

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

NUMERIKUS INTEGRÁLÁS ÉS AZ
OSZCILLÁCIÓS INTEGRANDUSOK
KOMPLEX GAUSS-KVADRATÚRÁJA

BSc szakdolgozat

Készítette: **Szarvas Kristóf**

Matematika BSc, Alkalmazott Matematikus

Témavezető: **Dr. Gergő Lajos**

egyetemi docens

Numerikus Analízis Tanszék



Budapest, 2010

Tartalomjegyzék

1. Newton-Cotes kvadratúraformulák	4
1.1. Speciális Newton-Cotes kvadratúraformulák	6
1.1.1. Érintő-formula	6
1.1.2. Trapéz-formula	7
1.1.3. Simpson-formula	8
2. Gauss-kvadratúraformulák	10
2.1. Ortogonális polinomok	11
2.2. Speciális ortogonális polinomok	15
2.2.1. Legendre-polinomok	15
2.2.2. Laguerre-polinomok	15
2.2.3. Hermite-polinomok	16
2.2.4. Csebisev-polinomok	16
2.3. Gauss-kvadratúrák	17
2.4. Speciális Gauss-kvadratúrák	19
2.4.1. Gauss-Legendre-kvadratúra	19
2.4.2. Gauss-Laguerre-kvadratúra	20
2.4.3. Gauss-Hermite-kvadratúra	21
2.4.4. Gauss-Csebisev-kvadratúra	21
3. Oszcillációs integrandusok	23
3.1. Aszimptotikus kiterjesztés	23
3.2. A legmeredekebb lejtő numerikus módszere	25
3.2.1. Négytagú szumma	28

3.3. A vonalintegrálok numerikus közelítése	32
3.3.1. Vonalintegrálok a végpontokban	33
3.3.2. Vonalintegrálok a stacionárius pontokban	36
3.3.3. Numerikus példák	38
3.4. Aszimptotikusan optimális kvadratura-szabályok	39
3.4.1. Páros r-ek esete	40
3.4.2. Páratlan r-ek esete	42
3.4.3. Numerikus példák	43
3.5. Még általánosabb oszcillációs függvények	45
3.5.1. Globális helyettesítés	45
3.5.2. A számítás lokalizálása	46
4. Függelék	48

Bevezetés

A klasszikus analízisben az integrálok explicit kiszámításának alapját képező

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (1)$$

Newton-Leibniz formula, ahol $F(x)$ az $f(x)$ integrandus primitív függvénye, számítástechnikai értéke kicsi. Ennek oka részben az, hogy igen szűk azon függvények köre, amelyeknek primitív függvénye elemi függvényekkel kifejezhető. Például, $\frac{e^x}{x}$, e^{-x^2} , $\frac{\sin(x)}{x}$ stb. függvények primitív függvénye nem elemi függvény. A másik ok pedig az, hogy táblázattal adott függvények esetében (1) egyáltalán nem alkalmazható, jöhetnek fizikai, kémiai stb. mérések eredménye mindig ilyen alakú függvény. Az $\int_a^b f(x)dx$ határozott integrálnak valamely

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

Riemann-féle összeggel való közelítése sem kielégítő számítástechnikai szempontból, mivel itt semmilyen utalás nincs arra vonatkozólag, hogyan kell választani az $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ felosztás pontjait, továbbá a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, $(x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k \quad (k = 1, 2, \dots, n))$, közbeeső pontokat ahhoz, hogy S_n előre adott pontossággal szolgálta a szóban forgó integrál értékét. Azonkívül, S_n gyakran csak igen lassan konvergál $\int_a^b f(x)dx$ -hez.

A numerikus kvadratúra általános alakja

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R_n(f), \quad (2)$$

vagyis az integrált a függvényértékek lineáris kombinációjaként fejezzük ki, ahol az x_k alappontokat és az A_k együtthatókat alkalmas módon választjuk. (2)-t kvadratúraformulának, vagy csak röviden kvadratúrának, az x_k alappontokat abszcisszáknak, az A_k együtthatókat pedig súlyoknak nevezzük.

Az interpolációs kvadratura ötlete az, hogy interpolációs polinomokkal való közelítésből indulunk ki, azaz megkíséreljük az A_k és x_k mennyiségeket úgy megválasztani, hogy a (2) alakú formula hibája, az $R_n(f)$ mennyiség zérus legyen, ha $f(x)$ alacsony fokszámú polinom. Nyilvánvaló, hogy például a Lagrange-féle interpolációs formula integrálásával egy (2) alakú formulát állíthatunk elő. Anélkül, hogy itt most részletekbe mennénk, minden további nélkül beláthatjuk, hogy mivel az n alappont-hoz tartozó Lagrange-féle formula pontos a legfeljebb $(n - 1)$ -edfokú polinomokra, ezért az integrálásával kapott kvadraturaformula ilyen polinomokra ugyancsak pontos lesz.

Ha az integrálandó függvény ekvidisztáns táblázattal van megadva, akkor célszerű azt követelnünk, hogy az abszcisszák a táblázat beosztásának megfelelően egyenletesen helyezkedjenek el. Az olyan kvadraturaformulákat, amelyeknek abszcisszáiról előre kikötjük, hogy ekvidisztáns elhelyezkedésűek legyenek, Newton-Cotes (-féle) kvadraturának nevezzük. A gyakorlati értékű Newton-Cotes formulák a következő két osztály egyikébe sorolhatók (i) zárt formulák, amelyeknél az integrálás intervallumának végpontjai az abszcisszák közé tartoznak; (ii) nyílt formulák, amelyeknél ezek a végpontok nem abszcisszák és a formula abszcisszái a végpontokhoz képest szimmetrikusan helyezkednek el. Az $n = 1$ -nek megfelelő nyílt Newton-Cotes formula érintőformula, az $n = 2$ -nek megfelelő zárt Newton-Cotes formula trapézformula, az $n = 3$ -nak megfelelő pedig Simpson-formula néven ismeretes.

A (2) kvadraturával kapcsolatban felmerül a következő kérdés: ha nem rögzítjük előre az x_k abszcisszákat (például nem szorítkozunk ekvidisztáns alappontrendszerre), sem pedig az A_k súlyokat, akkor hanyadfokú az a legmagasabb fokszámú polinom, amelyre a (2) típusú formula $R_n(f)$ hibája még zérussá tehető? E polinom fokszámát a kvadraturaformula pontossági fokának (vagy rendjének) nevezzük. Mivel n számú x_k abszcissza és n számú A_k súly, vagyis $2n$ állandó fölött rendelkezünk, ezért azt sejthetjük, hogy a felelet: $2n - 1$ -edfokú polinom. A második fejezetben megmutatjuk, hogy ez valóban igaz. Az így nyert formulákat Gauss-típusú kvadraturaformuláknak nevezzük, amelyek alkalmasan választott súlyfüggvényekre a nem korlátos intervallumok esetét is felölelik. A súlyfüggvényekkel és az ortogonális polinomokkal kapcsolatos ismereteket szintén a második fejezetben tárgyaljuk.

Az összes eddig említett, véges intervallumra vonatkozó kvadrátúraformula az intervallum hosszának valamilyen pozitív egész kitevőjű hatványával arányos. Ezért a gyakorlatban általában a következő képpen járunk el: *(i)* bontsuk fel az $[a, b]$ intervallumot bizonyos számú, például m részre, *(ii)* minden részintervallumra alkalmazzunk egy kvadrátúraformulát, *(iii)* végül összegezzük a részintervallumokra vonatkozó eredményeket. Az így nyerhető formulákat összetett kvadrátúraformulának nevezzük.

A Gauss-kvadrátúrákkal már nagyon sok függvény integrálját tudjuk hatékonyan kiértékelni. Az úgynevezett oszcillációs integrálokkal azonban még ez a módszer sem tud elbánni. Ha megadott pontossággal szeretnénk egy oszcillációs integrált Gauss-kvadrátúrával kiértékelni, rengeteg alapontra lenne szükségünk. Ezért ehelyett más módszert választunk. Integrálátalakítással fogjuk az oszcillációt megszüntetni, oly módon, hogy egy komplex vonalintegrállá alakítjuk át az oszcillációs integrált, majd erre a nemoszcillációs komplex vonalintegrálra építünk egy Gauss-kvadrátúrát.

1. fejezet

Newton-Cotes kvadratúraformulák

A Newton-Cotes kvadratúraformulák esetében az

$$\int_a^b f(x) dx$$

integrál egy közelítő értékét úgy állítjuk elő, hogy az $f(x)$ integrandust ekvidisz-
táns alappontokhoz tartozó Lagrange-féle interpolációs polinommal helyettesítjük.
Tekintüs a következő alappontrendszert:

$$x_k = c + kh, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Két esetet tudunk megkülönböztetni:

i) Nyílt típusú formulák, amikor $c = a$ és $b = c + (n + 1)h$, vagyis

$$h = \frac{b - a}{n + 1}. \quad (1.1)$$

Ebben az esetben az interpoláció x_1, x_2, \dots, x_n alappontjai nem tartalmazzák sem a -t, sem pedig b -t.

ii) Zárt típusú formulák, amikor $c + h = a$ és $b = c + nh$, vagyis

$$h = \frac{b - a}{n - 1}. \quad (1.2)$$

Ebben az esetben mind a , mind pedig b az interpoláció alappontjaihoz tartozik,
vagyis $a = x_1$ és $b = x_n$.

1.1. Megjegyzés. *Értelmezhetők még a balról zárt és jobbról nyílt, illetve a balról nyílt és jobbról zárt formulák is.*

Tekintsük az $f(x)$ függvénynek az x_1, x_2, \dots, x_n alappontokhoz tartozó $(n-1)$ -edfokú $L_{n-1}(x)$ Lagrange-féle interpolációs polinomját, azaz

$$f(x) \approx L_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^n f(x_k) l_k(x), \quad (1.3)$$

ahol

$$l_k(x) = \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}.$$

Ekkor

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b \sum_{k=1}^n f(x_k) l_k(x) dx = \sum_{k=1}^n f(x_k) \int_a^b l_k(x) dx.$$

Így a kvadratúra együtthatót választhatjuk:

$$A_k := \int_a^b l_k(x) dx, \quad k = 1, \dots, n.$$

Ebben a fejezetben nem bizonyítjuk az állításokat, de [1]-ben és [2]-ben megtalálhatók.

1.1. Állítás. *Kihasználva, hogy az alappontrendszerünk ekvidisztáns, a következőt állíthatjuk:*

$$A_k = (b-a) \cdot B_{n,k}^{(ny)}, \quad k = 1, \dots, n,$$

ahol

$$B_{n,k}^{(ny)} = \frac{(-1)^{n-k}}{(n-1)(k-1)!(n-k)!} \int_1^n \frac{(t-1)(t-2)\dots(t-n)}{t-k} dt.$$

Itt $B_{n,k}^{(ny)}$ együtthatók jelölik az n ponthoz tartozó nyílt Newton-Cotes formula k -edik együtthatóját, amely nem függ az integrációs intervallumtól és az integrandustól sem.

1.2. Megjegyzés. *Hasonlóképpen a zárt Newton-Cotes formulákra:*

$$A_k = (b-a) \cdot B_{n,k}^{(z)}, \quad k = 1, \dots, n,$$

ahol

$$B_{n,k}^{(z)} = \frac{(-1)^{n-k}}{(n-1)(k-1)!(n-k)!} \int_1^n \frac{(t-1)(t-2)\dots(t-n)}{t-k} dt.$$

1.1. PÉLDA. *i) Érintő-formula: $n = 1, k = 1: B_{1,1}^{(ny)} = 1.$*

ii) Trapéz-formula: $n = 2, k = 1, 2: B_{2,1}^{(z)} = \frac{1}{2}, B_{2,2}^{(z)} = \frac{1}{2}.$

iii) Simpson-formula: $n = 3, k = 1, 2, 3: B_{3,1}^{(z)} = \frac{1}{6}, B_{3,2}^{(z)} = \frac{2}{3}, B_{3,3}^{(z)} = \frac{1}{6}.$

Jobban megfigyelve az együtthatókat, észrevehetjük, hogy szimmetrikusak, illetve, hogy az összegük 1. Vajon ez csak egy véletlen és csak erre a három esetre áll fenn, vagy általánosan minden együtthatóra? Erre ad választ a következő állítás, melyet nem bizonyítottunk.

1.2. Állítás. *Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén:*

i)

$$B_{n,k}^{(ny)} = B_{n,n-k+1}^{(ny)}, \quad \text{illetve} \quad B_{n,k}^{(z)} = B_{n,n-k+1}^{(z)}, \quad k = 1, \dots, n.$$

ii)

$$\sum_{k=1}^n B_{n,k}^{(ny)} = 1, \quad \text{illetve} \quad \sum_{k=1}^n B_{n,k}^{(z)} = 1.$$

Megfigyelhető, hogy a zárt Newton-Cotes kvadratúraformulák esetében például $n = 9$ -nél (itt először) egyes súlyok negatívak. Belátható, hogy $n \leq 8$ és $n = 10$ kivételével mindenhol lesznek negatív súlyok. Mivel a súlyok összege 1, ezért ez károsan hat ki a függvényértékek kerekítéséből származó öröklött hibára. Ugyanakkor, nagy n -ekre a súlyok meghatározása bonyolulttá válik, ezért magasrendű Newton-Cotes típusú kvadratúraformulákat csak ritkán használunk a gyakorlatban.

1.1. Speciális Newton-Cotes kvadratúraformulák

Ebben a részben a legismertebb Newton-Cotes kvadratúrákat, és tulajdonságait mutatjuk be. A legelterjedtebb Newton-Cotes kvadratúraformulák az $n = 1$ -nek megfelelő nyílt típusú Érintő-formula, az $n = 2$ -nek megfelelő zárt típusú Trapéz-formula, illetve az $n = 3$ -hoz tartozó zárt típusú Simpson-formula. A pontosság javítására szolgáló összetett változatokkal is megismerkedünk.

1.1.1. Érintő-formula

Közelítsük az $[a, b]$ intervallumon értelmezett $f(x)$ függvényt az $x_1 = \frac{a+b}{2}$ alapponthoz tartozó $L_0(x)$ (konstans) Lagrange-polinomjával, azaz

$$f(x) \approx L_0(x) \equiv f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Mindkét oldalt integrálva kapjuk az $n = 1$ -hez tartozó nyílt típusú kvadratúraformulát:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_0(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right). \quad (1.4)$$

1.3. Megjegyzés. A módszer geometriailag azt jelenti, hogy az $\int_a^b f(x)dx$ integrál által kifejezett görbevonalú trapéz területét a $(b-a)$ alapú és $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ magasságú téglalap területével közelítjük. Ha $f(x)$ differenciálható az $\frac{a+b}{2}$ felezőpontban, akkor ennek a téglalagnak a területe egyenlő annak a trapéznek a területével, amelyet úgy kapunk, hogy az $f(x)$ függvény görbét az $[a, b]$ intervallumon a felezőpontban húzott érintőjével helyettesítjük. Innen az Érintő-formula elnevezés.

1.3. Állítás. Ha $f \in C^2([a, b])$, akkor

$$|R_1(f)| \leq \frac{M_2}{24}(b-a)^3,$$

Itt $R_1(f)$ jelöli az Érintő-formula maradéktagját, illetve $M_k = \max_{x \in [a, b]} |f^{(k)}(x)|$. Ezt a jelölést a későbbiekben is fogjuk használni.

Általában az érintőformulát nem alkalmazzuk rögtön az egész $[a, b]$ intervallumra, hanem azt előbb felosztjuk m egyenlő részre és az egyes részintervallumokra külön-külön alkalmazzuk az Érintő-formulát, így kapjuk az Összetett Érintő-formulát.

1.4. Állítás. Ha $f \in C^2([x_i, x_{i+1}])$, $i = 1, \dots, m$, akkor

$$|R_1(f)| \leq \frac{M_2}{24m^2}(b-a)^3.$$

1.1.2. Trapéz-formula

Közelítsük most $f(x)$ -et az $x_1 = a$ és $x_2 = b$ alappontokhoz tartozó $L_1(x)$ Lagrange-polinomjával, azaz

$$f(x) \approx L_1(x) = \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b).$$

Mindkét oldalt integrálva kapjuk az $n = 2$ -höz tartozó zárt típusú kvadratúraformulát:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_1(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)).$$

1.4. Megjegyzés. Ha az $f(x)$ függvény pozitív, a módszernek a következő geometriai jelentés adható: az $f(x)$ függvény által határolt görbevonalú trapéz területét egy olyan derékszögű trapézzal helyettesítjük, melynek egyik oldala $f(a)$, másik oldala $f(b)$ hosszúságú (ez a két oldal természetesen párhuzamos) és a magassága $(b - a)$. Innen ered a Trapéz-formula elnevezés.

1.5. Állítás. Ha $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, akkor

$$|R_2(f)| \leq \frac{M_2}{12}(b - a)^3.$$

Itt $R_2(f)$ jelöli az Trapéz-formula maradéktagját.

A pontosság fokozása érdekében az $[a, b]$ intervallumot most is m egyenlő részre osztjuk és az egyes részintervallumokon külön-külön alkalmazzuk a Trapéz-formulát. Ezáltal jutunk el az Összetett Trapéz-formulához.

1.6. Állítás. Ha $f \in \mathcal{C}^2([x_i, x_{i+1}])$, $i = 1, \dots, m$, akkor

$$|R_2(f)| \leq \frac{M_2}{12m^2}(b - a)^3.$$

1.1.3. Simpson-formula

Tekintsük most az $f(x)$ függvénynek az $x_1 = a$, $x_2 = \frac{a+b}{2}$ és $x_3 = b$ alappontokhoz tartozó $L_3(x)$ interpolációs polinomját:

$$\begin{aligned} L_3(x) = & \frac{2}{(b-a)^2} \left(\left(x - \frac{a+b}{2} \right) (x-b) f(a) - 2(x-a)(x-b) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \right. \\ & \left. + (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2} \right) f(b) \right). \end{aligned}$$

Ha $f(x)$ integrálját $L_3(x)$ integráljával helyettesítjük, a Simpson-formulához jutunk:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_3(x) dx = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

Ez az $n = 3$ -nak megfelelő zárt típusú formula.

1.5. Megjegyzés. A módszer geometriailag azt jelenti, hogy az $f(x)$ függvényt $[a, b]$ -ben az intervallum középpontján és végpontjain áthaladó másodfokú parabolával közelítjük. Ezért parabola-formulának is szokták nevezni.

1.7. Állítás. Ha $f \in \mathcal{C}^4([a, b])$, akkor

$$|R_3(f)| \leq \frac{M_4}{2880}(b-a)^5.$$

Itt $R_3(f)$ jelöli az Simpson-formula maradéktagját.

A jól bevált trükkel ismét fokozhatjuk a pontosságot. Osszuk fel az intervallumot m egyenlő részre és külön-külön mindegyik részintervallumon alkalmazzuk a Simpson-formulát! Ezzel az eljárással kapjuk az Összetett Simpson-formulát.

1.8. Állítás. Ha $f \in \mathcal{C}^4([x_i, x_{i+1}])$, $i = 1, \dots, m$, akkor

$$|R_3(f)| \leq \frac{M_4}{2880m^2}(b-a)^5.$$

2. fejezet

Gauss-kvadratúraformulák

A Newton-Cotes-féle kvadratúraformulák ismeretében felmerül a kérdés, hogy növelhetjük-e a pontossági rendet, ha nem ekvidisztáns alappontrendszerre támaszkodunk. A továbbiakban az $\int_a^b f(x)dx$ integrál helyett az általánosabb

$$\int_a^b f(x) \cdot \alpha(x) dx$$

integrál közelítő kiszámításával foglalkozunk, ahol $\alpha(x)$ egy olyan nem-negatív, integrálható súlyfüggvény, melyre

$$\int_a^b Q(x) \cdot \alpha(x) dx \neq 0 \tag{2.1}$$

tetszőleges $Q(x)$ jeltartó polinom esetén, ahol jeltartó polinom alatt azt értjük, hogy $\forall x, y \in [a, b]$ -re: $Q(x) \cdot Q(y) \geq 0$, azaz nem vált előjelet $[a, b]$ -ben.

Nem felesleges bonyolítás az integrandust $f(x)$ és $\alpha(x)$ tényezőkre bontani, mert

- i)* Gyakran van szükség ortogonális polinomok szerinti kifejtések együtthatóinak kiszámítására;

- ii)* Gyakran fordulnak elő integrandusok tényezőiként, különösen improprius integrálokban.

A felbontás előnye is kétféle:

- i)* Sokszor kényelmesebb az $f(x_i)$ függvényértékeket kiszámítani, mint az $f(x_i) \cdot \alpha(x_i)$ -ket, hiszen a kvadratúraformula nem függ $\alpha(x_i)$ -től, csak $f(x_i)$ -től;

ii) Gyakran előnyösebb a maradéktagot pusztán $f(x)$ deriváltjaival kifejezni, különösen akkor, ha a súlyfüggvény, vagy valamelyik deriváltja az integrációs intervallumban nem korlátos.

Ezek után az általánosított kvadratúraformulákat a következő alakban keressük:

$$\int_a^b f(x) \cdot \alpha(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R_n(f), \quad (2.2)$$

ahol az $\alpha(x)$ súlyfüggvény a jobb oldalon már nem szerepel. Az A_k súlyok és az x_k abszcisszák természetesen függenek n -től, $\alpha(x)$ -től és az $[a, b]$ intervallumtól, de nem függenek magától az $f(x)$ integrandustól. Az $R_n(f)$ maradéktag viszont függ $f(x)$ -től is.

2.1. Ortogonális polinomok

Ha az $R_n(f)$ maradéktag minden, legfeljebb m -edfokú polinomra eltűnik, akkor speciálisan az $f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^m$ hatványfüggvényekre is, így

$$\int_a^b x^j \cdot \alpha(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k x_k^j \quad j = 0, 1, \dots, m. \quad (2.3)$$

2.1. Definíció. Az

$$\int_a^b x^j \cdot \alpha(x) dx =: \mu_j \quad j = 0, 1, \dots, m$$

menyiségeket az $\alpha(x)$ súlyfüggvény momentumainak nevezzük.

A (2.3) egyenletrendszerét részletesebben kiírva:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + \dots + A_n &= \mu_0 \\ A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + \dots + A_n \cdot x_n &= \mu_1 \\ &\dots \\ A_1 \cdot x_1^m + A_2 \cdot x_2^m + \dots + A_n \cdot x_n^m &= \mu_m. \end{aligned}$$

Ezáltal $m + 1$ egyenletet nyertünk $2n$ ismeretlenre (x_k abszcisszák és az A_k súlyok). Innen következik, hogy m maximális értéke $2n - 1$ lehet. Az azonban még nyitott kérdés számunkra, hogy $m = 2n - 1$ esetben mindig megoldható-e a fenti

egyenletrendszer, a megoldások valóságosak lesznek-e és, hogy az x_k abszcisszáik az $[a, b]$ integrációs intervallumba esnek-e.

Közelítsük $f(x)$ -et az $L_{n-1}(x)$ Lagrange-polinomjával. Ez egy $(n - 1)$ -edfokú polinom, így természetesen erre már (2.2) kvadratúraformula pontos, így $R_n(f) = 0$ és kaptuk:

$$\int_a^b f(x) \cdot \alpha(x) dx \approx \int_a^b L_{n-1}(x) \cdot \alpha(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (2.4)$$

interpolációs kvadratúraformulát. Vagyis legyenek az A_k súlyok

$$A_k = \int_a^b l_k(x) \cdot \alpha(x) dx \quad k = 1, \dots, n.$$

A következő, alapvető jelentőségű tételt csak kimondjuk, de nem bizonyítjuk (A bizonyítást lásd [2]).

2.1. Tétel. *A fenti (2.4) interpolációs kvadratúraformula pontos minden, legfeljebb $(2n - 1)$ -edfokú polinomra pontosan akkor, ha tetszőleges, legfeljebb $(n - 1)$ -edfokú $Q(x)$ polinomra*

$$\int_a^b \omega_n(x) \cdot Q(x) \cdot \alpha(x) dx = 0, \quad (2.5)$$

ahol

$$\omega_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i).$$

Ezt a jelölést a későbbiekben is fogjuk használni.

2.2. Definíció. *Az $f(x)$ és $h(x)$ függvényeket ortogonálisnak nevezzük az $\alpha(x)$ súlyfüggvényre nézve az $[a, b]$ intervallumon, ha*

$$\int_a^b f(x) \cdot h(x) \cdot \alpha(x) dx = 0.$$

Most már csak az a kérdés, hogy adott $[a, b]$ intervallum és adott $\alpha(x)$ súlyfüggvény esetén található-e olyan $\omega_n(x)$ n -edfokú polinom, amely ortogonális minden nála alacsonyabb fokú polinomra, és amelynek gyökei egyszeresek, valóságosak és $[a, b]$ -be esnek. Ekkor ugyanis $\omega_n(x)$ gyökeit a (2.4) kvadratúra alappontjainak választhatjuk, és a kapott kvadratúra pontosságát $2n - 1$ lesz. Az ilyen, maximális pontosságú n -edfokú kvadratúraformulákat Gauss-típusúnak nevezzük. Most ezekre a kérdésekre adunk pozitív választ.

2.2. Tétel. *Tetszőleges $[a, b]$ intervallum és $\alpha(x)$ súlyfüggvény esetén konstans tényezőtől eltekintve egyértelműen megadható olyan*

$$Q_0(x), Q_1(x), \dots, Q_n(x), \dots$$

polinomsorozat, amelynek tagjai páronként ortogonálisak, azaz

$$\int_a^b Q_i(x) \cdot Q_k(x) \cdot \alpha(x) dx = 0, \quad i \neq k \in \mathbb{N} \quad (2.6)$$

és $Q_n(x)$ pontosan n -edfokú polinom.

Most bizonyítsuk be a kvadratúrák szempontjából alapvető jelentőségű tételt:

2.3. Tétel. *Ha $\{Q_n(x)\}$ ($n=0,1,\dots$) ortogonális polinomsorozat valamely $\alpha(x)$ súlyfüggvény szerint egy $[a, b]$ intervallumban, akkor minden n -re $Q_n(x)$ -nek n darab különböző zérushelye van és ezek az $[a, b]$ intervallumba esnek.*

Bizonyítás: Legyen $n \geq 1$. Mivel $Q_0(x) \equiv 1$, $\alpha(x) \geq 0$ és

$$\int_a^b Q_0(x) \cdot Q_n(x) \cdot \alpha(x) dx = 0, \quad (2.7)$$

ezért $Q_n(x)$ -nek legalább egy előjelváltása van $[a, b]$ intervallumban. Valóban, mivel $Q_0(x)$ nem vált előjelet $[a, b]$ -ben (jeltartó polinom), ezért $\alpha(x) \equiv 0$ nem lehet a súlyfüggvényekre vonatkozó (2.1) feltétel miatt. Következésképpen (2.7) fennállásához szükséges, hogy $Q_n(x)$ legalább egyszer előjelet váltson az $[a, b]$ intervallumban. Legyenek

$$x_1 < x_2 < \dots < x_\nu$$

$Q_n(x)$ azon $[a, b]$ -be eső zérushelyei, ahol $Q_n(x)$ előjelet vált, vagyis páratlan multiplicitású gyökei. A fentiek szerint tehát $1 \leq \nu \leq n$. Azt kell belátnunk, hogy $\nu = n$, vagyis $\nu < n$ nem lehetséges. Ezért tekintsük a

$$Q_n(x)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_\nu)$$

polinomot. Ennek a polinomnak minden $[a, b]$ -beli gyöke páros multiplicitású, tehát állandó előjelű $[a, b]$ -ben. Ezért

$$\int_a^b Q_n(x) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_\nu) \cdot \alpha(x) dx \neq 0.$$

Ekkor viszont az $(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_\nu)$ polinom legalább n -edfokú, mert különben ortogonális lenne $Q_n(x)$ -re, vagyis $\nu \geq n$, amiből következik, hogy $\nu = n$. Megkaptuk, hogy $Q_n(x)$ gyökei valóságosak, egyszeresek és az $[a, b]$ intervallumba esnek. ■

2.1. Következmény. $Q_n(x)$ -nek ezen kívül más zérushelye nem is lehet.

Az ortogonális polinomok tekinthetők a következő Hilbert-tér ortogonális elemeiként:

$$H := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : \int_a^b f^2(x) \cdot \alpha(x) dx < +\infty\} =: L_{2,\alpha}(a, b),$$

ahol a skalárszorzat

$$\langle f(x), g(x) \rangle := \int_a^b f(x) \cdot g(x) \cdot \alpha(x) dx =: \langle f(x), g(x) \rangle_\alpha$$

Következésképpen az α -ás norma

$$\|f(x)\|_\alpha^2 = \int_a^b |f(x)|^2 \cdot \alpha(x) dx$$

A 2.2 Tétel alapján, a Gram-Schmidt ortogonalizációval az ortogonális polinomok előállítására nehézkes. Ennek kiküszöbölésére szolgál a következő tételt.

2.1. Megjegyzés. Jelölje az 1-főegyütthatóra normált legfeljebb n -edfokú polinomat $\tilde{Q}_n(x)$.

2.4. Tétel. $\tilde{Q}_0(x)$ és $\tilde{Q}_1(x)$ egymásra ortogonális polinomok esetén $\tilde{Q}_{n+1}(x)$ ($n \geq 1$) ortogonális polinomokra a következő rekurzív összefüggés teljesül:

$$\tilde{Q}_{n+1}(x) = (x - \alpha_{n+1})\tilde{Q}_n(x) - \beta_{n+1}\tilde{Q}_{n-1}(x),$$

ahol

$$\alpha_{n+1} = \frac{\langle x \cdot \tilde{Q}_n(x), \tilde{Q}_n(x) \rangle_\alpha}{\|\tilde{Q}_n(x)\|_\alpha^2} \quad \text{illetve} \quad \beta_{n+1} = \frac{\langle x \cdot \tilde{Q}_n(x), \tilde{Q}_{n-1}(x) \rangle_\alpha}{\|\tilde{Q}_{n-1}(x)\|_\alpha^2}.$$

2.2. Megjegyzés. $Q_n(x)$ gyökei mindenütt sűrűn helyezkednek el az $[a, b]$ intervallumban, azaz $\forall [c, d] \subset [a, b]$ részintervallumra, ha n elég nagy, akkor $Q_n(x)$ -nek legalább egy gyöke lesz a $[c, d]$ részintervallumban.

2.2. Speciális ortogonális polinomok

Most megnézzünk egy pár speciális súlyfüggvényt és az ezekre ortogonális polinomokat. Ezekkel a nevezetes ortogonális polinomokkal konstruálhatjuk majd meg a nevezetes Gauss-kvadratúraformulákat.

2.2.1. Legendre-polinomok

A most következő részekben a bizonyításoktól eltekintve csak az állításokat mondjuk ki. Tekintsük az $[a, b] := [-1, 1]$ intervallumot és a súlyfüggvényt válasszuk $\alpha(x) \equiv 1$ -nek. Továbbá, legyen $Q_0(x) := 1$, $Q_1(x) := x$. Ekkor a következőket állíthatjuk.

2.1. Állítás. $\alpha_{n+1} = 0$ és $\beta_{n+1} = \frac{n^2}{4n^2-1}$, $n = 1, 2, \dots$, így

$$Q_{n+1}(x) = xQ_n(x) - \frac{n^2}{4n^2-1}Q_{n-1}(x). \quad (2.8)$$

Az első néhány Legendre-polinom:

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= 1 \\ Q_1(x) &= x \\ Q_2(x) &= x^2 - \frac{1}{3} \\ Q_3(x) &= x^3 - \frac{3}{5}x \\ Q_4(x) &= x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35} \\ Q_5(x) &= x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x \end{aligned}$$

2.2.2. Laguerre-polinomok

Tekintsük az $[a, b] := [0, \infty)$ intervallumot és a súlyfüggvényt válasszuk $\alpha(x) := e^{-x}$ -nek. Továbbá, legyen $L_0(x) := 1$, $L_1(x) := x - 1$. Ekkor a következőket állíthatjuk.

2.2. Állítás. $\alpha_{n+1} = 2n + 1$ és $\beta_{n+1} = n^2$, $n = 1, 2, \dots$, így

$$L_{n+1}(x) = (x - 2n - 1)L_n(x) - n^2L_{n-1}(x). \quad (2.9)$$

Az első néhány Laguerre-polinom:

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = x - 1$$

$$L_2(x) = x^2 - 4x + 2$$

$$L_3(x) = x^3 - 9x^2 + 18x - 6$$

$$L_4(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24$$

$$L_5(x) = x^5 - 25x^4 + 200x^3 - 600x^2 + 600x - 120$$

2.2.3. Hermite-polinomok

Tekintsük az $[a, b] := (-\infty, \infty)$ intervallumot és a súlyfüggvényt válasszuk $\alpha(x) := e^{-x^2}$. Továbbá, legyen $H_0(x) := 1$, $H_1(x) := x$. Ekkor a következőket állíthatjuk.

2.3. Állítás. $\alpha_{n+1} = 0$ és $\beta_{n+1} = \frac{n}{2}$, $n = 1, 2, \dots$, így

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - \frac{n}{2}H_{n-1}(x). \quad (2.10)$$

Az első néhány Hermite-polinom:

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = x$$

$$H_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}$$

$$H_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x$$

$$H_4(x) = x^4 - 3x^2 + \frac{3}{4}$$

$$H_5(x) = x^5 - 5x^3 + \frac{15}{4}x$$

2.2.4. Csebisev-polinomok

Elsőként elevenítsük fel az interpolációs Csebisev-polinomok definícióját:

2.3. Definíció. Az n -edik Csebisev-polinom legyen:

$$T_n(x) := \cos(n \cdot \arccos(x)), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

Az 1-főegyütthatóra normált Csebisev-polinom:

$$\tilde{T}_n(x) := \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x). \quad (2.12)$$

Tekintsük az $[a, b] := (-1, 1)$ intervallumot és a súlyfüggvényt válasszuk $\alpha(x) := \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Továbbá, legyen $T_0(x) := 1$, $T_1(x) := x$. Ekkor a következőket állíthatjuk.

2.4. Állítás. $\alpha_{n+1} = 0$ és $\beta_2 = \frac{1}{2}$, illetve $\beta_{n+1} = \frac{1}{4}$, $n = 2, 3, \dots$, így

$$T_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}, \quad \text{illetve} \quad T_{n+1}(x) = xT_n(x) - \frac{1}{4}T_{n-1}(x), \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.13)$$

Így ez nem más, mint az interpolációelméletből jólismert 1-főegyütthatóra normált Csebisev-polinom, melyet a (2.12)-ben írtunk le.

2.5. Állítás. Az n -edik Csebisev-polinom gyökhelyei:

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.14)$$

Bizonyítás: Triviális, ha felhasználjuk a 2.3 Definíciót. ■

Az első néhány normált Csebisev-polinom:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= x^2 - \frac{1}{2} \\ T_3(x) &= x^3 - \frac{3}{4}x \\ T_4(x) &= x^4 - x^2 + \frac{1}{8} \\ T_5(x) &= x^5 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{5}{16}x \end{aligned}$$

2.3. Gauss-kvadratúrák

Minden olyan kvadratúraformulát, amelynek abszcisszáit és súlyait abból a követelményből határozzuk meg, hogy pontosságának a rendje a lehető legmagasabb legyen, Gauss-típusú kvadratúraformulának nevezünk. A 2.4 Tétel szerint egy

$$\int_a^b f(x) \cdot \alpha(x) \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (2.15)$$

interpolációs kvadratúraformula pontossági rendje akkor maximális, vagyis $2n - 1$, ha abszcisszái olyan n -edfokú polinom gyökei, amely $[a, b]$ -ben az $\alpha(x)$ súlyfüggvény szerint minden, legfeljebb $(n - 1)$ -edfokú polinomra ortogonális.

Legyen $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots$ polinomoknak egy sorozata, amelyek az $[a, b]$ intervallumon ortogonálisak az $\alpha(x)$ súlyfüggvény szerint. Ilyen polinom sorozat létezik, mégpedig konstans tényezőtől eltekintve egyértelműen (2.2 Tétel). Legyen $P_n(x)$ polinomban x^n együtthatója A_n (főegyüttható). A 2.3 Tétel szerint $P_n(x)$ gyökei valósak, egyszeresek és az $[a, b]$ intervallumba esnek. Válasszuk a $P_n(x)$ polinom x_1, x_2, \dots, x_n gyökeit a (2.15) kvadratúra alappontjainak és tekintsük az ezen alappontokhoz tartozó interpolációs kvadratúraformulát, vagyis legyen

$$A_k = \int_a^b l_k(x) \cdot \alpha(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.16)$$

ahol

$$l_k(x) = \frac{(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}.$$

2.5. Tétel. *Az így értelmezett kvadratúraformulákra igazak a következők:*

i) *pontossági rendje $2n - 1$.*

ii) *Ez az egyetlen ilyen tulajdonságú kvadratúraformula.*

2.6. Állítás. *A Gauss-kvadratúra együtthatói mindig pozitívak, azaz*

$$A_k > 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Bizonyítás: Az n pontból álló Gauss-kvadratúra pontos a $(2n - 2)$ -edfokú $l_k^2(x)$ polinommon. Ekkor:

$$0 < \int_a^b l_k^2(x) \cdot \alpha(x) dx = \sum_{j=1}^n A_j l_k^2(x_j) = A_k l_k^2(x_k) = A_k.$$

2.2. Következmény. *Az $f \equiv 1$ függvényre pontos az n pontból álló Gauss-kvadratúra, ezért*

$$\sum_{k=1}^n A_k = \int_a^b \alpha(x) dx = \mu_0.$$

Sőt, az n pontból álló Gauss-kvadratúra pontos az x^j polinommon ($j = 0, \dots, n - 1$), ezért

$$\sum_{k=1}^n A_k x_k^j = \int_a^b x^j \cdot \alpha(x) dx = \mu_j \quad (2.17)$$

Ez pedig egy egyértelműen megoldható egyenletrendszer j -edik sorát adja az A_j ismeretlenekre. Vagyis egy egyenletrendszer megoldásával egyértelműen meg tudjuk határozni az A_1, A_2, \dots, A_n kvadratúra-súlyokat.

2.7. Állítás. Ha $f \in \mathcal{C}^{(2n)}([a, b])$, akkor

$$|R_G(f)| \leq \frac{M_{2n}}{(2n)!} \|\tilde{\omega}_n(x)\|_\alpha^2.$$

Itt $R_G(f)$ jelöli a Gauss-kvadratúra hibáját, illetve $\tilde{\omega}_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$.

2.4. Speciális Gauss-kvadratúrák

Most, hogy már tudjuk, hogyan kell egy n pontú Gauss-kvadratúrát felállítani, a speciális ortogonális polinomok segítségével speciális Gauss-kvadratúrákat kapunk.

2.3. Megjegyzés. Jelölje az n pontú Gauss-kvadratúrát $G_n(f)$. Vagyis az n -edfokú ortogonális polinom n db különböző gyökei lesznek az abszcisszák, majd a (2.17) egyenletrendszer megoldásával megkapjuk az A_1, A_2, \dots, A_n súlyokat.

Vegyük a Legendre, a Laguerre, az Hermite és a Csebisev ortogonális polinomokat és ezekre építsünk Gauss-kvadratúrát!

2.4.1. Gauss-Legendre-kvadratúra

Tekintsük a $[-1, 1]$ intervallumot, az $\alpha(x) \equiv 1$ súlyfüggvényt és $n := 1$. Ekkor az $\int_{-1}^1 f(x)dx$ -et fogjuk közelíteni. Az elsőfokú Legendre-polinom: $Q_1(x) = x$, így az egyetlen abszcissza az $x_1 = 0$. Az „egyenletrendszer”, amit meg kell oldani az A_1 súly kiszámításához:

$$1 \cdot A_1 = \mu_0,$$

ahol $\mu_0 = \int_{-1}^1 1 \cdot 1dx$. Megoldva az egyenletet, kapjuk: $A_1 = 2$, így

$$G_1(f) = 2 \cdot f(0).$$

2.4. Megjegyzés. A fenti $G_1(f)$ pontos a legfeljebb elsőfokú polinomokon. Valóban,

$$2 = \int_{-1}^1 1dx = 2 \cdot f(0) = 2, \text{ illetve } 0 = \int_{-1}^1 xdx = 2 \cdot f(0) = 0, \text{ ugyanakkor}$$

$$\frac{2}{3} = \int_{-1}^1 x^2dx \neq 2 \cdot f(0) = 0.$$

Nézzük még meg a 2 pontú Gauss-Legendre-kvadratúrát! Ekkor $Q_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$, így az abszcisszák: $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. $\mu_0 = 2$ továbbra is, $\mu_1 = \int_{-1}^1 x \cdot 1 dx = 0$. Az egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 2 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot A_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot A_2 &= 0 \end{aligned}$$

Innen: $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, azaz $G_2(f) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

2.5. Megjegyzés. Az iménti $G_2(f)$ pontos minden, legfeljebb harmadfokú polinomra.

2.4.2. Gauss-Laguerre-kvadratúra

Tekintsük a $[0, \infty]$ intervallumot, az $\alpha(x) = e^{-x}$ súlyfüggvényt és $n := 1$. Ekkor az $\int_0^\infty f(x) \cdot e^{-x} dx$ -et fogjuk közelíteni. Az elsőfokú Laguerre-polinom: $L_1(x) = x - 1$, így az egyetlen abszcissza az $x_1 = 1$. Az „egyenletrendszer”, amit meg kell oldani az A_1 súly kiszámításához:

$$1 \cdot A_1 = \mu_0,$$

ahol $\mu_0 = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-x} dx = 1$. Megoldva az egyenletet, kapjuk: $A_1 = 1$, így

$$G_1(f) = 1 \cdot f(1).$$

2.6. Megjegyzés. Az így kapott $G_1(f)$ pontos a legfeljebb elsőfokú polinomokon.

Valóban,

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^\infty e^{-x} dx = 1 \cdot 1 = 1, \text{ illetve } 1 = \int_0^\infty x \cdot e^{-x} dx = 1 \cdot 1 = 1, \text{ ugyanakkor} \\ 2 &= \int_0^\infty x^2 \cdot e^{-x} dx \neq 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Nézzük még meg a 2 pontú Gauss-Laguerre-kvadratúrát! Ekkor

$L_2(x) = x^2 - 4x + 2$, így az abszcisszák: $x_1 = 2 - \sqrt{2}$, $x_2 = 2 + \sqrt{2}$. $\mu_0 = 1$ továbbra is, $\mu_1 = \int_0^\infty x \cdot e^{-x} dx = 1$. Az egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 1 \\ (2 - \sqrt{2}) \cdot A_1 + (2 + \sqrt{2}) \cdot A_2 &= 1 \end{aligned}$$

Innen: $A_1 = \frac{1}{2(2-\sqrt{2})} = \frac{1}{2x_1}$, $A_2 = \frac{1}{2(2+\sqrt{2})} = \frac{1}{2x_2}$, azaz $G_2(f) = \frac{1}{2} \left(\frac{f(2-\sqrt{2})}{2-\sqrt{2}} + \frac{f(2+\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}} \right)$.

2.7. Megjegyzés. Belátható, hogy $G_2(f)$ pontos minden, legfeljebb harmadfokú polinomra.

2.4.3. Gauss-Hermite-kvadratúra

Tekintsük a $[-\infty, \infty]$ intervallumot, az $\alpha(x) = e^{-x^2}$ súlyfüggvényt és $n := 1$. Ekkor az $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-x^2} dx$ -et fogjuk közelíteni. Az elsőfokú Hermite-polinom: $H_1(x) = x$, így az egyetlen abszcissza az $x_1 = 0$. Az „egyenletrendszer”, amit meg kell oldani az A_1 súly kiszámításához:

$$1 \cdot A_1 = \mu_0,$$

ahol $\mu_0 = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Megoldva az egyenletet, kapjuk: $A_1 = \sqrt{\pi}$, így

$$G_1(f) = \sqrt{\pi} \cdot f(0).$$

2.8. Megjegyzés. A fenti $G_1(f)$ pontos a legfeljebb elsőfokú polinomokon. Valóban, $\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \cdot 1 = \sqrt{\pi}$, illetve $0 = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \cdot 0 = 0$, ugyanakkor $\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-x^2} dx \neq \sqrt{\pi} \cdot 0 = 0$.

Nézzük még meg a 2 pontú Gauss-Hermite-kvadratúrát! Ekkor $H_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}$, így az abszcisszák: $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. $\mu_0 = \sqrt{\pi}$ továbbra is, $\mu_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx = 0$. Az egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= \sqrt{\pi} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot A_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot A_2 &= 0 \end{aligned}$$

Innen: $A_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $A_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, azaz $G_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right)$.

2.9. Megjegyzés. Az így előállított $G_2(f)$ pontos minden, legfeljebb harmadfokú polinomra.

2.4.4. Gauss-Csebisev-kvadratúra

Tekintsük a $[-1, 1]$ intervallumot, és az $\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ súlyfüggvényt. Azt már korábban is láttuk a 2.5 Allításnál, hogy a Csebisev-polinomok gyökei

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \quad k = 1, \dots, n.$$

Vagyis, a Gauss-Csebisev-kvadratúra abszcisszáit igen könnyen meg tudjuk határozni. A most következő állítás azt mondja, hogy a kvadratúra súlyait is nagyon kényelmesen lehet meghatározni.

2.8. Állítás. *Az n pontra támaszkodó Gauss-Csebisev kvadratúra együtthatói:*

$$A_k = \frac{\pi}{n}, \quad k = 1, \dots, n.$$

2.3. Következmény. *Tehát $G_n(f) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\right)$.*

3. fejezet

Oszcillációs integrandusok

Ebben a fejezetben az oszcillációs integrálok approximációjával fogunk foglalkozni. Az eljárás azon alapszik, hogy az integrációs intervallumot egy komplex síkbeli görbével helyettesítjük, az úgynevezett legmeredekebb lejtőnek megfelelően. Ezen vonalintegrálok az integrandus már nem fog oszcillálni. Erre a komplex vonalintegrálra építünk egy Gauss-kvadratúrát.

Tekintsük az úgynevezett Fourier-típusú integrálokat, melyek szép példái az oszcillációs integráloknak:

$$I[f] := \int_a^b f(x) \cdot e^{i\omega g(x)} dx, \quad (3.1)$$

ahol ω egy frekvenciaparaméter, f és g függvényeket pedig rendre amplitúdónak, vagy kilengésnek és rezgéskeltőnek, vagy oszcillátornak, illetve fázisnak szoktuk nevezni. Ha ω nagy, az integrandus erősen oszcillál. Ennek az integrálnak numerikus kiértékeléséhez rengeteg pontra lenne szükség, ha valaki Gauss-kvadratúra, vagy bármilyen más interpolációs kvadratúra módszer segítségével szeretné közelíteni.

3.1. Aszimptotikus kiterjesztés

3.1. Definíció. Egy $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek a $\xi \in [a, b]$ r -edrendű stacionárius pontja, ha $g^{(j)}(\xi) = 0$, $j = 1, 2, \dots, r$, de $g^{(r+1)}(\xi) \neq 0$.

3.1. PÉLDA. $g(x) = x^r$ függvénynek az $x = 0$ -ban $(r - 1)$ -edrendű stacionárius pontja van.

Amikor ω nagy, $I[f]$ fő hozzájárulása az integrációs intervallum végpontjaihoz, illetve a stacionárius pontokhoz van közel. Pontosabban, a végpontok és a stacionárius pontok előállítanak egy-egy fő hozzájárulást $I[f]$ asimptotikus kiterjesztésében ($S_{a,b}[f]$, $S_\xi[f]$). Belátható, hogy

$$S_{a,b}[f] = \sum_{k=0}^{\infty} a_k[f] \omega^{-k-1}, \quad \omega \rightarrow \infty.$$

Itt az $a_k[f]$ együtthatók egyedül f értékeitől és a végpontok k -adrendű deriváltjaitól függenek. Hasonlóan, az $(r-1)$ -edrendű stacionárius ξ pontban az asimptotikus kiterjesztés:

$$S_\xi[f] = \sum_{k=0}^{\infty} b_k[f] \omega^{-\frac{k+1}{r}}, \quad \omega \rightarrow \infty,$$

ahol a $b_k[f]$ együtthatók ugyancsak az f függvény értékeitől és a ξ stacionárius pont k -adrendű deriváltjaitól függenek. A teljes asimptotikus kiterjesztés megkapható az alábbi közelítés megadásával:

$$I[f] \sim S_{a,b}[f] + S_\xi[f], \quad \omega \rightarrow \infty.$$

A kiterjesztés abszolút hibája a végpontokban $O(\omega^{-n-1})$ -edrendű, ha ott a deriváltak $(n-1)$ -edrendűek és a stacionárius pontokban $O(\omega^{-\frac{n+1}{r}})$ -edrendű, ha a stacionárius pont $(r-1)$ -edrendű. Ezt szokták Wattson-lemmaként emlegetni. Valóban, jelölje $S_{a,b}^n[f]$ az $S_{a,b}[f]$ n -edik részletösszegét. Ekkor

$$S_{a,b}^n[f] = \sum_{k=0}^n a_k[f] \omega^{-k-1}. \quad (3.2)$$

Itt $a_k[f]$ együtthatók $f^{(k)}$ -től függenek, de mivel feltettük, hogy a végpontokban a deriváltak $(n-1)$ -edrendűek, ezért $f^{(j)}(a) = f^{(j)}(b) = 0$ ($j = 0, 1, \dots, n-1$), de $f^{(n)}(a) \neq 0$ és $f^{(n)}(b) \neq 0$, így (3.2) a következő alakra egyszerűsödik:

$$S_{a,b}^n[f] = a_n[f] \cdot \omega^{-n-1} = O(\omega^{-n-1}).$$

Hasonlóan igazolható a stacionárius pontokban is.

Az eljárás a következő: az integrációs intervallumot a komplex sík görbéivel helyettesítjük úgy, hogy ezen görbék mentén az integrandus nemoszcillációs és exponenciálisan csökken. Aztán minden egyes integrált paraméterezünk valamilyen módon, hogy hatékony Gauss-kvadratúrát építhessünk rá. Ez előállítja a Gauss-szabály

jólismert optimális polinom rendjét. n darab kvadratura alappont használata esetén közel a végpontokhoz egy $O(\omega^{-2n-1})$ -edrendű hibát kapunk, így az aszimptotikus rend nagyjából duplázódik az asszimptotikus kiterjesztéshez képest. Először csak a $g(x) = x^r$ speciális esettel foglalkozunk és arra építjük fel a Gauss-kvadraturát, majd az általános esetet visszavezetjük erre a speciális esetre:

$$I[f] := \int_a^b f(x) \cdot e^{i\omega x^r} dx, \quad (3.3)$$

ahol $a < 0$, $b > 0$, $f \in C^\infty[a, b]$, $\xi = 0$ ($r - 1$)-edrendű stacionárius pont.

3.2. A legmeredekebb lejtő numerikus módszere

Tekintsük a $g(x) = x^r$ oszcillátort és rögzítsünk egy tetszőleges $x \in [a, b]$ pontot. Ezen pont legmeredekebb lejtőjét definiáljuk a következő képpen:

3.2. Definíció. Legyen $h_x(p)$ egy olyan $p \in [0, P]$ -vel paraméterezett görbe a komplex számsíkon, hogy az x^r fázisfüggvény valós része az egész út mentén konstans legyen. Ezt elérjük például a

$$\begin{aligned} h_x^r(p) &= x^r + ip \\ h_x(0) &= x \end{aligned} \quad (3.4)$$

peremfeltételű egyenlet megoldásával.

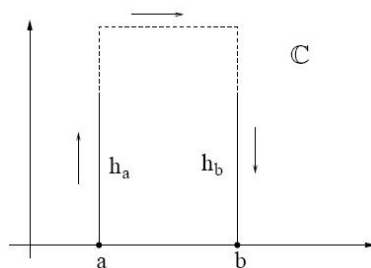
3.1. Megjegyzés. A peremfeltétel kiköti, hogy a rögzített $x \in [a, b]$ ponthoz tartozó legmeredekebb lejtőnek magából az x pontból kell kiindulnia.

3.2. Megjegyzés. Az eljárást az motiválja, hogy az $e^{i\omega x^r} = e^{i\omega \operatorname{Re}(x^r)} \cdot e^{i\omega \operatorname{Im}(x^r)} = e^{i\omega \operatorname{Re}(x^r)} \cdot e^{-\omega \operatorname{Im}(x^r)}$. Így, ha rögzítjük a valós részt, akkor az integrandus nem hogy nem lesz oszcilláló, sőt exponenciálisan csökkenő lesz.

3.2. PÉLDA. Tekintsük az $r = 1$ esetet, vagyis az $\int_a^b f(x) \cdot e^{i\omega x} dx$ oszcillációs integrált. Az előzőeket figyelembe véve a végpontokban felírt legmeredekebb lejtő:

$$h_a(p) = a + ip, \quad h_b(p) = b + ip, \quad p \in [0, P].$$

Végül, kössük össze $h_a(P)$ és $h_b(P)$ pontokat és tartsunk P -vel a végtelenbe. Ezt a konstrukciót láthatjuk a 3.1 ábrán.



3.1. ábra.

$g(x) = x$ esetén a legmeredekebb lejtő a végpontokban.

3.3. PÉLDA. Most tekintsük az $r = 2$ esetet és legyen $a := -1$, $b := 1$. Ekkor az integrál:

$$\int_{-1}^1 f(x) \cdot e^{i\omega x^2} dx.$$

Ekkor a legmeredekebb lejtő egyenlete: $h_x^2(p) = x^2 + ip$, amiből $h_x(p) = \sqrt{x^2 + ip}$, ahol $h_x(p)$ egy többértékű függvény (egész potnosan 2 értékű):

$$h_{x,j}(p) = (-1)^j \cdot \sqrt{x^2 + ip}, \quad j = 0, 1.$$

A (-1) -ben vegyük a $j = 1$ esetet, az 1 -ben pedig vegyük a $j = 0$ esetet. A végpontokban tehát a legmeredekebb lejtő:

$$h_{-1,1}(p) = -\sqrt{x^2 + ip}, \quad h_{1,0}(p) = \sqrt{x^2 + ip}, \quad p \in [0, \infty].$$

A stacionárius $\xi = 0$ pontba pedig vegyük be mindkét esetet. Így

$$h_{0,1}(p) = -\sqrt{ip}, \quad h_{0,0}(p) = \sqrt{ip}.$$

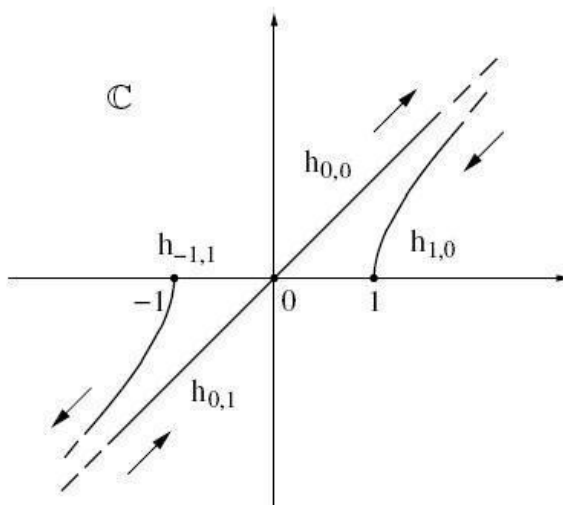
Ezt a konstrukciót láthatjuk a 3.2 ábrán.

3.4. PÉLDA. Tekintsük végül az $r = 3$ esetet és legyen megint csak $a := -1$ és $b := 1$. Ekkor az integrál:

$$\int_{-1}^1 f(x) \cdot e^{i\omega x^3} dx.$$

Az eddigiekhez hasonlóan járunk el, csak most az inverz függvény 3 értékű (3 ágú), ezért

$$h_{x,j}(p) = e^{2\pi i \frac{j}{3}} \sqrt[3]{x^3 + ip}, \quad j = 0, 1, 2.$$



3.2. ábra.

$g(x) = x^2$ esetén a legmeredekebb lejtő konstrukciója.

Az $x = -1$ végpontba a $j = 1$ -hez tartozó görbét, míg az $x = 1$ végpontba a $j = 0$ -hoz tartozó görbét vesszük be, így

$$h_{-1,1}(p) = e^{2\pi i \frac{1}{3}} \sqrt[3]{-1 + ip}, \quad h_{1,0}(p) = \sqrt[3]{1 + ip}.$$

A $\xi = 0$ stacionárius pontba pedig a $j = 1$ -hez, illetve a $j = 0$ -hoz tartozó görbéket vesszük be:

$$h_{0,1}(p) = e^{2\pi i \frac{1}{3}} \sqrt[3]{ip}, \quad h_{0,0}(p) = \sqrt[3]{ip}.$$

Ezt a konstrukciót láthatjuk a 3.3 ábrán.

(3.4) görbe segítségével (3.3) a következő vonalintegrált ölti:

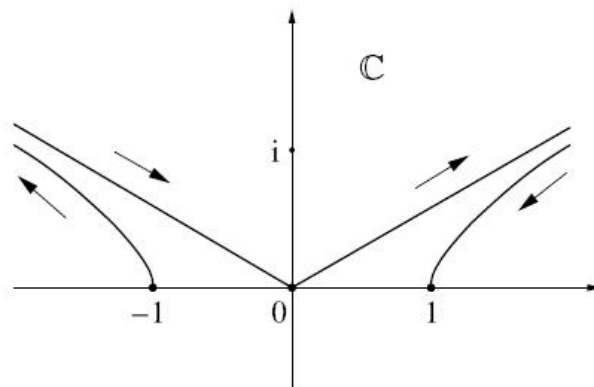
$$\int_0^P f(h_x(p)) \cdot e^{i\omega h_x^r(p)} \cdot h'_x(p) dp = e^{i\omega x^r} \int_0^P f(h_x(p)) \cdot h'_x(p) \cdot e^{-\omega p} dp.$$

3.3. Megjegyzés. Jelölés: Ezt az exponenciálisan csökkenő, nemoszcillációs vonalintegrált jelölje:

$$I[f; h_x] := e^{i\omega x^r} \int_0^P f(h_x(p)) \cdot h'_x(p) \cdot e^{-\omega p} dp.$$

A (3.4) egyenletnek pontosan r darab különböző megoldása van; a j -edik éppen:

$$h_{x,j}(p) = e^{2\pi i \frac{j}{r}} \cdot \sqrt[r]{x^r + ip}, \quad j = 0, \dots, r-1, \quad (3.5)$$



3.3. ábra.

$g(x) = x^3$ esetén a legmeredekebb lejtő konstrukciója.

ahol $h_{x,j}(p)$ mindegyike egy-egy komplex-görbe.

Az $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^r$ komplex függvény analitikus és inverze egy többértékű függvény. Minden ponthoz hozzárendeli az r darab megoldást, vagyis gyököt és ezek pontosan kijelölnek r darab különböző görbét. A végpontokban a legmeredekebb lejtő útja egyértelműen meghatározható a peremfeltételből: $h_a(0) = a$ és $h_b(0) = b$. Legyenek

$$j_1 := \lfloor r/2 \rfloor, \quad \text{illetve} \quad j_2 := 0 \quad (3.6)$$

és keressük az útvonalakat h_{a,j_1} és h_{b,j_2} alakban. A $\xi = 0$ stacionárius pontban minden megoldás kielégíti a peremfeltételt, azaz $h_{0,j}(0) = 0$, $j = 0, \dots, r-1$, mi mégis csak az előírt j_1 és j_2 által meghatározott ágakat vesszük figyelembe. Ezt láthatjuk a 3.2 és 3.3 ábrán $r = 2$ és $r = 3$ esetekben.

3.2.1. Négytagú szumma

Szeretnénk a (3.3) integrált a h_{a,j_1} , h_{b,j_2} , h_{0,j_1} és h_{0,j_2} vonalintegrálok összegére bonatni, hogy aztán numerikusan kiértékelhessük ezeket a vonalintegrálokat. Ehhez először is mondjuk ki a zárt görbékről szóló Cauchy-tételt, majd további tételek kimondásával jutunk közelebb a felbontáshoz.

3.1. Tétel (Cauchy integrál-formula). Legyen $B, D \subset \mathbb{C}$ tartományok, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ reguláris függvény, $\gamma : [a, b] \rightarrow B$ rektifikálható, egyszerű, zárt görbe,

melyre $\text{int}\gamma \subset D$. Ekkor

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

3.1. Lemma. *Legyen u analitikus függvény egy egyszeresen összefüggő $D \subset \mathbb{C}$ tartományon, melyre $[a, b] \subset D$ és legyen $S \subset D$ egy korlátos, összefüggő tartomány, melyre $|u(z)| \leq \varepsilon \quad \forall z \in S$, továbbá, tegyük fel, hogy S bármely két, p és q pontját összekötő S -beli görbe hossza felülről becsülhető egy $M > 0$ konstanssal. Ekkor létezik egy $F(x) \quad x \in [a, b]$ függvény, melyre u integrálja a következővel approximálható*

$$\int_a^x u(z) dz \approx F(a) - F(x) \quad (3.7)$$

egy e hibával, mely kielégíti: $|e| \leq M\varepsilon$. Az F függvény egy vonalintegrál:

$$F(x) = \int_{\Gamma_x} u(z) dz,$$

ahol Γ_x egy tetszőleges, x -ből induló D -beli görbe.

Bizonyítás: Legyen Γ_x egy D -beli görbe x -ből egy tetszőleges S -beli pontba, melyet jelöljön $q(x)$ és Γ_a szintén egy D -beli görbe a -ból $q(a) \in S$ -be. Legyen κ egy S -ben haladó $q(a)$ -t és $q(x)$ -et összekötő görbe. Mivel u analitikus D -ben, 3.1 Cauchy Tétel miatt az integrációs görbe a és x között választható Γ_a , κ , és $-\Gamma_x$ uniójaként. Következésképp az integrál a következő alakba írható:

$$\int_a^x u(z) dz = F(a) + \int_{\kappa} u(z) dz - F(x), \quad \text{ahol} \quad \left| \int_{\kappa} u(z) dz \right| \leq M\varepsilon$$

a vonalintegrál triviális becslése miatt. ■

3.4. Megjegyzés. *Jegyezzük meg, hogy F nem határozható meg teljesen 3.1 Lemma feltételeivel. Általában Γ_x görbe $q(x)$ végpontja x -nek egy tetszőleges függvénye.*

Ha g analitikus, akkor az $e^{i\omega g(x)}$ oszcilláló függvény is analitikus a (3.1) integrálban, mivel x -nek egy függvénye. Ez a függvény abszolút értékben kicsi, ha

$$|e^{i\omega g(x)}| \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\omega \text{Im}g(x)} \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \text{Im}g(x) \geq -\frac{\log(\varepsilon)}{\omega}.$$

Ha g inverze létezik, találhatunk 3.1 Lemmához szükséges S tartományt $g^{-1}(c + id)$ pontokkal, ahol $d \geq d_0$, $d_0 := -\frac{\log(\varepsilon)}{\omega}$.

3.5. Megjegyzés. Jegyezzük meg, hogy általánosan egy analitikus függvény lehet többértékű. Ebben az esetben az inverz függvény nem lesz folytonos a stacionárius pontok, illetve (mondjuk) a ∞ által meghatározott „töröttvonalon” (esetünkben a $[0, \infty)$ félegyenesen), mert ott az inverz függvény féloldali deriváltjai nem fognak megegyezni. Ezen „töröttvonal” pontjain kívül az inverz függvény minden pontban lokálisan létezik, ezért jellemezni tudjuk a felbontás hibáját a 3.1 Lemmában a (3.1) integrál általános esetében, ω függvényeként.

3.2. Tétel. Legyen f és g analitikus egy korlátos nyílt $D \subset \mathbb{C}$ tartományon, melyre $[a, b] \subset D$ és tegyük fel, hogy $g'(z) \neq 0$, $z \in D$. Ekkor a (3.1) integrálnak létezik egy (3.7) approximációja egy $O(e^{-\omega d_0})$ nagyságrendű hibával, ahol $d_0 > 0$ konstans.

Bizonyítás: Legyen $S := \{z : \text{Im}g(z) \geq d_0\} \cap D$, $d_0 > 0$. Itt $|e^{ig(z)\omega}| \leq \varepsilon$. Ilyen d_0 konstans mindig található, mert S nemüres, mivel g analitikus. Tekintsünk egy $x \in [a, b]$ pontot. Mivel g analitikus x -ben, ezért egy elég kicsi környezetében is, tehát a $g(z) = g(x) + id_0$ egyenletnek mindig van egy z megoldása elég kis $d_0 > 0$ -ra ($z = g^{-1}(x + id_0)$). Mivel D összefüggő x egy környezetében és $z \in D$, ezért d_0 elég kicsinek választható. A szükséges geometriai feltételek S -re, melyeket 3.1 Lemma követel, következik g folytonosságából. Kaptuk:

$$\forall x \in S : |f(x) \cdot e^{i\omega g(x)}| \leq |f(x)| \cdot e^{-\omega d_0}.$$

Mivel S korlátos, ($S \subset D$, D korlátos), létezik $C > 0$ konstans, hogy $|f(x)| \leq C$, $x \in S$. Az eredmény következik a 3.1 Lemmából $u(x) = f(x) \cdot e^{i\omega g(x)}$ és $\varepsilon = C \cdot e^{-\omega d_0}$ választással. ■

A ξ stacionárius pontban g deriváltja eltűnik és az $f(x) \cdot e^{i\omega g(x)}$ integrandus nem oszcillál, legalábbis lokálisan. Az integrandus hozzájárulása ξ -ben emiatt nem elhanyagolható. A 3.2 Tétel nem alkalmazható, mert g inverze nem létezik egyértelműen (többértékű függvény) a ξ elágazási pont környezetében. Azért, hogy illusztráljuk a problémát, tekintsük a következő szituációt. Tegyük fel, hogy $g'(x) = 0$ egyenletnek egyetlen megoldása: $\xi \in [a, b]$. Most definiáljuk g következő megszorításait:

$$g_1 := g|_{[a, \xi]} \quad \text{illetve} \quad g_2 := g|_{[\xi, b]}. \quad (3.8)$$

Ekkor g -nek az $[a, b]$ -n nem létezik egyértelmű inverze, de az egyértékű g_1^{-1} ág megtalálható, mely kielégíti $g_1^{-1}(g(x)) = x$, $x \in [a, \xi]$. Ez az ág mindenhol analitikus, kivéve a stacionárius ξ pontban. Hasonlóan, egy egyértékű g_2^{-1} ág létezik, mely a $g_2^{-1}(g(x)) = x$, $x \in [\xi, b]$ egyenletet elégíti ki. Mindkét ág kielégíti a $g(g_i^{-1}(z)) = z$, $i = 1, 2$, az analitikus értelmezési tartományukban. Az integrandus kicsi az S_1 területen a $g_1^{-1}(c + id)$, $d \geq d_0$ formula pontjaival, vagy az S_2 területen a $g_2^{-1}(c + id)$, $d \geq d_0$ formula pontjaival. Könnyen belátható, hogy S_1 és S_2 diszjunktak. Tegyük fel, hogy $y \in S_1$ és $z \in S_2$. Alkalmazva g -t a $g_1^{-1}(y) = g_2^{-1}(z)$ egyenlet mindkét oldalán $\Rightarrow y = z$, ami csak akkor lehetséges, ha $z = \xi \notin S_1, S_2$.

Az út, mely megoldja a $g(h_x(p)) = g(x) + ip$ egyenletet, egy a -ból induló S_1 -beli és egy b -ből induló S_2 -beli úthoz vezet. A megoldás ennél fogva kettéosztja az integrációs intervallumot két részintervallumra: $[a, \xi]$ és $[\xi, b]$. Ez az eljérés a stacionárius pontok tetszőleges száma esetén ismételtető.

3.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy f és g függvények analitikusak a $D \subset \mathbb{C}$ nyílt tartományon, $[a, b] \subset D$. Ha $\xi \in D$ a $g'(x) = 0$ egyenlet egyetlen megoldása (ξ stacionárius pont), és $\xi \in (a, b)$, akkor léteznek az $F_j(x)$ $j = 1, 2$ függvények, melyekre:*

$$\int_s^t f(z) \cdot e^{i\omega g(z)} dz = F_1(s) - F_1(\xi) + F_2(\xi) - F_2(t) + O(e^{-\omega d_0}), \quad d_0 > 0,$$

ahol $s \in [a, \xi]$ és $t \in [\xi, b]$, továbbá

$$F_j(x) := \int_{\Gamma_{x,j}} f(z) \cdot e^{i\omega g(z)} dz, \quad (3.9)$$

ahol $\Gamma_{x,j}$ egy x -ből induló görbe.

Bizonyítás: Definiáljuk $g(x)$ -et, mint (3.8) megszorításban. Az $\int_{\xi}^t f(x) \cdot e^{i\omega g(x)} dx$ leszűkítés megtalálható 3.2 Tétel bizonyításában két módosítással. Először is, a $g(z) = g(x) + id_0$ egyenletnek legalább két megoldása van az $x = \xi$ pont körül. Azt a megoldást választjuk, amelyik kapcsolódik a g inverzének egyértékű g_2^{-1} ágához, amely kielégíti: $g_2^{-1}(g(x)) = x$, $x \in [\xi, b]$. Az elágazás mindig megválasztható úgy, hogy ne gátolja a Cauchy-tétel alkalmazását. Másodszor, S -et most definiáljuk úgy, mint $S := \{z : \text{Im}g(z) \geq d_0, g_2^{-1}(g(z)) = z\} \cap D$, mely D egy összefüggő részével van lefedve, ahol az integrandus kicsi. Ezekkel a módosításokkal a bizonyítás megmutatja

F_2 létezését, mely a következő alakú:

$$\int_{\xi}^t f(z) \cdot e^{i\omega g(z)} dz = F_2(\xi) - F_2(t) + O(e^{-\omega d_0}).$$

Ugyanez az okoskodás alkalmazható, hogy megtaláljuk az $[a, \xi]$ intervallumra történő leszűkítést. Ez vezet az eredményre. ■

Ez utóbbi tétel értelmében mostmár el tudjuk készíteni a 4-tagú szummát, ami a célunk volt:

$$I[f] = I[f, h_{a,j_1}] - I[f, h_{\xi,j_1}] + I[f, h_{\xi,j_2}] - I[f, h_{b,j_2}] + O(e^{-d\omega}), \quad (3.10)$$

ahol $\omega \rightarrow \infty$ és $d > d_0 > 0$.

3.6. Megjegyzés. Az egyszerűség kedvéért csak $P = \infty$ esettel foglalkozunk, ezért elegendő, hogy f analitikus legyen egy elegendően nagy tartományon.

Ezzel elértük, hogy az eredetileg oszcillációs integrálunkat felbontottuk 4 darab nemoszillációs vonalintegrál összegére. A következőkben ezen vonalintegráloknak vizsgáljuk a numerikus kiértékelését.

3.3. A vonalintegrálok numerikus közelítése

Jelölje:

$$\Phi_{x,j}(p) := f(h_{x,j}(p)) \cdot h'_{x,j}(p), \quad x = \{a, \xi, b\}, \quad j = j_1, j_2,$$

ahol $h'_{x,j}(p)$ ismert: $h'_{x,j}(p) = e^{2\pi i \frac{j}{r}} \cdot \frac{j}{r} \cdot (x^r + ip)^{-\frac{r-1}{r}}$, (3.5) p-szerinti deriválásával.

Ezzel a jelöléssel a 4-tagú szummánk a következő formára egyszerűsödik:

$$\begin{aligned} I[f] \sim & e^{i\omega a^r} \int_0^{\infty} \Phi_{a,j_1}(p) \cdot e^{-\omega p} dp - \int_0^{\infty} \Phi_{\xi,j_1}(p) \cdot e^{-\omega p} dp + \\ & + \int_0^{\infty} \Phi_{\xi,j_2}(p) \cdot e^{-\omega p} dp - e^{i\omega b^r} \int_0^{\infty} \Phi_{b,j_2}(p) \cdot e^{-\omega p} dp. \end{aligned}$$

Most külön-külön meg fogjuk vizsgálni a végpontok és a stacionárius pontok esetét.

3.3.1. Vonalintegrálok a végpontokban

A vonalintegrálok a megfelelő a és b végpontokban jól viselkednek és az aszimptotikus kiterjesztésük levezethető. Például, $x = a$ -ban $I[f; h_{a,j_1}] \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k[f] \omega^{-k-1}$, ahol az $a_k[f]$ együtthatók $f^{(j)}(a)$ -tól függenek $j = 0, \dots, k$. Ha valaki az aszimptotikus kiterjesztés n -edik részletösszegével approximálja a vonalintegrált, akkor a hiba aszimptotikusan viselkedik és

$$I[f; h_{a,j_1}] - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \omega^{-k-1} = O(\omega^{-n-1}), \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (3.11)$$

Ezek az aszimptotikus kiterjesztések azonban általában divergensnek, még akkor is, ha a vonalintegrálok amúgy jól viselkednek. Ennélfogva ω bármely rögzített értékére a hiba (3.11)-ben nagy lehet és nem lehet jelentősen csökkenteni a szumma további tagjainak megadásával. Ezért más utat járunk be: Abban vagyunk érdekeltek, amikor a nevezetes kvadratúra-formulák egy családjába eső kvadratúrával tudjuk approximálni a vonalintegrálokat. Legyen:

$$Q[f; h_{a,j_1}] := \sum_{k=1}^n f(x_k(\omega)) w_k(\omega) \quad (3.12)$$

ω -tól függő $x_k(\omega)$ pontokkal és $w_k(\omega)$ súlyokkal, ahol

$$I[f; h_{a,j_1}] - Q[f; h_{a,j_1}] = O(\omega^{-S_n}), \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (3.13)$$

Célunk ezen felül az is, hogy maximalizáljuk S_n aszimptotikus rendjét minden n -re. A (3.12) formula egy vonalintegrált közelít. Hajtsuk végre a $q = \omega p$ helyettesítést:

$$\begin{aligned} Q[f; h_{a,j_1}] &= \sum_{k=1}^n f(x_k(\omega)) w_k(\omega) \sim e^{i\omega a^r} \int_0^{\infty} \Phi_{a,j_1}(p) \cdot e^{-\omega p} dp = \\ &= e^{i\omega a^r} \frac{1}{\omega} \int_0^{\infty} f\left(h_{a,j_1}\left(\frac{q}{\omega}\right)\right) \cdot h'_{a,j_1}\left(\frac{q}{\omega}\right) \cdot e^{-q} dq. \end{aligned}$$

Kaptunk egy improprius integrált e^{-q} súlyfüggvénnyel. Ezt már könnyen tudjuk approximálni a jólismert Gauss-Laguerre kvadratúrával. Legyenek x_k^{GL} az alappontjai és w_k^{GL} a súlyai:

$$\int_0^{\infty} f\left(h_{a,j_1}\left(\frac{q}{\omega}\right)\right) \cdot h'_{a,j_1}\left(\frac{q}{\omega}\right) \cdot e^{-q} dq \sim \sum_{k=1}^n f\left(h_{a,j_1}\left(\frac{x_k^{GL}}{\omega}\right)\right) h'_{a,j_1}\left(\frac{x_k^{GL}}{\omega}\right) w_k^{GL}$$

Kaptuk:

$$\sum_{k=1}^n f(x_k(\omega))w_k(\omega) = \sum_{k=1}^n f\left(h_{a,j_1}\left(\frac{x_k^{GL}}{\omega}\right)\right)h'_{a,j_1}\left(\frac{x_k^{GL}}{\omega}\right)w_k^{GL} \quad (3.14)$$

A (3.14) egyenlőségből leolvashatjuk az $x_k(\omega)$ alappontok és $w_k(\omega)$ súlyok (egy lehetőség) értékét:

$$x_k(\omega) := h_{a,j_1}\left(\frac{x_k^{GL}}{\omega}\right), \quad \text{illetve} \quad w_k(\omega) := \frac{e^{i\omega a r}}{\omega} \cdot h'_{a,j_1}\left(\frac{x_k^{GL}}{\omega}\right) \cdot w_k^{GL}. \quad (3.15)$$

Most egy lemmát mondunk ki, amely megmutatja, hogy az approximáció aszimptotikus rendje a Gauss-Laguerre polinom fokából meghatározható.

3.2. Lemma. *Tekintsük a $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ számot és egy kvadratura szabályt n darab x_k alapponttal és w_k súlyokkal, melyre*

$$\int_0^\infty x^m \cdot e^{-x^\alpha} dx = \sum_{k=1}^n x_k^m w_k, \quad m = 0, \dots, d-1. \quad (3.16)$$

Ha $\int_0^\infty u(x) \cdot e^{-\omega x^\alpha} dx$ létezik valamilyen $\omega > \omega_0$ súlyfüggvényre és u analitikus az $x = 0$ pontban, akkor

$$\int_0^\infty u(x) \cdot e^{-\omega x^\alpha} dx - \omega^{-\frac{1}{\alpha}} \sum_{k=1}^n u\left(x_k \omega^{-\frac{1}{\alpha}}\right) w_k = O(\omega^{-\frac{d+1}{\alpha}}), \quad \omega \rightarrow \infty.$$

Bizonyítás: Használva az $x = \omega^{-\frac{1}{\alpha}} t$ helyettesítést:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^m \cdot e^{-x^\alpha} dx &= \omega^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^\infty \left(\omega^{-\frac{1}{\alpha}} t\right)^m \cdot \left(e^{-\omega^{-\frac{1}{\alpha}} t}\right)^\alpha dt = \\ &= \omega^{-\frac{1}{\alpha}} \sum_{k=1}^n \left(x_k \omega^{-\frac{1}{\alpha}}\right)^m w_k, \quad m = 0, \dots, d-1. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ez utóbbi egyenlőség a (3.16) pontossági feltevés miatt következik. Mivel u analitikus az $x = 0$ -ban, így konvergens Taylor-sora van tetszőleges $R > 0$ -ra

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{u^{(i)}(0)}{i!} x^i, \quad |x| < R$$

$$u(x) = \sum_{i=0}^{d-1} \frac{u^{(i)}(0)}{i!} x^i + \sum_{i=d}^{\infty} \frac{u^{(i)}(0)}{i!} x^i.$$

Jelölje:

$$u_d(x) := \sum_{i=0}^{d-1} \frac{u^{(i)}(0)}{i!} x^i, \quad \text{illetve} \quad u_l(x) := \sum_{i=d}^{\infty} \frac{u^{(i)}(0)}{i!} x^i,$$

így $u(x) = u_d(x) + u_l(x)$, ahol $u_d \in \mathcal{P}_{d-1}$. Legyen: $\mathcal{L}_\omega[u] := \int_0^\infty u(x) \cdot e^{-\omega x^\alpha} dx$.

Ezt továbbírva:

$$= \int_0^\infty u_d(x) \cdot e^{-\omega x^\alpha} dx + \int_0^\infty u_l(x) \cdot e^{-\omega x^\alpha} dx = \mathcal{L}_\omega[u_d] + \mathcal{L}_\omega[u_l].$$

Mivel $u_d \in \mathcal{P}_{d-1}$, így $\mathcal{L}_\omega[u_d] = \omega^{-\frac{1}{\alpha}} \sum_{k=1}^n u_d(x_k \omega^{-\frac{1}{\alpha}}) w_k$, ami a (3.17) egyenlőségből következik.

Tehát a kvadratúra hibája:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty u(x) \cdot e^{-\omega x^\alpha} dx - \omega^{-\frac{1}{\alpha}} \sum_{k=1}^n u(x_k \omega^{-\frac{1}{\alpha}}) w_k = \mathcal{L}_\omega[u] - \omega^{-\frac{1}{\alpha}} \sum_{k=1}^n u(x_k \omega^{-\frac{1}{\alpha}}) w_k = \\ & = \mathcal{L}_\omega[u_d] + \mathcal{L}_\omega[u_l] - \omega^{-\frac{1}{\alpha}} \sum_{k=1}^n u(x_k \omega^{-\frac{1}{\alpha}}) w_k = \omega^{-\frac{1}{\alpha}} \sum_{k=1}^n u_d(x_k \omega^{-\frac{1}{\alpha}}) w_k + \mathcal{L}_\omega[u_l] - \\ & - \omega^{-\frac{1}{\alpha}} \sum_{k=1}^n u_d(x_k \omega^{-\frac{1}{\alpha}}) w_k - \omega^{-\frac{1}{\alpha}} \sum_{k=1}^n u_l(x_k \omega^{-\frac{1}{\alpha}}) w_k = \mathcal{L}_\omega[u_l] - \omega^{-\frac{1}{\alpha}} \sum_{k=1}^n u_l(x_k \omega^{-\frac{1}{\alpha}}) w_k. \end{aligned}$$

Itt mindkét tag becslhető $O(\omega^{-\frac{d+1}{\alpha}})$ -val, ugyanis:

i) Az első tagban az $x^\alpha = t$ helyettesítést végrehajtva, majd u_l definícióját felhasználva:

$$\mathcal{L}_\omega[u_l] = \int_0^\infty u_l(x) \cdot e^{-\omega x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty u_l(t^{\frac{1}{\alpha}}) \cdot t^{\frac{1}{\alpha}-1} \cdot e^{-\omega t} dt.$$

Az integrandus:

$$t^{\frac{1}{\alpha}-1} \cdot u_l(t^{\frac{1}{\alpha}}) = t^{\frac{1}{\alpha}-1} \sum_{i=d}^{\infty} \frac{u^{(i)}(0)}{i!} (t^{\frac{1}{\alpha}})^i = t^{\frac{1}{\alpha}-1} \cdot \left(\frac{u^{(d)}(0)}{d!} t^{\frac{d}{\alpha}} + \dots \right) \sim t^{\frac{d+1}{\alpha}-1},$$

mert $u^{(d)}(0) \neq 0$. A Wattson-lemma miatt:

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty u_l(t^{\frac{1}{\alpha}}) \cdot t^{\frac{1}{\alpha}-1} \cdot e^{-\omega t} dt \sim \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty t^{\frac{d+1}{\alpha}-1} \cdot e^{-\omega t} dt = O(\omega^{-\frac{d+1}{\alpha}}), \quad \omega \rightarrow \infty.$$

Azaz: $\mathcal{L}_\omega[u_l] = O(\omega^{-\frac{d+1}{\alpha}})$.

ii) Elég nagy ω -ra, melyre $x_k \omega^{-\frac{1}{\alpha}} < R$

$$u_l(x_k \omega^{-\frac{1}{\alpha}}) = u(x_k \omega^{-\frac{1}{\alpha}}) - u_d(x_k \omega^{-\frac{1}{\alpha}}) = \sum_{i=d}^{\infty} \frac{u^{(i)}(0)}{i!} (x_k \omega^{-\frac{1}{\alpha}})^i = O(\omega^{-\frac{d}{\alpha}})$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n u_l(x_k \omega^{-\frac{1}{\alpha}}) w_k = O(\omega^{-\frac{d}{\alpha}}) \quad \Rightarrow \quad \omega^{-\frac{1}{\alpha}} \sum_{k=1}^n u_l(x_k \omega^{-\frac{1}{\alpha}}) w_k = O(\omega^{-\frac{d+1}{\alpha}}).$$

■

3.4. Tétel. *Definiáljuk a $Q[f; h_{a,j_1}]$ kvadratúra szabályt a (3.12) formulában megadott módon a (3.15)-ben adott pontokkal és súlyokkal. Ekkor az approximáció hibája:*

$$I[f; h_{a,j_1}] - Q[f; h_{a,j_1}] = O(\omega^{-2n-1}), \quad \omega \rightarrow \infty.$$

Bizonyítás: Azonnal következik a 3.2 Lemmából $\alpha = 1$ és $u(x) = f(h_{a,j_1}(x))$ választással. Ez az u függvény analitikus az $x = 0$ -ban. ■

3.7. Megjegyzés. *i) A 3.4 Tétel eredménye a másik végpontra, b -re is érvényes. Még általánosabban, bármely x -re érvényes, ahol $g'(x) \neq 0$.*

ii) A stacionárius pontokban a $h_{\xi,j}(p)$ függvény nem analitikus a 0-ban, így a 3.2 Lemma nem használható fel azonnal.

iii) Fontos megjegyezni, hogy ellentétben a Fylton-típusú kvadratúra-szabállyal, $Q[f; h_{a,j_1}]$ általában nem pontos, amikor f polinom. Csak akkor pontos, ha $f(h_{a,j_1}(p)) \cdot h'_{a,j_1}(p)$ egy kellően kis fokú polinom.

3.3.2. Vonalintegrálok a stacionárius pontokban

Hasonló érvelés vonatkozik azon integrálokra, melyek tartalmazzák az $x = 0$ stacionárius pontot. Emlékeztetőül, az aszimptotikus kiterjesztés formulája:

$$I[f; h_{\xi,j_m}] \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_{m,k}[f] \omega^{-\frac{k+1}{r}}, \quad m = 1, 2 \quad \omega \rightarrow \infty,$$

ahol az $a_{m,k}[f]$ együtthatók az $f^{(i)}(0)$, $i = 0, 1, \dots, k$ értékeiktől függenek. Ennek következtében az aszimptotikus kiterjesztés n -edik részletösszege aszimptotikusan viselkedik, mivel:

$$I[f; h_{\xi,j_m}] - \sum_{k=0}^{n-1} a_{m,k}[f] \omega^{-\frac{k+1}{r}} = O(\omega^{-\frac{n+1}{r}}), \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (3.18)$$

Egy alkalmas Gauss-típusú kvadratúra figyelembe vételével az aszimptotikus rend ebben az esetben is duplázódhat. Tekintsük az $I[f; h_{\xi,j_2}]$ vonalintegrált és hajtsuk végre a $q = \sqrt[r]{p}$ helyettesítést:

$$I[f; h_{\xi,j_2}] = \frac{i}{r} \int_0^{\infty} f(\sqrt[r]{ip}) \cdot (ip)^{-\frac{r-1}{r}} \cdot e^{-\omega p} dp = \sqrt[r]{i} \int_0^{\infty} f(q\sqrt[r]{i}) \cdot e^{-\omega q^r}.$$

Most egy újabb helyettesítéssel ($t^r = \omega q^r$) és a $\delta_r := \left(\frac{i}{\omega}\right)^{\frac{1}{r}}$ jelöléssel

$$= \delta_r \int_0^{\infty} f(\delta_r t) \cdot e^{-t^r} dt.$$

Ez az alak már alkalmas Gauss-kvadratúrára, az e^{-t^r} nemsztenderd súlyfüggvénnyel. Jelölje a pontokat és súlyokat rendre x_k^{NS} és w_k^{NS} és definiáljuk

$$x_k(\omega) := \delta_r x_k^{NS}, \quad \text{illetve} \quad w_k(\omega) := \delta_r w_k^{NS}. \quad (3.19)$$

A következő tétel a 3.2 Lemmából következik $\alpha = r$ választással.

3.5. Tétel. *Definiáljuk a $Q[f; h_{\xi, j_2}]$ kvadratúra szabályt a (3.19)-ben megadott alap-pontokkal és súlyokkal. Ekkor a stacionárius pontban felírt legmeredekebb lejtőjű vonalintegrál approximációjában a hiba:*

$$I[f; h_{\xi, j_2}] - Q[f; h_{\xi, j_2}] = O(\omega^{-\frac{2n+1}{r}}), \quad \omega \rightarrow \infty.$$

3.8. Megjegyzés. *Az aszimptotikus rend valóban hozzávetőlegesen kétszerese a (3.18) rendjének. Egy hasonló eredménnyel kecsegtet $I[f; h_{\xi, j_1}]$.*

3.9. Megjegyzés. *A (3.3) integrált tekinthetjük, mint egy folytonos lineáris funkcionált, ezért*

$$\mathcal{L}[f] := \int_0^\infty f(x) \cdot e^{-x^r} dx. \quad (3.20)$$

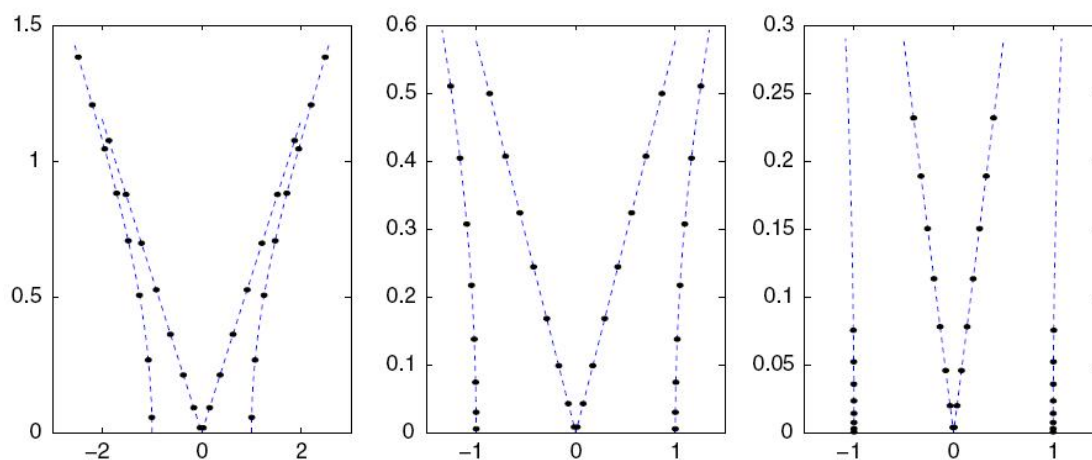
3.3.3. Numerikus példák

Ebben a részben illusztráljuk a Gauss-kvadratúra véghezvitelét. Illusztráljuk az alappontok elhelyezkedését a komplex síkon ω különböző értékeire. Tekintsük a következő integrálokat:

$$I_1 := \int_{-1}^1 \sin(2x) \cdot e^{i\omega x^3} dx. \quad (3.21)$$

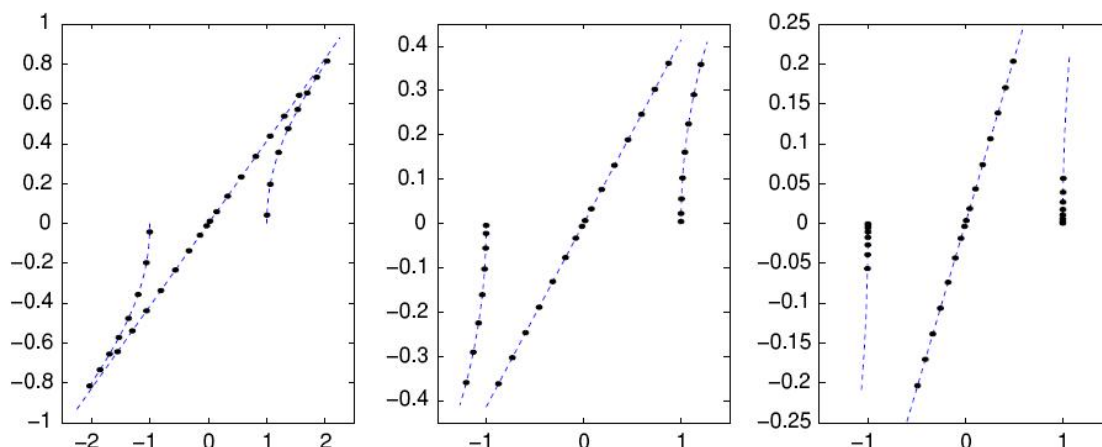
$$I_2 := \int_{-1}^1 x \cdot \log(x+3) \cdot e^{i\omega x^4} dx. \quad (3.22)$$

A 3.4 ábra I_1 alappontjait ábrázolja ($r = 3$ eset), míg a 3.5 ábra I_2 alappontjait vázolja ($r = 4$ eset) $\omega = 1$, $\omega = 10$ és $\omega = 100$ értékekre. Mind az alappontokat, mind a legmeredekebb lejtőt ábráztuk (szaggatott vonal). Növekvő ω esetén az alappontok egyre inkább megközelítik az integrációs intervallum végpontjait és a stacionárius pontot, vagyis a , b és az origó körül helyezkednek el.



3.4. ábra.

A kvadratúra pontok elhelyezkedése egy oszcillációs integrál (I_1) a $[-1, 1]$ -en $r = 3$ -mal, a megfelelő $\omega = 1$ (bal), $\omega = 10$ (közép) és $\omega = 100$ (jobb) értékekre. Minden görbén 8 pont lett kiszámolva. A pontok legmeredekebb lejtő mentén helyezkednek el (szaggatott vonal).



3.5. ábra.

A kvadratúra alappontjainak elhelyezkedése a $[-1, 1]$ -en oszcillációs integrálra $r = 4$ -gyel (I_2), rendre $\omega = 1$ (bal), $\omega = 10$ (közép), $\omega = 100$ (jobb) értékekre. Minden egyes görbén 8 pont lett kiszámolva. A pontok a legmeredekebb lejtő mentén helyezkednek el (szaggatott vonal).

3.4. Aszimptotikusan optimális kvadratúra-szabályok

A Gauss-kvadratúra szabályokat a legmeredekebb lejtőjű integrálok numerikus kiértékelésére használjuk, javítva az aszimptotikus kiterjesztés aszimptotikus rendjét. A módszer megköveteli a stacionárius pontokban a két vonalintegrál kiértékelését, ahogy azt korábban láttuk. Mindkét integrálhoz n darab kvadratúra pontot használunk, a teljes integrandus kiértékeléséhez tehát $2n$ pont szükségeltetik. Az aszimptotikus kiterjesztésben $2n$ darab tagot használva a két közelítés hibája ugyanahhoz az aszimptotikus rendhez vezet.

Az eredményünk javítható, megfigyelve, hogy talán kombinálhatjuk a két legmeredekebb lejtőjű integrált a stacionárius pontokban. Meg fogjuk vizsgálni annak a lehetőségét, hogy hogyan tudnánk kiértékelni a két különböző integrált.

Legyen $\lambda_r := e^{2\pi i \lfloor r/2 \rfloor \frac{1}{r}}$. Ekkor, ha

- i) r páros, azaz $r = 2s$ alakú $\Rightarrow \lambda_{2s} = e^{2\pi i \lfloor 2s/2 \rfloor \frac{1}{2s}} = e^{\pi i} = -1$,
- ii) r páratlan, azaz $r = 2s + 1$ alakú $\Rightarrow \lambda_{2s+1} = e^{2\pi i \lfloor 2s+1/2 \rfloor \frac{1}{2s+1}} = e^{\frac{2\pi i s}{2s+1}}$.

Kaptuk:

$$\lambda_r = e^{\frac{2\pi i s}{2s+1}}, \quad \text{ha } r = 2s + 1, \quad (3.23)$$

$$\text{illetve } \lambda_r = -1, \quad \text{ha } r = 2s.$$

Emlékeztetőül, $\delta_r = \left(\frac{i}{\omega}\right)^{\frac{1}{r}}$, így $\lambda_r \delta_r$:

$$i) r = 2s: \lambda_r \delta_r = -\delta_r = -\left(\frac{i}{\omega}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$ii) r = 2s + 1: \lambda_r \delta_r = \left(\frac{e^{\pi i s}}{\omega}\right)^{\frac{1}{2s+1}} \cdot i =: \varepsilon_s \cdot i.$$

Ugyanis: Megmutatjuk, hogy az egyenlőség fennáll a megfelelő $2s + 1$ -edik gyök választásával. Ez teljesül akkor, ha mindkét oldal $2s + 1$ -edik hatványa ugyanaz. Emeljük tehát mindkét oldalt a $2s + 1$ -edik hatványra. Ekkor a bal oldal:

$$(\lambda_r \delta_r)^{2s+1} = \left(e^{\frac{2\pi i s}{2s+1}} \cdot \left(\frac{i}{\omega}\right)^{\frac{1}{2s+1}}\right)^{2s+1} = e^{2\pi i s} \cdot \frac{i}{\omega} = \frac{i}{\omega}.$$

Illetve a jobb oldal:

$$(\varepsilon_s \cdot i)^{2s+1} = \frac{e^{\pi i s}}{\omega} \cdot i^{2s+1} = \frac{(-1)^s}{\omega} \cdot i \cdot i^{2s} = \frac{(-1)^s}{\omega} \cdot i \cdot (-1)^s = \frac{i}{\omega}.$$

Kaptuk tehát, hogy mindkét oldal $2s+1$ -edik hatványa ugyanaz, és ez kellett nekünk. Ugyanakkor az is teljesül, hogy:

$$\delta_r = \bar{\varepsilon}_s \cdot i.$$

Az előző eredményt felhasználva:

$$\begin{aligned} \delta_r &= \frac{1}{\lambda_r} \cdot \varepsilon_s \cdot i = e^{-\frac{2\pi i s}{2s+1}} \cdot \left(\frac{e^{\pi i s}}{\omega}\right)^{\frac{1}{2s+1}} \cdot i = e^{-\frac{2\pi i s}{2s+1}} \cdot \left(\frac{1}{\omega}\right)^{\frac{1}{2s+1}} \cdot e^{\frac{\pi i s}{2s+1}} \cdot i = \\ &= \left(\frac{1}{\omega}\right)^{\frac{1}{2s+1}} \cdot e^{-\frac{\pi i s}{2s+1}} \cdot i = \bar{\varepsilon}_s \cdot i. \end{aligned}$$

Ezen jelölések mellett:

$$I[f; h_{\xi, j_2}] - I[f; h_{\xi, j_1}] = \delta_r \int_0^\infty f(\delta_r t) \cdot e^{-t^r} dt - \lambda_r \delta_r \int_0^\infty f(\lambda_r \delta_r t) \cdot e^{-t^r} dt.$$

Következésképpen páros és páratlan r -ek esetében különböző eredményre jutunk.

3.4.1. Páros r -ek esete

Amennyiben r páros (azaz $r = 2s$ alakú), a stacionárius pont hozzájárulása egy $t = -t$ helyettesítéssel a második integrálban könnyen átalakítható egy egyszerű integrállá a $(-\infty, \infty)$ intervallumon:

$$\begin{aligned} I[f; h_{\xi, j_2}] - I[f; h_{\xi, j_1}] &= \delta_r \left(\int_0^\infty f(\delta_r t) \cdot e^{-t^{2s}} dt + \int_0^\infty f(-\delta_r t) \cdot e^{-t^{2s}} dt \right) = \\ &= \delta_r \int_{-\infty}^\infty f(\delta_r t) \cdot e^{-t^{2s}} dt. \end{aligned}$$

Ebben az esetben az út egy egyenes vonal, amely $\frac{\pi}{2r}$ szöget zár be a valós tengellyel. Ezt láthatjuk $r = 2$ esetben a 3.2 ábrán. Az $e^{-t^{2s}}$ súlyfüggvényt a $(-\infty, \infty)$ -en Freud-súlynak nevezik.

3.10. Megjegyzés. $s = 1$ esetén a klasszikus Gauss-Hermite kvadratúrát kapjuk vissza.

Ehhez az elrendezéshez a 3.5 Tétel aszimptotikus rendjét tudjuk biztosítani. A következő Lemma a 3.2 Lemma egy variációja:

3.3. Lemma. Tekintsük a $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ számot és egy kvadratúra szabályt n darab x_k alapponttal és w_k súlyokkal, melyre

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m \cdot e^{-x^\alpha} dx = \sum_{k=1}^n x_k^m w_k, \quad m = 0, \dots, d-1.$$

Ha $\int_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot e^{-\omega x^\alpha} dx$ létezik valamilyen $\omega > \omega_0$ súlyfüggvényre és u analitikus az $x = 0$ pontban, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot e^{-\omega x^\alpha} dx - \omega^{-\frac{1}{\alpha}} \sum_{k=1}^n u(x_k \omega^{-\frac{1}{\alpha}}) w_k = O(\omega^{-\frac{d+1}{\alpha}}), \quad \omega \rightarrow \infty.$$

Bizonyítás: A bizonyítás teljesen analóg a 3.2 Lemmáéval. ■

Definiáljuk a következő folytonos lineáris funkcionált:

$$\mathcal{L}_H[f] := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-x^{2s}} dx. \quad (3.24)$$

3.11. Megjegyzés. Ez az eredmény azt mutatja, hogy a (3.20) funkcionálnak megfelelő kvadratúra szabályok helyett inkább az olyan kvadratúrák iránt érdeklődjünk, melyek a (3.24) folytonos lineáris funkcionálnak felelnek meg.

Ez egy Hermite-típusú Gauss-kvadratúra szabály, ezért legyenek x_k^H -k az alappontjai és w_k^H -k a súlyai, $k = 1, \dots, n$ és (3.19)-cel analóg módon válasszuk:

$$x_k(\omega) := \delta_r x_k^H, \quad \text{illetve} \quad w_k(\omega) := \delta_r w_k^H. \quad (3.25)$$

Ekkor tehát a következő eredményünk van.

3.6. Tétel. *Definiáljuk a $Q_H[f]$ kvadratúra szabályt a (3.25)-ben megadott alappontokkal és súlyokkal. Ekkor az approximáció hibája a stacionárius pontokban páros r -ek esetén:*

$$(I[f; h_{\xi, j_2}] - I[f; h_{\xi, j_1}]) - Q_H[f] = O(\omega^{-\frac{2n+1}{r}}), \quad \omega \rightarrow \infty.$$

3.12. Megjegyzés. *A (3.24) folytonos lineáris funkcionál pozitív definit, ezért a Gauss-kvadratúra garantáltan létezik.*

3.4.2. Páratlan r -ek esete

Amikor $r = 2s + 1$ páratlan, az átalakítás minőségileg nagyon különböző. A kombinált út két félegyenes uniója, amelyek $\frac{r-1}{r}\pi$ szögben metszik egymást.

3.13. Megjegyzés. *Emlékeztetőül, $\delta_r = (\frac{i}{\omega})^{\frac{1}{r}}$, továbbá beláttuk, hogy*

$$\lambda_r \delta_r = \varepsilon_s i, \quad \text{ahol} \quad \varepsilon_s = \left(\frac{e^{\pi i s}}{\omega} \right)^{\frac{1}{2s+1}}, \quad \text{illetve} \quad \delta_r = \bar{\varepsilon}_s i.$$

Így a kombinált legmeredekebb lejtő görbéje egy szimmetrikusabb alakra hozható:

$$I[f; h_{\xi, j_2}] - I[f; h_{\xi, j_1}] = i \left[\bar{\varepsilon}_s \int_0^\infty f(\bar{\varepsilon}_s i t) \cdot e^{-t^{2s+1}} dt - \varepsilon_s \int_0^\infty f(\varepsilon_s i t) \cdot e^{-t^{2s+1}} dt \right]. \quad (3.26)$$

Definiáljuk a következő folytonos lineáris funkcionált a következő képpen:

$$\mathcal{M}[f] := \int_\Gamma f(z) \cdot e^{iz^{2s+1}} dz, \quad (3.27)$$

ahol Γ a stacionárius pontban felírt legmeredekebb lejtő két görbéjének uniója (V-alak).

3.14. Megjegyzés. *Hasonlóan $\mathcal{L}[\cdot]$ folytonos lineáris funkcionálhoz, ez a definíció sem függ ω -tól.*

Γ megfelelő választásával megkapjuk (3.26) paraméterezését $\omega = 1$ -gyel. Tegyük fel, hogy létezik Gauss-kvadratúra szabály (3.27)-re, valamilyen x_k^M alappontokkal és w_k^M súlyokkal. Legyen:

$$x_k(\omega) := \omega^{-\frac{1}{r}} x_k^M, \quad \text{illetve} \quad w_k(\omega) := \omega^{-\frac{1}{r}} w_k^M \quad (3.28)$$

és a kvadratúraformula legyen

$$Q_M[f] := \sum_{k=1}^n f(x_k(\omega))w_k(\omega)$$

egy egyszerű approximációja (3.26)-nak. A 3.3 Lemma és a 3.6 Tétel analóg mintájára könnyen megfogalmazhatjuk a következőket. A lemmát nem, csak a tételt mondjuk ki.

3.7. Tétel. *A $Q_M[f]$ kvadratúra szabály approximációs hibája a stacionárius pontokban páratlan r -ek esetén:*

$$(I[f; h_{\xi, j_2}] - I[f; h_{\xi, j_1}]) - Q_M[f] = O(\omega^{-\frac{2n+1}{r}}), \quad \omega \rightarrow \infty.$$

3.15. Megjegyzés. *Mivel $\mathcal{M}[\cdot]$ indefinit, ezért nem egyértelmű, hogy létezik Gauss-kvadratúra. Amennyiben van megfelelő Gauss-kvadratúra, akkor teljesül a 3.7 Tétel állítása.*

3.5. PÉLDA. *$r = 3$ esetén $\mathcal{M}[x^2] = 0$, tehát $\mathcal{M}[\cdot]$ valóban indefinit.*

Mindazonáltal létezik megfelelő Gauss-kvadratúra formula és numerikusan meghatározható. A 3.7 Tétel aszimptotikus rendje a gyakorlatban megfigyelt.

3.4.3. Numerikus példák

Ebben a részben a Gauss-kvadratúra szabály megfelel az $\mathcal{M}[f]$ funkcionálnak, x_k^M alappontokkal és w_k^M súlyokkal. Egyszer kell kiszámolnunk n és r minden értékét, melyek még ω -tól függnék.

Például, tekintsük a következő integrált:

$$I = \int_{-1}^1 \cos(3x + 2) \cdot e^{i\omega x^4} dx. \quad (3.29)$$

Ennek az integrálnak egy harmadrendű stacionárius pontja van az origóban. A legmeredekebb lejtő útja keresztül megy az origón, összekapcsolva azt egy egyenes vonallá. Alkalmazhatjuk a Gauss-Hermite-típusú kvadratúrát, ahogy azt a 3.4.1 részben írtuk.

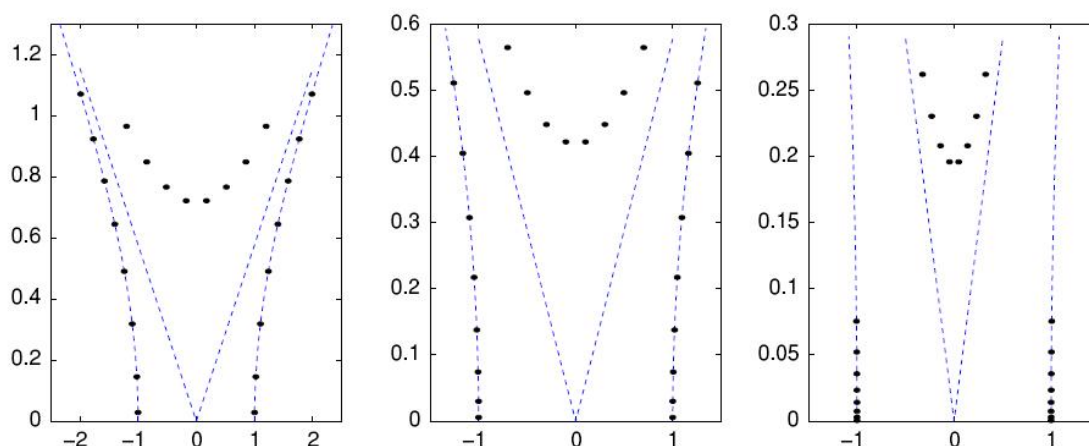
Azonban r páratlan értékeire a Gauss-kvadratúra formulát, mint egy indefinit funkcionált használjuk. Tekintsük a következő integrálokat:

$$\int_{-1}^1 \frac{\cos(4x)}{x+3} \cdot e^{i\omega x^3} dx \quad (3.30)$$

és

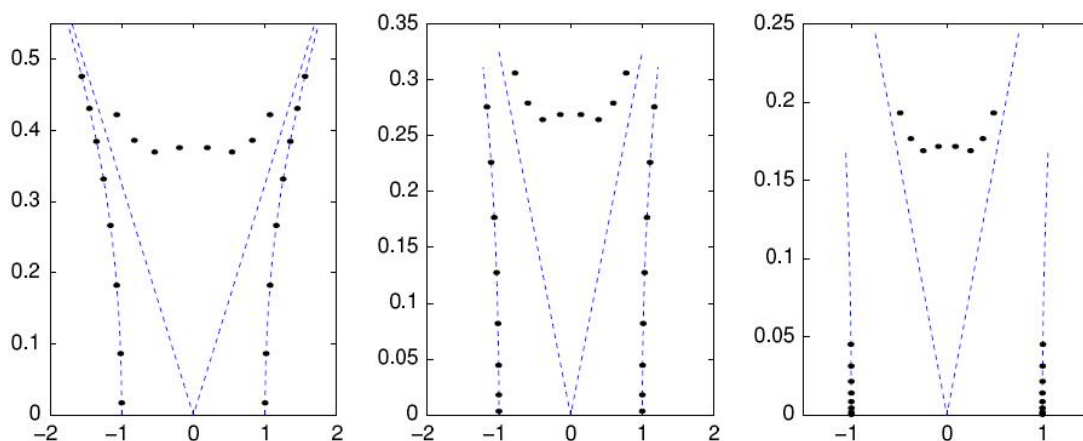
$$\int_{-1}^1 \sqrt{x+6} \cdot e^{i\omega x^5} dx. \quad (3.31)$$

Az alappontok elhelyezkedését mutatja a 3.6 ábra ((3.30) esetén) $r = 3$ eset és a 3.7 ábra ((3.31)) $r = 5$ esetben. Az ábrák tartalmazzák az alappontokat az integrálok végpontjaiban, ± 1 -ben. Az eredményeket ω különböző értékeire mutatjuk. A kvadratúra pontok hozzájárulása a stacionárius pontokhoz egy sima, a két legmeredekebb lejtőjű út által határolt görbének tűnik.



3.6. ábra.

A kvadratúra alappontok helyzete $r = 3$ esetén $[-1, 1]$ -en ((3.30) integrálhoz), $\omega = 2$ nek megfelelően (bal), $\omega = 10$ (közép) és $\omega = 100$ (jobb). 8 pont lett kiszámolva minden egyes integrálhoz.



3.7. ábra.

A kvadratúra alappontok helyzete $r = 5$ esetén $[-1, 1]$ -en ((3.31) integrálhoz), $\omega = 2$ -nek megfelelően (bal), $\omega = 10$ (közép) és $\omega = 100$ (jobb). 8 pont lett kiszámolva minden egyes integrálhoz.

3.5. Még általánosabb oszcillációs függvények

Ezidáig figyelmünket inkább a (3.3)-ban említett integrálokra korlátoztuk, mint a sokkal általánosabb (3.1) formulára. Most megmutatjuk, hogy az általános oszcillációs $g(x)$ esetének felölelése nem követel új kvadratúraformulát. Az oszcillációs integrálok kiértékelése végrehajtható a korábbi részekben megkonstruált kvadratúraformulával bármilyen $g(x)$ oszcillációs függvény esetén.

3.5.1. Globális helyettesítés

Az egyszerűség kedvéért először is tegyük fel, hogy a $g(x)$ rezgéseltő oszcillátor-nak a $\xi = 0$ -ban egy $(r - 1)$ -edrendű stacionárius pontja van és $\xi \in (a, b)$. Ezekkel a feltételekkel ez arra csábít minket, hogy az $x = u(y)$ helyettesítést vegyük figyelembe. Tegyük fel továbbá, hogy ez a helyettesítés kielégíti a $g(u(y)) = y^r$ egyenletet. Feltevéseink miatt $u(y)$ függvény garantáltan létezik és invertálható az $[a, b]$ intervallumon. Ezzel a megközelítéssel kapjuk:

$$\int_a^b f(x) \cdot e^{i\omega g(x)} dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(y)) \cdot u'(y) \cdot e^{i\omega y^r} dy. \quad (3.32)$$

Így a problémát visszavezettük a korábban tárgyalt integrálra. A (3.32)-es integrált hatékonyan ki tudjuk értékelni, miután az integrációs görbét eltoltuk a legmere-

dekebb lejtőjű útra.

3.16. Megjegyzés. *A helyettesítés nem függ ω -tól, ezért minden aszimptotikus hibabecslés a továbbiakban is fennáll.*

3.5.2. A számítás lokalizálása

Az $x = u(y)$ helyettesítés talán fáradságos, hogy a gyakorlatban megkonstruáljuk, különösen az $x = \xi$ stacionárius ponton kívül. Egy sokkal gyakorlatiasabb formulához jutunk, mielőtt eltoljuk a legmeredekebb lejtőű útra, figyelembe véve a $g(x)$ oszcillátort.

Mégis, a gyakorlatban csak lokális számítást követel meg. Ezenkívül, ez a megközelítés könnyedén általánosítható többszörös stacionárius pontok esetén is.

Először a végpontokat vesszük figyelembe. A (3.4) általános formulája a következő:

$$g(h_x(p)) = g(x) + ip, \quad x \in \{a, b\}. \quad (3.33)$$

Ez a következő vonalintegrálhoz vezet:

$$I[f; h_x] = e^{i\omega g(x)} \int_0^\infty f(h_x(p)) \cdot h'_x(p) \cdot e^{-\omega p} dp.$$

Ahogy azt már korábban is láttuk, ez alkalmas a Gauss-Laguerre kvadratúrához. A $h'_x(p)$ derivált megkapható (3.33) differenciálásával, amely

$$h'_x(p) = \frac{i}{g'(h_x(p))}.$$

ξ stacionárius pontban eltoljuk a legmeredekebb lejtőjű útra, amely kilégíti:

$$g(h_{\xi,j}(q)) = g(\xi) + iq^r. \quad (3.34)$$

Ennek az egyenletnek r darab analitikus megoldása van, ha q elég kicsi. Ahogy azt korábban láttuk, csak két lényeges megoldása van: h_{ξ,j_1} , h_{ξ,j_2} . Ezek két vonalintegrálhoz vezetnek a következő formulában:

$$I[f; h_{\xi,j_m}] = e^{i\omega g(\xi)} \int_0^\infty f(h_{\xi,j_m}(q)) \cdot h'_{\xi,j_m}(q) \cdot e^{-\omega q^r} dq, \quad m = 1, 2.$$

A deriváltak adottak:

$$h'_{\xi,j_m}(q) = irq^{r-1} \frac{1}{g'(h_{\xi,j_m}(q))}.$$

Ez a közelítés alkalmas, hogy elvégezzük a $g(x) = y^r$ helyettesítést lokálisan az $x = \xi$ pontban.

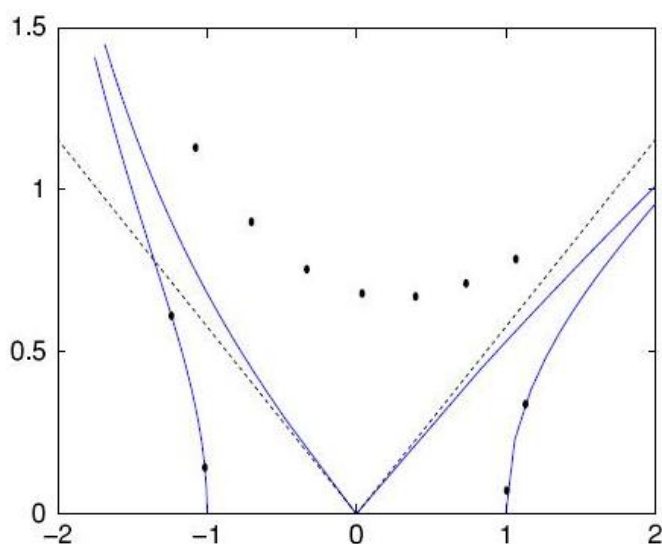
3.17. Megjegyzés. A korábban megkonstruált kvadratúraformula ismét alkalmazható.

A két vonalintegrál kombinálható a stacionárius pontban. Az egyetlen különbség, összehasonlítva a $g(x) = x^r$ esettel az, hogy a $h_{\xi,j}(q)$ útgörbe nem hosszabb az egyenes útnál.

3.6. PÉLDA. Tekintsük a következő integrált:

$$I = \int_{-1}^1 (\cos(x) + \sin(x)) \cdot e^{i\omega(x^4+4x^3)} dx.$$

A rezgéskeltő $g(x) = x^4 + 4x^3$ -nek másodrendű stacionárius pontja van a $\xi = 0$ -ban. Jegyezzük meg, hogy a kvadratúra pontok a Gauss-Laguerre kvadratúra pontoknak megfelelően a legmeredekebb lejtő útján helyezkednek el. A többi pont a két út közötti belső részben marad a stacionárius pontoknál. Összehasonlításként, a legmeredekebb lejtőjű út a $g(x) = x^3$ -nek felel meg, melyet a 3.8 ábrán mutatunk. Az út, mely a $g(x) = x^4 + 4x^3$ -nek felel meg és kvalitatíve hasonlóan viselkedik $\xi = 0$ -ban, de ezek hajlottak.



3.8. ábra.

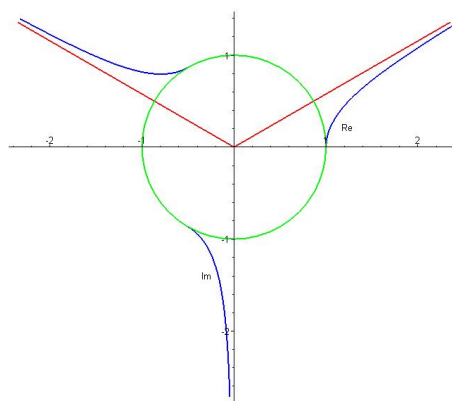
A $g(x) = x^4 + 4x^3$ -nek megfelelő legmeredekebb lejtőjű út (folytonos vonal); a $g(x) = x^3$ -nek megfelelő legmeredekebb lejtőjű út (szaggatott vonal) és a kvadratúrapontok helyzete $\omega = 1$ -nek megfelelően.

4. fejezet

Függelék

Végül, levezetésként nézzünk meg néhány programot, melyek jól illusztrálják a legmeredekebb lejtőről elmondottakat. Csak a speciális $g(x) = x^r$ esettel foglalkozunk, amikor $a = -1$ és $b = 1$.

A 4.1 ábrán azt figyelhetjük meg, hogy $r = 3$ esetén $h_1(p)$ -nek mi az emlegetett három megoldása. Ezeket jelöltük késsel. Ezek közül tényleg van egy és csakis egy olyan, ami az 1-ből indul. Ábrázoltuk még a $\xi = 0$ stacionárius pontban is a legmeredekebb lejtőket, melyeket piros színnel tüntettünk fel. És végül berajzoltuk a komplex egységkört is, aminek segítségével jobban láthatjuk, hogy a megoldások csak egymás elforgatottjai.



4.1. ábra.

$r = 3$ esetén $h_1(p)$ görbéi (kék)

A kedves olvasó is meggyőződhet róla, ha beírja a MAPLE-be az alábbi paran-

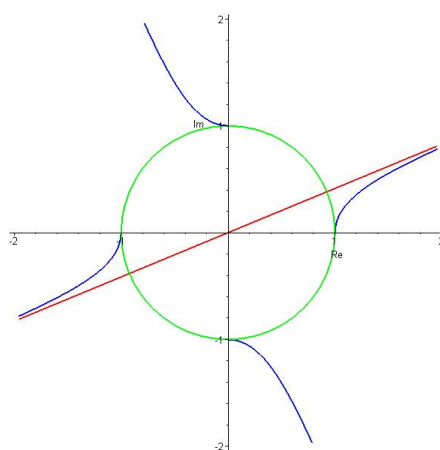
csot:

```

plot({
  [Re(root[3](1.0+I*p)),Im(root[3](1.0+I*p)),p=0..20],
  [Re((-1/2+I*sqrt(3)/2)*(root[3](1.0+I*p))),
  Im((-1/2+I*sqrt(3)/2)*(root[3](1.0+I*p))),p=0..20],
  [Re((-1/2-I*sqrt(3)/2)*(root[3](1.0+I*p))),
  Im((-1/2-I*sqrt(3)/2)*(root[3](1.0+I*p))),p=0..20],
  [Re(root[3](I*p)),Im(root[3](I*p)),p=0..20],
  [Re((-1/2+I*sqrt(3)/2)*(root[3](I*p))),
  Im((-1/2+I*sqrt(3)/2)*(root[3](I*p))),p=0..20],
  [cos(p),sin(p),p=0..2*Pi]},
  scaling=constrained,
  thickness=2,
  color=[green,blue,red,blue,blue,red],
  labels=[Re,Im]);

```

Ugyanezt a jelenséget figyelhetjük meg a 4.2 ábrán, csak most az $r = 4$ -nek megfelelő $h_1(p)$ esetén. Ennek négy megoldása van, de ezek is csak egymás elforgatottjai és egyértelműen létezik egy, amelyik az 1-ből indul.



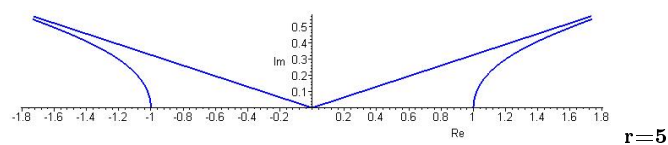
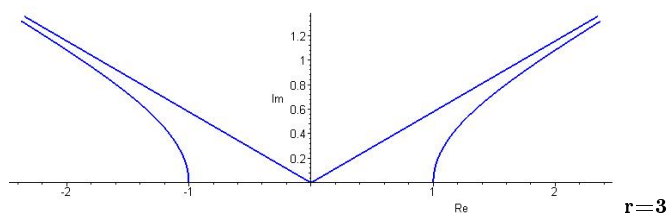
4.2. ábra.

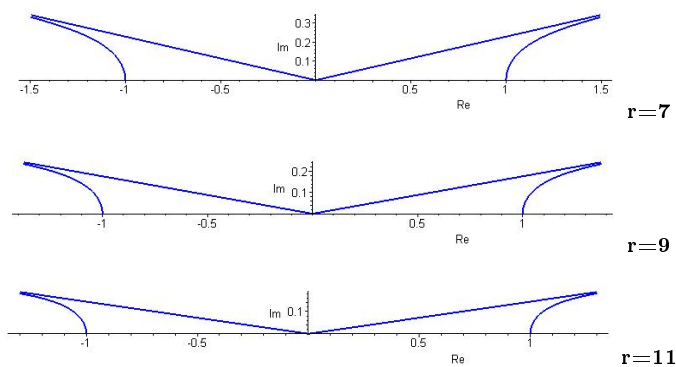
$r = 4$ esetén $h_1(p)$ görbéi (kék)

Ezt az ábrát az alábbi MAPLE parancs hozza létre:

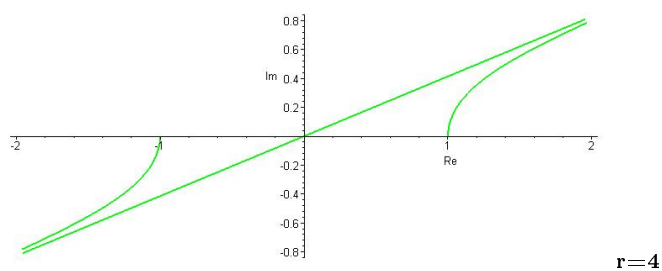
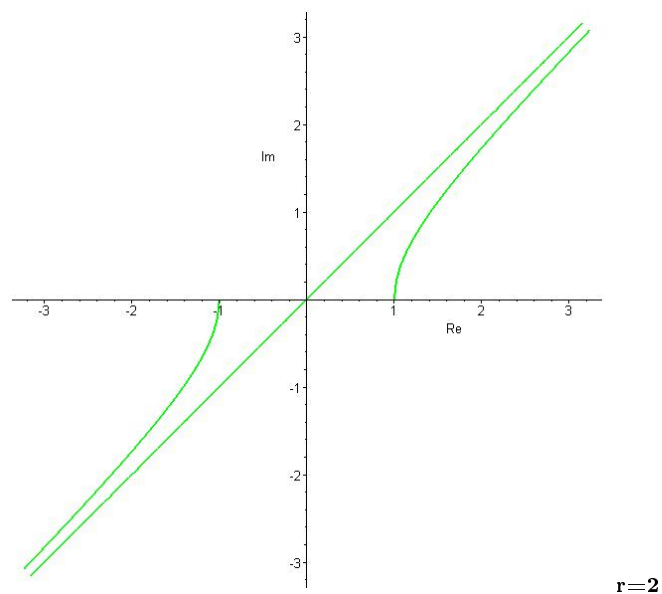
```
plot({
  [Re(root[4](1.0+I*p)),Im(root[4](1.0+I*p)),p=0..20],
  [Re((I)*(root[4](1.0+I*p))),Im((I)*(root[4](1.0+I*p))),p=0..20],
  [Re((-1)*(root[4](1.0+I*p))),Im((-1)*(root[4](1.0+I*p))),p=0..20],
  [Re((-I)*(root[4](1.0+I*p))),Im((-I)*(root[4](1.0+I*p))),p=0..20],
  [Re(root[4](I*p)),Im(root[4](I*p)),p=0..20],
  [Re((-1)*(root[4](I*p))),Im((-1)*(root[4](I*p))),p=0..20],
  [cos(p),sin(p),p=0..2*Pi]},
  scaling=constrained,
  thickness=2,
  color=[blue,green,blue,blue,red,red],
  labels=[Re,Im]);
```

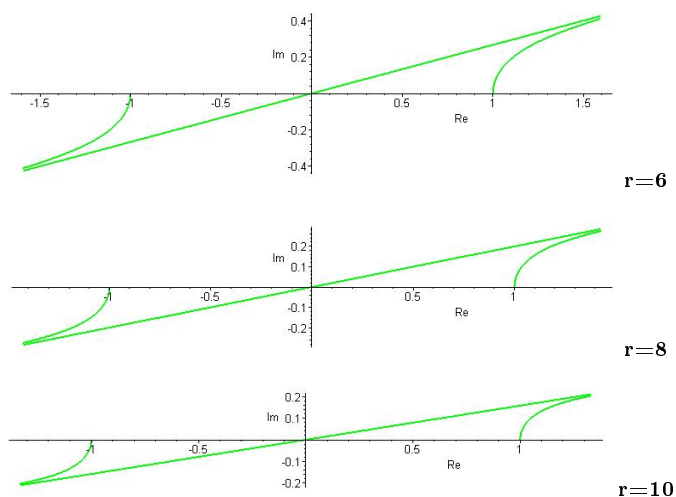
Az alábbi ábrásorozat r páratlan értékeire mutatja be a legmeredekebb lejtő konstrukcióját $r = 3$ -tól kezdve. Érdekes megfigyelni, hogy az egyenesek által bezárt szög egyre inkább kiegyenesedik, amin nem is szabad meglepődnünk, hisz említettük, hogy páratlan r -ek esetén a két egyenes $\frac{r-1}{r}\pi$ szögben metszik egymást, $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r-1}{r}\pi = \pi$. Továbbá, érdemes azt is megfigyelni, hogy az egyes ágak egyre gyorsabban simulnak rá az egyenesekre.





Ugyanezt a páros r -ekre elvégezve, egy olyan ábraszorozatot kapunk, ahol az egyenesnek a valós tengellyel bezárt szöge egyre kisebb. Szintén nem meglepő, ha vizsgálunk, hogy az egyeneseknek a valós tengellyel bezárt szöge $\frac{\pi}{2r}$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2r} = 0$. Itt is megfigyelhető, hogy az egyes ágak egyre gyorsabban simulnak rá az egyenesekre.





Kipróbálhatja a kedves olvasó is, hogy tetszőleges r esetén hogy néz ki a legmeredekebb lejtő, ha elkészíti az alábbi procedúrát a MAPLE-ben:

```

gorbe:=proc(r)
if(modp(r,2)=0)
then
plot({
[Re(root[r](1.0+I*p)),Im(root[r](1.0+I*p)),p=0..20],
[Re((-1)*(root[r](1.0+I*p))),Im((-1)*(root[r](1.0+I*p))),p=0..20],
[Re(root[r](I*p)),Im(root[r](I*p)),p=0..20],
[Re((-1)*(root[r](I*p))),Im((-1)*(root[r](I*p))),p=0..20]},
scaling=constrained,
color=[green],thickness=2,
labels=[Re,Im]);
else
plot({
[Re(root[r](1.0+I*p)),Im(root[r](1.0+I*p)),p=0..20],
[Re((cos(Pi*(r-1)/r)+I*sin(Pi*(r-1)/r))*(root[r](-1.0+I*p))),
Im((cos(Pi*(r-1)/r)+I*sin(Pi*(r-1)/r))*(root[r](-1.0+I*p))),p=0..20],
[Re(root[r](I*p)),Im(root[r](I*p)),p=0..20],
[Re((cos(Pi*(r-1)/r)+I*sin(Pi*(r-1)/r))*(root[r](I*p))),
Im((cos(Pi*(r-1)/r)+I*sin(Pi*(r-1)/r))*(root[r](I*p))),p=0..20]},
scaling=constrained,

```

```
color=[blue],  
thickness=2,  
labels=[Re,Im]);  
fi;  
end;
```

Ne feledjük, a parancssor beírása még kevés, minden sort aktivizálni kell (például enter leütéssel)! Ezután, például az $r = 25$ -nek megfelelő legmeredekebb lejtőt a `gorbe(25)` paranccsal tudjuk megvizsgálni.

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani **Gergó Lajos** Tanár Úrnak, aki bevezetett a Numerikus analízis szépségeibe és aki nélkül nem jöhetett volna létre ez a dolgozat. Köszönöm odaadó munkáját és türelmét, hogy a rengeteg elfoglaltsága ellenére is elvállalta a témavezetést és időt szakított a konzultációkra.

Kiemelten szeretnék köszönetet mondani **Sigray István** Tanár Úrnak, aki a komplex függvénytanos részekben nyújtott nagy segítséget.

Továbbá, szeretném megköszönni **Kovács Balázsnak**, hogy a **Latex**-ben oly sokat segített és sok jó ötletet adott a dolgozattal kapcsolatban.

Végül, de nem utolsó sorban szeretnék köszönetet mondani mindazoknak, akik támogattak és megteremtették a lehetőséget, hogy nyugodtan, csak a tanulmányaimra koncentrálni tudjam végig csinálni ezeket az éveket.

Irodalomjegyzék

- [1] **GERGÓ L.:** Numerikus módszerek, *Numerikus integrálás*, ELTE jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest (2000).
- [2] **MÓRICZ F.:** Numerikus Analízis I., *Közelítő differenciálás és integrálás*, JATE jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest (1983).
- [3] **A. DEAÑO, D. HUYBRECHS:** Complex Gaussian quadrature of oscillatory integrals, *Numerische Mathematik*, Springer-Verlag, Berlin (2009).
- [4] **D. HUYBRECHS, S. VANDEWALLE:** On the evaluation of highly oscillatory integrals by analytic continuation, K.U. Leuven, Belgium (2005).
- [5] **HALÁSZ G:** Bevezető komplex függvénytan, *Lokális értékelés*, ELTE jegyzet, Budapest (1998).