

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

Természettudományi kar

Stark András

# Nemlineáris iterációk és bifurkációk



Témavezető: Dr. Lóczi Lajos

BSc szakdolgozat

Matematika BSc szakon

2010. június 7.

# Nyilatkozat

- NÉV: Stark András
- ELTE Természettudományi Kar, Szak: Matematika BSc.
- ETR azonosító: STAOAAI.ELTE
- Szakdolgozat címe: Nemlineáris iterációk és bifurkációk

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Aláírás:

---

Dátum:

---

## *Köszönetnyilvánítás*

Ezúton szeretnék köszönetet mondani mindazon embereknek akik segítették munkámat, s hozzájárultak ahhoz, hogy ez a dolgozat megszülessen. Különösképp témavezetőmnek Dr. Lóczy Lajosnak, szakdolgozatom elkészítésében nyújtott segítségével és útmutató tanácsaiért. Továbbá szeretném megköszönni a szaktársaim támogatását, Árendás Péternek a lektorálást, Fegyverneki Tamásnak a gyöngybetűs jegyzeteket, Vincze Gergelynek, hogy reményt adott, s a "Druszáimnak" az együtt töltött időt. Végül nem utolsó sorban köszönetet mondok a családomnak a tanulmányaim során nyújtott szerető támogatásukért.

# Tartalomjegyzék

Nyilatkozat	i
Köszönetnyilvánítás	i
Ábrák jegyzéke	iv
<b>1. DINAMIKAI RENDSZEREK</b>	<b>1</b>
1.1. A dinamikai rendszerekről általában	1
1.2. Differenciálegyenletek és dinamikai rendszerek	2
1.2.1. Autonóm differenciálegyenletekkel megadható dinamikai rendszerek	4
1.3. Pályák, fázisképek	5
1.4. Dinamikai rendszerek topologikus osztályozása	8
1.4.1. A diszkrét idejű dinamikai rendszer topologikus ekvivalenciája	8
1.4.2. A folytonos idejű dinamikai rendszerek topologikus ekvivalenciája	10
1.5. Dinamikai rendszerek diszkretizálása	11
<b>2. BIFURKÁCIÓK</b>	<b>13</b>
2.1. A bifurkációkról általában	13
2.2. A bifurkációk topologikus normálformája	17
2.3. Folytonos dinamikai rendszerek egyparaméteres bifurkációi	19
2.3.1. Legegyszerűbb bifurkációs feltételek	19
2.3.2. Nyereg-csomó bifurkáció	20
2.3.3. Hopf-bifurkáció	21
2.3.4. Transzkritikus-bifurkáció	22
2.3.5. Villa-bifurkáció	22
2.4. Diszkrét dinamikai rendszerek egyparaméteres bifurkációi	23
2.4.1. A legegyszerűbb bifurkációs feltételek	23
2.4.2. A nyeregcsomó-bifurkáció	24
2.4.3. A flip-bifurkáció	25
<b>3. A MANDELBROT-HALMAZ</b>	<b>27</b>
3.1. A Mandelbrot-halmaz	27
3.2. A Mandelbrot-halmaz és a logisztikus leképezés kapcsolata	30

# Ábrák jegyzéke

1.1.	Dinamikai rendszer megoldásgörbéje és pályája az idő szerint paraméterezve.	5
1.2.	A periodikus pálya szemléltetése folytonos és diszkrét rendszerben . . . . .	7
2.1.	Az Andronov-Hopf bifurkáció . . . . .	15
2.2.	A heteroklinikus-bifurkáció . . . . .	16
2.3.	Villa-bifurkáció . . . . .	17
2.4.	A hiperbolicitás sérülésének esetei folytonos rendszerekben . . . . .	20
2.5.	A nyereg-csomó bifurkáció . . . . .	21
2.6.	A hiperbolicitás sérülésének esetei diszkrét rendszerekben . . . . .	23
2.7.	A fold-bifurkáció diszkrét rendszerben . . . . .	25
2.8.	A flip-bifurkáció . . . . .	26
3.1.	A Mandelbrot halmaz . . . . .	28
3.2.	A $c = (0.25 + \epsilon, 0)$ irányú iterációs közelítés háló diagramja . . . . .	30
3.3.	A logisztikus leképezés, mint a Mandelbrot-halmaz valós metszete . . . . .	31

## 1. fejezet

# DINAMIKAI RENDSZEREK

### 1.1. A dinamikai rendszerekről általában

A dinamikai rendszerek vizsgálatának kezdete a XIX. század második felére tehető, s Henri Poincaré nevéhez köthető. A dinamikai rendszerek elmélete egy olyan elmélet, amely egy állapottérrel leírt rendszer valamely állapotainak rögzített szabályok szerinti időbeli változásával foglalkozik, pl. az inga lengésének, a csövekben áramló víznek, vagy egy tóban élő halak számának a matematikai leírása mind egy-egy példa dinamikai rendszerre. Egy dinamikai rendszer állapotát bizonyos számú állapotjellemező (ezek leggyakrabban, de nem szükségképp, valós számok) írja le. A rendszer állapotában bekövetkező kis változások a számok kis megváltozásával járnak. A dinamikai rendszer időfejlődését egy rögzített szabály vezérli, amely a jelenlegi állapot ismeretében megadja a jövőbeli állapotokat. Az időfejlődés determinisztikus: a jelenlegi állapotból csak egyetlen jövőbeli állapot következhet be adott időtartam alatt. Hasonlóan más természettudományokhoz és mérnöki tudományokhoz, a dinamikai rendszerek időfejlődésének szabályát olyan alakban szokás felírni, amely a jövőbeli állapotot csak nagyon kis időre előre adja meg. (Ezt vagy differenciálegyenletek vagy leképezések formájában szokás megadni.) Ahhoz, hogy hosszabb időre megkapjuk a jövőbeli állapotot, az időfejlődés szabályát kell sokszor iterálni, s így minden iteráció egy kis időlépéssel visz előre. Az iterációs eljárást szokás a dinamikai rendszer megoldásának vagy a dinamikai rendszer integrálásának is nevezni. Ha a rendszer megoldható, akkor egy adott kezdeti állapotból

valamennyi jövőbeli állapot meghatározható, és ezek együttese trajektóriát vagy pályát alkot. A számítógépek elterjedése előtt a dinamikai rendszerek megoldása körülményes matematikai módszereket igényelt, és a dinamikai rendszerek közül még így is csak igen kevés volt megoldható. A dinamikai rendszerek pályáinak számítását jelentősen megkönnyítik a számítógépes numerikus módszerek. Egyszerű dinamikai rendszerek esetében elegendő néhány trajektória ismerete, de a legtöbb dinamikai rendszer túl bonyolult ahhoz, hogy néhány trajektória elegendő információt adjon a rendszer viselkedéséről.

## 1.2. Differenciálegyenletek és dinamikai rendszerek

1. **Definíció.** A dinamikai rendszer egy olyan  $\{T, X, \varphi^t\}$  hármas, ahol  $T$  egy számhalmaz (pl.  $\mathbb{Z}$  vagy  $\mathbb{R}^+$ ; az idő múlását reprezentálja),  $X$  az állapottér,  $\varphi^t : X \rightarrow X$  megoldóoperátorok egy családjá, mely  $t \in T$  függvénye, és kielégíti a következő tulajdonságokat:

$$(i) \varphi^0 = id,$$

ahol  $id$  az  $X$ -en értelmezett identitás, azaz  $id(x) = x$  függvény  $\forall x \in X$ . Ennek a tulajdonságnak köszönhető, hogy ha az idő stagnál, akkor a rendszer nem kerülhet új állapotba.

$$(ii) \varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s,$$

azaz másképp:

$$\varphi^{t+s}x = \varphi^t(\varphi^s x)$$

$\forall x \in X$ , és  $\forall t, s \in T$  -re teljesül. Ez azt szemlélteti, hogy az állapottér egy  $x \in X$  pontjából ugyanabba az állapotba jutunk,  $t+s$  idő elteltével, mint ha  $x$ -ből  $t$  idő elteltével egy köztes állapotba kerülve onnan  $s$  idő elteltével kerülünk. Ezt a tulajdonságot szokás csoporttulajdonságnak is hívni.

Ha a  $T$  számhalmaz negatív értékeket is felvehet és kielégíti a tulajdonságokat, akkor a rendszert invertálhatónak nevezzük. Ekkor

$$(iii) \varphi^{-t} \circ \varphi^t = id,$$

ahol a  $\varphi^{-t}$  a  $\varphi^t$  inverze valamely  $t$ -re, és  $(\varphi^t)^{-1} = \varphi^{-t}$

Most nézzünk néhány példát dinamikai rendszerre:

1. **Példa.** (Lineáris síkbeli rendszer) Legyen az állapottér a sík  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $x \in X$  és ezen értelmezve az összes olyan reguláris lineáris transzformáció, melyet a következő  $t \in \mathbb{R}$ -től függő mátrix határoz meg:

$$\varphi^t x = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} x,$$

ahol  $\lambda, \mu \neq 0$  adott valós számok, és  $x \in X$ . Ez egy folytonos rendszert határoz meg  $X$ -en. A rendszer invertálható, és az operátor folytonos  $x$ -ben és  $t$ -ben.

2. **Példa.** (Szimbolikus dinamika) Legyen az állapottér  $X = \Omega_2$ , ami jelentse az  $\{1, 2\}$  szimbólumok által meghatározott mindkét irányban végtelen sorozatokat. Vegyük ennek egy  $\omega$  elemét:

$$\omega = \{\dots, \omega_{-2}, \omega_{-1}; \omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots\} \in X, \text{ ahol } \forall \omega_i \in \{1, 2\}, i = 1, 2, 3, \dots$$

valamint egy  $\sigma : X \rightarrow X$  függvényt, ami  $\theta = \sigma(\omega)$  -t rendeli a sorozathoz:

$$\theta = \{\dots, \theta_{-2}, \theta_{-1}, \theta_0; \theta_1, \theta_2, \dots\} \in X$$

ahol

$$\theta_k = \omega_{k+1}, k \in \mathbb{Z}.$$



A  $\sigma$  függvény tehát eltolja ezt a sorozatot eggyel jobbra, s így ez egy példa diszkrét rendszerre (szintén invertálható) ahol az operátorunk  $\varphi^k = \sigma^{[k]}$  az  $X$  állapotterén ahol  $k \in \mathbb{Z}$  és a  $\sigma^{[k]}$  a  $\sigma \circ \sigma \circ \dots \circ \sigma$  műveletet jelöli. Vegyük észre, hogy  $\omega$  és  $\theta$  pontosan akkor ekvivalensek, ha  $\exists k_0 \in \mathbb{Z}$ , hogy  $\theta = \sigma^{[k_0]}(\omega)$

A következő fejezetetrész egy újabb példa dinamikai rendszerre. A dinamikai rendszerek létrejöttének fő motivációja a dinamikában szereplő közönséges differenciálegyenletek voltak. Ezek egy osztálya az autonóm differenciálegyenletek, melyek tulajdonságainak köszönhetően (például csoporttulajdonság), később kialakultak a dinamikai rendszerek.

### 1.2.1. Autonóm differenciálegyenletekkel megadható dinamikai rendszerek

Az egyik legáltalánosabb mód a folytonos dinamikai rendszerek vizsgálatára a differenciálegyenletekkel történő vizsgálat.

2. **Definíció.** Az olyan differenciálegyenleteket, amelyek jobb oldala nem függ explicit módon  $t$ -től, *autonóm egyenleteknek* nevezzük.

Zárt, a külvilág hatásától független rendszerek viselkedését írják le ilyen egyenletek. Feltehetjük, hogy a rendszer állapottere  $X = \mathbb{R}^n$  az  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  megfelelő koordinátákkal. Nagyon gyakran a rendszerünket implicit módon adjuk meg, úgy, mint a megfelelő koordináták függvényének irányába mutató sebességvektorok, melyek koordinátáit a  $\dot{x}_i$ -vel jelöljük:

$$\dot{x}_i = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = 1, 2, \dots, n,$$

vagy vektorosan írva:

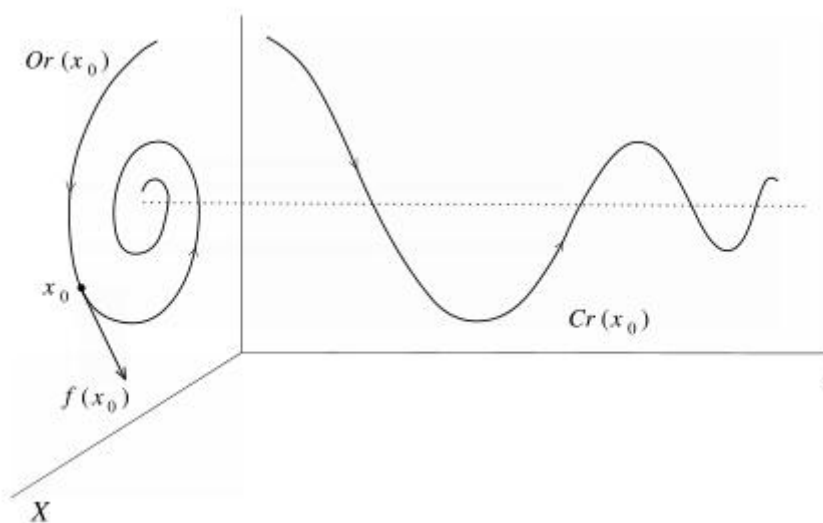
$$\dot{x} = f \circ x,$$

ahol a vektorértékű függvény  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  elég sima. Így a rendszer előáll  $n$  *autonóm közönséges differenciálegyenletként*. Ezek az egyenletek numerikus megoldásai pedig meghatározzák a dinamikai rendszer megoldásgörbáját. Az, hogy az egyenleteknek

egyértelműen létezik megoldása a kezdeti érték probléma megoldhatóságára vonatkozó tételnek köszönhetően teljesül.

3. **Definíció.** A  $Cr(x_0) = \{(t, \varphi^t x_0) : t \in T\}$  halmazt, a differenciálegyenlet-rendszer megoldásgörbéjének nevezzük, egy  $x_0 \in X$  kezdeti érték mellett.

Ha a megoldásgörbét levetítjük az állapottérre, akkor a dinamikai rendszer pályáját kapjuk.



1.1. ÁBRA. Dinamikai rendszer megoldásgörbéje és pályája az idő szerint paraméterezve.

### 1.3. Pályák, fázisképek

Most értelmezzük a dinamikai rendszerek pályáit, és próbálunk egyfajta geometriai szemléletet adni a dinamikai rendszerek tulajdonságainak. Már alapvető geometria objektumokkal is szemléltetni tudjuk a  $\{T, X\varphi^t\}$  dinamikai rendszer pályáit az állapottéren, s ezáltal a fázisképeket.

A *fázistér* a rendszert meghatározó független állapotváltozók által kifeszített tér. A fázistérben a rendszer adott időpontbeli állapota (fázisa) egyetlen ponttal (egy vektorral) megadható. A rendszer állapota az idő előrehaladtával egyértelműen követhető, így a fázispont egy görbe mentén mozog, ezt hívjuk *trajektóriának*. A fázistér nagy előnye,

hogy több kiindulási állapotnak megfelelő folyamatot ábrázolhatunk együtt. Az egész fázistér mozgását a *fáziskép* írja le.

4. **Definíció.** Legyen  $x_0$  egy meghatározott pontja az  $X$  állapot térnek, a rendszer innen kiinduló pályája:  $Or(x_0) = \{\varphi^t x_0 \in X, \forall t \in T\}$ , ahol  $\varphi^t x_0$  értelmezve van.

Egy folytonos dinamikai rendszer a hozzátartozó megoldásoperátorral együtt pályákat határoz meg az  $X$  állapot térben a  $t$  idő függvényében, míg diszkrét rendszerek esetében egy pálya a pontok egy sorozata. Ezeket a pályákat gyakran hívjuk a rendszer *trajektóriáinak*. Ha  $y_0 = \varphi^{t_0} x_0$  teljesül valamilyen  $t_0$ -ra, akkor az  $Or(x_0)$  és  $Or(y_0)$  halmazok megegyeznek, például két ekvivalens sorozatot véve  $\theta, \omega \in \Omega_2$  ugyanazt a pályát generálja a szimbolikus dinamikánál  $\{\mathbb{Z}, \Omega_2, \sigma^k\}$  (2. **Példa**).

Nézzünk a legegyszerűbb pályákra néhány példát:

### Fixpont

5. **Definíció.** Egy  $x_0 \in X$  pontot *fixpontnak* (egyensúlyi helyzet) hívunk, ha  $\varphi^t x_0 = x_0$   $\forall t \in T$ .

A megoldásoperátor a fixpontokat önmagukba képezi, ami azt jelenti, hogy ha a rendszer egyszer eljut egy ilyen pontba akkor a továbbiakban ott is marad. Így a fixpontok a legegyszerűbb dinamikai viselkedést mutatják be. Az 1. **Példa** esetében csupán egy fixpont van az  $x^0 = (0, 0)^T$ . Ha  $\lambda, \mu < 0$  akkor az összes pálya az  $x^0$ -hoz konvergál  $t \rightarrow \infty$  esetén. Míg a szimbolikus dinamika esetében 2 fixpontunk is van melyeket a következő sorozatok reprezentálnak:

$$\omega^1 = \{\dots, 1, 1, 1, \dots\}$$

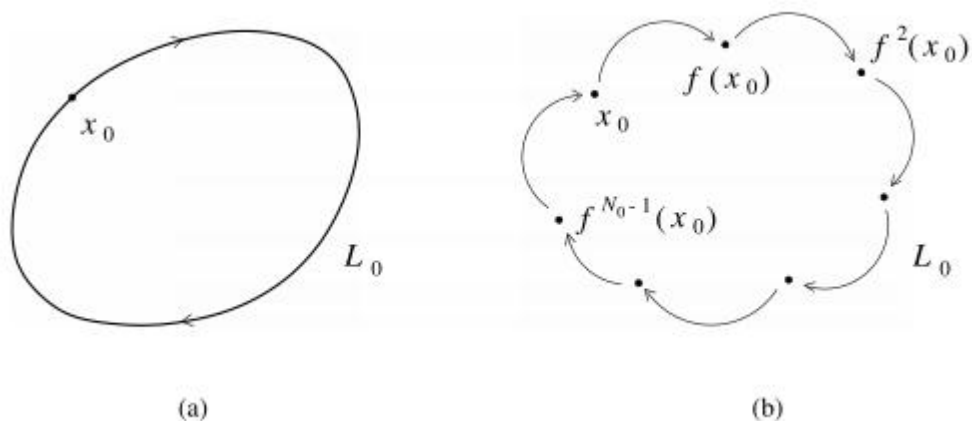
és a

$$\omega^2 = \{\dots, 2, 2, 2, \dots\}.$$

### Periodikus pálya

6. **Definíció.** A *periodikus pálya* egy olyan fixpont nélküli  $L_0$  pálya, amelynek minden  $x_0 \in L_0$  pontja alkalmas  $T_0 > 0$  esetén,  $\forall t \in T$ -re kielégíti a  $\varphi^{t+T_0}x_0 = \varphi^t x_0$  egyenletet.

A legkisebb olyan  $T_0$ -t, amelyre ez teljesül, nevezzük a  $L_0$  kör periodusának. Azaz ha a rendszert a periodikus pálya tetszőleges  $x_0$  pontjából indítjuk, akkor minden  $T_0$  egységnyi idő után visszatér ebbe az állapotba. Így a rendszer periodikus ugrásokként áll elő, amely folytonos esetben egy zárt görbét eredményez. Az ekvivalens periodikus sorozatok ugyanazt a periodikus pályát generálják.



1.2. ÁBRA. A periodikus pálya szemléltetése folytonos és diszkrét rendszerben

7. **Definíció.** Egy dinamikai rendszer *fázisképe* nem más, mint az állapottér pályákra való felbontása.

A fázisképek rengeteg információt tartalmaznak tehát a dinamikai rendszerek viselkedéseiről, s ezek vizsgálatának segítségével meghatározhatóak a különféle aszimptotikus állapotok típusai és számai, amelyek a rendszert jellemzik az idő elteltével. ( $t \rightarrow \infty$  illetve  $t \rightarrow -\infty$  esetén ha a rendszer invertálható). Ezeket a fázisképeket folytonos időben úgy képzelhetjük el, mint valamely folyadék áramlása, ahol a pályák a folyadékrezecskék útját írják le. Ennek köszönhetően szokás folytonos esetben a megoldóoperátort *folyamnak* is hívni.

## 1.4. Dinamikai rendszerek topologikus osztályozása

Hogy jobban megértsük a dinamikai rendszerek általános jellemzőit, osztályoznunk s összehasonlítaniuk kell őket viselkedésük alapján. A kérdés csupán az, hogy mi legyen két rendszer összehasonlításának az alapja, mikor nevezzünk két rendszert ekvivalensnek.

8. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy  $\{T, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$  dinamikai rendszer *topologikusan ekvivalens* a  $\{T, \mathbb{R}^n, \psi^t\}$  dinamikai rendszerrel, ha létezik egy  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  homeomorfizmus, amely az első rendszer pályáit a második rendszer pályáiba képezi, az irányítás megtartásával.

A *homeomorfizmus* egy olyan folytonos, invertálható leképezés, melynek az inverze is folytonos.

A topologikusan ekvivalens rendszerek fázisképeit is hasonlóan, topologikusan ekvivalensnek nevezzük. A topologikus ekvivalencia definícióját kiterjeszthetjük, s így általánosíthatjuk arra az esetre, ha a rendszer állapottere teljes metrikus tér, vagy speciálisabban Banach-tér. A definíció igaz  $\mathbb{R}^n$  véges dimenziós altérideben is (például ha az állapottér két dimenziós tórusz  $\mathbb{T}^2$  vagy a gömbfelület  $\mathbb{S}^2$ ).

### 1.4.1. A diszkrét idejű dinamikai rendszer topologikus ekvivalenciája

A diszkrét rendszerek esetében ( $T = \mathbb{Z}$ ) szert teszünk egy explicit összefüggésre a rendszerek leképezései közt, ha tovább vizsgálódunk. Legyen

$$x \rightarrow f(x) \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

és

$$y \rightarrow g(y) \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{1.2}$$

két topologikusan ekvivalens diszkrét dinamikai rendszer, ahol  $f = \varphi^1, g = \psi^1$  invertálható, differenciálható leképezések ( $\varphi^1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; \psi^1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ), s vegyük a (1.1) rendszer  $x$  pontból kiinduló pályáját:

$$\dots, f^{[-1]}(x), x, f(x), f^{[2]}(x), \dots$$

és a (1.2) rendszer  $y$  pontból kiinduló pályáját:

$$\dots, g^{[-1]}(y), y, g(y), g^{[2]}(y), \dots$$

A topologikus ekvivalencia miatt létezik egy olyan  $h$  homeomorfizmus amelyre  $y = h(x)$ , s a (1.1) pályát a (1.2) pályába viszi. A megfelelő kommutatív diagram

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & f(x) \\ h & & h \\ \downarrow & & \downarrow \\ y & \xrightarrow{g} & g(y) \end{array}$$

alapján látszik, hogy  $g(y) = h(f(x))$ , vagyis  $g(h(x)) = h(f(x)), \forall x \in \mathbb{R}^n$ , azaz  $f$  előáll a következő alakban:

$$f = h^{-1} \circ g \circ h. \tag{1.3}$$

**9. Definíció.** Az  $f$  és  $g$  függvényt *konjugáltaknak* nevezünk, ha valamely  $h$  homeomorfizmusra kielégítik (1.3)-ot.

Következésképp, a topologikusan ekvivalens, diszkrét idejű rendszereket szokás konjugált rendszereknek is hívni. Ha  $h$  és  $h^{[-1]}$  mindketten  $C^k$ -leképezések (ilyenkor azt mondjuk, hogy  $h$   $C^k$ -diffeomorfizmus), akkor az  $f$  és  $g$  függvényt (és a megfelelő rendszert)  $C^k$  – konjugáltaknak hívjuk.

A konjugált leképezések, mint (1.1) és (1.2) felfoghatók úgy, mintha két különböző koordinátarendszerben ugyanazt a függvényt ábrázolnánk, tehát ugyanazon leképezés

egy nemlineáris koordinátatranszformációjaként. Ezért a konjugált rendszereket topologikus szempontból azonosnak tekintjük.

### 1.4.2. A folytonos idejű dinamikai rendszerek topologikus ekvivalenciája

Most vegyünk két folytonos idejű ( $T = \mathbb{R}$ ) topologikusan ekvivalens dinamikai rendszert:

$$\dot{x} = f \circ x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.4)$$

és

$$\dot{y} = g \circ y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (1.5)$$

melyekre teljesül, hogy mindkét oldal sima. Legyenek  $\varphi^t$  és  $\psi^t$  a hozzájuk tartozó megoldóoperátorok (folyamok).

Tegyük fel, hogy  $y = h(x)$ , ahol  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  diffeomorfizmus és  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  esetén legyen az  $f$  függvény az alábbi képlettel definiálva:

$$f(x) = (h'(x))^{-1}g(h(x)). \quad (1.6)$$

Ekkor a két rendszer topologikusan ekvivalens. Valóban, a (1.5) rendszert a (1.4)-ből nyertük az  $y = h(x)$  koordinátatranszformációval, így ezáltal a  $h$  leképezés a (1.4) rendszer megoldásaiból a (1.5) rendszer megoldásaiba képez,

$$h(\varphi^t x) = \psi^t h(x)$$

és így meghatároztunk egy a topológikus ekvivalencia definíciójának megfelelő homeomorfizmust. Az eddigi fogalmak bevezetésével meghatározhatjuk a topológikus ekvivalencia fogalmát is, a fenti példát felhasználva.

10. **Definíció.** A (1.4) és (1.5) rendszerek  $C^1$ -ekvivalensek, ha van egy olyan  $h$  diffeomorfizmus mely kielégíti a (1.6) összefüggést.

Abban az esetben ha  $h$   $C^k$ -diffeomorfizmus, a rendszerek  $C^k$ -ekvivalensek.

11. **Definíció.** Egy  $\{T, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$  dinamikai rendszert lokálisan topológikusan ekvivalensnek nevezünk egy  $x_0$  fixpont közelében a  $\{T, \mathbb{R}^n, \psi^t\}$  dinamikai rendszerrel, ha létezik olyan  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  homeomorfizmus mely,

- (i) értelmezve van  $x_0$  egy  $U \subset \mathbb{R}^n$  kis környezetében;
- (ii) kielégíti az  $y_0 = h(x_0)$  egyenletet;
- (iii) az első rendszer pályáit  $U$ -ból a második rendszer pályáiba képezi  $V = f(U) \subset \mathbb{R}^n$ -be, az irányítás megtartásával. A fenti példa alapján a topológikus ekvivalenciánál finomabb osztályozást is bevezethetünk.

## 1.5. Dinamikai rendszerek diszkretizálása

A *diszkretizálás* nem más, mint egy folytonos függvény vagy összefüggés diszkrét megfelelővel való közelítésének folyamata. A ma elérhető óriási számítási kapacitásnak köszönhetően ezekkel a módszerekkel olyan összetett jelenségeket is szimulálni lehet, amelyek szimbolikusan nem kezelhetők (például a légörvények). Van módszer a közönséges differenciálegyenlet rendszerből származó folytonos dinamikai rendszerek diszkretizálására is, melynek eredményeképp egy diszkrét idejű dinamikai rendszert kapunk. Ezt a következő operátor segítségével végezzük:

”Egy adott dinamikai rendszer diszkretizációi olyan perturbált dinamikai rendszerek melyek kis lépésköz esetén az eredetihez közel fekszenek. Tekintsük az  $\dot{x} = f(x)$  autonóm egyenletet és egy rögzített  $h > 0$  számot. Adott egy  $\varphi(h, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  képező  $h$ -idejű megoldóoperátor. Vegyünk egy  $\alpha(h, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$   $h$ -lépésközű leképezést. Itt  $\alpha$  egy  $p$ -edrenű numerikus módszert jelöl, ami azt jelenti hogy teljesíti a következő tulajdonságot,



miszerint alkalmas  $h_0 > 0, \epsilon_0 > 0$  és  $const > 0$  számokkal tetszőleges  $h \in (0, h_0]$  és  $|x| \leq \epsilon_0$  mellett teljesül a

$$|\varphi(h, x) - \alpha(h, x)| \leq const \cdot h^{p+1}$$

tulajdonság. Ahol az  $f$  és  $\alpha$  függvények elegendően simák. Ilyenkor az eredeti  $\varphi(h, \cdot)$  leképezés és a  $\alpha(h, \cdot)$  leképezés iteráltjai egy diszkrétizált idejű dinamikai rendszert határoznak meg.”

## 2. fejezet

# BIFURKÁCIÓK

### 2.1. A bifurkációkról általában

Mostantól kezdve olyan dinamikai rendszereket vizsgálunk, melyek egy vagy több paramétertől függenek. Folytonos rendszerek esetében pl. ha a dinamikai rendszer közönséges differenciálegyenletből származik, akkor

$$\dot{x} = f(x, \alpha),$$

míg diszkrét esetben a következőképpen jelöljük:

$$x \rightarrow f(x, \alpha),$$

ahol  $x \in \mathbb{R}^n$  és  $\alpha \in \mathbb{R}^m$  a megfelelő paraméter. Ilyen rendszerek esetében a paraméterek változásával a rendszer fázisképei is változnak, s így két eset fordulhat elő: a rendszer fázisképe topologikusan ekvivalens lesz az eredeti rendszer fázisképével, a másik lehetőség pedig, hogy megváltozik a topológiája.

12. **Definíció.** A paraméterek változása során keletkező nem topologikusan ekvivalens fázisképeket nevezzük a rendszer bifurkációinak.

Ily módon a bifurkációk egy rendszernek a topológikus változását írják le a paramétereken keresztül. Azt a konkrét értéket, melyre a bifurkáció fellép bifurkációs értéknek vagy kritikus értéknek nevezzük. Nézzünk néhány példát bifurkációkra.

### 3. Példa. (Andronov-Hopf bifurkáció)

Vegyük a következő, 1 paramétertől függő egyenletrendszert:

$$\dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2),$$

s vizsgáljuk meg a rendszer fixpontjait a paraméterek változásával. Az egyszerűség kedvéért térjünk át a  $(\rho, \theta)$  polárkoordinátákra, így

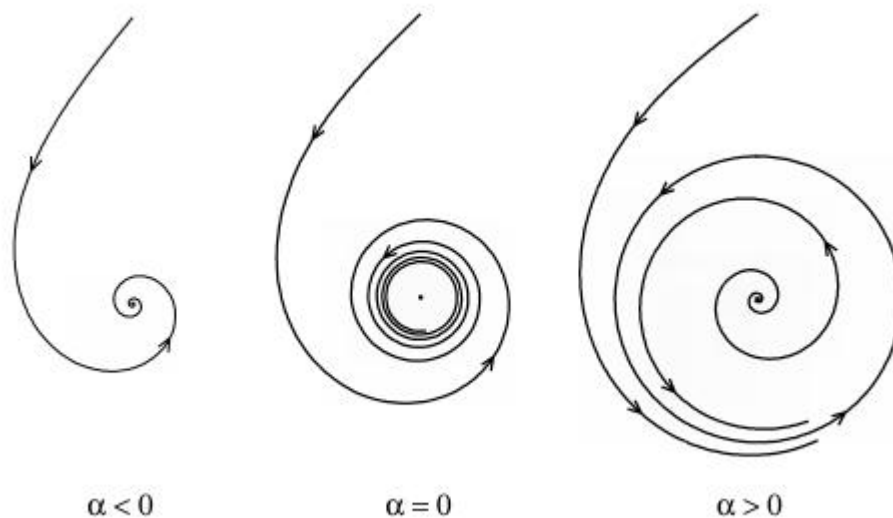
$$\dot{\rho} = \rho(\alpha - \rho^2),$$

$$\dot{\theta} = 1,$$

alakban írhatjuk fel a rendszerünket. A rendszer fázisképeit felrajzolva látszik, hogy  $\alpha \leq 0$ -ra a fixpontunk egy stabil fókusz lesz, mivel  $\dot{\rho} < 0$  és így  $\rho(t) \rightarrow 0$  bármilyen állapotból kiindulva. Másrészt ha  $\alpha > 0$ , akkor valamely kicsi  $\rho > 0$ -ra  $\dot{\rho} > 0$  lesz, illetve elég nagy  $\rho$ -ra ismét  $\dot{\rho} < 0$  teljesül, azaz a fókusz instabillá válik. Még könnyű látni azt is, hogy a rendszernek periodikus pályája van minden  $\alpha > 0$ -ra, sőt ez a periodikus pálya stabil.

S mivel a fáziskép lényegesen megváltozott azáltal, hogy egy fixpontot tartalmazó fázisképet nem lehet ekvivalens módon egy fázisképbe deformálni, amelynek van egy periodikus pályája, így az  $\alpha = 0$  paraméter egy ilyen bifurkációs érték lesz. Amint átlépi ezt a pontot a paraméter, létrejön a bifurkáció. Ezt a bifurkációs típust hívjuk Andronov-Hopf bifurkációnak. Azt viszont le kell szögeznünk, hogy ezt a bifurkációt csak a fixpont egy kis környezetében tudjuk értelmezni, ily módon csak lokális jellegekkel bír.

A bifurkációkat csoportosíthatjuk a jellegük szerint is: vannak a lokális bifurkációk, melyeket főként a fixpontok (esetleg periodikus pályák) vizsgálatára szolgálnak, s azok egy kis környezetében értelmezzük, és léteznek a globális bifurkációk, amelyeket nem



2.1. ÁBRA. Az Andronov-Hopf bifurkáció

lehet csak az egyensúlyi pontok kis környezetében vizsgálni, s melyeket jobban jellemezhetünk a bifurkációk topologikus normálformájával. Nézzünk még egy példát bifurkációra.

#### 4. Példa. (Heteroklinikus-bifurkáció)

Vegyük a következő egy paramétertől függő egyenletrendszert:

$$\dot{x}_1 = 1 - x_1^2 - \alpha x_1 x_2,$$

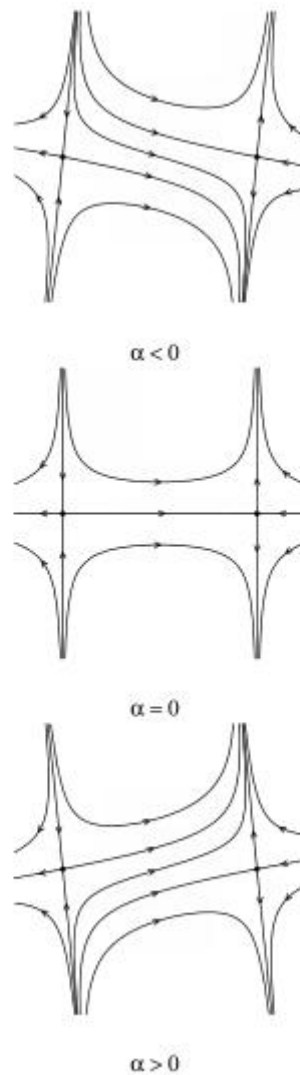
$$\dot{x}_2 = x_1 x_2 + \alpha(1 - x_1^2).$$

Ennek a rendszernek kettő darab nyereg típusú egyensúlyi pontja van az

$$x_{(1)} = (-1, 0), x_{(2)} = (1, 0)$$

pontokban,  $\alpha$  minden értékére.  $\alpha = 0$ -ban a vízszintes tengely invariáns, s így a nyergek egy pályában találkoznak aszimptotikusan  $t \rightarrow \infty$  és  $t \rightarrow -\infty$  esetén. Az ilyen típusú pályákat hívjuk heteroklinikusnak. Hasonlóan homoklinikusnak nevezzük azon pályákat, melyek aszimptotikusak ugyanarra a fixpontra  $t \rightarrow \infty$  és  $t \rightarrow -\infty$  esetén. Ha  $\alpha \neq 0$ , akkor az  $x_1$  tengely megváltozik, így ez a jelleg megszűnik. Ez egy globális tulajdonságú

bifurkáció. Ahhoz, hogy ezt észrevegyük, le kell rögzíteni az  $U$ -nak egy részét, mely mindkét nyeret lefedi.



2.2. ÁBRA. A heteroklinikus-bifurkáció

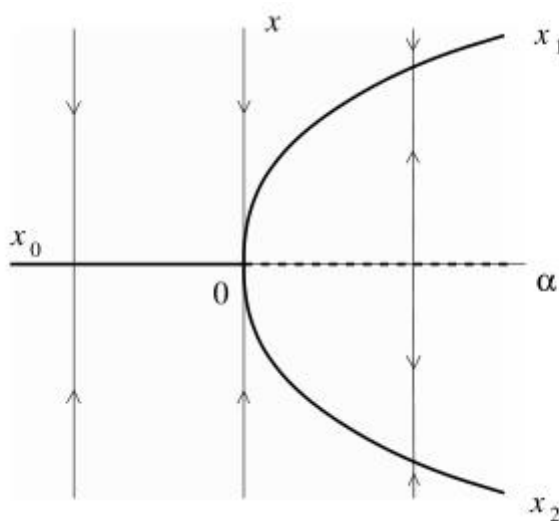
Vannak továbbá olyan globális bifurkációk is, amelyek bizonyos értelemben lokális bifurkációk is egyben, pl. homoklinikus-bifurkáció.

### 5. *Példa.* (Villa-bifurkáció)

Adott egy skalár rendszer:

$$\dot{x} = \alpha x - x^3, \quad x \in \mathbb{R}^1, \alpha \in \mathbb{R}^1.$$

Ennek a rendszernek az egyensúlyi pontja, fixpontja az  $x_0 = 0$ -ban van minden  $\alpha$ -ra. Ez a fixpont  $\alpha < 0$  esetén stabil és instabil, ha  $\alpha > 0$  ( $\alpha$  a sajátértéke a fixpontnak).  $\alpha > 0$  esetén 2 extra egyensúlyi pont keletkezik, melyek stabilak  $x_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha}$ -ban. Ezt a konkrét bifurkációt szokás a villa-bifurkációnak hívni. Érdekesség, hogy ez a bifurkáció invariáns az  $x \rightarrow -x$  transzformációra.



2.3. ÁBRA. A villa-bifurkáció úgynevezett bifurkációs diagramja, ahol a fixpontok elhelyezkedése látható a paraméterek függvényében.

## 2.2. A bifurkációk topologikus normálformája

A topologikus ekvivalencia (illetve a lokális topologikus ekvivalencia) fogalmát paramétertől függő rendszerekre is kiterjeszthetjük. Ennek köszönhetően érdemes azt vizsgálni, melyek azok a bifurkációs diagramok, amelyek a topológia szempontjából hasonlóan viselkednek, melyek azok, amelyek lényegében ekvivalensek. Ennek eldöntésére azért van szükségünk, hogy a bifurkációkat összehasonlítsuk. Vegyünk két folytonos paraméteres dinamikai rendszert:

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m, \quad (2.1)$$

és

$$\dot{y} = g(y, \beta), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{R}^m, \quad (2.2)$$

ahol az egyenlet jobb és bal oldala sima, ugyanannyi számú változóval és paraméterrel.

13. **Definíció.** A (2.1) dinamikai rendszer topológikusan ekvivalens a (2.2) dinamikai rendszerrel ha

(i) létezik a paramétertéren olyan  $p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  homeomorfizmus, melyre  $\beta = p(\alpha)$ ,

(ii) adott az állapottérnek egy paramétertől függő homeomorfizmusa,  $h_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $y = h_\alpha(x)$ , mely a (2.1) rendszer pályáit az  $\alpha$  paraméter értéke mellett a (2.2) rendszer pályáiba viszi a  $\beta = p(\alpha)$  paraméter értéke mellett, az irányítás megtartásával.

Azaz a  $p$  homeomorfizmus a paraméterek között létesít egy kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot a (2.1)-ből (2.2)-ba, míg a  $h_\alpha$  a megfelelő fázisképek között. Vegyük észre továbbá azt is, hogy nem követeltük meg, hogy a  $h_\alpha$  homeomorfizmus folytonosan függjön  $\alpha$ -tól, emiatt szokás a fenti definíciót gyenge topologikus ekvivalenciának is emlegetni.

14. **Definíció.** A (2.1) és (2.2) rendszereket lokálisan topologikusan ekvivalenseknek nevezzük, ha létezik egy  $(x, \alpha) \rightarrow (h_\alpha(x), p(\alpha))$  függvény az  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  direkt szorzat egy  $(x, \alpha) = (0, 0)$  pont környezetében, melyre

(i)  $p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  homeomorfizmus  $\alpha = 0$ , és  $p(0) = 0$  környezetében;

(ii)  $h_\alpha : (\mathbb{R}^n)^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  egy paramétertől függő homeomorfizmus  $U_\alpha$ -nak egy  $x = 0, h_0 = 0$  környezetében és a (2.1) rendszer  $U_\alpha$  pályáit a (2.2) rendszer  $h_\alpha(U_\alpha)$  pályáiba viszi az irányítás megtartásával.

Míg a fixpontokhoz tartozó bifurkációk lokális jellegűek, addig lehetséges adni univerzális jellegű bifurkációs diagramoknak. Ezt a tulajdonságot a topologikus normálforma

fogja megadni. A bifurkációelmélet egyik központi kérdése ezek vizsgálata. A formális definíciót bonyolultsága miatt itt mellőzzük, s úgy tekintünk a további vizsgálatokban egy bifurkáció topológikus normálformájára, mint a topológikus ekvivalencia által létrehozott ekvivalencia osztályok legegyszerűbb alakú reprezentása. Az ilyen, valamilyen szempontból legegyszerűbb alakú reprezentánsokat a bifurkáció *topológikus normálformájának* nevezzük.

### 2.3. Folytonos dinamikai rendszerek egyparaméteres bifurkációi

Ebben a részben a folytonos dinamika rendszer egyensúlyi helyzetének legegyszerűbb egyparaméteres bifurkációival foglalkozunk. A legegyszerűbb típusok a nyeregcsomó és a Hopf-bifurkációk, továbbá megemlítjük a villa és a transzkritikus bifurkációt. A nyeregcsomó-bifurkációt (fold) skalárrendszerben, míg a Hopf bifurkációt síkbeli rendszerben vizsgáljuk.

#### 2.3.1. Legegyszerűbb bifurkációs feltételek

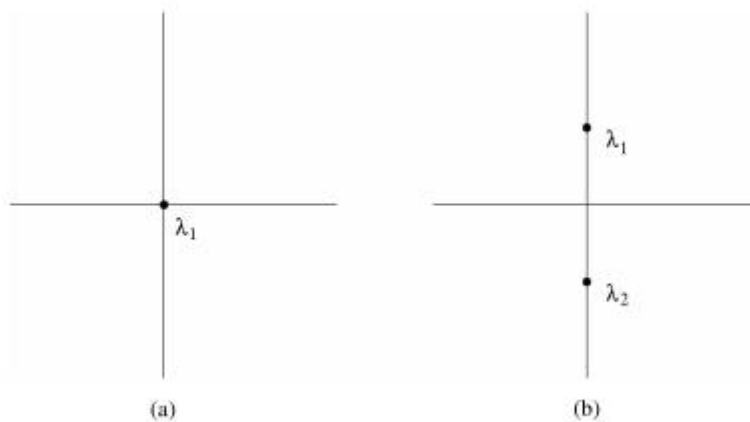
Vegyünk egy paramétertől függő folytonos dinamikai rendszert

$$\dot{x} = f(x, \alpha), x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^1,$$

ahol  $f$   $x$ -ben és  $\alpha$ -ban sima. Legyen  $x = x_0$  a rendszer hiperbolikus egyensúlyi pontja ( $f'(x_0, \alpha_0)$  mátrix minden sajátértékének valós része nem nulla)  $\alpha = \alpha_0$  paraméter mellett. Tudjuk, hogy a paraméter kis változásával az egyensúlyi pont is csekély mértékben változik, valamint hiperbolikus marad. Mindössze két esetben sérülhet meg az egyensúlyi helyzet hiperbolikussága.

Az egyik eset az, hogy a paraméterek változása során az egyik valós sajátérték nulla, azaz  $\lambda_1(\alpha_0) = \lambda_1 = 0$ , a másik, hogy egy komplex sajátérték pár valós része 0-vá válik, azaz  $\lambda_{1,2}(\alpha_0) = \lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ ,  $\omega_0 > 0$ . Nemhiperbolikus egyensúlyi pont esetén, ha





2.4. ÁBRA. A hiperbolicitás sérülésének esetei folytonos rendszerekben

teljesül a feltételek egyike, akkor az egyensúlyi pont instabillá válik. A nyeregcsomó bifurkáció  $n \geq 1$ , míg a Hopf bifurkáció  $n \geq 2$  dimenzió esetén jöhet létre.

15. **Definíció.** Azt a bifurkációt, amelynél az  $\alpha$  paraméter változása esetén egy  $\lambda_1$  sajátérték a 0 ponton halad át, nyeregcsomó (vagy tangens, fold) bifurkációnak hívjuk.

Rengeteg más elnevezése is van ennek a bifurkációnak, folytonos rendszereknél nyeregcsomó bifurkáció, míg diszkrét rendszereknél inkább fold bifurkációnak hívják, de vannak más elnevezések is, mint turning point, limit point és blue skies bifurkáció.

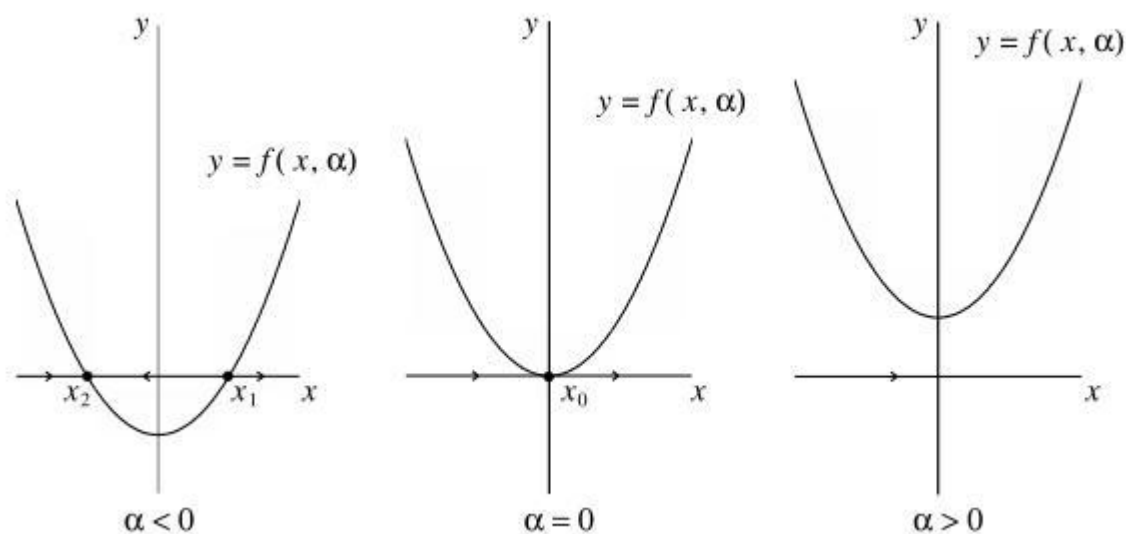
### 2.3.2. Nyereg-csomó bifurkáció

Adott egy egydimenziós egyparaméteres folytonos dinamikai rendszer, melyet a nyeregcsomó bifurkáció normálformájának hívunk

$$\dot{x} = \alpha + x^2 \equiv f(x, \alpha)$$

ahol  $x, \alpha \in \mathbb{R}^1$ . Ennek a rendszernek  $\alpha = 0$  paraméter mellett egy nemhiperbolikus egyensúlyi pontja van  $x_0 = 0$ -ban  $\lambda = 0$  sajátértékkel. Az  $\alpha$  paraméter további változtatása mellett a rendszer viselkedését megfigyelhetjük az alábbi ábrán.

Ha  $\alpha < 0$  akkor 2 egyensúlyi helyzete van a rendszernek, az  $x_{1,2}(\alpha) = \pm\sqrt{-\alpha}$ , ahol  $x_2$  egy stabil, míg  $x_1$  egy instabil egyensúlyi pont. Ezért is szokás nyereg-csomó bifurkációnak



2.5. ÁBRA. A nyereg-csomó bifurkáció

nevezni (ahol a nyereg az instabil, a csomó pedig a stabil fixpontra utal). A másik esetben, ha  $\alpha > 0$  nem lesz egyensúlyi helyzete a rendszernek. Tehát ahogy az  $\alpha$  paraméter, eléri a nullát negatív értékből a pozitív érték felé tartva, a két egyensúlyi pont összeütközik, s így egy egyensúlyi helyzet jön létre, mely továbbra már nem lesz hiperbolikus.

### 2.3.3. Hopf-bifurkáció

16. **Definíció.** Azt a bifurkációt, melynél egy  $\lambda_{1,2}$  komplex konjugált, sajátérték pár a képzetes tengelyt keresztezi, Hopf-bifurkációnak (Andronov-Hopf) hívjuk.

A Hopf bifurkáció szemléltetését már láttuk az **3. Példánál**. Annyival még kiegészítenénk, hogy két típusa létezik a Hopf bifurkációnak folytonos rendszerekre: a szuperkritikus és a szubkritikus Hopf bifurkáció. Akkor nevezük szuperkritikusnak ha a periodikus pálya a bifurkáció után jön létre az  $\alpha$  paraméter pozitív értékének köszönhetően, míg szubkritikusnak hívjuk a bifurkációt ha a periodikus pálya már a bifurkáció létrejötte előtt jelen van.

### 2.3.4. Transzkritikus-bifurkáció

Egy másik fontos típus folytonos rendszerben egyparaméteres lokális bifurkációra a transzkritikus bifurkáció. Itt akkor lép fel a bifurkáció, amikor a paraméter változása során az egyensúlyi ponthoz tartozó sajátérték valós része átlépi a nullát.

17. *Definíció.* A transzkritikus bifurkáció normálformája a következő alakú

$$\dot{x} = \alpha x - x^2,$$

ahol az  $x, \alpha \in \mathbb{R}^1$ . A bifurkáció előtt és után két egyensúlyi pont van, az  $x = 0$  és az  $x = \alpha$ . Az  $\alpha < 0$  paraméter mellett az  $x = 0$  egyensúlyi pont kezdetben stabil, az  $x = \alpha$  egyensúlyi pont pedig instabil, majd ahogy az  $\alpha$  paraméter pozitív lesz, az egyensúlyi pontok stabilitása felcserélődik, tehát  $\alpha = 0$  esetén jön létre a bifurkáció. Ez a normálforma hasonlít a logisztikus leképezéshez, csak ebben az esetben engedjük, hogy az  $x$  és  $\alpha$  értéke pozitív és negatív értékeket egyaránt felvehessen.

### 2.3.5. Villa-bifurkáció

Még egy fontos típus egyparaméteres bifurkációra a villa bifurkáció, amit a **5. Példánál** vázoltunk. Hasonlóan a Hopf-bifurkációhoz, ennek is két esete van, a szuperkritikus és a szubkritikus villabifurkáció.

18. *Definíció.* A szuperkritikus villa bifurkáció normálformája

$$\dot{x} = \alpha x - x^3.$$

Negatív  $\alpha$  esetén látszik, hogy egy stabil egyensúlyi pont van, az  $x = 0$ , majd  $\alpha > 0$  esetén az  $x = 0$  egyensúlyi pont instabillá válik, és létrejön még kettő stabil egyensúlyi pont, az  $x = \pm\sqrt{\alpha}$ . Ez az eset volt a **5. Példánál**.

19. *Definíció.* A szubkritikus villa bifurkáció normálformája

$$\dot{x} = \alpha x + x^3,$$

ahol  $\alpha < 0$  paraméternél három egyensúlyi pont van: az  $x = 0$  stabil, illetve a  $x = \pm\sqrt{-\alpha}$  instabil. Az  $\alpha > 0$  paraméternél pedig, csak egy, az  $x = 0$  instabil egyensúlyi helyzet.

## 2.4. Diszkrét dinamikai rendszerek egyparaméteres bifurkációi

Ebben a részben a diszkrét dinamika rendszer fixpontjainak egyparaméteres bifurkációival foglalkozunk. A legegyszerűbb típusok a fold és a flip bifurkációk, továbbá megemlítjük még a Neimark-Sacker bifurkációt. A fold és flip bifurkációkat skalárrendszerben vizsgáljuk.

### 2.4.1. A legegyszerűbb bifurkációs feltételek

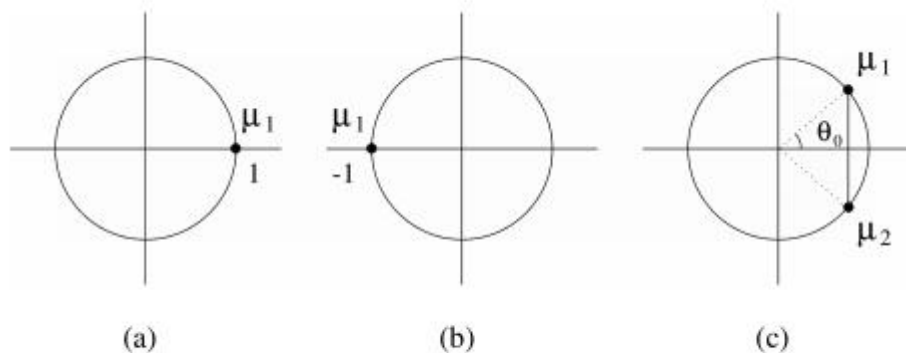
Adott egy paramétertől függő diszkrét dinamikai rendszer,

$$x \rightarrow f(x, \alpha), x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^1,$$

ahol  $f$   $x$ -ben és  $\alpha$ -ban sima. Néha a következő alakba írjuk át a rendszerünket, praktikusági szempontból:

$$\tilde{x} = f(x, \alpha), x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^1,$$

ahol  $\tilde{x}$  az  $x$  képét jelöli. Az  $\alpha = \alpha_0$  paraméter mellett legyen az  $x = x_0$  egy hiperbolikus fixpont. A paraméterek változása mellett vizsgáljuk meg a fixpont multiplikátorát.



2.6. ÁBRA. A hiperbolicitás sérülésének esetei diszkrét rendszerekben

Itt a paraméter változása során, a folytonos rendszerrel ellentétben három eset lehetséges, amikor a fixpont hiperbolikussága megszűnik, s így a stabilitása változik, azaz bifurkáció jön létre. Az első eset az, amikor egy olyan pozitív valós multiplikátor hatására változik meg a fixpont, mely megközelíti az egységkört, ekkor  $\mu_1 = 1$ . A második eset az, amikor egy negatív valós multiplikátor hatására változik meg a fixpont, amely megközelíti az egységkört, ekkor  $\mu_1 = -1$ . Végül a harmadik eset az amikor egy komplex számpárral közeledünk az egységkörhöz, azaz  $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$ ,  $0 < \theta_0 < \Pi$ .

Vegyük észre, hogy a fold és flip bifurkációk  $n \geq 1$ , míg a tórusz bifurkáció  $n \geq 2$  dimenziós rendszerek esetén jöhet létre.

### 2.4.2. A nyeregcsomó-bifurkáció

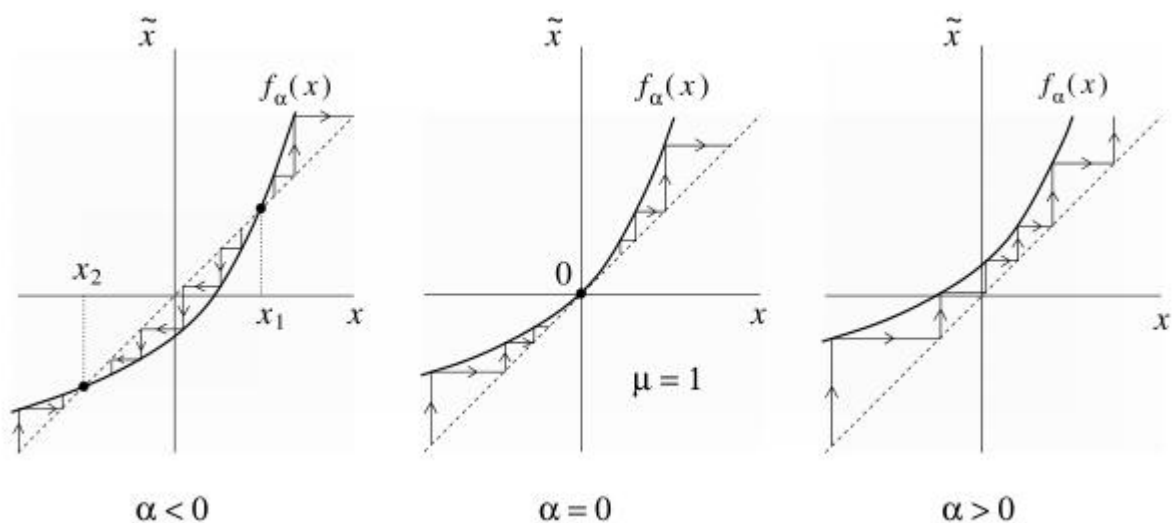
20. **Definíció.** Diszkrét rendszerekben azt a bifurkációt, amely a  $\alpha$  paraméter változása során a sajátérték  $\mu_1 = 1$  feltétellel jön létre, nyeregcsomó-bifurkációnak (tangens, fold) nevezzük.

Vegyük a következő egy-dimenziós egyparaméteres dinamikai rendszert, melyet a fold bifurkáció normálformájának hívunk:

$$x \rightarrow \alpha + x + x^2 \equiv f(x, \alpha) \equiv f_\alpha(x),$$

ahol  $x \in \mathbb{R}^1$  és  $\alpha \in \mathbb{R}^1$ , s az  $f_\alpha$  egy invertálható leképezés az  $|\alpha|$  kis környezetére. A rendszernek  $\alpha = 0$  paraméter mellett egy nemhiperbolikus egyensúlyi pontja van  $x_0 = 0$ -ban a  $\mu = 1$  multiplikátorral. A következő ábrán megfigyelhetjük a rendszer viselkedését.

Az  $\alpha < 0$  paraméterre két fixpontja lesz a rendszernek: az  $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\alpha}$ , ahol  $x_2$  egy stabil és  $x_1$  egy instabil fixpont, majd ahogy az  $\alpha$  paraméter eléri a nullát, a két fixpont összeütközik, kialakul egy nem hiperbolikus fixpont, létrejön a bifurkáció, s  $\alpha > 0$ -ra nem lesz több fixpontja a rendszernek. Diszkrét rendszerben ezt a bifurkációt hívjuk fold (tangens) bifurkációnak.



2.7. ÁBRA. A fold-bifurkáció diszkrét rendszerben

### 2.4.3. A flip-bifurkáció

21. **Definíció.** Diszkrét rendszereknél azt a bifurkációt, ahol az  $\alpha$  paraméter változása során, a  $\mu_1 = -1$  sajátérték esetén sérül a hiperbolicitás, flip (vagy periódus-kettőző) bifurkációnak nevezzük.

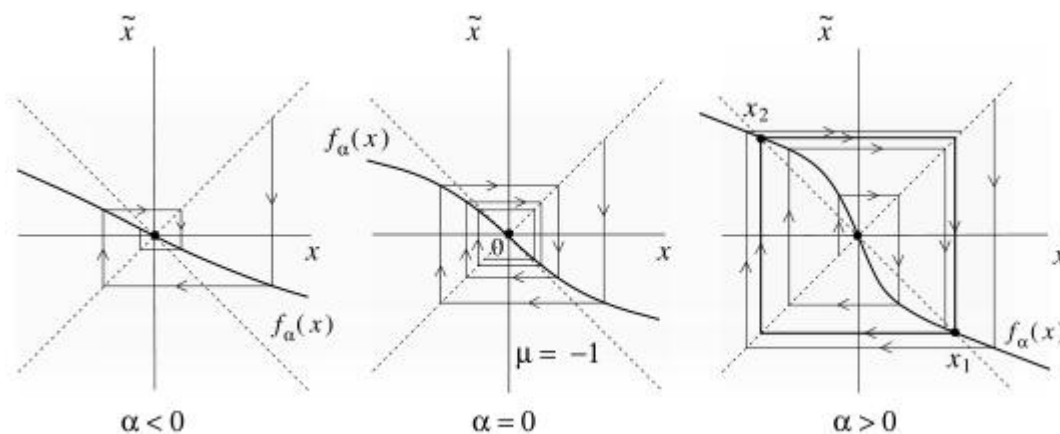
Vegyük a következő egydimenziós, egyparaméteres dinamikai rendszert, melyet a flip bifurkáció normálformájának hívunk:

$$x \rightarrow -(1 + \alpha)x + x^3 \equiv f(x, \alpha) \equiv f_\alpha(x)$$

ahol  $x \in \mathbb{R}^1$  és  $\alpha \in \mathbb{R}^1$  s az  $f_\alpha$  egy invertálható leképezés az  $|\alpha|$  környezetére. A rendszernek bármely  $\alpha$  paraméter mellett az  $x_0 = 0$ -ban fixpontja van a  $\mu = -(1 + \alpha)$  multiplikatórral. Ez a fixpont lineárisan stabil  $\alpha < 0$ , és lineárisan instabil  $\alpha > 0$  paraméter mellett. Ha  $\alpha = 0$ , akkor  $\mu = -1$ , így a fixpont nem hiperbolikus ebben a pontban, de ennek ellenére (nemlineárisan) stabil marad. Több fixpontja nincs  $|\alpha|$  környezetére. Vegyük most a leképezés második iterációját, ami legyen  $f_\alpha^{[2]}$ . Ha  $y=f_\alpha(x)$ , akkor

$$f_\alpha^{[2]}(x) = f_\alpha(y) = -(1 + \alpha)y + y^3 = -(1 + \alpha)[-(1 + \alpha)x + x^3] + [-(1 + \alpha)x + x^3]^3 \\ = (1 + \alpha)^2x - [(1 + \alpha)(2 + 2\alpha + \alpha^2)]x^3 + O(x^5).$$

A  $f_\alpha^{[2]}$  leképezésnek is  $x_0 = 0$  egy triviális fixpontja lesz, illetve két nem triviális fixpontja  $\alpha > 0$  esetén az  $x_{1,2} = \pm(\sqrt{\alpha} + O(\alpha))$ , melyek stabil fixpontok. Ez a két fixpont egy két periódusú pályáját alkotja az eredeti  $f_\alpha$  leképezésnek, azaz  $x_1 \neq x_2$  esetén  $x_2 = f_\alpha(x_1)$  és  $x_1 = f_\alpha(x_2)$  a megfelelő fixpontok. A következő kép a flip bifurkáció komplett diagramját ábrázolja:



2.8. ÁBRA. A flip-bifurkáció

Csak említés szintjén definiáljuk továbbá a Neimark-Sacker bifurkációt.

**22. Definíció.** Diszkrét rendszerekben azt a bifurkációt, mikor a  $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$ ,  $0 < \theta_0 < \pi$  sajátérték esetén sérül a hiperbolicitás, Neimark-Sacker (vagy tórusz) bifurkációnak nevezzük.

## 3. fejezet

# A MANDELBROT-HALMAZ

### 3.1. A Mandelbrot-halmaz

Ebben a részben tüzetesebben megvizsgálunk egy szép példát és annak tulajdonságait diszkrét dinamikai rendszer fold bifurkációjára. Egy folytonos dinamikai rendszerből diszkretizálási eljárással meghatározhatjuk a következő  $\{\mathbb{Z}^+, \mathbb{C}, \varphi^t\}$  diszkrét dinamikai rendszert ahol

$$\varphi_c(z) = z^2 + c \quad z, c \in \mathbb{C} \text{ és } t \in \mathbb{Z}.$$

A  $\varphi$  leképezés reprezentálja az iteráció egy lépését  $c$  paraméter mellett.

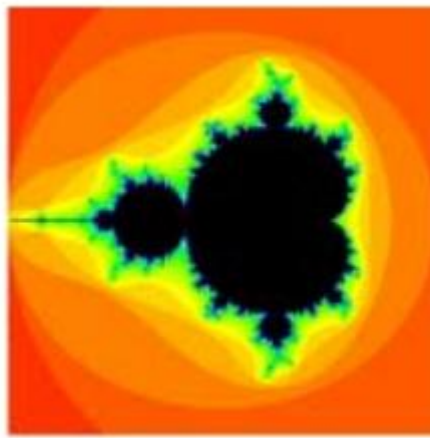
**23. Definíció.** Azt a  $c \in \mathbb{C}$  paraméterek  $M$  halmazát, melyre korlátos a  $\varphi_c$  leképezés  $Or(0)$  pályája *Mandelbrot halmaznak* nevezzük.

Könnyű megmutatni, hogyha  $|z| \geq |c|$  és  $|z| > 2$  akkor ez a pálya divergens, így a Mandelbrot halmazt a komplex síknak egy 2 sugarú körlemeze határolja, emiatt érdemes a következő alakban definiálni a halmazt:

$$M = \{c \in \mathbb{C} : |\varphi_c^t(0)| \leq 2 \quad \forall t \in \mathbb{Z}^+\}.$$

Az  $M$  halmazon kívüli régióhoz tartozó színárnyalatok a konvergencia sebességét reprezentálják, azaz mi az a legkisebb  $N$  iteráció melyre a nullából kiinduló pálya eléri a kettő sugarú körlemezt.





3.1. ÁBRA. A Mandelbrot halmaz

A Mandelbrot halmaz bizonyosan egyike a matematika legszebb halmazainak. Dave Boll volt az aki 1991-ben a Mandelbrot halmazt vizsgálva egy véletlen folytán felfedezett egy meglepő kapcsolatot a  $\pi$  és a halmaz között. Azt vizsgálta, hogy a Mandelbrot halmaz határáról kiindulva, mennyi az az  $\epsilon$ -tól függő legkisebb iterációs szám (ahol  $\epsilon$  egy kicsi szám), mely után kilépünk a halmazból. Kezdetben a halmaz 'nyakából' indult ki, a  $(-0.75, \epsilon)$  pontból. Az eredményeket az első két oszlop szemlélteti:

$\epsilon$	<i>iterációk száma</i>	$\epsilon$	<i>iterációk száma</i>
1.0	3	1.0	2
0.1	33	0.1	8
0.01	315	0.01	30
0.001	3143	0.001	97
0.0001	31417	0.0001	312
0.00001	314160	0.00001	991
0.000001	3141593	0.000001	3140
0.0000001	31415928	0.0000001	9933

melyekből az látszik, hogy az iteráció száma nagy meglepetésre pont a  $\pi$ -hez tart  $\pm\epsilon$  hibával. Majd a halmaz egy másik  $(0.25 + \epsilon, 0)$  pontjából indulva tovább vizsgálódott, melyet a második két oszlop adatai szemléltetnek. Itt is újra megjelenik a  $\pi$ . Most az

iterciók száma és a  $\sqrt{\epsilon}$  szorzata tart a  $\pi$ -hez, és így Dave Boll felfedezésének köszönhetően megszületett a következő tétel:

1. **A  $\pi$ -Tétel.** Legyen a dinamikai rendszer leképezése a  $\varphi_{1/4+\epsilon}(x) = x^2 + 1/4 + \epsilon$ , és adott  $\epsilon > 0$ -ra az iterációk száma  $N(\epsilon)$ , mely a Mandelbrot halmaz körüli 2 sugarú körének eléréséhez szükséges legkevesebb lépésszámot jelöli azaz:

$$N(\epsilon) = \min_t \varphi_{1/4+\epsilon}^t(0) > 2.$$

Ekkor

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sqrt{\epsilon} N(\epsilon) = \pi.$$

A bizonyításra itt nem térünk ki, csupán megvizsgáljuk approximációt, melynek eredménye a tétel, s a kapcsolatát a bifurkációkkal.

Vegyük a dinamikai rendszert leíró iterációt:

$$x_{k+1} = x_k^2 + \frac{1}{4} + \epsilon, \quad x_0 = 0$$

Ezt ekvivalens formába írva kapjuk a

$$x_{k+1} - x_k = \left(x_k - \frac{1}{2}\right)^2 + \epsilon, \quad x_0 = 0$$

kifejezést, melyet tovább alakítva a

$$x_{k+1} - \frac{1}{2} = \left(x_k - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x_k - \frac{1}{2}\right) + \epsilon,$$

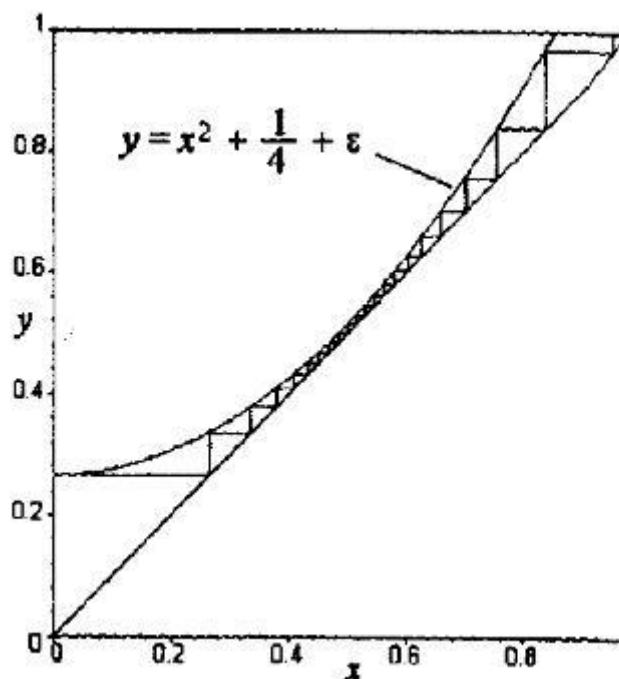
alakhoz jutunk. Innen már az  $y_k = \left(x_k - \frac{1}{2}\right)$  helyettesítéssel ford bifurkáció normálformájának megfelelő alakjára hoztuk.

**Megjegyzés:** További érdekesség, hogy a fenti iterációt a soron következő differenciálegyenlet explicit Euler diszkretizálásával kaphatjuk:

$$\dot{x}(t) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \epsilon, \quad x(0) = 0$$

ha  $\epsilon$  elég kicsi és  $x$  közel van  $\frac{1}{2}$ -hez.

Háló diagramon ábrázolva:



3.2. ÁBRA. A  $c = (0.25 + \epsilon, 0)$  irányú iterációs közelítés háló diagramja

A nulla körüli pálya  $c = (0.25 + \epsilon, 0)$  irányú közelítésének háló diagramja. Ha  $\epsilon = 0$  akkor az  $x = \frac{1}{2}$  egy fixpontja lesz a dinamikai rendszernek, viszont ha  $> 0$  nincsen egy fixpont sem, bár az iterációk  $\frac{1}{2}$ -hez közelítenek.

### 3.2. A Mandelbrot-halmaz és a logisztikus leképezés kapcsolata

Vegyük a Mandelbrot halmazt, s képzeletben vágjuk el a valós tengellyel, ekkor a  $[-2, 0.25]$  intervallumot kapjuk. Ebbe az intervallumba eső paramétereket egytől-egyig

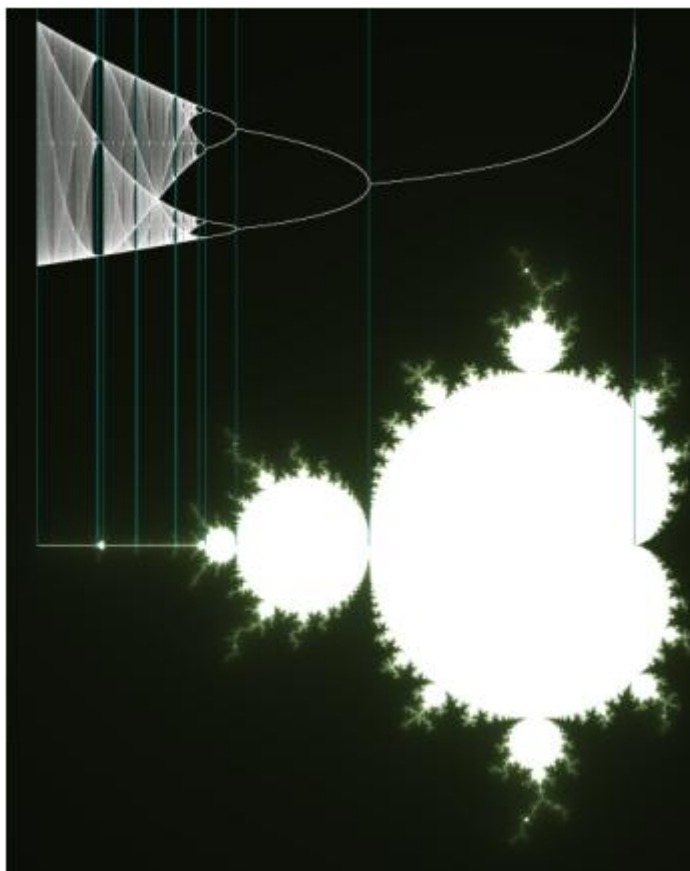
megfeleltethetjük a következő valós logisztikus leképezés paramétereinek:

$$z \rightarrow \lambda z(1 - z), \quad \lambda \in [1, 4]$$

ahol az  $M$  halmaz  $c$  paramétere és a logisztikus leképezés paramétere között a kapcsolat:

$$c = \frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right).$$

A logisztikus leképezést főként különféle populációdinamikai modellekben használják, melynek célja élőlények egyedszámváltozásának vizsgálata egy adott élőhelyen.



3.3. ÁBRA. A logisztikus leképezés, mint a Mandelbrot-halmaz valós metszete

# Irodalomjegyzék

- [1] Kuznetsov Yu.A., Elements of applied bifurcation theory ( $2^{nd}$  ed. Springer 1988)
- [2] Aaron Klebanoff,  $\pi$  in the Mandelbrot set
- [3] Lóczy Lajos, Elemi bifurkációk diszkretizációja (dinamikai rendszerek diszkretizációja rész)
- [4] Simon Péter differenciálegyenletek előadásai alapján
- [5] <http://www.tankonyvtar.hu/konyvek/impulziv-jelensegek/impulziv-jelensegek-081028-38>
- [6] [http://hu.wikipedia.org/wiki/Dinamikai\\_rendszer](http://hu.wikipedia.org/wiki/Dinamikai_rendszer)
- [7] [http://en.wikipedia.org/wiki/Bifurcation\\_theory](http://en.wikipedia.org/wiki/Bifurcation_theory)
- [8] <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Verhulst-Mandelbrot-Bifurcation.jpg>

# Irodalomjegyzék