FELÚJÍTÁSI FOLYAMATOK

Szakdolgozat

Írta: Kocsis Orsolya

Matematika BSc

Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető: Móri Tamás, egyetemi docens

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2010

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

A felújításelmélet az alkalmazott valószínűségszámítás, azon belül is a sztochasztikus folyamatok elméletének fontos része. Olyan sztochasztikus rendszerek vizsgálatával foglalkozik, melyek időbeni fejlődését felújítások szakítják meg, azaz olyan időpontok, melyekben a folyamat újrakezdődik, megújul. Az elmélet hatékonysága is ebből a folyamatos megújulásból ered. Az eredmények széles körben alkalmazhatóak mind az elméletben, mind pedig a gyakorlatban. Dolgozatomban meg szeretném mutatni mindennapi életből vett példákon keresztül, hogy ez nem csak egy szép elmélet, de a gyakorlatban is nagy jelentőséggel bír.

Talán a legegyszerűbb példa felújítási folyamatra, amellyel vélhetőleg már mindenki találkozott, az a villanykörték egymás utáni cseréje. Tegyük fel, hogy egy villanykörtét a 0 pillanatban helyeznek üzembe. Valamilyen X_1 ideig jó, aztán kiég. Miután elromlott, azonnal kicserélik egy újra, melynek élettartamát jelölje az X_2 valószínűségi változó. Ha ez is elromlik, akkor kicserélik egy harmadikra. Ezt az eljárást általánosítva azt kapjuk, hogy az n-edik körtét a $\sum_{i=1}^{n} X_i$ időpontban kell kicserélni. Mint látni fogjuk később, felújítási folyamaton pl. ebben az esetben egy t időpontig bekövetkeztt villanykörték cseréjének a számát fogjuk érteni, vagy pedig azt, hogy mennyi idő telt el az n-edik villanykörte kicseréléséig. Ebben az egyszerű példában megfigyelésünket akkor kezdtük, amikor üzembe helyeztünk egy villanykörtét. Kezdhettük volna azonban egy villanykörte üzemelése közben is. Ekkor egy általánosabb folyamatot kapnánk.

Munkámban csak a nullára koncentrált felújítási folyamatokról lesz szó, vagyis amikor a megfigyelésünket az üzembe helyezés pillanatában kezdjük. Megemlítjük azonban, hogy vannak ennél általánosabbak is, amikor a folyamat már tart a megfigyelés kezdeti időpontjában. Ebben az esetben, ha X_0-val jelöljük az első élettartamot(tehát X_0 kezdetekor már tart a folyamat, csak a megfigyelésünket kezdjük X_0 kezdetekor), akkor az X_0 valószínűségi változó ugyan független az összes többitől, de nem azonos eloszlású velük. Így egy általánosabb felújítási folyamatot kapunk.

2. fejezet

Alapvető fogalmak és összefüggések

Dolgozatom ezen részében meg szeretném ismertetni az olvasót a felújításelmélet néhány alpvető fogalmával és összefüggésével, melyekre építkezünk majd a továbbiak során. A fejezet logikai felépítésében leginkább a [2] és [5] művet vettem alapul.

Először is vegyünk egy $[0,t]$ intervallumot és X_k $(k = 1, \ldots, \infty)$ valószínűségi változók sorozatát, melyek nem negatívak, nem azonosan nullák, függetlenek és azonos eloszlásúak. Ezek az X_k -k fogják jelenteni a két egymás utáni felújítás közötti időtartamot. Vagyis X_k a $(k-1)$-edik felújítástól a k-adik felújításig eltelt idő. Az X_k valószínűségi változókat *élettartamok*nak nevezzük. Tekintsük az

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \; n \geq 1 \; (S_0 = 0)$$

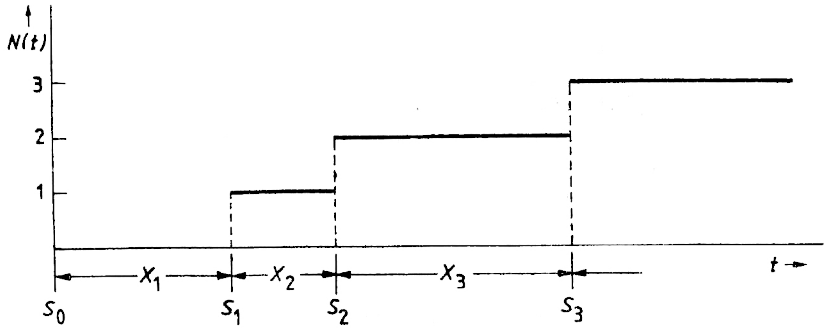
valószínűségi változót, melyet az n-edik felújítás bekövetkezéséhez szükséges *várakozási idő*nek, vagy *n-edik felújítási pont*nak nevezünk. Nyilván a t időpontig bekövetkezett felújítások száma egyenlő n legnagyobb olyan értékével, melyre az n-edik felújítás még t előtt, vagy éppen pont a t-edik időpontban következik be. Ezt a legnagyobb n értéket jelöljük $N(t)$-vel. Azt kaptuk tehát, hogy

$$N(t) = \sup \{n : \; S_n \leq t\}. \tag{2.1}$$

2.1. Definíció. *Az $\{N(t), t \geq 0\}$ nemnegatív egész értékű sztochasztikus folyamatot felújítási folyamatnak nevezzük.*

2.2. Megjegyzés. *A gyakorlatban az $\{S_n, n \geq 0\}$ részletösszegsorozatot is felújítási folyamatnak nevezik.*

A következő ábrán jól látszik, hogy hogyan is kell elképzelnünk ezeket a fogalmakat.



2.1. ábra. Az $N(t)$ felújítási folyamat és az X_k élettartamok kapcsolata

Legyenek $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ az egymás utáni felújítások közötti idők,

$$F(x) = P(X_k \leq x), k = 1, 2, 3, \ldots$$

pedig legyen az X_k valószínűségi változók közös eloszlásfüggvénye.

$$F_k(t) = P(S_k \leq t), k = 1, 2, 3, \ldots$$

pedig legyen az S_k valószínűségi változó eloszlásfüggvénye.

Most nézzünk néhány összefüggést ezekre a fogalmakra. A (2.1) összefüggésből adódik, hogy $N(t) \geq k \Leftrightarrow S_k \leq t$. Hiszen ha legalább k felújítás történik t-ig, akkor nyilván a k. időpontja nem haladhatja meg t-t. Ebből következik, hogy

$$P(N(t) \geq k) = P(S_k \leq t) = F_k(t),\ t \geq 0,\ k = 1, 2, \ldots,\ \text{így}$$

$$P(N(t) = k) = P(N(t) \geq k) - P(N(t) \geq k+1) = F_k(t) - F_{k+1}(t),\ t \geq 0,\ k = 1, 2, \ldots,$$

mivel akkor történik pontosan k felújítás, ha van legalább k, de több nincs. Ebben az esetben az S_k összeg valószínűségeloszlását a konvolúciós formula szerint lehet kiszámolni:

$$F_k(x) = \int\limits_{[0,\infty)} F_{k-1}(x-y)dF(y) = \int\limits_{[0,x]} F_{k-1}(x-y)dF(y).$$

Az $F_1(x) = F(x)$ értéket ismertnek tételezzük fel.

Vezessük be az $M(t) = E(N(t))$ várható értéket, amelyet *felújítási függvény*nek nevezünk. Megmutatjuk ezen várható érték két fontos tulajdonságát.

2.3. Állítás.

$$M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) \tag{2.2}$$

Bizonyítás: Legyen

$$I_k = \begin{cases} 1, & \text{ha a } k\text{−adik felújítás ideje } [0,t]\text{−be esik} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor $N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} I_k$, $N(t)$ definíciója miatt. Így $E(N(t)) = E\left(\sum_{k=1}^{\infty} I_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} E(I_k) =$
$= \sum_{k=1}^{\infty} P(I_k = 1) = \sum_{k=1}^{\infty} P(S_k \leq t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)$. □

2.4. Állítás. *Ha* $P(X_k > 0) > 0$ *minden pozitív* k*-ra, akkor* $M(t) < \infty$ $\forall t > 0$ *esetén.*

Bizonyítás: Mivel $P(X_k > 0) > 0$, ezért létezik olyan $\alpha > 0$, hogy $P(X_k \geq \alpha) > 0$. Legyen $\overline{N(t)} = \sup\left\{n : \sum_{k=1}^{n} \overline{X_k} \leq t\right\}$ egy olyan felújítási folyamat, melyben az $\overline{X_k}$ valószínűségi változók a következőképpen vannak definiálva :

$$\overline{X_k} = \begin{cases} 0, & \text{ha } X_k < \alpha \\ \alpha, & \text{ha } X_k \geq \alpha. \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy ennek az új felújítási folyamatnak az $l = i\alpha$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ pontok lesznek a felújítási pontjai, és az egyes pontokban a felújítások multiplicitása független geometriai eloszlást követ $P(X_k \geq \alpha)$ paraméterrel, tehát $\frac{1}{P(X_k \geq \alpha)}$ várható értékkel. Így az $E(\overline{N(t)}) \leq \left(\frac{t}{\alpha} + 1\right) \cdot \frac{1}{P(X_k \geq \alpha)}$ becslést kapjuk, ami véges $\forall t > 0$ rögzített időpont esetén. Mivel $\overline{X_k} \leq X_k$, így $\overline{N(t)} \geq N(t)$, amiből következik, hogy $E(N(t)) \leq E(\overline{N(t)}) < \infty$. □

Világos, hogy $S_{N(t)}$ az utolsó felújítás időpontja t-ig bezárólag.

2.5. Tétel. *Legyen $\mu = E(X_1)$ véges. Ekkor az $N(t)$ folyamatra teljesül a nagy számok erős törvénye, azaz 1 valószínűséggel*

$$\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}.$$

Bizonyítás: Vizsgáljuk a folyamatot egy $(0, t]$ intervallumon. Mivel $S_{N(t)} \leq t < S_{N(t)+1}$, ezért

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} < \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)}.$$

Tudjuk, hogy $\dfrac{S_{N(t)}}{N(t)} = \dfrac{1}{N(t)} \sum_{k=1}^{N(t)} X_k$, ezért azt kellene várnunk a nagy számok erős törvényére gondolva, hogy

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \to \mu, \tag{2.3}$$

ha $N(t) \to \infty$. Ez a határérték igaz is, bár ahhoz, hogy használni tudjuk a nagy számok erős törvényét, be kell látnunk, hogy $P(N(t) \to \infty) = 1$. Erre azért van szükség, mert az összeadandók száma – $N(t)$ – is valószínűségi változó, és így nem egyértelmű, hogy az $N(t) \to \infty$ határérték biztosan létezik. Ehhez definiáljuk eseményeknek két halmazát.

$C_1 := \left\{ \omega : \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) \to \mu \right\}$, $P(C_1) = 1$,

$C_2 := \{\omega : (N(t))(\omega) \to \infty\}$, $P(C_2) = 1$.

Legyen $\omega \in C_1 \cap C_2$. Ekkor

$$\frac{1}{(N(t))(\omega)} \sum_{k=1}^{(N(t))(\omega)} X_k(\omega) \to \mu,$$

és mivel $P(C_1 \cap C_2) = 1$, ezért a (2.3) határérték valóban igaz, ha $N(t) \to \infty$.

Nyilván az

$$\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)}$$

egyenlőség teljesül. A fenti gondolatmenetet erre a kifejezésre használva azt kapjuk, hogy

$$\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} \to \mu,$$

ha $N(t)\to\infty$. Így $\dfrac{t}{N(t)}$ két olyan szám között van, melyek mindegyike μ-höz konvergál, ha $N(t) \to \infty$. Tehát

$$\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu},$$

ha $N(t) \to \infty$. $\square$

3. fejezet

A felújítási tétel

Ebben a fejezetben a felújításelmélet legfontosabb, legalapvetőbb tételét, a felújítási tételt fogjuk tárgyalni. Az első szakaszban megismerkedünk a felújítási egyenlettel, és a felújítási gondolatmenettel, ami nagy segítséget nyújt felújítási egyenletek felállítására, és sok más hasznos eredmény levezetéséhez is. Ehhez a részhez a [2] forrást vettem alapul. A második szakaszban az elemi felújítási tétellel fogunk foglalkozni, amelyre a harmadik szakaszban egy nagyon elterjedt alkalmazást is mutatunk. Ezek a szakaszok a [3] és [4] mű eredményei alapján születtek. Végül pedig az alaptétel fog következni, mely az [1][2][5] forrásban található meg különböző formában.

A 2. fejezetben bevezettük a felújítási folyamatok vizsgálatához szükséges alapvető fogalmakat és összefüggéseket. Ezekből megtudhattuk, hogy mit is kell figyelembe vennünk, ha felújítási folyamatokat akarunk vizsgálni. Ezen fogalmakra fogunk támaszkodni a további során.

Számos felújításelméleti probléma megoldásában van segítségünkre a felújítási gondolatmenet. Eszerint az első felújítás X_1 időpontja szerinti feltételes valószínűségeket vesszük, és azután kiszámoljuk az azt követő felújítások számának várható értékét. Vagyis a $(0, t]$ intervallumon nem lesz felújítás, ha az első élettartam – X_1 – meghaladja t értékét. Másrészt, ha $X_1 = x < t$, akkor van egy az x pillanatban keletkezett felújítás, plusz még – átlagosan – $M(t - x)$ további felújítás, az x-től t-ig tartó intervallumon.

Matematikailag ez a következőt jelenti :

$$E(\ N(t)\mid X_1=x\ )=\begin{cases}0, & \text{ha } x>t\\ 1+M(t-x), & \text{ha } x\le t.\end{cases}$$

Mivel az események valószínűségi struktúrája újrakezdődik az X_1 pillanatban, vagyis a folyamat megújul az első esemény bekövetkezése után, ezért ugyanezzel a gondolatmenettel ez utóbbi várható érték is könnyen kiszámolható.

A felújítási gondolatmenet segítségével belátjuk azt a tételt, amely azt mondja ki, hogy milyen egyenletet elégít ki a felújítási függvény.

3.1. Tétel. *Az $M(t)$ felújítási függvény kielégíti az*

$$M(t)=F(t)+\int_{(0,t]} M(t-x)dF(x),\ \ t\ge 0 \tag{3.1}$$

egyenletet.

Bizonyítás: A bizonyítást a felújítási gondolatmenet alkalmazásán kívül a teljes várható érték tételének alkalmazásával végezzük.

$$M(t)=E(N(t))=\int_{[0,t]} E(N(t)|X_1=x)dF(x)=$$

$$=\int_{[0,t]}(1+M(t-x))dF(x)=F(t)+\int_{[0,t]} M(t-x)dF(x).\ \square$$

A (3.1) egyenletet a *felújításelmélet integrálegyenleté*nek, vagy egyszerűen *felújítási egyenlet*nek nevezik.

3.1. Felújítási egyenletek

Számos felújításelméleti probléma leírásában vannak segítégünkre a felújítási egyenletek, amelyek lényegében speciális integrálegyenleteknek tekinthetők. Általában a felújítási gondolatmenet segítségével állítunk fel ilyen egyenleteket, segítségül hívva azt az egyszerű megfigyelést, miszerint a folyamat a felújítási pontokban újrakezdődik.

Mindenek előtt vezessük be a konvolúció fogalmát.

3.2. Definíció. *Legyenek $A(t)$ és $B(t)$ nemcsökkenő, jobbról folytonos függvények a $[0, \infty)$ intervallumon. Továbbá legyen $A(0) = B(0) = 0$. Ekkor $A(t)$ és $B(t)$ konvolúcióján, melyet $A * B(t)$-vel jelölünk, az*

$$A * B(t) = \int_{[0,t]} B(t-y)dA(y), \; t \geq 0$$

egyenlőséget értjük.

A (3.1) integrálegyenletet általánosíthatjuk, így megkapjuk az

$$A(t) = a(t) + \int_{[0,t]} A(t-x)dF(x), \; t \geq 0$$

alakú integrálegyenleteket, melyeket *felújítási egyenleteknek* nevezünk. Az $a(t)$ függvény és az $F(t)$ eloszlásfüggvény előre adott, $A(t)$ határozatlan mennyiség.

A felújítási egyenletek megoldásáról szóló tétel bizonyításához szükségünk van egy állításra. Vegyünk egy $c(t)$ és $B(t)$ függvényt. Mindkettőről tegyük fel, hogy növekvő, jobbról folytonos, $c(0) = B(0) = 0$, és a $[0, \infty)$ intervallumon van értelmezve. Tekinthetjük tehát a konvolúciójukat. Felsoroljuk $B * c$ néhány tulajdonságát, melyeket használni fogunk.

3.3. Állítás.

1. $\max\limits_{0 \leq t \leq T} \mid (B * c)(t) \mid \leq \max\limits_{0 \leq t \leq T} \mid c(t) \mid \cdot B(t)$

2. $B * c = c * B$

3. $B * c_1 + B * c_2 = B * (c_1 + c_2)$

3'. Ha $B_1, B_2, \ldots$ *olyan, hogy* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} B_i < \infty$, *akkor* $\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} B_i \right) * c = \sum\limits_{i=1}^{\infty} (B_i * c)$

4. Ha B_1 *és* B_2 *növekvőek, akkor* $B_1 * (B_2 * c) = (B_1 * B_2) * c$

A következő tétel azt mondja ki, hogy bármely felújítási egyenlet megoldását ki lehet fejezni a felújítási függvény segítségével.

3.4. Tétel. *Legyen $a(t)$ korlátos függvény. Ekkor létezik egy és csak egy olyan $A(t)$ függvény, mely a véges intervallumokon korlátos, és kielégíti az*

$$A(t) = a(t) + \int\limits_{[0,t]} A(t-y)dF(y) \tag{3.2}$$

egyenletet. Ez a függvény

$$A(t) = a(t) + \int\limits_{[0,t]} a(t-x)dM(x), \tag{3.3}$$

ahol $M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)$ *a felújítási függvény.*

Bizonyítás: A bizonyítás 3 részre bontható.

Először megmutatjuk, hogy a (3.3)-ban definiált $A(t)$ függvény eleget tesz a korlátossági feltételnek. Legyen $[0,T]$ egy véges intervallum. Mivel $a(t)$ korlátos függvény, $M(t)$ nem csökkenő és véges tetszőleges t esetén, így felhasználva az előbbi elemi tulajdonságokból az 1-est, azt kapjuk, hogy

$$\sup_{0\le t\le T}|A(t)| \le \sup_{0\le t\le T}|a(t)| + \int\limits_{[0,T]} \sup_{0\le t\le T}|a(t)|dM(x) = \sup_{0\le t\le T}|a(t)|(1+M(T)) < \infty,$$

és ez mutatja, hogy a (3.3) -ban definiált $A(t)$ függvény véges intervallumokon korlátos.

Második lépésként belátjuk, hogy valóban megoldása (3.2)-nek. Ehhez felhasználjuk $M(t)$ definícióját, az $F_k = F * F_{k-1}$ összefüggést, valamint a 3.3. Állítást. Tehát

$$A(t) = a(t) + M * a(t) = a(t) + \left(\sum_{k=1}^{\infty} F_k\right) * a(t) = a(t) + F * a(t) + \left(\sum_{k=2}^{\infty} F_k\right) * a(t) =$$

$$= a(t) + F * a(t) + \left(\sum_{k=2}^{\infty} F * F_{k-1}\right) * a(t) = a(t) + F * a(t) + \left(\sum_{k=1}^{\infty} F * F_k\right) * a(t) =$$

$$= a(t) + F * a(t) + (F * F_1 + F * F_2 + \dots) * a(t) = a(t) + F * a(t) + F * \left(\sum_{k=1}^{\infty} F_k\right) * a(t) =$$

$$= a(t) + F * \left(a(t) + \left(\sum_{k=1}^{\infty} F_k\right) * a(t)\right) = a(t) + F * A(t).$$

Végül már csak azt kell megmutatnunk, hogy (3.3) egyértelmű megoldása (3.2)-nek. Ezt úgy csináljuk, hogy megmutatjuk: a (3.2) felújítási egyenlet bármely megoldása, amely korlátos a véges intervallumokon, felírható (3.3) alakban. Ehhez felhasználjuk a 3.3. Állítást. Először írjuk fel a (3.2) egyenletet konvolúciós alakban: $A = a + F * A$. Ezt helyettesítsük újra meg újra (3.2) jobb oldalába, és megfelelőképpen kiterjesztjük. Azt kapjuk, hogy

$$A = a + F * (a + F * A) = a + F * a + \underbrace{F * (F * A)}_{F_2 * A,\ mivel\ F_2 = F * F} =$$

$$a + F * a + F_2 * a + F_3 * A = \cdots = a + \left(\sum_{k=1}^{n-1} F_k \right) * a + F_n * A.$$

Vegyük észre, hogy

$$|F_n * A(t)| = \left| \int\limits_{[0,t]} A(t-y) dF_n(y) \right| \leq \sup_{0 \leq y \leq t} |A(t-y)| \cdot F_n(t).$$

Mivel beláttuk, hogy $A(t)$ a véges intervallumokon korlátos, és tudjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(t) = 0$, így $\lim\limits_{n\to\infty} F_n * A(t) = 0$ minden rögzített t-re. Másrészt, mivel $a(t)$ korlátos, azt kapjuk a 3.3.Állítás $3'$. pontjából kifolyólag, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} F_k \right) * a(t) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} F_k \right) * a(t) = M * a(t).$$

Tehát

$$A(t) = a(t) + \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} F_k * a(t) + F_n * A(t) \right) = a(t) + M * a(t),$$

vagyis (3.2) általános $A(t)$ megoldásának (3.3) alakú előállításához jutottunk. □

Ahhoz, hogy be tudjuk bizonyítani az elemi felújítási tételt, be kell látnunk egy összefüggést, melyet az iménti tétel segítségével igazolunk.

3.5. Példa. *Legyenek X_1, X_2, ... független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyek jelentsék egy felújítási folyamat élettartamait, miként azt már a dolgozat elején jeleztük. Ha megállunk a t időpillanat utáni első felújításnál, ami az $(N(t)+1)$-edik felújítás, akkor a következő összefüggés igazolható:*

$$E(S_{N(t)+1}) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_{N(t)+1}) = E(X_1)E(N(t)+1) = E(X_1)(M(t)+1) \quad (3.4)$$

A levezetéshez a felújítási gondolatmenetet fogjuk használni. Segítségével felállítunk egy felújítási egyenletet az $A(t) = E(S_{N(t)+1})$ mennyiségre. A fejezet elején közölt felújítási gondolatmenetet használva azt kapjuk, hogy

$$E(\ S_{N(t)+1} \mid X_1 = x\ ) = \begin{cases} x, & \text{ha } x\ >\ t \\ x + A(t-x), & \text{ha } x\ \le\ t. \end{cases}$$

A teljes várható érték tétele miatt

$$A(t) = E(\ S_{N(t)+1}\ ) = \int\limits_{[0,\infty)} E(\ S_{N(t)+1} \mid X_1 = x\ )dF(x) =$$

$$= \int\limits_{[0,t]} (\ x + A(t-x)\ )dF(x) + \int\limits_{[t,\infty)} xdF(x) =$$

$$= \int\limits_{[0,\infty)} xdF(x) + \int\limits_{[0,t]} A(t-x)dF(x) = E(X_1) + \int\limits_{[0,t]} A(t-x)dF(x).$$

Azt kaptuk tehát, hogy $A(t) = E(S_{N(t)+1})$ kielégíti a felújítási egyenletet, melyben az $a(t)$ tag állandó: $E(X_1)$-gyel egyenlő. A 3.4. Tétel szerint

$$A(t) = a(t) + \int\limits_{[0,t]} a(t-x)dM(x) = E(X_1) + \int\limits_{[0,t]} E(X_1)dM(x) = E(X_1)(1 + M(t)).$$

3.2. Elemi felújítási tétel

Most már minden eszköz adott ahhoz, hogy kimondjuk és be is bizonyítsuk az elemi felújítási tételt, melyre a következő részben egy alkalmazást is mutatni fogunk.

3.6. Tétel (Elemi felújítási tétel). *Az* $\{N(t) : t \ge 0\}$ *felújítási folyamatban legyenek* X_i*,* $i = 1, 2, \ldots$ *az élettartamok. Legyen továbbá* $\mu = E(X_1) < \infty$*. Ekkor*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} M(t) = \frac{1}{\mu}.$$

Bizonyítás: Nyilván $t < S_{N(t)+1}$. Így az előbbi (3.4) összefüggés miatt azt kapjuk, hogy

$$t < E(S_{N(t)+1}) = \mu(1 + M(t)),$$

vagyis átrendezve

$$\frac{1}{\mu} < \frac{1}{t}(1 + M(t)) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t}M(t),$$

amiből

$$\frac{1}{t}M(t) > \frac{1}{\mu} - \frac{1}{t}$$

adódik. Ebből következik, hogy

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}M(t) \geq \frac{1}{\mu}. \tag{3.5}$$

A másik irányú egyenlőség igazolásához definiálunk egy olyan felújítási folyamatot, melynek az

$$X_i^c = \begin{cases} X_i, & \text{ha } X_i \leq c \ , \\ c, & \text{ha } X_i > c \end{cases}$$

mennyiségek lesznek az élettartamai, ahol $c > 0$ tetszőleges rögzített szám. Jelölje S_n^c és $N^c(t)$ a várakozási időt, illetve a számláló folyamatot ebben a felújítási folyamatban. Mivel az X_i^c valószínűségi változóknak a c szám felső korlátjuk, ezért nyilván $t + c \geq S^c_{N(t)+1}$ igaz. Ezt felhasználva a $t + c \geq E[S^c_{N(t)+1}] = \mu^c(1 + M^c(t))$ egyenlőséget kapjuk, ahol $\mu^c = E(X_i^c) = \int_0^c (1 - F(x))dx$, és $M^c(t) = E(N^c(t))$.

X_i^c definíciójából $X_i^c \leq X_i$ adódik, ami maga után vonja az $N^c(t) \geq N(t)$ egyenlőséget. Így $M^c(t) \geq M(t)$. Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy $t + c \geq \mu^c(1 + M(t))$. Átrendezve: $\frac{1}{t}M(t) \leq \frac{1}{\mu^c} + \frac{1}{t}(\frac{c}{\mu^c} - 1)$. Tehát

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}M(t) \leq \frac{1}{\mu^c} \tag{3.6}$$

minden $c > 0$ esetén. Mivel

$$\lim_{c\to\infty} \mu^c = \lim_{c\to\infty} \int_0^c (1 - F(x))dx = \int_0^\infty (1 - F(x))dx = E(X_1) = \mu,$$

és (3.6) bal oldala rögzített, ezért

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}M(t) \leq \lim_{c\to\infty} \frac{1}{\mu^c} = \frac{1}{\mu}. \tag{3.7}$$

A (3.5) és (3.7) egyenlőtlenségekből együttesen következik a tétel állítása, vagyis $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}M(t) = \frac{1}{\mu}$. $\square$

3.7. Megjegyzés. *Az $1/\mu$ értéket átlagos felújítási aránynak, vagy átlagos felújítási rátának nevezik.*

3.3. Kicserélési modellek (Kor-és blokkcsere eljárás)

Ebben a szakaszban szeretném szemléltetni az elemi felújítási tétel egy gyakorlati alkalmazását, a kor és blokkcsere eljárást.

Az *általános csereeljárás* egy egység cseréjét jelenti. Mikor ez az egység meghibásodik, egyszerűen kicserélik egy újra. Ez az egyszerű módszer azonban nem mindig adja a legjobb eredményt. Ha nem szeretnénk, hogy üzem közben meghibásodás történjen, vagy ha az egyes egységek a korukkal együtt elértéktelenednek, akkor lehet hogy más módszerrel pénzt, vagy időt is megtakaríthatnánk, ami nem elhanyagolható szempont.

A két legfontosabb csereeljárás, amelyet legtöbbször használnak, a kor-és a blokkcsere eljárás.

A *kor szerinti csereeljárás* során egy egységet akkor cserélünk ki, ha meghibásodott, vagy ha már elért egy T életkort, aszerint, hogy melyik következik be előbb.

A *blokkcsere eljárás*ban cserére akkor kerül sor, ha egy egység meghibásodott, vagy pedig blokkidőnként, amikor is minden egységet kicserélnek. Vagyis minden egyes T időegység során pontosan egy tervezett, avagy blokkcsere van, és átlagosan $M(T)$ meghibásodás miatti csere. Ezt a T időegységet *felújítási intervallumnak* szokás nevezni mindkét eljárásban. A blokkcsere eljárást akkor a legjobb használni, ha egyszerre több blokk működik egymással párhuzamosan, és egy blokkon belül kisebb költséget jelent minden egységet egyszerre felújítani, mint darabonként cserélgetni ki, mikor meghibásodnak. A sok kiszállás ugyanis magas kiszállási költséget eredményez.

Általában azt feltételezzük, hogy az egyes egységek egymástól függetlenül hibásodnak meg, ezeket a meghibásodásokat azonnal észleljük, és a következő egység az előző tönkremenésekor azonnal elkezd üzemelni. Feltételezzük továbbá, hogy az egymás után üzembe helyezett egységek (pl. villanykörték, gépek, stb.) élettartamai független, azonos eloszlású, pozitív valószínűségi változók, várható értékük véges, és $F(x)$ a közös eloszlásfüggvényük.

Tekintsük a meghibásodások számát egy $[0, t]$ intervallumon. Így a következő felújítási folyamatokat tudjuk vizsgálni:

$$\begin{aligned} N(t) &= \text{a meghibásodások száma a } [0,t] \text{ intervallumban, a szokásos felújítási} \\ &\quad \text{felújítási folyamatban} \\ N_A(t,T) &= \text{a meghibásodások száma a } [0,t] \text{ intervallumban a kor szerinti cse-} \\ &\quad \text{reeljárás alatt, } T \text{ felújítási intervallummal,} \\ N_B(t,T) &= \text{a meghibásodások száma a } [0,t] \text{ intervallumban a blokkcsere eljá-} \\ &\quad \text{rás alatt, } T \text{ felújítási intervallummal.} \end{aligned}$$

Ezekhez tekintsük a megfelelő felújítási függvényeket:

$$\begin{aligned} M(t) &= E(N(t)), \\ M_A(t,T) &= E(N_A(t,T)), \\ M_B(t,T) &= E(N_B(t,T)). \end{aligned}$$

3.8. Állítás. *i).* $$\lim_{t\to\infty} \frac{N_A(t,T)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{M_A(t,T)}{t} = \frac{F(T)}{\int_0^T (1-F(x))dx}$$

ii). $$\lim_{t\to\infty} \frac{N_B(t,T)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{M_B(t,T)}{t} = \frac{1+M(t)}{T}$$

1 *valószínűséggel.*

Bizonyítás:

i). Legyen $Y_1, Y_2, \dots$ olyan valószínűségi változók sorozata, ahol Y_i azt mondja meg, hogy mennyi idő telt el az $i-1$-edik és az i-edik meghibásodás között. Legyen $N_A(t,T), t \geq 0$ e sorozat által generált felújítási folyamat, $F_A(t) = P(Y_i \leq t)$ pedig a közös eloszlásfüggvény. Legyen továbbá $nT \leq t < (n+1)T$, ahol n nemnegatív egész. Ekkor igaz az

$$1 \; - \; F_A(t) = P(Y_i > t) = (1-F(T))^n \cdot (1-F(t-nT)) \tag{3.8}$$

összefüggés. Ezt a következő gondolatmenet által kaphatjuk meg: a T életkor előtt elromlott egységek aránya éppen $F(T)$ lesz, mivel ezek a meghibásodások egy szokásos felújítási folyamat felújítási pontjainak tekinthetők. Ezzel ellentétben betervezett cserére akkor kerül sor, ha egy egység élettartama meghaladja T-t. Így egy betervezett csere valószínűsége

$1-F(T)$. t-ig nyilván n betervezett cserét kell végrehajtanunk, ha t nT és $(n+1)T$ közé esik, így ennek az n betervezett cserének a valószínűsége $(1-F(T))^n$. Meg kell még mondanunk, hogy a maradék (nT,t] intervallumon hogyan is viselkedik ez a folyamat. Mivel minden felújításnál a folyamat újrakezdődik, ezért ezen az intervallumon a meghibásodások eloszlása megegyezik a $t-nT$ hosszú intervallumon való eloszlással. Ezzel megmutattuk, hogy a (3.8) összefüggés tényleg igaz. Ezt felhasználva

$$\mu_A = E(Y_i) = \int_0^\infty P(Y_i \geq t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} (1-F(T))^n(1-F(t-nT))dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(1-F(T))^n \left(\int_0^T (1-F(x))dx\right) = \frac{1}{F(T)} \int_0^T (1-F(x))dx$$

adódik. A μ_A értéket a 2.5. Tételbe és az elemi felújítási tételbe helyettesítve μ helyett, azonnal megkapjuk az állítást.

ii). Mint azt már említettük, blokkcsere eljárásban blokkidőnként, vagyis egy előre rögzített idő elteltével egy adott blokk minden egységét kicserélik. Meghibásodáskor pedig az elromlott egységet. Ez azt jelenti, hogy ha T jelöli azt az időt, amelynek elteltével egy blokk minden egységét felújítják, akkor minden egyes T időegység során pontosan 1 blokkkcsere van, és átlagosan $M(T)$ meghibásodás miatti csere. Tehát egy időegységre eső cserék száma hosszú távon $\frac{1+M(T)}{T}$.

3.4. A felújítási tétel

3.9. Definíció. *Az X nemnegatív valószínűségi változót (vagy az $F(x)$ eloszlásfüggvényt) rácsos eloszlásúnak nevezzük, ha létezik olyan $d > 0$, melyre $\sum_{n=0}^{\infty} P(X = nd) = 1$, azaz X értékei nd alakú számok. A legnagyobb ilyen d számot X (vagy F) periódusának nevezzük.*

3.10. Definíció. *Legyen $h(t)$ a $[0,\infty)$ halmazon definiált függvény. Minden pozitív δ és pozitív egész n esetén legyen*

$$\underline{m}_n = \min\{h(t) : (n-1)\delta \leq t \leq n\delta\}$$

$$\overline{m}_n = \max\{h(t) : (n-1)\delta \leq t \leq n\delta\}$$

$$\underline{\sigma}(\delta) = \delta \sum_{n=1}^{\infty} \underline{m}_n$$

$$\overline{\sigma}(\delta) = \delta \sum_{n=1}^{\infty} \overline{m}_n.$$

A $h(t)$ függvényt közvetlenül Riemann-integrálhatónak mondjuk, ha a $\underline{\sigma}(\delta)$ és $\overline{\sigma}(\delta)$ sorok mindketten abszolút konvergensek minden pozitív δ esetén, és a $\overline{\sigma}(\delta) - \underline{\sigma}(\delta)$ különbség 0-hoz tart, ha $\delta \to 0$.

Ez volt a pontos definíció a közvetlen Riemann-integrálhatóságra, ám nekünk az az esete lesz fontos és használható, amikor

1. $h(t) \geq 0 \ \forall t \geq 0$,
2. $h(t)$ nemnövekvő,
3. $\int_0^\infty h(t)dt < \infty$.

3.11. Tétel (Blackwell). *Legyen $F(x)$ egy olyan valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, melynek pozitív a várható értéke. Legyen ez a várható érték μ. Legyen továbbá $M(t)$ az F-hez tartozó felújítási függvény.*

i) Ha F nem rácsos eloszlású, akkor $\forall h \geq 0$ esetén

$$\lim_{t\to\infty}(M(t) - M(t-h)) = \frac{h}{\mu}.$$

ii) Ha F rácsos eloszlású, és periódusa d, akkor

$$\lim_{n\to\infty} M(nd) = \frac{d}{\mu}.$$

3.12. Tétel (Smith-tétel, avagy a felújításelmélet alaptétele). *Legyen $F(x)$ egy olyan valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, melynek pozitív a várható értéke. Legyen továbbá $h(t)$ közvetlenül Rieman-integrálható, és $H(t)$ megoldása a $H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-x)dF(x)$ felújítási egyenletnek.*

i) Ha F nem rácsos, akkor

$$\lim_{t\to\infty}\int\limits_{[0,t]} h(t-x)dM(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu}\int_0^\infty h(t)dt, & ha\ \mu<\infty \\ 0, & ha\ \mu=\infty. \end{cases}$$

ii) Ha F rácsos, és periódusa d, akkor minden $c>0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} H(c+nd) = \frac{d}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty} h(c+nd).$$

A felújításelmélet alaptétele nagyon fontos és hasznos eredmény. Bizonyítása azonban hosszú és fáradságos, ezért itt nem is részletezzük. Inkább alkalmazásokat fogunk mutatni rá, amelyekből jól fog látszani, hogy milyen sokféle területen alkalmazható ez a tétel. Megemlítjük még, hogy meg lehet mutatni a Blackwell- és a Smith-tétel ekvivalenciáját, ám erre sem térünk ki részletesebben. Mindkét levezetés megtalálható az [1] forrásban.

A felújítási tétel alkalmazásaihoz, melyeket mutatni fogunk, szükséges egy lemma, mely az $S_{N(t)}$ összeg valószínűségeloszlását határozza meg. A következőkben legyen $\overline{F}(t) = 1-F(t)$ tetszőleges $F(t)$ eloszlásfüggvény esetén.

3.13. Lemma.

$$P(S_{N(t)}\le s) = \overline{F}(t) + \int\limits_{[0,s]} \overline{F}(t-x)dM(x),\ \ t\ge s\ge 0$$

Bizonyítás:

$$P(S_{N(t)}\le s) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n\le s, S_{n+1}>t) = \overline{F}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n\le s, S_{n+1}>t) =$$

$$= \overline{F}(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{[0,\infty)} P(S_n\le s, S_{n+1}>t|S_n=x)dF_n(x) = \overline{F}(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{[0,s]} \overline{F}(t-x)dF_n(x) =$$

$$= \overline{F}(t) + \int\limits_{[0,s]} \overline{F}(t-x)d\Big(\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)\Big) = F(t) + \int\limits_{[0,s]} \overline{F}(t-x)dM(x).\ \square$$

4. fejezet

A felújítási tétel alkalmazásai

4.1. Alternáló felújítási folyamatok

Legyenek F_1, F_2, ... ,F_n olyan valószínűségeloszlás-függvények, amelyekre $F_i(0^-) = 0$ $\forall i \geq 1$-re. Az alternáló felújítási folyamat olyan $X_1, X_2, \ldots$ független valószínűségi változók sorozata, ahol

$$\begin{array}{ll} X_1, X_{n+1}, X_{2n+1}, \ldots & F_1 \text{ eloszlású,} \\ X_2, X_{n+2}, X_{2n+2}, \ldots & F_2 \text{ eloszlású,} \\ . & \\ . & \\ . & \\ X_n, X_{2n}, X_{3n}, \ldots & F_n \text{ eloszlású.} \end{array}$$

Ez egy olyan rendszer, amely egymás után halad át az $1, 2, \ldots, n$ állapotokon, és mindegyik állapotban véletlen hosszú időt tölt.

Nekünk most csak az $n = 2$ esetre lesz szükségünk. $n = 2$ esetén az alternáló felújítási folyamatot ON-OFF folyamatnak szokás nevezni. Ez egy olyan rendszer, amely felváltva van hol az ON állapotban, hol az OFF-ban. Tegyük fel, hogy kezdetben az ON állapotban van, ahol valamilyen Z_1 időt tölt, majd átvált az OFF állapotba, ahol Y_1 ideig van. Aztán ON-ban Z_2-ig, és OFF-ban Y_2-ig. Ezt a sémát folytatva halad egyik állapotból a másikba. Feltesszük továbbá, hogy a $(Z_1, Y_1), (Z_2, Y_2), \ldots$ párok függetlenek és azonos eloszlásúak, de azt megengedjük, hogy Z_i és Y_i összefüggő legyen. Így egy olyan periodikus folyamatot kapunk, amelyben egy periódus úgy néz ki, hogy az első részében a rendszer ON állapotban van, a másodikban pedig OFF-ban. Vagyis tekinthetjük egy olyan felújítási folyamatnak, amelyben a felújítások az OFF állapotok végén, az ON állapotok kezdetekor következnek be. Egy perióduson belül pedig az OFF állapot ideje függhet az ON állapot idejétől. Legyen H a Z_i, G az Y_i, és F a $Z_i + Y_i$, $i \geq 1$ valószínűségi változók eloszlásfüggvénye, illetve legyen

$$P(t) = P(\text{a rendszer a } t \text{ időpontban ON állapotban van }).$$

A következő tétel megmutatja, hogy mi ennek a $P(t)$ -nek a határértéke, vagyis ha már elég régen üzemel a rendszer, akkor milyen valószínűséggel leszünk az ON állapotban.

4.1. Tétel. *Ha $E(Z_i + Y_i) < \infty$, és az F nem rácsos eloszlásfüggvény, akkor*

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = \frac{E(Z_i)}{E(Z_i) + E(Y_i)}.$$

Bizonyítás: Mint az előbb már említettük, ebben a felújítási folyamatban a felújítási pontok azok a pontok, amikor a rendszer az ON állapotba kerül. Azt, hogy egy t időpontban a rendszer ON állapotban van-e, meghatározza, hogy mikor volt az utolsó felújítás t-ig bezárólag. Így a teljes várható érték tétele alapján

$$P(t) = \int\limits_{[0,\infty)} P(\text{a } t \text{ időpontban ON állapotban vagyunk} \mid S_{N(t)} = y)) dF_{S_{N(t)}}(y),$$

ahol $0 \leq y < t$ esetén

$$\begin{aligned} &P(\text{a } t \text{ időpontban ON állapotban vagyunk} \mid S_{N(t)} = y) \\ &= P(Z > t - y \mid Z + Y > t - y) = \overline{H(t-y)} / \overline{F(t-y)}. \end{aligned}$$

A 3.13. Lemma alkalmazható, mivel $S_{N(t)}$ eloszlása abszolút folytonos az M által generált Lebesgue-Stieltjes mértékre és $\overline{F}(t-y)$ a Radon-Nikodym derivált. Tehát $dF_{N(t)}(y) = \overline{F}(t-y) dM(y)$. Vagyis azt kapjuk, hogy

$$P(t) = \overline{H(t)} + \int\limits_{[0,t]} \overline{H(t-y)} dM(y).$$

Nyilván $\overline{H(t)}$ nemnegatív, nemnövekvő, és $\int\limits_{(0,\infty)} \overline{H(t)}dt = E(Z_n) < \infty$. Tehát $\overline{H(t)}$ közvetlen Riemann-integrálható, vagyis a felújításelmélet alaptételét használva azt kapjuk, hogy

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \frac{\int_0^\infty \overline{H(t)}dt}{\mu} = \frac{E(Z_i)}{E(Z_i)+E(Y_i)},$$

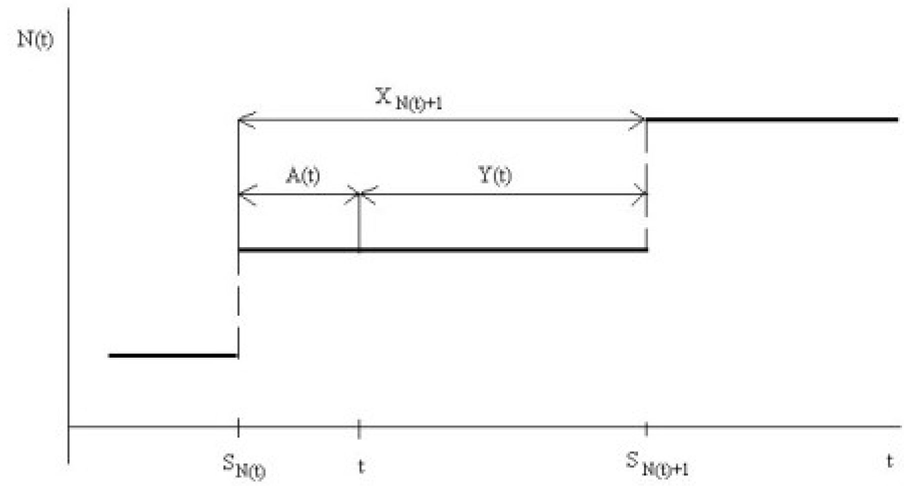
ahol $\mu = E(Z_i + Y_i)$.□

4.2. Következmény. *A határeloszlás szempontjából mindegy, hogy a rendszer melyik állapotából indul, mivel ha* $Q(t) = P($*a* t *időpontban az OFF állapotban vagyunk*$)$, *akkor* $Q(t) = 1 - P(t)$, *tehát*

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = \frac{E(Y_i)}{E(Z_i)+E(Y_i)}.$$

Sok rendszer üzemeltetése modellezhető alternáló felújítási folyamattal. Ezekre nézünk most meg két példát.

1.Élettartamok határeloszlása



4.1. ábra. $A(t)$: eddigi élettartam, $Y(t)$: hátralévő élettartam, $X_{N(t)+1}$: teljes élettartam

Tekintsünk egy felújítási folyamatot. Jelölje $A(t)$ azt, hogy mennyi idő telt el az előző felújítás óta, $Y(t)$ pedig azt, hogy mennyi idő múlva lesz a következő felújítás, ha most

t-ben vagyunk. Vagyis

$$A(t) = t - S_{N(t)} : \text{eddigi élettartam},$$

$$Y(t) = S_{N(t)+1} - t : \text{hátralévő élettartam}.$$

Ezen két valószínűségi változó összege pedig

$$X_{N(t)+1} = Y(t) + A(t) : \text{teljes élettartam}.$$

Az alternáló felújítási folyamatokra bevezetett modell segítségével meg fogjuk határozni ezen valószínűségi változók határeloszlását.

i). Eddigi élettartam határeloszlása

Konstruáljunk egy olyan ON-OFF folyamatot, ahol a rendszer a t időpontban ON állapotban van, ha rögzített $x > 0$ esetén $A(t) \leq x$, és OFF-ban egyébként. Ez azt jelenti, hogy minden élettartam első x részében a rendszer ON állapotban van, a maradék részben pedig OFF-ban. Vagyis $Z_i = \min(X_i, x)$ és $Y_i = \max(X_i - x, 0)$. Ekkor, ha az $F(x)$ eloszlásfüggvénye nem rácsos, akkor az előző 4.1. Tétel miatt

$$\lim_{t\to\infty} P(A(t) \leq x) = \frac{E(\min(X, x))}{E(X)} = \frac{\int_0^\infty P(\min(X, x) > y)dy}{E(X)} = \frac{\int_0^x \overline{F(y)}dy}{\mu}.$$

ii). Hátralévő élettartam határeloszlása

Ebben az esetben is egy ON-OFF folyamatot tekintünk, csak itt minden élettartam utolsó x részében leszünk az ON állapotban, máskülönben pedig OFF-ban. Azaz $Z_i = \max(X_i - x, 0)$ és $Y_i = \min(X_i, x)$. Újra a 4.1. Tételt használva

$$\lim_{t\to\infty} P(Y(t) \leq x) = \lim_{t\to\infty} P(\text{a } t \text{ időpontban ON állapotban vagyunk}) = \frac{\int_0^x \overline{F(y)}dy}{\mu}.$$

iii). Teljes élettartam határeloszlása

Ebben az esetben olyan folyamatot generálunk, amelyben a rendszer ON állapotban van egy teljes periódus alatt végig, ha az az idő, amit az ON állapotban tölt, nagyobb mint x. Különben OFF-ban van. Vagyis $Z_i = X_i\chi(X_i > x)$, $Y_i = X_i\chi(X_i \leq x)$ és

$$P(X_{N(t)+1} > x) = P(\text{a } \ t \text{ -t tartalmazó élettartam } > x)$$

$$= P(\text{a } t \text{ időpontban ON állapotban vagyunk}).$$

Ha az F eloszlásfüggvény nem rácsos eloszlású, akkor a 4.1. Tételből azt kapjuk, hogy

$$\lim_{t\to\infty} P(X_{N(t)+1} > x) = \frac{E(\text{egy olyan ciklus, amelyben ON állapotban vagyunk})}{\mu} =$$

$$= \frac{E(X|X > x)P(X > x)}{\mu} = \frac{E(X|X > x)\overline{F}(x)}{\mu} = \frac{\int_x^\infty y dF(y)}{\mu},$$

vagy ezzel ekvivalensen

$$\lim_{t\to\infty} P(X_{N(t)+1} \le x) = \frac{\int_0^x y dF(y)}{\mu}.$$

2. (S, s) TÍPUSÚ KÉSZLETEZÉS

Adott egy kereskedő, aki egy bizonyos mennyiségű árut tart raktáron. Ha már kevés az áruja, akkor valamilyen rendszer szerint újra feltölti a készletét. A kereskedők általában (S, s) típusú készletetezési eljárást használnak. Ez azt jelenti, hogy elő van írva egy s és egy S szint ($s < S$). A raktáron kezdetben az árukészlet szintje S. Minden vásárlás után a kereskedő leellenőrzi a raktáron maradt áru mennyiségét, hogy az milyen szinten áll. Ha az áru mennyisége s alá csökken, akkor rendelést ad fel. Feltesszük, hogy a rendelt árumennyiség azonnal meg is érkezik, és annyit rendel, hogy újra elérje az S szintet. Vagyis ha x mennyiségű áruja marad egy vásárló távozásakor, akkor $S - x$ -et rendel, ha $x < s$, és 0 -t (vagyis nem rendel), ha $x \ge s$.

Az $X(t)$ valószínűségi változó jelentse a raktáron lévő áru mennyiségét a t időpontban. Feltevésünk szerint $X(0) = S$. A kereskedő szempontjából a $\lim_{t\to\infty} P(X(t) \ge x)$ határérték ismerete fontos, ha $x > 0$ rögzített szám. Ugyanis ennek az ismeretében tud következtetni a soron következő rendelésre.

Az iménti határérték meghatározásához generálunk egy alternáló felújítási folyamatot. Ez a következő képpen néz ki. A rendszer a t időpontban legyen ON állapotban, ha $X(t) \ge x$, vagyis a készleten lévő áru mennyisége legalább x, és OFF-ban egyébként. Egy periódus akkor kezdődik, amikor a raktáron az árumennyiség szintje S, és akkor ér véget, amikor először kell rendelést feladnia a kereskedőnek. Legyen Y_i, $i \ge 1$ az i. vásárló igénye, X_i, $i \ge 1$ pedig az i. vásárló érkezési idejét jelölő valószínűségi változó. Tegyük fel, hogy ezek függetlenek mind egymástól, mind pedig külön-külön a két sorozat tagjai. N_x jelentse azt, hogy hanyadik vásárló távozása után csökkent először a raktáron lévő árumennyiség egy rögzített x szint alá. A hasonlóan definiált N_s számlálófolyamat pedig azt mutatja, hogy hanyadik után ér véget egy periódus. Képlettel

$$N_x = \min\{n : Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n > S - x\},$$

$$N_s = \min\{n : Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n > S - s\}.$$

Így, egy perióduson belül a rendszer ON állapotban $\sum_{i=1}^{N_x} X_i$ időt tölt. Egy teljes periódus ideje pedig $\sum_{i=1}^{N_s} X_i$. Ha F az X_i valószínűségi változók közös eloszlásfüggvénye, amiről feltesszük, hogy nem rácsos eloszlású, akkor alkalmazhatjuk a 4.1. Tételt, feltéve, hogy a vásárlók érkezési ideje független az igényektől. Eben az esetben az

$$\lim_{t\to\infty} P(X(t) \geq x) = \frac{E\left(\sum_{i=1}^{N_x} X_i\right)}{E\left(\sum_{i=1}^{N_s} X_i\right)} = \frac{E(N_x)E(X_i)}{E(N_s)E(X_i)} = \frac{E(N_x)}{E(N_s)}$$

egyenlőség adódik. Világos, hogy abban a felújítási folyamatban, amelyben az Y_i, $i \geq 1$ valószínűségi változók a felújítási inervallumok, $N_x - 1$ felújítás történik $S - x$ -ig. Ezért, ha G a vásárlók igényeinek közös eloszlásfüggvénye, és $M_G(t) = \sum_{i=1}^{\infty} G_n(t)$, akkor

$$E(N_x) = M_G(S - x) + 1,$$

$$E(N_s) = M_G(S - s) + 1.$$

Tehát

$$\lim_{t\to\infty} P(X(t) \geq x) = \frac{M_G(S - x) + 1}{M_G(S - s) + 1}, \text{ ha } x \leq S.$$

4.2. Korfüggő elágazó folyamatok

Tegyük fel, hogy egy organizmus az élete végén P_j valószínűséggel j számú utódot hoz létre, ahol j nemnegatív egész. Tegyük fel továbbá, hogy minden utód a populáció többi tagjától függetlenül él és produkál új egyedet szintén a $\{P_j, j = 0, 1, \dots\}$ eloszlásnak megfelelően.

Valamint az is legyen igaz, hogy az organizmusok véletlen hosszú ideig élnek, vagyis az élettertamaik valószínűségi változóknak tekinthetők, melyek közös eloszlása legyen F, és tegyük fel még azt is, hogy minden egyed átlagosan több mint egy utódot hoz létre, tehát ha $m = \sum_{j=0}^{\infty} jP_j$, akkor $m > 1$.

Az $X(t)$ valószínűségi változó jelentse a t időpontban élő organizmusok számát. Az $\{X(t), t \geq 0\}$ sztochasztikus folyamatot korfüggő elágazó folyamatnak nevezik. A legkézenfekvőbb kérdés talán az, hogy vajon egy tetszőleges t időpontban átlagosan hány organizmus él, ha t elég nagy, vagyis milyen az $M(t) = E(X(t))$ várható érték aszimptotikája. Erre a kérdésre fogjuk megadni a választ egy tétel segítségével. Mielőtt még kimondanánk és bebizonyítanánk ezt a tételt, vezessük be az X_0 valószínűségi változót, amely jelentse a $t = 0$ időpontban létező organizmusok számát.

4.3. Tétel. *Ha $X_0 = 1$, vagyis kezdetben egyetlen organizmus van, $m > 1$, F nem rácsos eloszlású, és $F(0) = 0$, akkor*

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t} M(t) = \frac{m-1}{m^2\alpha \int\limits_{[0,\infty)} x e^{-\alpha x} dF(x)},$$

ahol α az

$$\int\limits_{[0,\infty)} e^{-\alpha x} dF(x) = \frac{1}{m}$$

egyenletet kielégítő pozitív szám.

Bizonyítás: Legyen T_1 a kezdeti organizmus élettartama, ami nyilván meghatározza egy adott t időpontban élő organizmusok számát. Ezt az apró megfigyelést használva a teljes várható érték tétele alapján azt kapjuk, hogy

$$M(t) = E(X(t)) = \int\limits_{[0,\infty)} E(X(t) \mid T_1 = s) dF(s),$$

ahol

$$E(\ X(t) \mid T_1 = s\ ) = \begin{cases} 1, & \text{ha } s > t \\ mM(t-s), & \text{ha } s \leq t. \end{cases}$$

Nézzük meg, hogy hogyan is kapjuk ezt a feltételes várható értéket. Az első esetben, vagyis amikor a megfigyelésünket akkor végezzük, amikor a legelső organizmus még él, ő az egyetlen, mivel csak az élete végén produkál utódot. A második esetben az első organizmus élettartama után figyeljük meg a folyamatot. Tegyük fel, hogy a kezdeti organizmus valamilyen N számú utódot hozott létre. Ekkor a t időpontban élő organizmusok száma felírható mint az $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ valószínűségi változók összege, vagyis $Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N$ alakban, ahol Y_i a kezdeti organizmus i. utódja leszármazottainak száma (önmagát is beleértve), melyek a t időpontban élnek. Világos, hogy az Y_i-k függetlenek, és mindegyik eloszlása megegyezik $X(t-s)$ eloszlásával. Mivel N független az összeadandóktól, ezért $E\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right) = EN \cdot EY_1 = mE(X(t-s)) = mM(t-s)$, vagyis megmutattuk, hogy a fenti feltételes várható érték tényleg igaz. Azt kapjuk tehát, hogy

$$M(t) = \overline{F}(t) + m \int\limits_{[0,t]} M(t-s)dF(s).$$

Most szorozzuk meg mindkét oldalt $e^{-\alpha t}$-vel. Ekkor az

$$e^{-\alpha t}M(t) = e^{-\alpha t}\overline{F}(t) + m \int\limits_{[0,t]} e^{-\alpha(t-s)}M(t-s)e^{-\alpha s}dF(s)$$

egyenlőség adódik. A G eloszlást definiáljuk a következő képpen:

$$G(s) = m \int\limits_{[0,s]} e^{-\alpha y}dF(y), \text{ ha } 0 \leq s < \infty.$$

Itt G abszolút folytonos az F által generált Lebesgue-Stieltjes mértékre, és $e^{-\alpha s}$ a Radon-Nikodym derivált. Tehát a $dG(s) = e^{-\alpha s}dF(s)$ összefüggés igaz. Vagyis

$$e^{-\alpha t}M(t) = e^{-\alpha t}\overline{F}(t) + m \int\limits_{[0,t]} e^{-\alpha(t-s)}M(t-s)dG(s) \tag{4.1}$$

adódik. Most térjünk át (4.1)-ben konvolúciós jelölésre. Használjuk az $f(t) = e^{-\alpha t}M(t)$, illetve $h(t) = e^{-\alpha t}\overline{F}(t)$ jelölést a könnyebb átláthatóság kedvéért. Ezek után az adódik, hogy

$$f = h + f * G = h + G * f = h + G * (h + G * f) = h + G * h + G_2 * f =$$

$$= h + G * h + G_2 * (h + G * f) = h + G * h + G_2 * f + G_3 * f =$$

$$\cdots$$
$$= h + G * h + G_2 * h + \cdots + G_n * h + G_{n+1} * f.$$

A levezetésben használtuk azt, hogy a konvolúció kommutatív művelet, a $G_n = G * G_{n-1}$ összefüggést, illetve a 3.3. Állítás 3. pontját. Ha most n-nel a végtelenbe tartunk, akkor azt kapjuk, hogy

$$f = h + h * \sum_{i=1}^{\infty} G_i = h + h * M_G = h + M_G * h.$$

Vagyis

$$f(t) = h(t) + \int\limits_{[0,t]} h(t-s) dM_G(s).$$

Könnyen látható, hogy $h(t)$ nemnegatív minden $t \geq 0$-ra, nem növekvő, illetve $\int\limits_{[0,\infty)} h(t)dt < \infty$. Tehát $h(t)$ közvetlen Riemann-integrálható, így alkalmazható a felújítási tétel, ami alapján azt kapjuk, hogy

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \frac{\int_0^\infty h(t)dt}{\mu_G} = \frac{\int_0^\infty e^{-\alpha t}\overline{F}(t)dt}{\int\limits_{[0,\infty)} x dG(x)}. \tag{4.2}$$

Nézzük meg, hogy külön-külön mivel is egyenlő a számláló és a nevező. A számláló a következőképpen alakítható át:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}\overline{F}(t)dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \int\limits_{(t,\infty)} dF(x)dt = \int\limits_{[0,\infty)} \int_0^x e^{-\alpha t} dt dF(x) =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \int\limits_{[0,\infty)} (1 - e^{-\alpha x}) dF(x) = \frac{1}{\alpha}\left(\int\limits_{[0,\infty)} dF(x) - \int\limits_{[0,\infty)} e^{-\alpha x} dF(x) \right) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{m}\right). \tag{4.3}$$

A nevező pedig

$$\int\limits_{[0,\infty)} x dG(x) = m \int\limits_{[0,\infty)} x e^{-\alpha x} dF(x) \tag{4.4}$$

alakra hozható. Vagyis (4.2), (4.3), (4.4) alapján megkapjuk a

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t} M(t) = \frac{m-1}{m^2\alpha \int\limits_{[0,\infty)} x e^{-\alpha x} dF(x)}$$

bizonyítani kívánt egyenlőséget. $\square$

5. fejezet

Kumulatív folyamatok

Tekintsünk egy $\{N(t), t \geq 0\}$ felújítási folyamatot, amelyben X_n-ek $(n \geq 1)$ az élettartamok. Közös eloszlásuk legyen F. Tegyük fel, hogy minden egyes X_n élettartamhoz tartozik egy R_n érték, ami jelentse az n-edik felújítási ciklushoz tartozó költséget vagy értéket. Megengedjük, hogy R_n és X_n összefüggő legyen, de feltesszük, hogy az (X_n, R_n), $n \geq 1$ párok függetlenek és azonos eloszlásúak. *Kumulatív folyamat*nak nevezzük az $R(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} R_n$ összeget, amely nem más, mint a t pillanatig bezárólag felgyülemlett költség vagy érték, hogyha a tranzakciók az új felújítási ciklus kezdetekor történnek. Vezessük be az $E(R) = E(R_n)$ és $E(X) = E(X_n)$ jelöléseket, ahol $n \geq 1$. Ekkor igaz a következő tétel, melynek az első része azt mondja meg, hogy hosszú távon mennyi egy időegységre eső költség, második része pedig azt, hogy átlagosan mennyi ez a költség.

5.1. Tétel. *Ha $E|R| < \infty$ és $E(X) < \infty$, akkor*
i). 1 valószínűséggel

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{E(R)}{E(X)},$$

ii).

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E(R(t))}{t} = \frac{E(R)}{E(X)}.$$

Bizonyítás:
i).
$$\frac{R(t)}{t}=\frac{\sum\limits_{n=1}^{N(t)}R_n}{t}=\frac{\sum\limits_{n=1}^{N(t)}R_n}{N(t)}\cdot\frac{N(t)}{t},$$
ahol a nagy számok erős törvénye miatt
$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sum\limits_{n=1}^{N(t)}R_n}{N(t)}=E(R),$$
valamint a 2.5. Tétel miatt
$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{E(X)}.$$

ii). Itt $N(t)+1$ megállási idő az $\mathcal{F}_n=\sigma(X_1,R_1,...,X_n,R_n)$ növekvő σ-algebra sorozatra nézve. Ezért a Wald-azonosságot használva, mely a [6] irodalomban található, az
$$E(R(t))=E\left(\sum_{n=1}^{N(t)}R_n\right)=E\left(\sum_{n=1}^{N(t)+1}R_n\right)-E(R_{N(t)+1})=$$
$$=E(N(t)+1)E(R_n)-E(R_{N(t)+1})=(M(t)+1)E(R)-E(R_{N(t)+1})$$
egyenletet kapjuk. Osszunk le t-vel. Ekkor azt kapjuk, hogy
$$\frac{E(R(t))}{t}=\frac{M(t)+1}{t}E(R)-\frac{E(R_{N(t)+1})}{t}.$$
Ha megmutatjuk, hogy $\frac{E(R_{N(t)+1})}{t}\to 0$, ha $t\to\infty$, akkor az elemi felújítási tétel miatt $\frac{M(t)+1}{t}\to\frac{1}{E(X)}$, és így készen is vagyunk.

Legyen $g(t)=E(R_{N(t)+1})$. A t előtti utolsó felújítás $S_{N(t)}=s$ idejéig eltelt idő értéke szerinti feltételes várható értéket véve azt kapjuk, hogy
$$E(R_{N(t)+1}\mid S_{N(t)}=s\ )=E(R_1\mid X_1>t-s). \tag{5.1}$$

A 3.13. Lemma miatt igaz a következő :
$$g(t)=E(R_{N(t)+1}|S_{N(t)}=0)\overline{F}(t)+\int\limits_{[0,t]}E(R_{N(t)+1}|S_{N(t)}=s)\overline{F}(t-s)dM(s).$$

Ha behelyettesítjük (5.1)-et, akkor a

$$g(t) = h(t) + \int\limits_{(0,t]} E(R_1 \mid X_1 > t - s)\overline{F}(t - s)dM(s) \tag{5.2}$$

egyenlőség adódik, ahol

$$h(t) = E(R_1 \mid X_1 > t)\overline{F}(t) = \int\limits_{(t,\infty)} E(R_1 \mid X_1 = x)dF(x).$$

Mivel

$$E|R_1| = \int\limits_{[0,\infty)} E(|R_1||X_1 = x)dF(x) < \infty,$$

ezért $h(t) \to 0$, ha $t \to \infty$. Nyilván az is igaz, hogy $|h(t)| \leq E|R_1|$ $\forall t$-re, mivel

$$|h(t)| \leq \int\limits_{(0,\infty)} |E(R_1|X_1 = x)|dF(x) \leq \int\limits_{(0,\infty)} |E(|R_1||X_1 = x)|dF(x).$$

Tehát $\forall\epsilon > 0$ $\exists T \geq 0$, hogy ha $t \geq T$, akkor $|h(t)| < \epsilon$. Ezt felhasználva (5.2)-ben azt kapjuk, hogy

$$\frac{|g(t)|}{t} \leq \frac{|h(t)|}{t} + \int\limits_{(0,t-T]} \frac{|h(t-x)|}{t}dM(x) + \int\limits_{(t-T,t]} \frac{|h(t-x)|}{t}dM(x) \leq$$

$$\leq \frac{\epsilon}{t} + \frac{\epsilon M(t-T)}{t} + E|R_1|\frac{M(t) - M(t-T)}{t} \to \frac{\epsilon}{EX}, \text{ha } t \to \infty$$

az elemi felújítási tétel miatt. Mivel ez tetszőleges $\epsilon > 0$-ra igaz, ezért $\dfrac{g(t)}{t} \to 0$, és így készen is vagyunk. □

Nézzünk két példát a mindennapi életből kumulatív folyamatra.

1. <u>Kicserélési modellek</u> A 3.3 részben leírtuk mind a korcsere eljárás, mind pedig a blokkcsere eljárás matematikai modelljét. Legyen R_n az n. csere költsége mindkét eljárás során. Tegyük fel, hogy a *kortól függő csereeljárás*ban egy T időponbeli előre eltervezett csere c_1 forintba kerül, míg egy $x < T$ pillanatbeli meghibásodás miatti csere c_2 forintba. Ekkor

$$R_n = \begin{cases} c_1, & 1 - F(t) \text{ valószínűséggel} \\ c_2, & F(t) \text{ valószínűséggel.} \end{cases}$$

Vagyis $E(R_n) = c_1(1 - F(t)) + c_2F(t)$. Mivel egy ciklusban a cserék hosszának várható értéke

$$E(\min(X_k, T)) = \int_0^T (1 - F(x))dx,$$

ezért hosszú távon az időegységre eső költség

$$\frac{c_1(1 - F(t)) + c_2F(t)}{\int_0^T (1 - F(x))dx}.$$

Blokkcsere eljárás esetén minden egyes T időegység során pontosan egy tervezett csere van, és átlagosan $M(T)$ meghibásodás miatti csere. Így a várható költség $E(R_n) = c_1 + c_2M(T)$, azaz egy időegységre eső átlagos költség hosszú távon

$$\frac{c_1 + c_2M(T)}{T}.$$

2. BIZTOSÍTÁSELMÉLET Tegyük fel, hogy egy biztosítási ügynökséghez felújítási folyamat szerint érkeznek be a követelések. A beérkezési időket jelölje az $X_1, X_2, ...$ valószínűségi változók sorozata. Y_k legyen a k. követelés nagysága. Ekkor $R(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} R_n$ jelzi a t pillanatban a követelések nagyságát. Így a hosszú távú követelési arány

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{E(R_1)}{E(X_1)}.$$

Összefoglalás

A dolgozat első részében megismerkedhettünk a felújításelmélet legfontosabb fogalmaival és állításaival. A felújítási gondolatmenet segítségével felállítottuk a felújításelmélet integrálegyenletét, majd általánosítva ezt az egyenletet, definiáltuk a felújítási egyenleteket. Beláttuk, hogy bármely felújítási egyenlet megoldását ki lehet fejezni a felújítási függvény segítségével. Az elemi felújítási tétel bizonyítását követően mutattunk egy igen érdekes és hasznos alkalmazást is, amely rendkívül elterjedt a mindennapjainkban. Ez volt a kor-és blokkcsere eljárás. Majd következett az egész felújításelmélet alaptétele, a Smith-tétel. Segítségével érdekesebbnél érdekesebb példákat és alkalmazásokat láthattunk az alternáló felújítási folyamatok témakörben, illetve korfüggő elágazó folyamatokra. Az utolsó fejezetben pedig röviden bepillantást nyerhettünk a kumulatív folyamatok elméletébe. A felújítási tételre mutatott alkalmazásokra a [2] és az [5] művek szolgáltattak alapot, illetve az utolsó fejezet megírásában a [2][5] és [7] művek voltak segítségemre.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Móri Tamás tanár úrnak segítőkész munkáját. Köszönöm, hogy elfoglaltságai közepette mindig szakított időt kérdéseim megválaszolására, valamint a készülő dolgozat matematikai és stilisztikai pontatlanságainak kijavítására. Hasznos tanácsaival nagyban segítette munkámat.

Irodalomjegyzék

[1] W. Feller: *An Introduction to Probability Theory and Its. Applications*, Vol. 2, Wiley, 1971.

[2] S. Karlin, H. M. Taylor: *Sztochasztikus folyamatok*, Gondolat, 1985.

[3] J. Medhi: *Stochastic processes*, New Age International Publishers, 2002. 2nd ed.

[4] Naftali A. Langberg: *Comparisons of replacement policies*, J. Appl. Prob. 25, 780-788 (1988).

[5] Sheldon M. Ross: *Introduction to probability models*, Academic Press, New York, 2009. 10th ed.

[6] Y. S. Chow, H. Teicher: *Probability Theory. Independence, Interchangeability, Martingales*, Springer, New York, 1978.

[7] Sidney I. Resnick: *Adventures in Stochastic Processes*, Birkhäuser Boston, 1992.