánk pontosabban, hogy mit jelent a Steiner-fa keresési feladat:

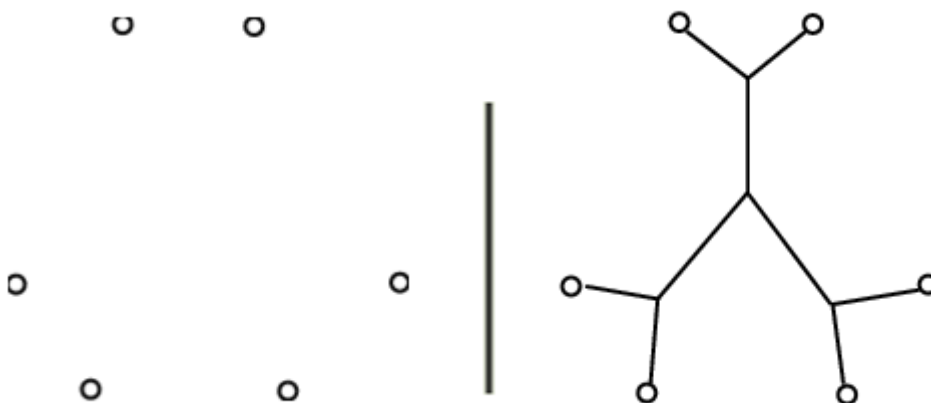
Definíció 6: A Steiner-fa feladat a minimális költségű feszítőfa keresésének általánosítása.

Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan, összefüggő gráf, és a terminál pontjainak egy T halmaza (V része), továbbá minden élhez hozzárendelünk egy költséget (például az azonosan 1-et). Keressünk egy minimális költségű fát, amely az összes T -beli pontot tartalmazza. $T = V$ esetén nyilván a minimális költségű feszítőfa feladatot kapjuk, egyébként pedig egy jóval nehezebb problémához jutunk, amelyben a T -beli pontokhoz további „köztes” pontokat (ún. Steiner-pontokat) hozzávéve csökkenthetjük a feszítőfa költségét.

A feladat általános esetben NP-teljes. Megoldására számos approximációs és heurisztikus algoritmust dolgoztak ki, továbbá néhány speciális változatára egzakt polinomiális módszerek is ismertek.

A probléma általánosítása a Steiner-hálózat feladat.

Példa Steiner-fára:



4.2. ábra.

4.1. Az aktív réteg huzalozási feladat

Az aktív réteg huzalozási feladat egy speciális esete az 1-es és 2-es definíciókban leírt részletes huzalozási feladatnak. Ennek ellenére, a jelölések kedvéért adunk egy az előzőektől független definíciót a feladatra.

Definíció 7: Egy adott $w \times n$ méretű (w sorból és n oszlopból álló) (sík) rács pontjait termináloknak hívjuk. Egy N net az terminálok egy halmaza. Egy aktív réteg huzalozási feladat (vagy röviden SALRP az angol nyelvű rövidítésből) páronként diszjunkt netek egy $N = \{N_1, N_2, \dots, N_t\}$ halmaza. A huzalozási feladat hossza és szélessége rendre n és w .

Definíció 8: A w irányban vett s_w felosztáson azt fogjuk érteni, hogy bevezetünk $s_w - 1$ darab extra oszlopot, minden két szomszédos oszlop közé (és a leginkább jobbra lévő oszlop jobb oldalára is) az eredeti rácsban. Így a rács szélességét kiszélesítettük $w' = s_w \cdot w$ -re. Hasonlóképpen definiáljuk az n irányban vett s_n felosztást is.

Definíció 9: Egy s_w, s_n felosztáson vett megoldása az $N = \{N_1, N_2, \dots, N_t\}$ huzalozási feladatnak egy s_w, s_n felosztáson vett megoldása a $(w \cdot s_w) \times (n \cdot s_n) \times h$ méretű kockarács páronként pontdiszjunkt összefüggő részgráfjainak egy $H = \{H_1, H_2, \dots, H_t\}$ halmaza (a terminálokat tartalmazó eredeti síkrács fölött) úgy, hogy $N_i \subset V(H_i)$, azaz H_i összeköti N_i termináljait. A H_i részgráfokat hívjuk most is huzaloknak. A huzalozás magasságát h -val jelöljük, és a kockarács egy, a magasságra merőleges (és $(w \cdot s_w) \times (n \cdot s_n)$ méretű) keresztmetszetét rétegnek nevezzük.

Evidens, hogy a huzalokat ismét választhatjuk Steiner-fáknak. Azért, hogy a huzalok meghatározását egyszerűbbé tegyük a w -huzalrész kifejezést fogjuk használni a rács w szélességével párhuzamos részre. Hasonlóképpen értelmezzük az n -huzalrész és h -huzalrész kifejezéseket is.

A h magasság minimális méretére is ismerünk eredményeket:

Lemma 10: [40] Tetszőlegesen adott n -re és s_w -re létezik huzalozási feladat, amely nem megoldható $\frac{n}{2s_w}$ -nél kisebb h magasságon.

De ugyanígy ismerünk felső korlátot is h értékére, amely szintén a felosztásoktól függ:

Lemma 11: [40] Ha $s_w \geq 2$ és $s_n \geq 2$ akkor minden huzalozási feladat megoldható $h \leq \frac{wn}{2}$ magassággal.

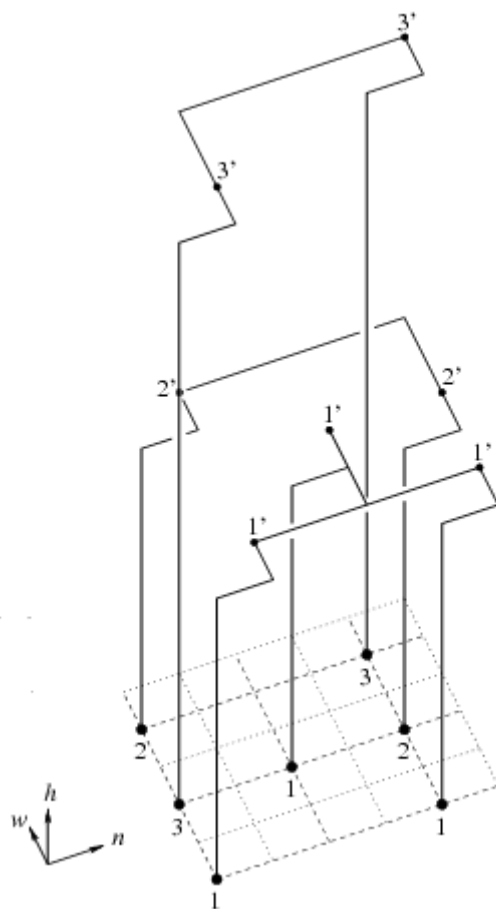
Egy más értelmezése a 11-es lemmának az, hogy ha fixáljuk w -t, akkor létezik egy $h = O(n)$ magasságú huzalozás, feltéve, hogy $s_w, s_n \geq 2$. Ennek ellenére a hasonló állítás igazsága nem olyan nyilvánvaló az $s_n = 1$ esetben. Mégis a h értékére egy jó (sőt a lehető legjobb) becslést sikerült adnia Recski Andrásnak és Szeszlér Dávidnak 2001-ben:

Tétel 12: [34] Ha $s_w \geq 8$ akkor w tetszőleges fix értékére, és tetszőleges n -re egy aktív réteg huzalozási feladat mindig megoldható $t = O(n)$ időben $h = O(n)$ magassággal, még akkor is ha a h hosszúságot legfeljebb eggyel növeljük vagy csökkentjük. Mindkét lineáris korlát a lehető legjobb.

Az algoritmusuk egy $t = O(w^3n)$ és $h = O(nD)$ becslést ad, ahol D az alábbi módon van definiálva. (az előző alsó korlát az input hossza volt: $t = \Omega(w^n)$.)

Definíció 10: Mivel w fix, ezért könnyű elképzelni az inputot úgy, mint a termináloknak w darab sorát (mindegyik n hosszú), vagy mint $\binom{w}{2}$ csatornahuzalozási feladat halmazát, amelyek közül mindegyik n hosszú és adott a sűrűségük. Legyen D a maximuma ezeknek a sűrűségeknek. Világos, hogy $D \leq n$. (A 11. tétel példájában $D = n$ fennáll, ezért a $h = \Omega(D)$ alsó korlát is igaz.)

Példa SALRP feladatra:



4.3. ábra.

(forrás: Recski András, Szeszlér Dávid: 3-dimensional routing, Proc. 5th Hungarian-Japanese Symp. on Discrete Mathematics and Its Applications, Sendai, 2007, 138-145., 142. oldal, 2. ábra)

5. fejezet

A 3-dimenziós huzalozásról

5.1. A 3-dimenziós csatornahuzalozás

Képzeljünk el két párhuzamos $w \times n$ méretű síkrácsot. Meg szeretnénk huzalozni az összes netet a két réteg között egy kockarácson, a terminálok megtartásával. Ezt a feladatot fogjuk 3-dimenziós csatornahuzalozási feladatnak (vagy 3DCRP-nek az angol nyelvű rövidítésből) nevezni. A megoldhatóság biztosítására meg szokták engedni, hogy bevezessünk egy extra sort/oszlopot minden két terminálokot tartalmazó sor/oszlop közé (mindkét rácson). Jegyezzük meg, hogy a huzalozást egy $2n \times 2w \times h$ méretű kockarácson kell megvalósítanunk. A célunk, hogy minimalizáljuk a h magasságot. Recski András és Szeszlér Dávid korábbi eredményét [35] általánosítva, Reiss Attila és Szeszlér Dávid megmutatta, hogy minden ilyen probléma megoldható polinomiális időben, $h = O(\max(n, w))$ magassággal. Ez a lineáris korlát a lehető legjobb (egy konstans szorzótól eltekintve.)

Az aktív réteg huzalozási feladról azt tartják, hogy a soros huzalozási feladat egyfajta 3-dimenziós egyfajta analógiája. Itt a terminálok egy $w \times n$ méretű síkgráfon helyezkednek el, és a harmadik dimenzió (a rács fölött, h magasságban) csak összekötésekre szolgál. Több terminálos netek is megengedettek és minden egyes netben a terminálok összeköttetését pont-diszjunkt utakon kell megvalósítani (vagy Steiner-fákon). Könnyen látható még egy kis 2×2 -es vagy egy 4×1 -es példán is, hogy egy huzalozás általában lehetetlen (tetszőleges magassággal, lásd 4.2 ábra). Ezért megengedett, hogy a rács hosszúságát és szélességét megnöveljük $w' = sw$ -re és $n' = sn$ -re, ahol az s felosztás egy fix egész szám. Ezt úgy csináljuk, hogy bevezetünk $s - 1$ darab üres sort és oszlopot minden két szomszédos terminálokot tartalmazó sor és oszlop közé. A már említett SALRP feladat eredményeiből, a következőt szeretnénk megemlíteni:

Tétel 13: [35] Ha $s \geq 2$ akkor tetszőleges SALRP megoldható $h = 6 \max(n, w)$ magasságban $O(t(w+n))$ időben, ahol t a netek számát jelöli.

Valamint Reiss Attila és Szeszlér Dávid következő eredményeit szeretnénk megemlíteni, amelyeket a 3DGRP feladatra mutatott algoritmusunknál szeretnénk majd felhasználni.

Lemma 14: [36] Ha $s_w \geq 2$ és $s_n \geq 4$ akkor minden 3DCRP megoldható $h = 6 \max(n, w)$ magasságban, polinomiális időben.

Bizonyítás: A bizonyításhoz szeretnénk bevezetni a h -egyenes valamint a h -huzalrész fogalmát a következőképpen:

Definíció 11: nevezzük h -egyenesnek a rács egy a h magassággal párhuzamos egyenesét (Hasonlóképpen definiálhatunk w - és n -egyeneseket is).

Definíció 12: A h -huzalrész kifejezést fogjuk használni egy huzalrészre, ami a rács egy h -egyeneséhez tartozik (analog módon definiálhatunk w - és n -huzalrészeket is).

Mozgassuk a felső rács termináljait y irányába 2 egységgel, és aztán vetítsük le ezeket a terminálokat az alsó rácsra. Így egy SALRP feladatot kapunk $s_w, s_n \geq 2$ paraméterekkel, ami megoldható $h = 6 \max(n, w)$ magasságban, a 13. tétel szerint. Mivel minden egyes terminál fölötti h -egyeneset lefoglal egy-egy h -huzalrész (lásd bővebben [36]), ez a megoldás módosítható az előzőképpen, hogy az eredeti 3DCRP feladat egy megoldását adja. \square

Tétel 15: [36] Minden 3-dimenziós csatornahuzalozási feladat megoldható $h = 15 \max(n, w)$ magasságban ha $s_w = s_n = 2$.

Tétel 16: [36] Minden kétoldali 3-dimenziós csatornahuzalozási feladat megoldható $h = 3 \max(n, w)$ magasságban ha $s_w = s_n = 2$.

A 15. tétel könnyen bizonyítható a 16. tételből a következőképpen: Ehhez azonban be kell vezetnünk a h -sík fogalmát is.

Definíció 13: Tegyük fel, hogy az (x, y, z) koordináta-rendszerben dolgozunk. Használjuk a $z = h_0$ h -sík kifejezést az összes $z = h_0$ koordinátájú pontra (Ez a réteg egy keresztmetszete a kockarácsnak, mégpedig egy a magasságra merőleges metszet, aminek a méretei: $(s_w \cdot w) \times (s_n \cdot n)$.) Az n -sík és a w -sík kifejezéseket analog módon definiáljuk.

Összefoglalva a $z = 0$ h -sík az alsó rács, és a $z = h$ h -sík a felső rács.

Tegyük fel, hogy adott egy (általános) 3DCRP ($s_w = s_n = 2$ paraméterekkel). Ahhoz, hogy nyerjünk ehhez egy huzalozást, először megoldjuk a felső és az alsó rácsot, mint két különálló SALRP feladatot. Ezt megcsinálhatjuk $h_1 = 6 \max(n, w)$ magassággal mind a felső, mind az alsó rácsra a 13. tétel

szerint. Most vegyük például az alsó rácsot, és válasszunk egy terminált minden egyes netből (amelynek van terminálja a felső rácson is) tetszőlegesen. Mivel az SALRP megoldásában minden egyes egy terminált metsző h -egyeneset használ egy h -vezeték rész, ezért minden egyes kiválasztott terminál összeköthető a hozzá tartozó ponttal a $h = h_1$ h -síkból anélkül, hogy elrontanánk az SALRP feladatunk megoldását. Ugyanezt az eljárást ismételve a felső rácsra, egy kétoldali 3DCRP feladatot nyerünk (amit meg kell huzalozni a két SALRP között), ami megoldható $h = 3 \max(n, w)$ magasságban a 16. tétel szerint.

Vegyük észre, hogy az adott 3DCRP meg lett oldva, és a felhasznált magasság $h = 2 \cdot 6 \max(n, w) + 3 \max(n, w) = 15 \max(n, w)$, és ezt akartuk bizonyítani.

A következő lemma pedig azt mutatja meg, hogy a 15. 16. tételek korlátja a lehető legjobb egy konstans szorzótól eltekintve.

Lemma 17: [35] Tetszőleges adott n -re létezik aktív réteg huzalozási feladat ami nem oldható meg $\frac{n}{2s_w}$ -nél kisebb h magasságon.

A kétoldali 3DCRP feladat bizonyítása részletesebben megtalálható a [36] cikkben.

5.2. A 3-dimenziós gamma huzalozás

Ebben a részben a 3-dimenziós Γ huzalozási feladattal (vagy röviden 3D Γ RP a probléma angol rövidítéséből) fogunk foglalkozni, és adunk néhány algoritmust, amellyel a problémát a 3DCRP feladatra próbáljuk meg visszavezetni.

A 2-dimenziós Γ huzalozási feladatot már megemlítettük a 3.5. fejezetben, és a 3D Γ RP feladatot, mint egyfajta 3-dimenziós analogonját szeretnénk ismertetni.

Tekintsünk két egymásra merőleges síkrácsot (legyenek ezek mondjuk déli és nyugati), és ezeknek a rácsoknak a pontjait nevezzük termináloknak. A teljesség megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $n = h$, hiszen ellenkező esetben a kisebbik paraméterhez tartozó rácsrészeket növeljük meg üres sorokkal/oszlopokkal, hogy $n = h$ fennálljon. Ezeket a terminálokat szeretnénk összekötni pontdiszjunkt Steiner-fák segítségével. A kétoldali 3D Γ RP feladatban minden netnek pontosan két terminálja van (egy a déli, egy a nyugati rácson). Az előző fejezet definícióit használjuk itt is a h -egyenes, h -huzalrész, h -sík kifejezésekre. Valamint vezessük be a következő definíciókat is:

Definíció 14: Tegyük fel, hogy az (x, y, z) koordinátarendszerben dolgozunk. Nevezzük a kockarács $z = 0$ h -síkjának és $y = i$ w -síkjának metszetében lévő terminálokat n_i terminálsornak. Az n_i terminálsor elemeire hivatkozunk $n_{i,j}$ ($j = 1..n$) jelöléssel.

Nevezzük a kockarács $x = 0$ n -síkjának és $y = i$ w -síkjának metszetében lévő terminálokat h_i termináloszlopnak. Az h_i termináloszlop elemeire hivatkozunk $h_{i,j}$ ($j = 1..h$) jelöléssel.

A $3D\Gamma RP$ feladatot két heurisztikus modellel szeretnénk bemutatni, és mindkettőhöz szeretnénk adni egy-egy egyszerű algoritmust, amellyel könnyedén visszavezethetjük a problémát a $3DCRP$ feladatra. Innentől végig tegyük fel, hogy $s_w = s_n = 2$ fennáll. Valamint tegyük fel azt is, hogy minden egyes netnek legalább 1 terminálja van mindkét síkrácson (persze ha ezt a feltevést nem tennénk meg, akkor is működnének az eljárások, csak akkor nem biztos hogy a második modellben mindig kétoldali $3DCRP$ feladat adódna.)

5.2.1. A korlátok nélküli model

Ebben a modellben is engedjük meg, hogy tetszőleges két terminálokat tartalmazó sor/oszlop közé valamint az n_w sor fölé, valamint a h_w sor fölé, egy extra sort/oszlopot szúrjunk be. Továbbá engedjük meg azt is, hogy ha szükséges, akkor a déli rács alá legfeljebb a $z = -n$ h -síkgig extra h -síkokat (és persze bennük ugyanúgy sorokat és oszlopokat), a nyugati rács bal oldalára legfeljebb az $x = -h$ n -síkgig extra n -síkokat, a $z = h$ h -sík fölé legfeljebb a $z = 15 \max(n, w) - h + A$ (kétoldali esetben $z = 3 \max(n, w) - h + A$) h -síkgig extra h -síkokat, valamint az $x = n$ n -sík jobb oldalára legfeljebb az $x = 15 \max(h, w) - n + A$ (kétoldali esetben $x = 3 \max(h, w) - n + A$) n -síkgig extra n -síkokat szúrjunk be, ahol az A konstans értékét később fogjuk alkalmas módon meghatározni. Azért mondtuk úgy, hogy ha szükséges, mert az extra síkoknak e négy típusából, csak két típusra lesz mindig szükségünk, de ez az algoritmus működéséből kiderül.

Az algoritmus működését 3 fázisra oszthatjuk:

1. Oldalválasztási fázis
2. Átvezetési fázis
3. Huzalozási fázis

Nézzük meg hogyan is működnek ezek.

I. fázis: az oldalválasztás

Ebben a fázisban kiválasztjuk, hogy a déli rácsot szeretnénk a nyugati ráccsal párhuzamosra tenni úgy, hogy a déli rács termináljait elszállítjuk a nyugatival párhuzamos síkba (legyen ennek a síknak a neve keleti), vagy pedig a nyugati rácsot szeretnénk a déli ráccsal párhuzamosra tenni úgy, hogy a nyugati rács termináljait elszállítjuk a délivel párhuzamos síkba (legyen ennek a síknak a neve északi).

Mivel feltehetjük, hogy az összes terminál nincs netekhez rendelve, és szeretnénk ha az elszállításhoz minimális számú új síkot kelljen bevezetni a fenti négy típusból, ezért a következő módszerrel választjuk ki az elszállítandó oldalt.

Nézzük meg, hogy a déli rács soraiban, illetve a nyugati rács oszlopaiban hány darab különböző nethez tartozó terminál van, vegyük ezeknek az értékeknek a sorok közül a maximumát, illetve az oszlopok közül is a maximumát, majd ha e közül a két érték közül a sormaximum a kisebb, akkor a déli terminálokat, ha az oszlopmaximum a kisebb akkor a nyugati terminálokat szállítjuk el, ha a két érték megegyezik, akkor tetszőlegesen választhatunk a két rács közül (mondjuk válasszuk ilyenkor rendre a déli rácsot). Ugyanez formálisabban:

Jelölje dn_i az n_i sor különböző nethez tartozó termináljainak a számát, és dh_i a h_i oszlop különböző nethez tartozó termináljainak a számát. Számítsuk ki az

$$A = \min(\max_{i=1..w}(dn_i), \max_{i=1..w}(dh_i))$$

értéket. Amennyiben ez a minimum az első paraméteren vétetik fel, abban az esetben a déli rácsot szállítjuk el a második fázisban, amennyiben a második paraméterben, abban az esetben a nyugati rácsot, és ha mindkettőben, akkor tetszőlegesen választhatunk, mondjuk ilyen esetekben válasszuk a déli rácsot. És ezzel el is érkeztünk a következő fázishoz.

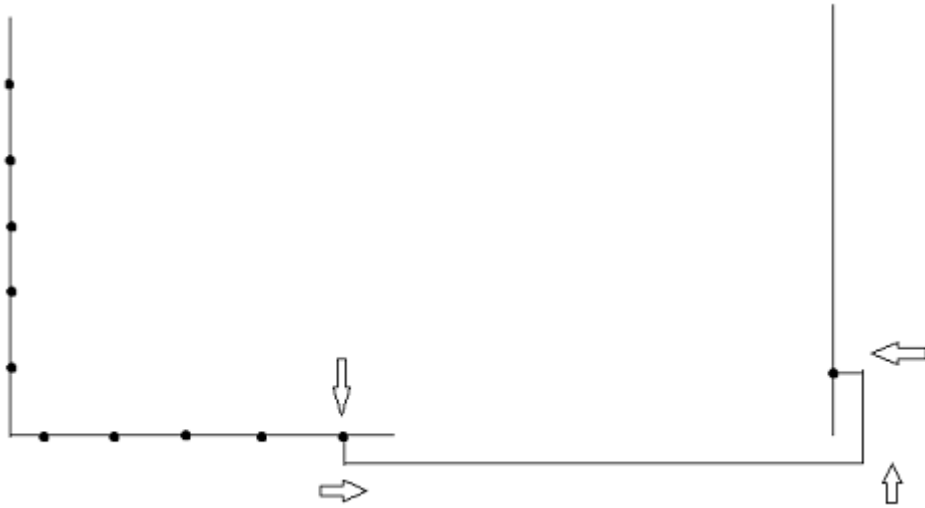
II. fázis: az átvezetés

Ebben a fázisban átvezetjük az I. fázisban kiválasztott rács csúcsait a fent definiált négy extra síktípusból kettő segítségével. Az érthetőbb magyarázat kedvéért tegyük fel, hogy a déli rácsot kell elszállítanunk. A nyugati rács elszállítása is hasonló módon történik.

Vezessünk be A darab új h -síkot a $z = 0$ h -sík alá. Ez az A darab új sík elég lesz ahhoz, hogy a déli rács termináljait átszállítsuk az $y = 15 \max(h, w) - h$ w -síkba, hogy megvalósíthassuk a 3DCRP huzalozásunkat. Könnyen látszik,

hogy $A \leq n$, tehát a fent definiált felső korlát az új síkok számára a lehető legjobb. Ezután minden n_i sor átvezetésére használjuk a $z = -1 \dots -A$ h -síkok n_i -vel, és n_{i+1} -el párhuzamos sorait a következőképpen:

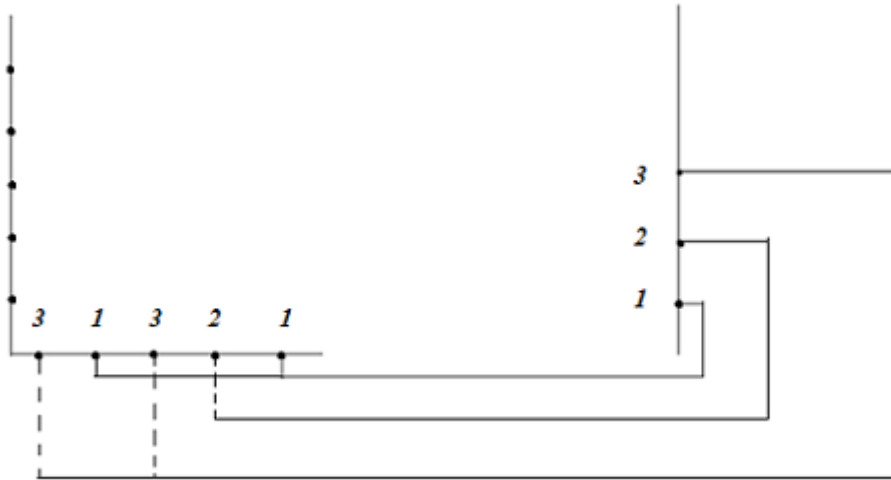
Vegyük azt az első $n_{i,n-j}$ ($j = 0 \dots n - 1$) terminált, amelyre $n_{i,n-j}$ egy nethez rendelt terminál. Jegyezzük meg, hogy a $z = -1$ h -sík az $n_{i,n-j}$ terminál netjének síkja lesz. Ezután küldjük el $n_{i,n-j}$ -t az 5.1 ábrán látható módon az $y = 15 \max(h, w) - h$ w -síkba.



5.1. ábra.

Ezután vegyük a következő olyan $n_{i,n-j}$ terminált, ami nethez tartozik. Ha ennek a terminálnak a netjéhez még nem rendeltünk h -síkot, akkor a $z = 0$ h -síkban vezessük át a terminált az n_{i+1} sorba majd, onnan vezessük le a következő még szabad h -síkba, ahol visszavezetjük az n_i -vel párhuzamos sorba, és úgy küldjük tovább az $y = 15 \max(h, w) - h$ w -síkba az 5.2 ábrán látható módon.

Ha pedig a kiválasztott terminál netjének már volt h -síkja, akkor a netjéhez tartozó előző terminál (létezik ilyen, hiszen miatta létezik már a netjének h -síkja) átvezetésénél használt eljárással vezessük át a terminálunkat az $y = 15 \max(h, w) - h$ w -síkba.



5.2. ábra.

(Az ábrán számmal jelöltük, hogy melyik terminál melyik nethez tartozik. Szaggatott vonallal jelöltük azt, hogy melyik huzalrészek vannak az $y = 2w$ -síkbán, és folytonos vonallal az $y = 1w$ -síkbán lévőket.)

Ha ezt az eljárást a déli rács összes sorára végigcsináltuk, akkor kapunk egy 3DCRP feladatot $h = 15 \max(h, w)$ magasságban, ami a 15. tétel szerint mindig megoldható lesz a Reiss Attila és Szeszlér Dávid által leírt [36] eljárás segítségével. És ezzel el is érkeztünk a III. fázishoz.

III. fázis: a huzalozás

Ezt a fázist most nem részleteznénk, mivel ez a rész részletesen le van írva Reiss Attila és Szeszlér Dávid cikkében [36]. Csak emlékeztetnék, hogy mivel a terminálokat az 5.2 ábrán részletezett módon szállítottuk át a keleti rácsra, ezért a $15 \max(h, w) - h + A$ darab w -sík bevezetése a lehető legjobb felső korlát. Így az eljárásunk a korlátok nélküli modellben sikeresen elkészít egy huzalozást a déli és a nyugati rács között, optimális huzalhosszt felhasználva.

5.2.2. A rögzített él model

Mivel az előző modell huzalozási technológiája nehezen kivitelezhető, ezért a valósághoz kicsit közelebb áll a rögzített él modell, amikor is a déli és a nyugati rácsok síkját mint egy falat elképzeljük, és csak az ezek által a síkok által elhatárolt, az összes terminált tartalmazó térrészben próbáljuk megoldani a huzalozást. Nevezzük ezt a modellt önkényesen rögzített él modellnek.

Ennek a fejezetnek a végén megvilágítjuk, hogy ebben a modellben az általunk ismertetett eljárással nem feltétlenül kell növelni a felhasznált huzalmennyiséget az előző korlátok nélküli modellhez képest, és mégis ez a modell talán egyszerűbben megvalósítható.

Ebben a modellben az A meghatározása, valamint az I. és a III. fázis ugyanúgy történik mint a korlátok nélküli modellben, azzal a különbséggel, hogy a bevezetendő extra síkoknak csak két típusa van, és ezekre új korlátok érvényesek úgyhogy most csak ezeket részleteznénk, valamint mivel a II. fázis jelentősen eltér az előzőtől, ezért azt később kifejtjük. Ebben a modellben a két extra síkcsoporthoz a hozzá kell vennünk a rácsunkhoz az $x = n$ n -sík után még legfeljebb az $x = 3 \max(h, w) - n + A + B + 2$ n -síkig extra n -síkok, illetve a $z = h$ h -sík után legfeljebb a $z = h + B + 1$ h -síkig extra h -síkok, ahol B a

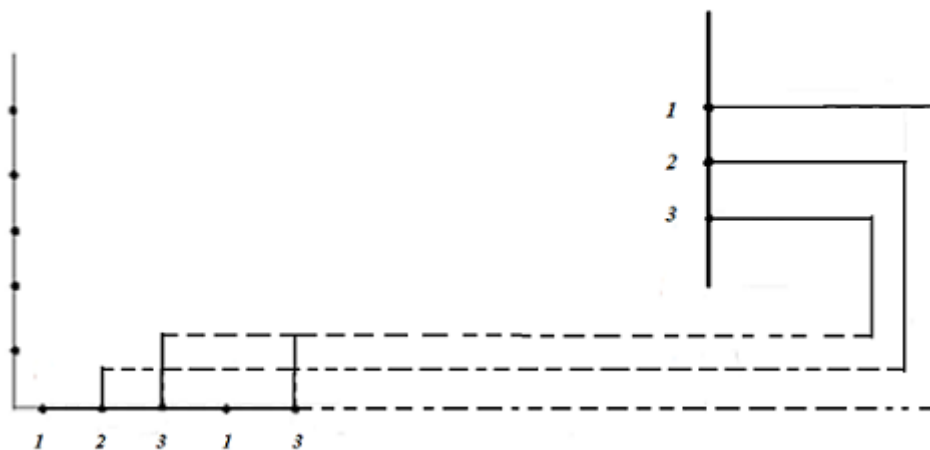
$$B = \max(\max_{i=1..w}(dn_i), \max_{i=1..w}(dh_i))$$

kifejezés értéke. Azért elegendő a $3 \max(h, w) - n + A + B + 2$ új n -sík bevezetése, mert az átvezetés végére egy kétoldali 3DCRP feladatot kapunk, amit tudjuk, hogy meg tudunk oldani a $3 \max(h, w)$ magasságon a 16. tétel szerint (mivel feltettük, hogy most $s_w = s_n = 2$).

II. fázis: az átvezetés

Ebben az esetben az átvezetésre két eljárás szinte magától adódik. Az I. fázisban kiválasztott rács termináljainak átvezetése szinte ugyanúgy történik, de mivel szeretnénk az elkészítendő 3DCRP feladatunknak biztosítani egy üres $n \times w \times 3 \max(n, w)$ kockarácsot, ezért a nem kiválasztott oldal termináljait is el kell szállítanunk. Jelöljük T -vel a nem kiválasztott rács termináljainak elszállítását biztosító eljárást. Miután részletezzük e két eljárás alapötletét, megmutatjuk, hogy ha felhasznált huzalmennyiségre szeretnénk optimalizálni az eljárásainkat, akkor a T eljárás lényegesen jobb is lehet az előző, korlátok nélküli, eljárásnál. Ismét tegyük fel a teljesség megszorítása nélkül, hogy az I. fázisban a déli oldalt választottuk ki.

- A déli oldal átvezetése:
A déli oldal termináljainak átvezetése hasonlóan történik, mint a korlátok nélküli modellben, a különbséget jól szemlélteti az 5.3 ábra.

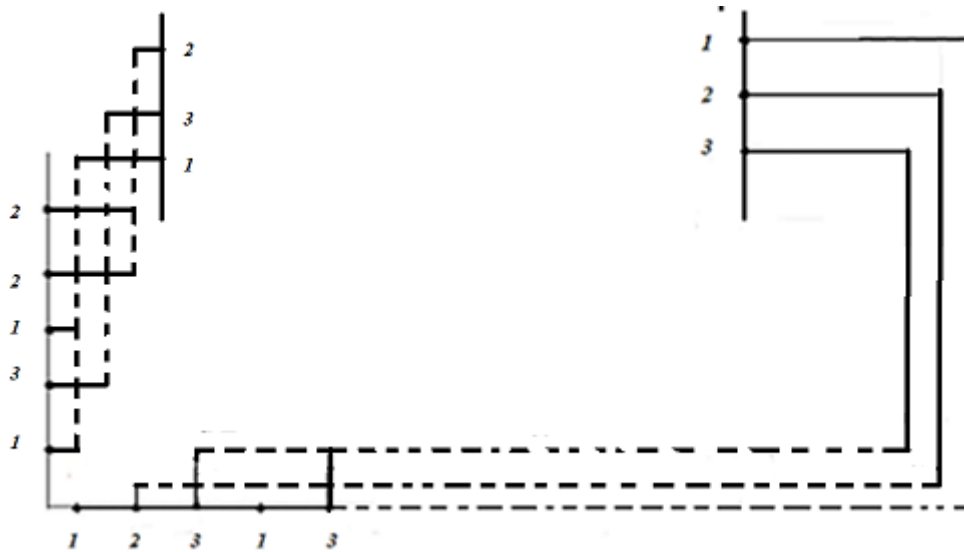


5.3. ábra.

(Az ábrán az 5.2 ábra jelöléseit használtuk. Mivel az 1. net termináljának az n -huzalrésze egy ideig a $z = 0$ h -síkban mozog, ezért azt csak onnantól jelöltük szaggatott vonallal, ahonnan már nincs fedésben a déli ráccsal ebből a nézetből. Reméljük ez az apróság nem lesz zavaró az ábra megértésében.)

- A T szállítási eljárás:
A T eljárásban a nyugati oldal termináljait szeretnénk elszállítani az $x = B + 1$ n -síkba a következőképpen:
Minden h_i oszlopra vesszük a legelső olyan $h_{i,j}$ ($j = 1..h$) terminált, amely nethez van rendelve. Ezt előrevisszük az $x = 2$ n -síkba, majd onnan az $y = 2$ w -síkba, majd onnan a $z = h + 1$ h -síkba, s legvégül az $x = B + 1$ n -síkba az 5.4 ábrán látható módon, és megjegyezzük, hogy az $x = 2, y = 2$ h -egyenes az ő termináljának az egyenese.
Ezután a h_i oszlopban vesszük a következő olyan terminált, amelyik nethez van rendelve. Ha ennek a terminálnak a netjéhez még nincsen h -egyenes rendelve, akkor a következő $x = i, y = i$ h -egyeneset rendeljük hozzá ennek a terminálnak a netjéhez, és azon vezetjük fel a terminálunkat az 5.4 ábrán látható módon.
Ha a kiválasztott terminál netjének már van h -egyenes, akkor a terminált, az őt megelőző, a nethez tartozó terminál módjára vezetjük tovább, az 5.4 ábrán látható módon.
Ezt az eljárást iterálva az összes h_i ($i = 1..w$) oszlopra, az átvezetés végére, megkapjuk a kétoldali 3DCRP feladatunkat, amire már könnyedén

alkalmazzuk a már ismertetet módszert [36].



5.4. ábra.

Látható, hogy a korlátok nélküli modellhez képest $12 \max(h, w) - B$ -vel kevesebb extra n -síkra van szükségünk, így ezzel biztosan tudunk csökkenteni a huzalozás megvalósításához felhasznált területen. (Ha feltesszük, hogy $h + A$, és $h + B$ között nincs $12 \max(h, w) - B$ -nél nagyobb különbség)

Ábrák jegyzéke

3.1.	kockarács $w=n=3$ paraméterekkel	10
3.2.	példa terhelésre soros huzalozásnál	12
3.3.	soros huzalozáshoz tartozó intervallumgráf	12
3.4.	példa csatornahuzalozásra	14
3.5.	példa terhelésre csatornahuzalozásnál	15
3.6.	a shift-right-1 feladat	16
3.7.	példa 3-rétegű Manhattan modelre	19
3.8.	ábra Hambrusch tételéhez	21
3.9.	példa Γ huzalozásra	23
4.1.	példák a megnövelés szükségességére	25
4.2.	példa Steiner-fára	25
4.3.	példa SALRP feladatra	28
5.1.	az első terminál átvezetése a korlátok nélküli modelben	34
5.2.	egy sor átvezetése a korlátok nélküli modelben	35
5.3.	a déli oldal átvezetése a rögzített él modelben	37
5.4.	a nyugati oldal átvezetése a rögzített él modelben	38

Irodalomjegyzék

- [1] Aggarwal, A., M. Klawe, D. Lichtenstein, N. Linial és A. Wigderson: A lower bound on the area of permutation layouts, *Algorithmica*, 1991 **6** 241-255.
- [2] Aggarwal, A., J. Kleinberg és D. P. Williamson: Node-disjoint paths on the mesh and a new trade-off in VLSI layout, *SIAM J. Computing*, 2000 **29** 1321-1333.
- [3] Baker, S. B., S. N. Bhatt és F. T. Leighton: An approximation algorithm for Manhattan routing, *Advances in Computing Research, Volume 2: VLSI Theory* (F. P. Preparata, ed.), JAI Press, Reading, MA, 1984 205-229.
- [4] Boros Endre, Recski András, Szkaliczki Tibor és Wettl Ferenc: Polynomial time Manhattan routing without doglegs – a generalization of Galai's algorithm, *Computers and Artificial Intelligence*, 1999 **18** (4) 403-413.
- [5] Boros Endre, Recski András és Wettl Ferenc: Unconstrained multilayer switchbox routing, *Annals of Operations Research*, 1995 **58** 481-491.
- [6] Brown, D. J. és R. R. Rivest: New lower bounds for channel width, *VLSI Systems and Computations* (H. T. Kung, B. Sproull and G. Steele, eds.) Computer Science Press, Rockville, MD, 1981 178-185.
- [7] Bui, T. N., S. Chauduri, F. T. Leighton és M. Sipser: Graph bisection algorithms with good average case behaviour, *Combinatorica*, 1987 **7** (2) 171-191.
- [8] Cohoon, J. P. és P. L. Heck: BEAVER, a computational-geometry-based tool for switchbox routing, *IEEE Trans. Computer-Aided Design of Integrated Circ. Syst.*, 1988 **7** (6) 684-697.
- [9] Cutler, M. és Y. Shiloach: Permutation layout, *Networks*, 1978 **8** 253-278.
- [10] Deutsch, D.: A dogleg channel router, *Proc. 13rd Design Automation Conf.*, 1976 425-433.
- [11] Enbody, R. J., G. Lynn és K. H. Tan: Routing the 3-D chip, *Proc. 28th ACM/IEEE Design Automation Conf.*, 1991 132-137.

- [12] Gallai Tibor: Az ő nem publikált eredményei Hajnal András és Surányi János: Über die Auflösung von Graphen in vollständige Teilgraphen című művükben jelent meg, *Annales Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.*, 1958 **1** 115-123.
- [13] Games, R. A.: Optimal book embeddings of the FFT, Benes, and barrel shifter networks, *Algorithmica*, 1986 **1** 233-250.
- [14] Gao, S. és M. Kaufmann: Channel routing of multiterminal nets, *Proc. 28th FOCS Symp.*, 1987 316-325.
- [15] Gao, S. és M. Kaufmann: Channel routing of multiterminal nets, *J. Assoc. Comput. Mach.*, 1994 **41** (4) 791-818.
- [16] Garey, M. R. és D. S. Johnson: *Computers and Intractability: a Guide to the Theory of NP-completeness*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, CA, 1979
- [17] Hamachi, G. T. és J. K. Ousterhout: A switchbox router with obstacle avoidance, *DAC '84: Proc. 21st Conf. on Design Automation*, 1984 173-179.
- [18] Hambruch, S. E.: Channel routing in overlap models, *IEEE Trans. Computer-Aided Design of Integrated Circ. Syst.*, 1985 **CAD-4** 23-30.
- [19] Hashimoto, A. és J. Stevens: Wire routing by optimizing channel assignment, *Proc. 8th Design Automation Conf.*, 1971 214-224.
- [20] Johnson, D. S.: The NP-completeness column: An ongoing guide, *J. Algorithms*, 1984 **5** 147-160.
- [21] Joobbani, R. és D. P. Siewiorek: WEAVER, a knowledge-based routing expert, *DAC '85: Proc. 22nd ACM/IEEE Conf. on Design Automation*, 1985 266-272.
- [22] Jordán Tibor, Recski András és Szeszlér Dávid: *Rendszeroptimalizálás*, Typotex, 2004 140.
- [23] Kramer, M. R. és J. van Leeuwen: The complexity of wire routing and finding minimum area layouts for arbitrary VLSI circuits, *Advances in Computing Research, Volume 2: VLSI Theory* (F. P. Preparata, ed.), JAI Press, Reading, MA, 1984 129-146.
- [24] Leighton, T.: *Complexity issues in VLSI: Optimal layouts for the shuffle-exchange graph and other networks*, The MIT Press, Cambridge, MA., 1983
- [25] Leighton, T., S. Rao és A. Srinivasan: New algorithmic aspects of the Local Lemma with applications to routing and partitioning, *Proc. 10th Annual ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms ACM/SIAM, New York and Philadelphia*, 1999 643-650.
- [26] Leighton, T. és A. L. Rosenberg: Three-dimensional circuit layouts, *SIAM J. Computing*, 1986 **15** 793-813.

- [27] Lengauer, T.: *Combinatorial algorithms for integrated circuit layout*, John Wiley and Sons Ltd., Chichester, 1990
- [28] Lienig, J. és K. Thulasiraman: A Genetic Algorithm for Channel Routing in VLSI Circuits, *Evolutionary Computation*, 1993 **1** (4) 293-311.
- [29] Luk, W. K.: A greedy switchbox router, *Integration, the VLSI Journal*, 1985 **3** 129-149.
- [30] Marek-Sadowska, M. és E. Kuh: General channel-routing algorithm, *Proc. IEE (GB)*, 1983 **130** 83-88.
- [31] Middendorf, M.: Manhattan channel routing is NP-complete under truly restricted settings, *Chicago J. Theoret. Comput. Sci.*, Article 6, 1996
- [32] Recski András: Channel routing in the dogleg-free multilayer Manhattan model, *Proc. ECCTD'97*, 1997, 39-43.
- [33] Recski András és F. Strzyzewski: Vertex-disjoint channel routing on two layers, *Integer programming and combinatorial optimization* (Ravi Kannan and W. R. Pulleyblank, eds.), University of Waterloo Press, 1990, 397-405.
- [34] Recski András és Szeszlér Dávid: 3-dimensional single active layer routing, *Discrete and Computational Geometry*, Lecture Notes in Computer Science 2098, 318-329, Springer, Berlin, 2001, **2098** 318-329.
- [35] Recski András és Szeszlér Dávid: Routing vertex disjoint Steiner-trees in a cubic grid - an application in VLSI, *Discrete Applied Math*, 2007 **155** 44-52.
- [36] Reiss Attila, Szeszlér Dávid: 3-dimensional Channel Routing, *Proc. 4th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications*, 2005,
- [37] Rivest, R. L. és Fiduccia, C. M.: A greedy channel router, *Proc. 19th IEEE Design Automation Conf.*, **2**, 418-424.
- [38] Rosenberg, A. L.: Three-dimensional VLSI: a case study, *J. Assoc. Comput. Mach.*, 1983, **30** 397-416.
- [39] Shirakawa, I.: Some comments on permutation layout, *Networks*, 1980, **10** 179-182.
- [40] Szeszlér Dávid: *Combinatorial algorithms in VLSI routing* Ph.D. Dissertation, BME, 2005,
- [41] Szkaliczki Tibor: Optimal routing on narrow channels, *Periodica Polytechnica Ser. El. Eng.*, 1994, **38** 191-196.
- [42] Szkaliczki Tibor: *Polynomial Algorithms in VLSI Routing*, Ph.D. Dissertation, BME, 1996,
- [43] Szymanski, T. G.: Dogleg channel routing is NP-complete, *IEEE Trans. Computer-Aided Design of Integrated Circ. Syst.*, 1985, **CAD-4** 31-41.

- [44] Wieners-Lummer, C.: Manhattan routing with good theoretical and practical performance, *Proc. 1st Annual ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms*, 1990, 465-475.
- [45] Wu, S. A. és J. Jájá: Optimal algorithms for adjacent side routing, *Algorithmica*, 1991, **6 (4)** 565-578.