

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Tóth Szilvia Ágnes

Matematika Bsc, Alkalmazott matematikus szakirány

Kvaterniók

Témavezető: dr. Ágoston István

Egyetemi docens

Algebra és Számelmélet tanszék

Budapest, 2010

Tartalomjegyzék

1. A számfogalom fejlődése	5
1.1. A számlálástól a valós számtest kialakulásáig	5
1.2. Komplex számok	6
1.3. Kvaterniók	7
1.4. A normálható algebra fogalma	9
2. A kvaterniók algebrája	14
2.1. A kvaterniók mint négy dimenziós vektorok	14
2.1.1. Képzetes és valós rész	15
2.2. Kvaterniószorzás	15
2.3. Konjugált, norma	18
2.4. Kvaternió inverze	20
3. Forgatások \mathbb{R}^3-ben	21
3.1. Forgatások megadása féltengellyel és szöggel	21
3.2. Forgatások megadása Euler-szögekkel	23
3.3. Euler-szögekből forgatásmátrix	24
3.4. Forgatásmátrixből Euler-szögek	24
3.4.1. Egy szabadsági fok elvesztése	25
4. A kvaterniók és a háromdimenziós forgatások	27
4.1. Megfelelő művelet keresése	27
4.2. Trigonometrikus alak	29
4.3. A kvaterniók tényleg jelethetnek forgatásokat?	30
4.3.1. Azonos irányú kvaterniók szorzata	30

4.3.2.	A tengely helyben marad	31
4.3.3.	Példa	31
4.4.	Forgatás kvaterniókkal: Φ_q és $\Phi_{\bar{q}}$	32
4.5.	Leképezés $SO(3)$ és a Φ_q transzformációk között	34
4.6.	Egy alkalmazás: forgatások kompozíciója	36
5.	Kétféle megadás, kétféle reprezentáció	38
5.1.	Átjárhatóság a két reprezentáció között	38
5.1.1.	Kvaternióból forgatásmátrix	39
5.1.2.	Forgatásmátrixból kvaternió	39
5.2.	A két reprezentáció összehasonlítása	40
5.2.1.	Euler-szögek és forgatásmátrixok	40
5.2.2.	Forgatások reprezentálása kvaterniókkal	42
6.	Összegzés	44
7.	Irodalomjegyzék	46

Bevezetés

A kvaterniók felfedezése egyike a matematika legjobban dokumentált eseményeinek. Egészen ritka ugyanis, hogy egy nagy jelentőségű fogalom keletkezésének ismerjük a pontos idejét és helyét. A kvaterniók ötlete Sir William Rowan Hamilton, ír matematikus fejéből pattant ki 1843. október 16-án.

Hamilton maga is kutatta a komplex számokat. 1833-ban, 28 évesen rájött, hogyan lehet a komplex számokat valós számpároknak tekinteni. Mai felfogásban azt mondhatjuk, hogy Hamilton megalkotta az algebrai definícióját a komplex számoknak. Hamilton le volt nyűgözve, hogy mennyi összefüggés van a komplex számok és a két dimenzós sík között. Ezért gondolta úgy, hogy kell lennie egy három dimenziós struktúrának, mely egy valós és két képzetes összetevőből áll, és ami a három dimenziós térrel van szoros kapcsolatban.

Az volt a vágya, hogy megtalálja ezt a struktúrát, amelynek elemei egy-egy forgatásnak felelnek meg a térben, ugyanúgy, mint ahogy a komplex számok is megfeleltethetők egy-egy forgatásnak a síkon. Majdnem 10 évig kereste ezt a struktúrát látszólag sikertelenül.

Az áttörés 1843. október 16-án Dublinban történt, amikor éppen feleségével, Lady Hamiltonnal sétált. Útban az Ír Királyi Akadémia bizottsági ülése felé, az Ír Királyi Csatorna mentén ballagtak, amikor a nagy felfedezést tette. Felesége állítólag folyamatosan beszélt hozzá, amire ő nem igazán figyelt, mert annyira lefoglalták a kutatással kapcsolatos gondolatai. Ekkor mint Isteni Szikra jelent meg előtte, hogy nem két, hanem három képzetes összetevő, i , j , k kell az új struktúrához. A ráismerés hevében szokatlan tettet hajtott végre, belevéste a Brougham híd egyik kövébe azt az egyenletet, melyet ki kell elégítenie az új struktúra elemeinek:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Sajnos a bevésés mára már nem maradt meg, de az Ír Királyi Akadémia később erre a helyre emlékművet állíttatott. A National University of Ireland Matematikai Intézete minden év október 16-án végigsétálja az utat amit Hamilton annak idején megtett, így emlékezve meg az nagy horderejű eseményről.

Azt, hogy miért volt ez a felfedezés ilyen fontos, számos fizikai és geometriai alkalmazás mutatja, és Hamilton is egész hátralevő életét a kvaterniók tanulmányozásának szentelte. Két könyvet is írt a témában, az elsőt 1853-ban publikálta, a címe Lectures on Quaternions. Később még egy művet írt, azzal a céllal, hogy abból jobban meg lehessen tanulni a kvaterniók elméletét. Az Elements of Quaternions jóval hosszabbra sikerült, mint amekkorának Hamilton eredetileg tervezte, és nem is fejezte be halála előtt.

A nagy felfedezés után a kvaterniók elméletét Dublinban kötelező vizsgatémává tették, és néhány amerikai egyetemen ezt tartották az egyetlen felsőfokú matematikai anyagnak. A kvaterniókat Hamilton halála után is sokan tanulmányozták. Peter Tait Edinburghben és Benjamin Pierce Harvardon voltak a legnagyobb kutatók a témában. Tait 8 könyvet is írt róluk, többek között a kvaterniók fizikai alkalmazásait mutatta be.

Később J. Willard Gibbs megalapozta a skaláris és vektoriális szorzás elméletét, amit Tait a lineáris algebra hermafrodita szörnyetegének nevezett. Pedig látni fogjuk, hogy ez a két művelet sokat könnyít a kvaterniók tárgyalásán. Vita keletkezett a matematika kiválóságai között, melyben Lord Kelvin és Oliver Heaviside is részt vett, gúnyolódó cikkeket írtak a kvaterniók elméletéről. A kvaterniók elveszítették régi fényüket, és ezt még máig sem szerezték vissza, állítja John Baez a The Octonions című művében.

Egy másik kevésbé ismert felfedezés a Cayley-számok megszületése. Ezekre a "számokra" egymástól függetlenül a brit matematikus, Arthur Cayley illetve Hamilton egyik főiskolai barátja, John T. Graves bukkant rá.

Graves is ugyanúgy érdeklődött a három dimenziós struktúra kutatása iránt, mint Hamilton. Éppen ezért, a kvaterniók felfedezésének másnapján Hamilton egy levelet írt barátjának, melyben leírja eredményeit. Október 26-án Graves válaszolt neki, és hozzáfűzi, hogy ez ugyan bolond ötletnek tűnik, de szerinte: "Még mindig

van a rendszerben valami, ami nem hagy nyugodni." Graves azon gondolkozott, hogy vajon meddig lehet elmenni a képzetes számok készítésében. "Ha az ember egy ilyen alkémiával tud három font aranyat csinálni, miért álljon meg ennyinél?"

December 26-án megtalálta a nyolc dimenziós hasonló struktúrát, melyeket oktávoknak, "octaves"-nak nevezett el. 1844-ben három levelet is írt Hamiltonnak a kvaterniók és az oktávok általánosításáról. Úgy gondolta, hogy vannak minden n -re 2^n -iők, és ebben a reményben kereste a 16 dimenziós változatot. Azonban nem volt biztos abban, hogy a sejtése igaz, és valóban létezik ilyen struktúra. Hamilton megígérte barátjának, hogy publikálja eredményeit, de túlságosan elfoglalt volt, így folyton csak halogatta.

Júliusban Hamilton egy levelében rámutatott arra, hogy Graves struktúrája nem asszociatív, bár a kvaterniók azok. Hamilton tulajdonképpen ekkor fogalmazta meg az asszociativitás fogalmát, így ebben nagy szerepe van a Graves oktávjainak.

Eközben a Cambridge-ből frissen kikerült Arthur Cayley is foglalkozott a kvaterniókkal egészen azóta, hogy Hamilton felfedezte őket. Ő a kvaterniók és a hiperelliptikus függvények kapcsolatára volt kíváncsi. 1845-ben publikált egy cikket a témáról a Philosophical Magazine-ban. Az írás végén van egy rész a Graves által is felfedezett 8 dimenziós struktúráról.

Graves írt az újságnak egy levelet, hiszen ő már karácsony óta ismerte az új "számokat". Hamilton is írt egy rövid megjegyzést az Ír Királyi Akadémiának, megerősítve Graves elsőbbségét. Azonban már késő volt: a világ számára az új struktúra Cayley-számok néven maradt meg.

Remélem sikerült ennyivel felkeltenem az olvasó érdeklődését a kvaterniók és a Cayley-számok iránt.

Dolgozatom célja, hogy bemutassam a kvaterniókat, mint az algebra egyik hasznos fejezetét. Az írás első felében, a 2. és 3. fejezetben a kvaterniókról általában lesz szó. Elhelyezzük őket számok között, azaz bemutatjuk hogyan fejlődött a számfogalom a számlálástól egészen a kvaterniók és a Cayley-számok felfedezéséig. Ki mondunk egy tételt, mely tulajdonképpen azt jelenti, hogy ez a két struktúra a számfogalom lezárását jelenti. Majd részletesen megismerjük a kvaterniók halmazát beleértve a műveleteit és azt, hogy egy zárt struktúrát, ún. algebrát alkotnak.

Dolgozatom második fele a háromdimenziós forgatásokról és a kvaterniók közötti kapcsolatukat tárja fel. Eközben megismerkedünk a forgatások egy másik reprezentációjával az Euler-szögekkel és a forgatásmátrixokkal is. Végül összehasonlítom a két reprezentációt, és összefoglalom a leírtakat.

1. fejezet

A számfogalom fejlődése

1.1. A számlálástól a valós számtest kialakulásáig

A most következő oldalakon azzal foglalkozunk, hogy tulajdonképpen mit is tekinthetünk számnak. Ennek a kérdésnek a vizsgálatával közelebb juthatunk a kvaterniók megértéséhez, és el tudjuk helyezni őket egy szépen felépített matematikai rendszerben.

Az algebra története akkor kezdődött, amikor az ember megtanult számlálni. Ma már úgy mondhatjuk, hogy ekkor alakultak ki a természetes számok. Ez a számrendszer azonban még nem volt egészen zárt, például az osztás és a kivonás műveletének eredménye nem mindig esik a természetes számok közé. Így alakultak ki a pozitív racionális számok, majd a negatív egészek. Ezután már nyilvánvalónak tarthatjuk a racionális számok halmazának létét.

Ez már egy elég zárt struktúra, de mégis voltak olyan dolgok, amik ezekkel a számokkal nem voltak mérhetőek. Például már az ókori görögök is tudták, hogy egy egység hosszú négyzet átlója nem írható fel két egész szám hányadosaként. Tehát kellett lenniük olyan számoknak, amiket akkor még nem ismertek. Ennek feloldásához az analízis eszközeinek fejlődése kellett, így juthattunk el a valós számok \mathbb{R} testéhez.

A valódi kérdés az, hogy milyen tulajdonságokat várunk el a számoktól. Mit tekintünk számnak? Több struktúrát ismerünk, amik különböző számrendszerek egyes tulajdonságaiknak a megfogalmazásával, és így a számok általánosításaképpen jöttek

létre. Ilyen például például a csoport test, a gyűrű, vektortér és az algebra is. Ez utóbbit definiálom is.

Definíció 1.1.1 *Legyen T egy test. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, *)$ négyes egy algebra T fölött, ha A egy nem üres halmaz és értelmezve van rajta három művelet. Az egyik a "+"-szal jelölt összeadás, a másik a "\cdot"-tal jelölt szorzás, a harmadik a "*" gal jelölt T elemeivel való szorzás, vagy más nével skalárral való szorzás, melyekre a következők teljesülnek:*

- *az A halmaz a rajta értelmezett összeadással és szorzással egy gyűrűt alkot;*
- *A az összeadással és a skalárral való szorzással egy vektorteret alkot T fölött;*
- *valamint tetszőleges $a, b \in A$ és $\lambda \in T$ esetén $\lambda * (a \cdot b) = (\lambda * a) \cdot b = a \cdot (\lambda * b)$.*

Az egyszerűség kedvéért nem fogjuk a \cdot és a $*$ jelet használni a skalárral való és az algebra elemei közti szorzás megkülönböztetésére, hanem a szorzat tagjait csak egymás után írjuk. Ha nem egyértelmű, hogy miről beszélünk, akkor azt külön megjegyzem.

Az eddig tekintett számokról megállapíthatjuk, hogy az egész számok az összeadás és a szorzás művelketére egységelemes gyűrűt alkotnak, a racionális számok a hasonló műveletekkel már testet. A valós számok is testet alkotnak ezt \mathbb{R} -rel jelöljük. A racionális számok a racionális számtest felett és a valós számok a valós és racionális számtest felett vektorteret alkotnak. Ezen kívül ez a két vektortér algebra is egyben.

A valós számok azonban még mindig nem minden kérdésre adnak választ. Például a $x^2 + 1 = 0$ polinomnak nincs egyetlen valós gyöke sem. Többek között ez a kérdés motiválta a komplex számok megszületését.

1.2. Komplex számok

Komplex számokon az $a + bi$ alakú formális kifejezéseket értjük, amelyekre igaz az $i^2 = -1$ összegüggés. Jelük: \mathbb{C} .

Az összeadást definiáljuk komponensenként. Ha a szorzásról azt szeretnénk, hogy disztributív tulajdonságú legyen az összeadásra nézve, akkor definiálására az egyetlen lehetséges mód az, hogy $(a + bi) \cdot (c + di) := (ac - bd) + (ad + bc)i$, ahol a

zárójeleken belül már csak a valós műveleteket használjuk. Ekkor bebizonyítható, hogy az így kapott $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ hármas egy testet alkot. Sőt, \mathbb{C} az \mathbb{R} fölött algebrát is alkot, ha a skalárral való szorzást komponensenként definiáljuk – azaz $\lambda \in \mathbb{R}$, és $a + bi \in \mathbb{C}$ esetén $\lambda(a + bi) = (\lambda a) + (\lambda b)i$. Tehát, ha csak a valós feletti algebrákat tekintjük számoknak, akkor a komplex számokat is számnak lehet tekinteni.

1.3. Kvaterniók

A bevezetőben már említettem a kvaterniók kialakulásának okát. A komplex számokat mint számpárokat tekinthetjük számpároknak, tehát az \mathbb{R}^2 Euklideszi sík vektorainak. Ekkor az egység hosszú komplex számokkal való szorzás éppen egy forgatást jelent a síkon. Így tulajdonképpen megfeleltethető a komplex egységkör a sík forgatásainak.

Hamilton szeretett volna egy hasonló algebrát találni \mathbb{R} fölött, mely egy-egy forgatásnak felel meg, csak nem a síkon, hanem a háromdimenziós térben. Végül megtalálta a kvaterniók négy diimenziós \mathbb{R} fölötti algebráját, amit \mathbb{H} -val jelölünk, és amivel most mi is megismerkedünk.

Tekintsük az $a + bi + cj + dk$ alakú formális kifejezéseket, ezek alkotják a kvaterniók halmazát, melyet \mathbb{H} -val jelölünk. Az összeadás itt is komponensenként történik, a szorzást pedig legkönnyebben egy szorzótáblával adhatjuk meg, amit levezethetünk a Brougham hídba vésett egyenletekből:

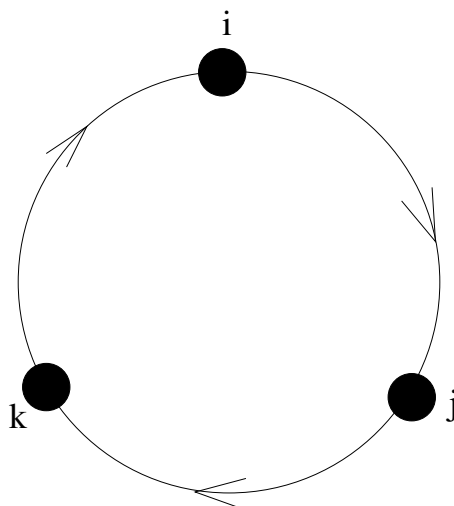
$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \quad (1.1)$$

$$ij = k = -ki \quad (1.2)$$

$$jk = i = -kj \quad (1.3)$$

$$ki = j = -ik \quad (1.4)$$

Egyszerűen megjegyezhetjük ezeket a szabályokat, az (1.1)-es ábra alapján. Ha a körön a nyilak irányában szorozzuk a két szomszédos elemet, akkor a harmadik elemet kapjuk, ha a kör irányával ellentétes irányban szorozunk két elemet akkor a harmadik elem negáltját kapjuk.



1.1. ábra. Kvaterniók szorzási szabálya

Az \mathbb{R} elemeivel való, azaz a skvalárral való szorzást komponensenként értelmezhetjük, hasonlóan, mint ahogy a komplex számoknál tettük. Tehát $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ kvaterniót ha egy $c \in \mathbb{R}$ számmal szorzunk, akkor a $cq = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ szorzatot kell kapnunk. Ugyanez a szorzási szabály érvényes a speciális, $c = c + 0i + 0j + 0k$ alakú kvaternió és egy általános alakú kvaternió szorzatára is.

Ha a kvaterniószorzást is úgy akarjuk definiálni, hogy disztributív legyen az összeadásra nézve, akkor most is csak egy lehetséges mód van, ha úgymond minden tagot minden taggal összeszorozunk. A $p = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$, és $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ kvaterniók szorzata a következőképpen néz ki:

$$\begin{aligned}
 pq &= (p_0 + p_1i + p_2j + p_3k)(q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) = \\
 &= p_0q_0 + p_0(q_1i) + p_0(q_2j) + p_0(q_3k) + (p_1i)q_0 + (p_1i)(q_1i) + (p_1i)(q_2j) + (p_1i)(q_3k) \\
 &+ (p_2j)q_0 + (p_2j)(q_1i) + (p_2j)(q_2j) + (p_2j)(q_3k) + (p_2j)q_0 + (p_2j)(q_1i) \\
 &+ (p_2j)(q_2j) + (p_2j)(q_3k) + (p_3k)q_0 + (p_3k)(q_1i) + (p_3k)(q_2j) + (p_3k)(q_3k)
 \end{aligned}$$

Ha a számmal való szorzási szabály és az i, j, k egymással való szorzási szabályait figyelembe vesszük, és az így kapott tagokat összevonjuk a disztributivitásnak meg-

felelően, akkor egyszerűsíthetünk a képletben:

$$pq = (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) \quad (1.5)$$

$$+(p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)i \quad (1.6)$$

$$+(p_0q_2 + p_2q_0 + p_3q_1 - p_1q_3)j \quad (1.7)$$

$$+(p_0q_3 + p_3q_0 + p_1q_2 - p_2q_1)k \quad (1.8)$$

Bebizonyítható, hogy ha a fenti szabály alapján definiáljuk a szorzást, akkor a kvaterniók az összeadással és a szorzással ferde testet alkotnak, azaz minden test tulajdonságot teljesítenek, kivéve a kommutativitást. Már a szorzótáblából is láthatjuk, hogy nem teljesül a kommutativitás, hiszen például $ij = -ji$ áll fenn. A skaláris szorzást műveletét is hozzávéve, azt is be lehet látni, hogy a kvaterniók "ferde" algebrát is alkotnak \mathbb{R} fölött.

1.4. A normálható algebra fogalma

Az utóbb tárgyalt három \mathbb{R} fölötti algebrának, \mathbb{R} -nek, \mathbb{C} -nek és \mathbb{H} -nak van még egy szép közös tulajdonsága. Mind a három algebra normálható. Ez alatt a következő tulajdonságot értjük:

Definíció 1.4.1 *Egy \mathcal{A} algebrát normálhatónak nevezünk, ha létezik rajta egy $|\cdot|$ norma, melyre a norma-tulajdonságokon kívül teljesül még egy szorzási szabály is:*

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2|$$

minden \mathcal{A} -beli z_1, z_2 elemre.

Könnyen látható, hogy \mathbb{R} , \mathbb{C} és \mathbb{H} normálható algebrák. A valós számokon az abszolút érték függvény teljesíti a definícióban leírtakat. A komplex számokon és a kvaterniókon pedig a konjugálás műveletének segítségével kaphatunk jó normát.

Definíció 1.4.2 *Egy $z = a + bi$ komplex szám konjugáltján a $\bar{z} = a - bi$ -t, normáján pedig a $|z| = z\bar{z}$ nemnegatív valós számot értjük.*

Ahhoz, hogy a definíció teljesen helytálló legyen a $|z|$ normájáról még be kell látni, hogy tényleg nemnegatív valós szám. Ezek után pedig be kellene látnunk, hogy

a kapott norma valóban norma, és teljesíti a szorzási szabályt. Ezt mi most nem tesszük, de a [3]-as forrásban megtalálható ennek bizonyítása. A kvaterniók esetében is hasonló definíciót vezethetünk be.

Definíció 1.4.3 Egy $z = a+bi+cj+dk$ kvaternió konjugáltján a $\bar{z} = a-bi-cj-dk$ -t, normáján pedig a $|z| = z\bar{z}$ nemnegatív valós számot értjük.

Itt is természetesen be kell látni, hogy $|z|$ valóban normát ad a kvaterniók halmazán. Ezt a következő fejezetben fogjuk megtenni.

A normálhatóság azért érdekes fogalom számunkra, mert épp most fogom bemutatni a Cayley-számokat, amik szintén normálható algebrát alkotnak. Egészen pontosan normálhatóak ugyan, de csak "majdnem" algebrát alkotnak, mert egy fontos gyűrűtulajdonságot nem teljesítenek. De ismerkedjünk meg előbb velük!

A Cayley-számok a következő alakban állanak elő:

$$a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7$$

Az összeadást és a skalárral való (\mathbb{R} elemeivel való) szorzást a szokásos módon, komponensenként definiáljuk. A szorzást a következő szorzótábla adja meg:

	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7
i_1	-1	i_4	i_7	$-i_2$	i_6	$-i_5$	$-i_3$
i_2	i_4	-1	i_5	i_1	$-i_3$	i_7	$-i_6$
i_3	$-i_7$	$-i_5$	-1	i_6	i_2	$-i_4$	i_1
i_4	i_2	$-i_1$	$-i_6$	-1	i_7	i_3	$-i_5$
i_5	$-i_6$	i_3	$-i_2$	$-i_7$	-1	i_1	i_4
i_6	i_5	$-i_7$	i_4	$-i_3$	$-i_1$	-1	i_2
i_7	i_3	i_6	$-i_1$	i_5	$-i_4$	$-i_2$	-1

A táblázatból megfogalmazhatjuk a szorzás szabályait:

$$i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = i_4^2 = i_5^2 = i_6^2 = i_7^2 = -1 \quad (1.9)$$

$$i_{n+1}i_{n+2} = i_{n+4} = -i_{n+2}i_{n+1} \quad (1.10)$$

$$i_{n+2}i_{n+4} = i_{n+1} = -i_{n+4}i_{n+2} \quad (1.11)$$

$$i_{n+4}i_{n+1} = i_{n+2} = -i_{n+1}i_{n+4} \quad (1.12)$$

Az utolsó három egyenletben minden $n = 1, \dots, 7$ -re értjük, de csak modulo 7 vesszük az indexeket.

A könnyebb megjegyezhetőségre tekintsük az (1.2)-es ábrát, amit Fano-síknak neveznek. Ez lényegében egy egyenlőszárú háromszög, benne a beleírt körével és a szögfelező egyenesével.

Az ábrán tehát 7 vonal van, 3, amelyek a háromszög oldalai, még 3 szögfelezői, és egy vonalnak tekintjük a középső kört is. Ekkor bármely két Cayley-szám egy vonalra esik, és minden vonalon pontosan három Cayley-szám van. Ha össze akarunk szorozni két Cayley-számot meg kell keresni azt az egyenest, amelyen rejata van mindkettő. Ha a vonal irányításának megfelelően szorozzuk őket (a nyilak irányában), akkor a vonalon lévő harmadik Cayley számot kapjuk, ha ellentétes irányban szorozzuk őket, akkor a harmadik Cayley-szám ellentétét kapjuk.

A Cayley számok is jól láthatóan nem kommutatívak. Ami kevésbé nyilvánvaló, hogy nem is asszociatív a szorzás.

Tekintsük például a $i_1 i_2 = i_4$ szorzatot! Ha $(i_1 i_2) i_4$ sorrendben veszem őket, akkor $(i_1 i_2) i_3 = i_4 i_3 = -i_6$ -et kapok. Ha a másik zárójelezéssel nézzük, akkor $i_1 i_2 i_3 = i_1 (i_2 i_3) = -i_2$

Az viszont korántsem igaz, hogy semelyik Cayley-számok szorzata sem lenne asszociatív. Sőt mi több, belátható, hogy ha u és v Cayley-számok, akkor mindig igaz a $u(vv) = (uv)v$ illetve $(uu)v = u(uv)$ ¹ Az ilyen tulajdonságú rendszereket alternatív rendszereknek nevezzük.

Belátható ezen kívül még az, hogy a Cayley számok disztributívak az összeadásra, illetve, hogy a $1+0i_1+0i_2+0i_3+0i_4+0i_5+0i_6+0i_7$ Cayley-szám kétoldali egységeleme a Cayley-számoknak és minden Cayley-számnak van inverze.²

Ezek után már kimondhatjuk, hogy a Cayley-számok az összeadással és a szorzással egy egységelemes, nullosztómentes alternatív gyűrűt alkotnak. Ezt úgy értjük, hogy az asszociativitást nem, de az alternatív asszociativitást teljesítik. Ha a skalárral való szorzást (\mathbb{R} elemeivel való szorzást) is hozzávesszük, akkor a Cayley-számok alternatív algebrát alkotnak a valós számtest felett. A Cayley-számok algebráját \mathbb{O} -val jelöljük.

¹Ennek bizonyítását a [5]-ös forrásban meg lehet nézni.

²Bizonyítása a [4]-es és [5]-ös forrásban

A Cayley-számok halmazán is értelmezhetjük a konjugálás műveletét és a normát úgy mint ahogy a komplex számokon és a kvaterniókon tettük. Eszerint az $u = a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7$ Cayley szám konjugáltja a $\bar{u} = a_0 - a_1i_1 - a_2i_2 - a_3i_3 - a_4i_4 - a_5i_5 - a_6i_6 - a_7i_7$ Cayley-számot értjük, normáján pedig az $|u| = u\bar{u}$ nemnegatív egészet értjük. Ebben az esetben is könnyen belátható, hogy ez valóban normát definiál, és, hogy ez a norma multiplikatív.³ Tehát a Cayley-számok normálható alternatív algebrát alkotnak.

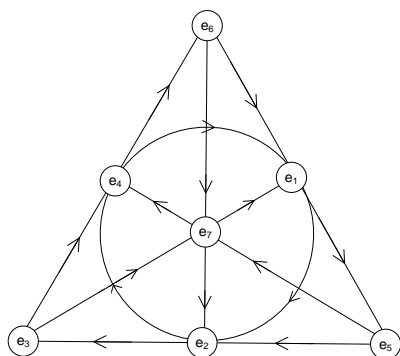
A kérdés az, hogy miért álljunk itt meg. Bővíthetjük-e még a számfoglamunkat? Két tétel is szól arról, hogy miért nem kell bővíteni tovább a számfogalmat, az egyik a Frobenius tétel, ez azt állítja, hogy már a kvaternióknál elég megállni, mert más számrendszer nem létezik. A Hurwitz tétel a másik, ez kevesebbet tesz fel a számfogalmunkról, például a szorzás asszociativitását nem, és így ez számoknak tekinti a Cayley-számokat is, de ez is azt állítja, hogy más számrendszer nem létezik a mi számfogalmunk szerint. Mindkét tételt kimondjuk bizonyítás nélkül.⁴

Tétel 1 (Frobenius) *Bármely normálható, egységelemes, nullosztómentes, asszociatív algebra a valós test fölött izomorf az alábbi négy algebra valamelyikével: a valós számokkal (\mathbb{R}), a komplex számokkal (\mathbb{C}) vagy a kvaterniókkal (\mathbb{H}) vagy a Cayley-számokkal (\mathbb{O})*

Tétel 2 (Hurwitz) *Bármely normálható, egységelemes, nullosztómentes, nem feltétlenül asszociatív algebra a valós test fölött izomorf az alábbi négy algebra valamelyikével: a valós számokkal (\mathbb{R}), a komplex számokkal (\mathbb{C}), a kvaterniókkal (\mathbb{H}) vagy a Cayley-számokkal (\mathbb{O}).*

³[4]-es és [5]-ös forrásban

⁴a tételek bizonyításai:[2]-es,[3]-as, [4]-es és [5]-ös forrásban



1.2. ábra. Fano sík a Cayley-számok szorzásának megjegyzése

2. fejezet

A kvaterniók algebrája

Korábban a kvaterniók alatt az $a + bi + cj + dk$ alakú formális kifejezéseket értettük, és nem túl pontosan mondtuk meg hogyan kell összeadni és szorozni két kvaterniót. A továbbiakban a fenti felírásból kiindulva megpróbáljuk a már meglévő matematikai apparátusunkkal definiálni a kvaterniók algebráját.

2.1. A kvaterniók mint négy dimenziós vektorok

A $a + bi + cj + dk$ felírásból jól látszik, hogy a egy kvaterniót négy valós szám határoz meg. Így kézenfekvő kvaterniókat számnégyeseknek tekinteni. Azaz a kvaterniók halmaza álljon a $q = (q_0, q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^4$ vektorokból. A q_0, q_1, q_2, q_3 számokat q komponenseinek fogom hívni. Két kvaterniót pontosan akkor tekintek egyenlőnek, ha mint négy dimenziós vektorok egyenlőek. A kvaterniók összeadását könnyű definiálnom, legyen a szokásos \mathbb{R}^4 -beli összeadás. A szorzást is definiálhatom úgy, mint ahogy az előző fejezetben definiáltam. Tehát a $p = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ és a $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ kvaterniók szorzata legyen:

$$pq = (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3, \quad p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2, \quad (1)$$
$$p_0q_2 + p_2q_0 + p_3q_1 - p_1q_3, \quad p_0q_3 + p_3q_0 + p_1q_2 - p_2q_1)$$

Ez azonban nagyon hosszú és kezelhetetlen képlet. Ha megfelelően definiáljuk, akkor sokkal áttekinthetőbbé válik majd a kvaterniószorzás. Ehhez bevezetjük a kvaterniók egy másik interpretációját.

2.1.1. Képzetes és valós rész

Definíció 2.1.1 A $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ kvaterniónak megkülönböztetjük két összetevőjét, $q_0 \in \mathbb{R}$ -t, amit valós résznek, illetve a $\mathbf{q} := (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$ vektort, amit képzetes résznek nevezünk.

A kvaterniókat így pároknak is tekinthetjük, a valós és képzetes részükből képzett pároknak: $q = (q_0, \mathbf{q})$ Vezessünk be egy jelölést, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ legyen az \mathbb{R}^3 tér standard ortonormált bázisa:

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1).$$

Ezekkel a jelölésekkel q képzetes része felírható a következő alakban:

$$\mathbf{q} = q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}.$$

A q kvaterniót pedig írjuk fel formálisan így módon:

$$q = q_0 \oplus \mathbf{q} = q_0 \oplus (q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k})$$

A fentiek alapján a kvaterniók halmaza a következőképpen is felfogható: $\mathbb{H} = \{q = q_0 \oplus \mathbf{q} \mid q_0 \in \mathbb{R}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3\}$

A \mathbb{H} halmazon bevezethetjük az összeadás műveletét, amit koordinátánként értelmezhetünk. Tehát ha $q = q_0 \oplus \mathbf{q}$ és $p = p_0 \oplus \mathbf{p}$ kvaterniók, akkor összegük $p + q = (p_0 + q_0) \oplus (\mathbf{p} + \mathbf{q})$. Könnyen belátható, hogy fennáll a $q = (q_0 \oplus \mathbf{0}) + (0 \oplus \mathbf{q}) = q_0 \oplus \mathbf{q}$ egyenlőség, azaz minden kvaternió előáll a valós részének és a képzetes részének kvaternióösszegeként. Ilyen felfogásban a \mathbb{H} halmaz megfogalmazásában az \oplus jel helyett a $+$ jelet használhatjuk.

A továbbiakban minden $\lambda \in \mathbb{R}$ számra kétféleképpen gondolhatunk, egyrészt mint valós számra, másrészt a $\lambda + \mathbf{0}$ alakú kvaternióra. Hasonlóan egy $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ vektor jelentheti a $0 + \mathbf{v}$ kvaterniót is. Ha szöveggörnyezetből nem derülne ki, hogy mit használunk, akkor külön jelezzük, hogy éppen mire gondoltunk.

2.2. Kvaterniószorzás

Most már könnyen megfogalmazhatunk egy szorzási szabályt, amely kielégíti (1)-et. A lineáris algebrában használt műveleteket, a skaláris- és a vektoriális szorzást és a skalárral való szorzást fogjuk felhasználni.

Első lépésként vizsgáljuk meg két úgy nevezett tisztán képzetes kvaternió szorzatát, azaz olyanokét, amelyeknek nulla a valós része.

Állítás 2.2.1 *Ha $p = 0 + \mathbf{p} = 0 + (p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k})$ és $q = 0 + \mathbf{q} = q_0 + (q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k})$ tisztán képzetes kvaterniók, akkor szorzatuk $pq = -\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle + (\mathbf{p} \times \mathbf{q})$ alakban áll elő. Tehát a szorzat valós része \mathbf{p} és \mathbf{q} skaláris szorzatának a negatívja, képzetes része pedig a \mathbf{p} , \mathbf{q} háromdimenziós vektorok vektoriális szorzata.*

Bizonyítás. A négydimenziós interpretációban $p = (0, p_1, p_2, p_3)$ és $q = (0, q_1, q_2, q_3)$. Így az (1)-es képlet szerint:

$$pq = (-p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3, \quad p_2q_3 - p_3q_2, \quad p_3q_1 - p_1q_3, \quad p_1q_2 - p_2q_1)$$

Tehát pq valós része épp a várt skaláris szorzással egyenlő: $-p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 = -\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$. A képzetes részhez írjuk föl a $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ vektoriális szorzatot:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}$$

$= (p_2q_3 - p_3q_2)\mathbf{i} + (p_3q_1 - p_1q_3)\mathbf{j} + (p_1q_2 - p_2q_1)\mathbf{k}$. Ez épp a fenti szorzási szabállyal megadott alak képzetes részével egyenlő. \square

Ezek után megvizsgálhatjuk azon kvaterniók szorzatát, amelyeknek a képzetes része a nullvektor. Ez az (1)-es képlet alapján azonnal kiszámítható:

Állítás 2.2.2 *Két olyan kvaternió szorzata, amelyeknek a képzetes része nulla, a valós részeik szorzata.*

Az utolsó könnyen kiszámítható eset az, amikor egy tiszta képzetes és egy "valós" kvaterniót szorzunk össze. Ennek eredményét is pillanatok alatt levezethetjük az (1)-es szorzási szabályból.

Állítás 2.2.3 *Legyen $p = p_0$ egy nulla képzetes részű, $q = \mathbf{q}$ egy tisztán képzetes kvaternió. Ekkor bármilyen sorrendben szorozzuk őket egymással, tisztán képzetes kvaterniót kapunk, méghozzá:*

$$pq = qp = p_0\mathbf{q}.$$

Tehát az eredmény a \mathbf{q} három dimenziós vektornak a p_0 skalárral való szorzata.

Végül megfogalmazhatjuk, hogyan fejezhető ki két általános alkú kvaternió szorzata a lineáris algebra műveleteivel.

Tétel 3 *Ha $q = q_0 + \mathbf{q} = q_0 + (q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k})$ és $p = p_0 + \mathbf{p} = p_0 + (p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k})$, akkor szorzatukra fennál, hogy:*

$$pq = (p_0q_0 - \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle) + (p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}) \quad (2.1)$$

Bizonyítás. Az (1)-es képlet által definiált kvaterniószorzás disztributív az összeadásra nézve.¹ Így a pq szorzat a következőképpen bontható szét: $pq = (p_0 + \mathbf{p})(q_0 + \mathbf{q}) = p_0q_0 + p_0\mathbf{q} + \mathbf{p}q_0 + \mathbf{p}\mathbf{q}$. Megjegyezzük, hogy ebben a felírásban még minden szorzásjel a kvaterniószorzást jelenti. Viszont most már csak olyan összeadandók vannak, amelyek szorzását már kiszámoltuk korábban az (3.2.1)-es, (3.2.2)-es és (3.2.2) állításokban. Ezek alapján látható, hogy:

$$pq = p_0q_0 + (p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p}\mathbf{q}) = p_0q_0 + p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + (-\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle + (\mathbf{p} \times \mathbf{q}))$$

Itt már minden összeadandó lineáris algebrai műveletekkel van definiálva, és ha az összeadást elvégezzük, azaz külön választjuk a valós és képzetes részt, akkor épp a tétel állítását kapjuk. \square

Most, hogy beláttuk, hogy a (3.1)-ben definiált szorzás ekvivalens az (1)-es képletben definiálttal, felépíthetjük a kvaterniókat precízen.

Definíció 2.2.1 *A kvaterniók halmaza $\mathbb{H} = \{q = (q_0, q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^4\}$ halmaz. Minden $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ kvaterniónak megkülönböztetjük a valós részét, amely az első koordinátája, azaz q_0 , valamint a képzetes részét, mely az utolsó három koordinátából képzett vektor, azaz $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$. Ekkor minden kvaternió előáll a valós és a képzetes részének összegeként oly módon, hogy:*

$$q = (q_0, q_1, q_2, q_3) = (q_0, 0, 0, 0) + (0, q_1, q_2, q_3)$$

Ezért a $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ kvaterniót úgy jelöljük, hogy

$$q = q_0 + \mathbf{q} = q_0 + (q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}), \text{ ahol } \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \text{ az } \mathbb{R}^3 \text{ tér standard ortonormált}$$

bázisa. Ezen kívül \mathbb{H} -n értelmezve van három művelet, az összeadás, szorzás és a skalárral való szorzás.

¹bizonyítás a [5]-ös forrásban

- *Összeadás:* $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ művelet. Kiszámítása koordinátánként működik azaz, ha $p = p_0 + \mathbf{p}$, $q = q_0 + \mathbf{q} \in \mathbb{H}$, akkor:

$$p + q = (p_0 + q_0) + (\mathbf{p} + \mathbf{q}).$$

- *Szorzás:* $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ művelet. Kiszámítása a (2)-es képlet alapján történik, azaz, ha $p = p_0 + \mathbf{p}$, $q = q_0 + \mathbf{q} \in \mathbb{H}$, akkor:

$$pq = (p_0q_0 - \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle) + (p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}).$$

- *Skalárral való szorzás:* $\mathbb{R} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ művelet. Kiszámítása koordinátánként történik, azaz ha $\lambda \in \mathbb{R}$ és $q = q_0 + \mathbf{q} \in \mathbb{H}$, akkor

$$\lambda q = \lambda q_0 + \lambda \mathbf{q}.$$

Természetesen azt akarjuk belátni, hogy a kvaterniók halmaza az összeadásal, szorzással és skalárral való szorzással egy algebrát alkot. Ezt nem fogjuk teljes részletességgel megtenni, de a részállításokat kimondjuk.²

Tétel 4 *A kvaterniók \mathbb{H} halmaza az összeadással és a szorzással egy nem kommutatív gyűrűt alkot, a skalárral való szorzást is hozzávéve pedig egy algebrát.*

Ezt belátni könnyű, de sok számolgatás kell hozzá, így ettől eltekintünk. Azt persze könnyen láthatjuk, hogy a kvaterniók szorzása nem kommutatív, például már két tisztán képzetes kvaterniót sem cserélhetünk fel a szorzáskor, hisz az (3.2.1)-es állítás alapján a szorzat képzetes része egymás ellentettje a két különböző sorrend esetében.

Az egységelem és az inverz létezéséhez most precízen definiáljuk kvaterniók konjugáltját és normáját.

2.3. Konjugált, norma

Definíció 2.3.1 *A $q = q_0 + \mathbf{q} = q_0 + (q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k})$ kvaternió konjugáltján a $\bar{q} = q_0 - \mathbf{q} = q_0 + (-q_1\mathbf{i} - q_2\mathbf{j} - q_3\mathbf{k})$.*

²csak a disztributivitás belátása hiányzik, a többi algebratulajdonságot már beláttuk, vagy nyilvánvalóak

Könnyen belátható az alábbi két állítás a konjugáltról.

Állítás 2.3.1 *Ha $p, q \in \mathbb{H}$, akkor $\overline{pq} = \bar{q}\bar{p}$. Egy kvaternió és konjugáltjának összege épp a kvaternió valós részének a kétszerese, azaz $q + \bar{q} = 2q_0$*

Definíció 2.3.2 *Egy q kvaternió normáján az $N(q) = \sqrt{\bar{q}q}$ valós számot értjük.*

Ez a definíció még egy kicsit hiányos, hisz be kell látnunk, hogy $N(q)$ valós minden $q \in \mathbb{H}$ -ra. Ennél mi még többet is belátunk a következő állításban.

Állítás 2.3.2 *A négydimenziós interpretációban felírt $q = (q_0, q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{H}$ kvaternió normája épp a q vektor \mathbb{R}^4 szerinti kettes normája, azaz:*

$$N(q) = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = \|q\|_2 =: |q| \quad (2.2)$$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $q = q_0 + \mathbf{q}$. Ekkor a norma definíciója és a (1.1)-es egyenlet, valamint az alapján, hogy a vektoriális szorzásra fennáll a $q \times q = 0$ egyenlet, azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} N(q)^2 &\stackrel{def}{=} \bar{q}q \stackrel{def}{=} (q_0 - \mathbf{q})(q_0 + \mathbf{q}) = \\ &\stackrel{(1)}{=} q_0q_0 - \langle -\mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle + q_0\mathbf{q} + q_0(-\mathbf{q}) + (-\mathbf{q}) \times \mathbf{q} \\ &= q_0^2 + \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle \\ &= q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2. \end{aligned}$$

□

Tehát beláttuk hogy $N(q)$ norma a kvaterniók algebráján. Következzen egy egyszerű következménye az előző állításnak!

Állítás 2.3.3 *Bármely $q \in \mathbb{H}$ -ra igaz, hogy $q\bar{q} = N(\bar{q}) = N(q) = \bar{q}q$*

Bizonyítás Ha az előző állítást $N(\bar{q}) = q\bar{q}$ -ra nézzük, akkor azt kapjuk, hogy $N(\bar{q}) = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = N(q)$. □

Most bebizonyítjuk azt, hogy a kvaterniók algebrája normálható a 3.2.1-es definíció értelmében.

Állítás 2.3.4 *Minden p, q kvaternióra fennáll: $N(pq) = N(p)N(q)$.*

Bizonyítás: $N(pq)^2 = (\overline{pq})(pq) = \overline{q}\overline{p}pq = qN(p)\overline{q} = N(p)q\overline{q} = N(p)N(q) \square$

Most már kimondhatjuk a tételt:

Tétel 5 *A kvaterniók normálható algebrát alkotnak. A szorzási szabályt teljesítő norma $N(q) = \sqrt{q\overline{q}}$.*

2.4. Kvaternió inverze

Az egységelem létét könnyű látni, hiszen az $1 = (1, 0, 0, 0)$ kvaternió kétoldali egységelem az (1.1)-es egyenlet alapján. Az inverz megtalálásához pedig a következőképpen okoskodhatunk. Ha a q kvaterniónak van inverze – jelöljük ezt q^{-1} -el – akkor annak teljesítenie kell a következő két egyenletet:

$$qq^{-1} = 1$$

$$q^{-1}q = 1$$

Szorozzuk be az egyenleteket \overline{q} -tal, arról az oldalról, ahol a szorzatban a q áll!

$$\overline{q}qq^{-1} = \overline{q}$$

$$q^{-1}q\overline{q} = \overline{q}$$

Így, felhasználva a (3.3.3)-as állítást, az inverz kiszámítható: $q^{-1} = \frac{q}{N(q)^2}$.

Tehát, ha létezik inverz, akkor az csak ilyen alakú lehet. És nyilván a $q^{-1} = \frac{q}{N(q)^2}$ inverz pontosan akkor létezik, ha $N(q)^2 = |q|$ nem nulla, ami pontosan akkor teljesül, ha q nem a nullkvaternió, hisz $N(q)$ norma. Ezzel bebizonyítottuk a most következő tételt.

Tétel 6 *A kvaterniók halmaza az összeadással és a szorzással ferde testet alkot, amiben az egységelem az $1 = (1, 0, 0, 0,)$ kvaternió, és minden $q \in \mathbb{H}$ -nek az inverze $q^{-1} = \frac{q}{N(q)^2}$ kvaternió.*

A (4)-es, (5)-ös és (6)-os tételt összevonva ezt kapjuk:

Tétel 7 *A kvaterniók halmaza az összeadással és a szorzással és a skalárral való szorzással egységelemes, normálható algebrát alkot.*

3. fejezet

Forgatások \mathbb{R}^3 -ben

¹ Most már ismerjük a kvaterniókat annyira, hogy elkezdhessük vizsgálni kapcsolatukat a forgatásokkal. Ahhoz viszont, hogy ebbe belekezdjünk meg kell határozni, hogy mit is értünk forgatáson a háromdimenziós Euklideszi térben. Két módszert fogunk megvizsgálni a forgatásoknak: tengellyel és szöggel való megadást, amit egy kvaterniószorzást használó leképezéssel fogunk reprezentálni, valamint az Euler-szögekkel való megadást, amit a jól ismert forgatásmátrixokkal reprezentálunk.

3.1. Forgatások megadása féltengellyel és szöggel

Definíció 3.1.1 Legyen $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$, és $0 < \theta \leq 2\pi$. Ekkor a \mathbf{t} féltengelyű, θ szögű forgatáson egy $F_{\mathbf{t},\theta} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezést értünk, melyre igaz a következő:

Ha $\mathbf{a} + \mathbf{n} = \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, melyre az igaz, hogy \mathbf{a} párhuzamos, \mathbf{n} merőleges \mathbf{t} -re, akkor $F_{\mathbf{t},\theta}(\mathbf{v}) = \mathbf{a} + \mathbf{m}$, ahol \mathbf{n} , \mathbf{m} és \mathbf{t} jobbrendszer alkotnak, és az \mathbf{n} , \mathbf{m} által bezárt szög éppen θ .

Megjegyezzük hogy itt csak az origón átmenő tengelyek körüli forgatásokat tekintjük, természetesen lehetne definiálni nem csak origón átmenő egyenesekre is őket.

A definícióban szerepel az a fogalom, hogy a megfelelő három vektor jobbrendszer alkot. Ez a feltétel igen fontos, hiszen nem elég feltenni azt, hogy az \mathbf{n} és \mathbf{m} vektorok θ szöget zárnak be, mert a \mathbf{t} -re merőleges vektorok között két ilyen vektor

¹A fejezet a [8]-as forrás alapján készült

is van.

Az érthetőség kedvéért az \mathbf{n} , \mathbf{m} és \mathbf{t} vektorok jobbrendszerűségét fogalmazzuk meg részletesebben! Tekintsük azt az \mathcal{S} síkot mely merőleges \mathbf{t} -re és benne van az a P pont, melyre a \mathbf{v} vektor mutat. Ez a sík metszi a \mathbf{t} vektor által meghatározott egyenest. Legyen ez a dőféspont M , és nézzük az \mathcal{S} síkot abból a féltérből, mely felé \mathbf{t} mutat. (Azaz nézzünk szembe a \mathbf{t} vektorral.) Ekkor az \mathcal{S} síkban az \mathbf{n} vektorból \mathbf{m} -et egy M körüli θ szögű pozitív – azaz az óramutató járásával ellentétes – irányú forgatással kaphatjuk meg.

Megjegyzés 3.1.1 *Az előzőek alapján leszűrhetjük a forgatások egy fontos tulajdonságát. A \mathbf{t} körüli θ szögű forgatás ugyanazt eredményezi mint a $-\mathbf{t}$ körüli $2\pi - \theta$ szögű forgatás.*

Definíció 3.1.2 *Definiáljuk a forgatások halmazán a következő relációt. $F_{\mathbf{u},\theta}$ ekvivalens $F_{\mathbf{w},\psi}$ -vel pontosan akkor, ha $\mathbf{w} = -\mathbf{u}$ és $\psi = \pi - \theta$, vagy, ha $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ és $\psi = \theta$. (Minden forgatás ekvivalens saját magával és az előző megjegyzésben leírt párjával.)*

Állítás 3.1.1 *A reláció ekvivalencia reláció a forgatások halmazán.*

Az állítás nyilvánvaló, az olvasóra bízunk végiggondolását. Az $F_{\mathbf{u},\theta}$ és $F_{-\mathbf{u},\pi-\theta}$ által alkotott két elemű ekvivalencia osztályt $\mathcal{F}_{\mathbf{u},\theta}$ -vel jelöljük.

Állítás 3.1.2 *A $\mathcal{F}_{\mathbf{u},\theta}$ ekvivalencia osztályok a kompozíció műveletével csoportot alkotnak.*

A állítás bizonyításától most eltekintünk, bár nem nehéz belátni.²

Definíció 3.1.3 *A $\mathcal{F}_{\mathbf{u},\theta}$ ekvivalencia osztályokat a kompozíció műveletével a forgatások csoportjának hívjuk. Jele: $SO(3)$*

A forgatások ilyen fajta megadásának reprezentációját a kvaterniókkal a következő fejezetben mutatjuk be, előtte ismétretjük az Euler-szögekkel való megadást és a forgatásmátrixokat.

²A [3]-as, [4]-es forrásokban megtalálható a bizonyítása

3.2. Forgatások megadása Euler-szögekkel

Az Euler-szögekkel történő megfogalmazáshoz kimondjuk Euler tételét a tér elforgatásairól, amit nem bizonyítunk be.

Tétel 8 (Euler) *A tér minden lineáris pozitív determinánsú és ortogonális transzformációja előállítható a koordinátatengelyek körüli elforgatások kompozíciójaként.*

Eszerint minden forgatást három alapforgatással, a három koordinátatengely körüli forgatással megadhatunk.

Az Euler-szögek egy (α, β, γ) , $\alpha, \beta, \gamma \in (-\pi, \pi]$ hármas, amelyhez tartozik egy $F_{\alpha, \beta, \gamma}$ transzformáció. Ha ezt a $F_{\alpha, \beta, \gamma}$ leképezést egy adott vektorra alkalmazzuk, az olyan mintha a vektort előbb az x koordináta-tengely körül α , majd a y tengely körül β , végül a z tengely körül γ szöggel forgatnánk el. Euler tétele tehát úgy fogalmazható át, hogy minden féltengellyel és szöggel megadott forgatáshoz van olyan (α, β, γ) szöghármas, amelyhez képzett $F_{\alpha, \beta, \gamma}$ transzformáció ugyanazt eredményezi mint ő.

Az Euler-szögekkel való értelmezéssel azonban problémák akadhatnak. Először is, hogy az $F_{\alpha, \beta, \gamma}$ leképezés függ attól, hogy milyen sorrendben végezzük el a három alapforgatást. Ugyanis ha más sorrendben végezzük el a három alapforgatást, akkor más forgatáshoz juthatunk.

Lássunk erre egy egyszerű példát! Nézzük a $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, 0)$ Euler-szögekhez tartozó forgatást két sorrendben! Alkalmazzuk a $F_{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, 0}$ leképezést a \mathbf{j} bázisvektorra először az x, y, z , majd y, x, z sorrendben. Az első esetben $F_{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, 0}(i) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$ -t kapunk, a második esetben viszont $F_{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, 0}(i) = \mathbf{j}$ -t.

A példa jól illusztrálja, hogy milyen fontos előre lefixálni az alapforgatások sorrendjét. Sok alkalmazásban szerepel az z, y, x sorrend, ezért mi is ezt fogjuk használni.

Ezek után bemutathatjuk, hogyan reprezentálhatóak az Euler-szögekkel megadott forgatások a forgatásmátrixokkal. Először nézzük meg, hogyan lehet Euler-szögekből forgatásmátrixot készíteni!

3.3. Euler-szögekből forgatásmátrix

A három alapforgatás mátrixát könnyen felírhatjuk mint egy egyszerű transzformációmátrixot, csak fel kell írni az \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} báziselemek képeit. Jelöljük az alapforgatások mátrixait F_α^x -val, F_β^y -val és F_γ^z -val. Ezek szorzataként megkaphatjuk az $F_{\alpha,\beta,\gamma}$ Euler-szögekkel megadott forgatásmátrixot:

$$\begin{aligned} F_{\alpha,\beta,\gamma} &= F_\alpha^x \cdot F_\beta^y \cdot F_\gamma^z = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & -\sin \beta \\ -\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & -\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tehát megadtuk a mátrixot ami az $F_{\alpha,\beta,\gamma}$ forgatást reprezentálja. Nézzük meg, vajon a forgatásmátrixokból is ilyen könnyen visszakapható-e az az (α, β, γ) szöghármas, mely leírja őt!

3.4. Forgatásmátrixból Euler-szögek

A visszafelé irányhoz a következőképpen okoskodhatunk. Ha egy M mátrixról tudjuk, hogy forgatásmátrix, és keressük azt az (α, β, γ) szöghármas, melyből őt képeztük, akkor az a mátrix mindenképpen a következő formában áll elő:

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & -\sin \beta \\ -\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & -\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ebből viszont könnyen felírhatjuk az α , β , γ szögek szögfüggvényeit:

$$\tan \alpha = -\frac{m_{23}}{m_{33}}, \text{ ha } \cos \beta \neq 0 \quad (3.1)$$

$$\sin \beta = -m_{13} \quad (3.2)$$

$$\tan \gamma = \frac{m_{12}}{m_{11}}, \text{ ha } \cos \beta \neq 0 \quad (3.3)$$

Mivel a kifejezésekben $\cos \beta$ -val egyszerűsítünk, ezért fel kell tenni, hogy $\cos \beta$ nem nulla, azaz, hogy β nem lehet sem $\frac{\pi}{2}$, sem $-\frac{\pi}{2}$. Ha β mégis felveszi valamelyik értéket e kettő közül felveszi, akkor a megoldóképletünk nem működik. Ez egy elég kellemetlen eset, az angol szakirodalom "gimbal lock"-nak hívja. Mi egy szabadsági fok elvesztésének nevezzük el.

3.4.1. Egy szabadsági fok elvesztése

Nézzük meg, mi történik abban az esetben, amikor $\beta = \frac{\pi}{2}$, vagy $\beta = -\frac{\pi}{2}$! Matematikailag az történik, hogy a három szabadsági fok közül – a három szabadsági fok azt jelenti, hogy az Euler-szögek bármelyikét tetszőlegesen választhatom – elveszik egy. Ahhoz, hogy precízen lássuk, mi történik, írjunk be az $F_{\alpha,\beta,\gamma}$ -hoz tartozó mátrixba – amit a 6.1-es részfejezetben kiszámoltunk – a β helyébe $\frac{\pi}{2}$ -t. Ekkor a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} F_{\alpha,\frac{\pi}{2},\gamma} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & 0 \\ \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & -\cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \sin(\gamma - \alpha) & \cos(\gamma - \alpha) & 0 \\ \cos(\gamma - \alpha) & -\sin(\gamma - \alpha) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ez a mátrix csak a $\gamma - \alpha$ különbségtől függ. Ez azt jelenti, hogy az olyan Euler-szögekkel megadott forgatások, melyekben $\beta = \frac{\pi}{2}$, azok csak a $\psi := \gamma - \alpha$ különbségtől függenek. Ez azért meglepő, mert β értékének lefixálásával csak egy szabadsági fokot kellene elvesztenie az $F_{\alpha,\beta,\gamma}$ leképezésnek. Tehát két paraméternek

kellene szabadnak maradnia, valójában ehelyett csak a ψ az egyetlen szabad paraméter, a két szög különbsége. Ez azt jelenti, hogy lehetetlen megmondani csak a forgatásmátrix ismeretében, hogy milyen α , γ szögekből képeztük őt. Tehát egy forgatásmátrixhoz nem tudunk egyértelműen Euler-szögeket trászítani.

Az előzőekből jól látható, hogy Euler szögek és a forgatás mátrixokkal való reprezentáció sok problémát von maga után. Példul nem egyértelmű, hiszen a legutóbbi részből az látszik, hogy bizonyos esetekben nem is lehet megállapítani, hogy egy forgatásmátrixot melyik Euler-szög hármassal írtunk le. Ezen kívül fontos az alapforgatások sorrendje, és ez alkalmazásonként változhat. Ezek a problémák motiválnak bennünket arra, hogy foglalkozzunk a forgatások másik megadásával, amit a kvaterniók műveleteinek felhasználásával reprezentálhatunk.

4. fejezet

A kvaterniók és a háromdimenziós forgatások

¹ Ennek a fejezetnek a célja az, hogy megtaláljuk azt a műveletet, amelynek hatása egy forgatás a háromdimenziós Euklideszi téren. Az első felmerülő kérdés az, hogy egy kvaternió tud-e egyáltalán hatni egy háromdimenziós vektorra. A válasz igen egyszerű, tekintsük $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ vektorra úgy, mint egy tisztán képzetes kvaternióra, és így a kvaterniók szokásos műveletieivel tudunk hatni rá. De mi is lesz az a megfelelő művelet, ami épp úgy hat \mathbf{v} -re, hogy az elfordul egy megadott szöggel? Erre a kérdésre adunk választ a továbbiakban.

4.1. Megfelelő művelet keresése

Először is olyan műveletet kell találnunk, ami vektorhoz vektort rendel. Mivel a vektorokat egyértelműen megfeleltethetjük a tisztán képzetes kvaternióknak, ezért, tehát a kérdés úgy fogalmazható át, hogy milyen az a kvaterniók halmazán értelmezett művelet, amely a tisztán képzetes kvaterniók halmazát helyben hagyja. Vezessünk be az egyszerűség kedvéért egy jelölést!

Jelölés 4.1.1 Legyen $\mathbb{H}_0 = \{q_0 + \mathbf{q} = q \in \mathbb{H} | q_0 = 0\}$ a *tiszta képzetes kvaterniók halmaza*.

¹a fejezet felépítése a [6]-os forrást követi.

Ha találunk egy ilyen műveletet, akkor \mathbb{H}_0 -nak invariánsnak kell lennie erre a műveletre. Nézzük meg, mi történik, ha egy $\mathbf{v} \in \mathbb{H}_0$ egy $q = q_0 + \mathbf{q} \in \mathbb{H}$ -val szorzunk!

$$\mathbf{v}q = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{q} \rangle + q_0\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{q}$$

Ez általában kivezet \mathbb{H}_0 -ból. Próbálkozzunk máshogyan, mondjuk két kvaternióval $q = q_0 + \mathbf{q}$ -val és $r = r_0 + \mathbf{r}$ -rel szorozzuk meg \mathbf{v} -t. A lehetséges szorzási sorrendek közül nyilván csak a $q\mathbf{v}r$ érdekel bennünket, egyrészt, mert q és r szerepe felcserélhető, másrészt ha egy oldalról szorozzuk \mathbf{v} -t, az visszavezethető az előző esetre. Kérdés, hogy az így definiált művelet kivezet-e \mathbb{H}_0 -ból. A megoldás kulcsa a 3.3.4-es állítás egy egyszerű következménye lesz, méghozzá:

$$N(q\mathbf{v}r) = N(q)N(\mathbf{v})N(r) \quad (4.1)$$

Tekintsünk egy kicsit általánosabban a $q\mathbf{v}r$ szorzatra! Definiálhatjuk azt $\Phi : v \rightarrow qvr$ leképezést, ahol q és r rögzített, de tetszőleges kvaterniók, és a szorzás a kvaterniószorzás. Ekkor Φ -re igaz a következő állítás:

Állítás 4.1.1 *Legyen $q \neq 0$ és $r \neq 0$ tetszőleges, rögzített kvaternió. Ekkor a $\Phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\Phi : v \rightarrow qvr$ leképezés hasonlóság a \mathbb{R}^4 Euklideszi téren, mely minden vektort az $\sqrt{N(q)N(r)}$ -szeresére nyújt.*

Bizonyítás Először belátjuk, hogy Φ_q lineáris leképezés, ami egyszerű következménye a kvaterniószorzás disztributivitásának. Ugyanis tetszőleges \mathbf{v} és \mathbf{w} vektorra és a α, β számra igaz, hogy:

$$\begin{aligned} \Phi_q(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) &= q(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w})\bar{q} = \\ &= (\alpha q\mathbf{v} + \beta q\mathbf{w})\bar{q} = \alpha q\mathbf{v}\bar{q} + \beta q\mathbf{w}\bar{q} = \alpha\Phi_q(\mathbf{v}) + \beta\Phi_q(\mathbf{w}) \end{aligned}$$

Mivel Φ_q lineáris ezért ahhoz, hogy belássuk, hogy Φ hasonlósági transzformáció elegendő azt belátni, hogy minden vektort egy rögzített számszorosóra nyújt. A (2.1)-es képlet alapján tehát az állítás igaz. \square

A Φ leképezés tehát hasonlóság \mathbb{R}^4 -en. Egybevágóság akkor lesz, ha $N(q)N(\mathbf{v})N(r) = 1$, ami például akkor teljesül, ha $r = q^{-1}$. Visszatérve eredeti célunkhoz, a kérdés az, hogy Φ mikor hagyja helyben az \mathbb{R}^3 Euklideszi teret. Lineáris algebrai tanul-

mányainkból tudjuk, hogy ha egy Φ egybevágóság helyben hagy egy $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ vektort, akkor az ortogonális kiegészítőterét is helyben hagyja. Tehát ha Φ helyben hagyja $\mathbf{v} = (1, 0, 0, 0)$, akkor helyben hagyja a az ő ortogonális kiegészítőjét, azaz a $(0, q_1, q_2, q_3)$ alakú vektorokat, amit mi \mathbb{H}_0 -al jelöltünk. \mathbb{H}_0 és \mathbb{R}^3 között pedig triviális bijekció létesíthető, így azt mondhatjuk, hogy \mathbb{R}^3 invariáns a Φ leképezésre, ha Φ az $(1, 0, 0, 0)$ vektort helyben hagyja. Ez viszont azzal ekvivalens, hogy $qr = 1$, azaz, hogy $r = q^{-1}$. Így megkaptuk a következő tételt.

Tétel 9 *Legyen $q \in \mathbb{H}$ rögzített. Ekkor a $\Phi_q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Phi_q(\mathbf{v}) = q\mathbf{v}q^{-1}$ leképezés egybevágóság a háromdimenziós Euklideszi téren.*

□

A forgatásokat elsősorban egységkvaterniók által meghatározott transzformációval fogjuk meghatározni – azaz olyan kvaterniókra amelyeknek a normája 1 –. Azt, hogy miért elég csak egységkvaterniókra tekinteni a Φ_q leképezést majd később megindokoljuk. Mivel az egységkvaterniókra igaz, hogy $q^{-1} = \bar{q}$, ezért a Φ_q leképezést úgy is definiálhatjuk, hogy $\Phi_q(\mathbf{v}) = q\mathbf{v}\bar{q}$. Mostantól a Φ_q leképezést csak egységkvaterniókhoz rendeljük és az utóbb definiált módon, a konjugálással értelmezzük.

A továbbiakban ezt a műveletet fogjuk vizsgálni, méghozzá, megpróbáljuk megsejteni, hogy milyen geometriai jelentése van. Mivel a célunk, hogy a forgatásoknak feleltessünk meg a kvaterniókat, ezért felmerül második fő kérdés: Hogyan tudunk szöveget és tengelyt rendelni egy kvaternióhoz? Ugyanis e két dolog kell ahhoz, hogy beszélni tudjunk egy adott kvaternióhoz tartozó forgatás transzformációról – bármi legyen is az a transzformáció. Ehhez segít nekünk a trigonometrikus alak amit a komplex számokéhoz hasonlóan értelmezhetünk.

4.2. Trigonometrikus alak

Mint korábban említettem, főleg egységkvaterniókkal definiált leképezéseknek fogjuk megfeleltetni a forgatásokat, ezért a trigonometrikus alakot is először rájuk értelmezzük. Legyen $q = q_0 + \mathbf{q}$ egységkvaternió. Ekkor tehát a normájaára fennál, hogy $N(q)^2 = q_0^2 + |\mathbf{q}|^2 = 1$

Ekkor a $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ azonosság alapján van olyan θ , melyre

$\cos \theta = q_0$ és $\sin \theta = |\mathbf{q}|$. És ha $0 < \theta \leq \pi$ intervallumból választjuk a θ -t, akkor annak értéke egyértelmű. Definiálhatjuk az $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} = \frac{\mathbf{q}}{\sin \theta}$ háromdimenziós egység hosszú vektort. Ekkor q a következő alakban áll elő:

$$q = q_0 + \mathbf{q} = \cos \theta + \sin \theta \mathbf{u}$$

Most már könnyen értelmezhetjük egy $q \in \mathbb{H}$ – nem feltétlenül egységkvaternió – trigonometrikus alakját.

Definíció 4.2.1 Legyen $q = q_0 + \mathbf{q}$ kvaternió, melyre $N(q) = \varrho$. A q trigonometrikus alakján a $q = \varrho(\cos \theta + \sin \theta \mathbf{u})$ alakot értjük, ahol $0 < \theta \leq \pi$ szög és $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ egyértelműen létezik. Ekkor θ -t a q kvaternió szögének, \mathbf{u} -t az tengelyének nevezzük.

Megjegyzés 4.2.1 Ha $q = \cos \theta + \sin \theta \mathbf{u}$ trigonometrikus alakjában θ -t $-\theta$ -ra cseréljük, akkor $\cos(-\theta) + \sin(-\theta)\mathbf{u} = \cos \theta - \sin \theta \mathbf{u} = \bar{q}$ -t kapunk, tehát a trigonometrikus alakban \mathbf{u} helyett $-\mathbf{u}$ -t fog szerepelni. Végeredményben q konjugáltját kapjuk.

4.3. A kvaterniók tényleg jelethetnek forgatásokat?

Olyan példákat fogunk látni, mely azt sugallja, hogy a Φ_q leképezés valóban egy forgatásnak felel meg, illetve, hogy a kvaternióknak olyan jó tulajdonságai vannak, amiket elvárunk egy forgatásról.

4.3.1. Azonos irányú kvaterniók szorzata

Legyen p és q olyan egységkvaternió, melyeknek közös \mathbf{u} tengelyük van, és p -hez α szög tartozik, q -hoz pedig β . Vizsgáljuk meg mi lesz a két kvaternió szorzata!

$$\begin{aligned} r := pq &= (\cos \alpha + \sin \alpha \mathbf{u})(\cos \beta + \sin \beta \mathbf{u}) = \\ &= (\cos \alpha \cos \beta \langle \sin \alpha \mathbf{u}, \sin \beta \mathbf{u} \rangle) + (\cos \alpha \sin \beta \mathbf{u} + \cos \beta \sin \alpha \mathbf{u} + (\sin \alpha \mathbf{u}) \times (\sin \beta \mathbf{u})) = \\ &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + (\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) \mathbf{u} = \\ &= \cos(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + \beta) \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Ezzel bebizonyítottuk a következő állítást.

Állítás 4.3.1 *Ha p és q kvaternióknak közös \mathbf{u} irányuk van, akkor a szorzatuknak is a közös \mathbf{u} lesz az iránya, és a hozzá tartozó szög szög a két kvaternióhoz tartozó szög összege.*

Ez az állítás igazából nagyon ígéretes a sejtésünk szempontjából. Hiszen, ha a kvaterniók tényleg egy-egy forgatásnak felelnek meg, akkor elvárható tőlük, hogy ha ugyanazon irány tartozik hozzájuk, akkor szorzatukban a szögek összeadódnak. Ugyanúgy mint ahogy két azonos tengely körül forgatva egy vektort a két forgatás szöge összeadódik.

4.3.2. A tengely helyben marad

Épp itt az ideje, hogy részletezzük is részletezzük Φ_q leképezés képletét, hogy megfoghatóbb legyen.

$$\Phi_q(\mathbf{v}) = q\mathbf{v}\bar{q} = (q_0 + \mathbf{q})(0 + \mathbf{v})(q_0 - \mathbf{q}) = \quad (4.2)$$

$$(q_0^2 - |\mathbf{q}|^2)\mathbf{v} + 2\langle \mathbf{q}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{q} + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{v}) \quad (4.3)$$

Vagy felhasználva, hogy q egységkvaternió, azaz $q_0^2 + |\mathbf{q}|^2 = 1$ egyenlőséget:

$$\Phi_q(\mathbf{v}) = q\mathbf{v}\bar{q} = \quad (4.4)$$

$$(2q_0^2 - 1)\mathbf{v} + 2\langle \mathbf{q}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{q} + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{v}) \quad (4.5)$$

Most tekintsük egy λq alakú kvaternió Φ_q szerinti képét!

$$\Phi_q(\mathbf{v}) = q\mathbf{v}\bar{q} = q\lambda\mathbf{q}\bar{q} = \quad (4.6)$$

$$= (2q_0^2 - 1)\lambda\mathbf{q} + 2\langle \mathbf{q}, \lambda\mathbf{q} \rangle \mathbf{q} + 2q_0(\mathbf{q} \times \lambda\mathbf{q}) = \quad (4.7)$$

$$= 2\lambda q_0^2 \mathbf{q} - \lambda\mathbf{q} + 2\lambda|\mathbf{q}|^2 \mathbf{q} = \lambda(2(q_0^2 + |\mathbf{q}|^2) - 1)\mathbf{q} = \lambda\mathbf{q} \quad (4.8)$$

Tehát, ha a transzformáció tengelyén helyezkedik el egy vektor, akkor a képe önmaga lesz. Ez szintén megnyugtató tény, hiszen a forgatás éppen ilyen tulajdonságú.

4.3.3. Példa

Vizsgáljuk meg, hogy mi történik, abban a speciális esetben, amikor a $\theta = \frac{\pi}{6}$ szögű és $\mathbf{u} = (0, 0, 1) = \mathbf{k}$ irányú kvaternióra, azaz $q = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$ -ra képezzük a Φ_q

leképezést. Alkalmazzuk ezt a Φ_q leképezést a $\mathbf{v} = 1\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{i}$ vektorra, és nézzük meg mit kapunk.

$$\begin{aligned}\Phi_q(\mathbf{v}) &= q\mathbf{v}\bar{q} = \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{k}\right)\mathbf{i}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{k}\right) = \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{k}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}\end{aligned}$$

Tehát \mathbf{i} képe a Φ_q leképezés szerint éppen $\mathbf{w} := \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$. w egy egységvektor–ami nem meglepő, hisz beláttuk, hogy a Φ_q leképezés egybevágóság–, valamint \mathbf{i} és \mathbf{w} által bezárt szög $\frac{\pi}{3}$, ami éppen a q -hoz tartozó szög kétszerese. Tehát

Φ_q hatására az $\mathbf{v} = \mathbf{i}$ vektor elfordult q iránya azaz \mathbf{k} tengely körül a q -hoz tartozó szög kétszeresével, azaz $\frac{\pi}{3}$ -tal. Sőt, azt is elmondhatjuk, hogy a fenti számolás elvégezhető tetszőleges $-\pi \leq \theta < \pi$ -re és azt kapjuk, hogy ha $q = \cos \theta + \sin \theta \mathbf{k}$, akkor $\Phi_q(\mathbf{v}) = \cos 2\theta \mathbf{i} + \sin 2\theta \mathbf{j}$. Ezt az állítást nem látjuk be, mivel nagyon hasonló számolást kell elvégezni, mint az előző példában.

Ennyi motiváció alapján már megfogalmazhatunk egy sejtést: Ha a q kvaternióra képzett Φ_q leképezést egy \mathbf{v} vektorra alkalmazzuk, akkor az elfordul a kvaternió képzetes része körül a trigonometrikus alakban szereplő szög kétszeresével pozitív irányban. A sejtést máris bebizonyítjuk a következő részben.

4.4. Forgatás kvaterniókkal: Φ_q és $\Phi_{\bar{q}}$

Tétel 10 *Legyen $q = q_0 + \mathbf{q} = \cos \theta + \sin \theta \mathbf{u}$ egységkvaternió. Ekkor a $\Phi_q : \mathbf{v} \rightarrow q\mathbf{v}\bar{q}$ leképezés hatása bármely $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ vektorra geometriailag úgy értelmezhető, mint egy forgatás, azaz $\Phi_q(\mathbf{v})$ a \mathbf{v} vektor 2θ szöggel való elforgatottja a \mathbf{q} tengely körül.*

Bizonyítás: Emlékezzünk vissza, hogy Φ_q egy lineáris transzformáció, sőt egybevágóság a háromdimenziós Euklideszi téren.

Bontsuk fel a \mathbf{v} vektort két részre, egy \mathbf{a} -ra, ami párhuzamos a \mathbf{q} vektorral, és \mathbf{n} vektorra, ami merőleges \mathbf{q} -ra. Mivel az \mathbf{a} vektor párhuzamos \mathbf{q} -val, ezért a képe önmaga, ezt már beláttuk a 5.3.2-es alfejezetben. Ha belátjuk azt, hogy \mathbf{n} Φ_q

hatására elfordul a \mathbf{q} tengely körül 2θ szöggel, és kihasználjuk azt, hogy Φ_q lineáris, akkor a forgatás (4.1.1)-es definíciója alapján a tételt bebizonyítottuk. Igazoljuk, hogy \mathbf{n} , Φ_q hatására elfordul a \mathbf{q} tengely körül 2θ szöggel! Írjuk fel a (5.3)-as képlet segítségével \mathbf{n} képét:

$$\begin{aligned}\Phi_q(\mathbf{n}) &= (q_0^2 - |\mathbf{q}|^2)\mathbf{n} + 2\langle \mathbf{q}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{q} + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{n}) = \\ &\stackrel{\mathbf{q} \perp \mathbf{n}}{=} (q_0^2 - |\mathbf{q}|^2)\mathbf{n} + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{n}) = \\ &\stackrel{\mathbf{q} = |\mathbf{q}|\mathbf{u}}{=} (q_0^2 - |\mathbf{q}|^2)\mathbf{n} + 2q_0|\mathbf{q}|(\mathbf{u} \times \mathbf{n})\end{aligned}$$

Legyen $\mathbf{n}_\perp := \mathbf{u} \times \mathbf{n}$. Ezzel a jelöléssel így írhatjuk fel a kapott eredményt:

$$\Phi_q(\mathbf{n}) = (q_0^2 - |\mathbf{q}|^2)\mathbf{n} + 2q_0|\mathbf{q}|\mathbf{n}_\perp \quad (4.9)$$

Ahhoz, hogy belássuk az állítást, mely szerint \mathbf{n} , Φ_q hatására elfordul a \mathbf{q} tengely körül 2θ szöggel, a következő három dolgot kell belátni:

- (a) $|\Phi_q(\mathbf{n})| = |\mathbf{n}|$.
- (b) $\Phi_q(\mathbf{n})$ és \mathbf{q} merőlegesek egymásra.
- (c) $\Phi_q(\mathbf{n})$ és \mathbf{n} által bezárt szög éppen 2θ .

A (b) és (c) pontok épp azt jelentik, hogy a $\Phi_q(\mathbf{n})$ vektor az \mathbf{n} vektorhoz képest elfordult 2θ szöggel a \mathbf{q} vektor körül, az (a) pont pedig ahhoz kell, hogy valóban forgatásról beszéljünk, azaz, hogy ne is nyújtódjon meg a vektor a Φ_q hatására. Ezt a pontot egyébként már bebizonyítottuk, a (9)-es tételben. Ezt épp úgy láttunk be, hogy Φ_q egy hasonlósági transzformáció, amely normatartó, azaz nem változtatja a hosszt. A (b) pont igazolásához azt kell látni, hogy $\Phi_q(\mathbf{n})$, \mathbf{n}_\perp és \mathbf{n} lineáris kombinációja, és ezek mindketten merőlegesek \mathbf{q} -ra, így minden lineáris kombinációjuk is merőleges \mathbf{q} -ra, így speciálisan $\Phi_q(\mathbf{n})$ -ról is elmondható ez. A (c) ponthoz pedig használjuk ki, hogy $q = q_0 + \mathbf{q} = \cos \theta + \sin \theta \mathbf{u}$, tehát $q_0 = \cos \theta$ és $|\mathbf{q}| = \sin \theta$. A

(5.3)-as képlet alapján:

$$\begin{aligned}\Phi_q(\mathbf{n}) &= (q_0^2 - |\mathbf{q}|^2)\mathbf{n} + 2q_0|\mathbf{q}|\mathbf{n}_\perp = \\ &= (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\mathbf{n} + 2 \cos \theta \sin \theta \mathbf{n}_\perp = \\ &= \cos 2\theta \mathbf{n} + \sin 2\theta \mathbf{n}_\perp\end{aligned}$$

Mivel \mathbf{n}_\perp merőleges \mathbf{n} -re $\Phi_q(\mathbf{n})$ és \mathbf{n} által bezárt szög éppen 2θ . Ezzel a tételt belátuk. \square

A visszafelé irány, mely szerint minden forgatás előáll egy alkalmas q kvaternióra képezett Φ_q leképezésként nyilvánvaló. Ha az adott forgatás egy $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ féltengellyel és egy ψ szöggel van értelmezve, akkor a $q = \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$ -hez tartozó Φ_q leképezés az előző tétel alapján jó lesz. Fogalmazzuk is meg ezt egy állításban!

Állítás 4.4.1 *Minden forgatás előállítható egy alkalmas q kvaternióhoz képezett Φ_q leképezéssel.*

\square

Most érkeztünk el oda, hogy megindokolhassuk, miért elég a forgatásokat csakis egységkvaterniókra tekinteni. Hiszen egy $q = q_0 + \mathbf{q} = \varrho(\cos \theta + \sin \theta \mathbf{u})$ trigonometrikus alakú kvaterniónak a tengelyének iránya \mathbf{u} lesz akármekkora a kvaternió ϱ hossza. A kvaternióhoz tartozó szög szintén nem függ a kvaternió hosszától. Hasonlóan ehhez a forgatások definíciójában is mindegy, hogy a tengely milyen hosszú, csak az iránya számít.

Így elég csak az egységkvaterniókra tekinteni a forgatásokat. Ha mégsem egységkvaternióval szeretnénk dolgozni, akkor is a q trigonometrikus alakjában szereplő szög és tengely lesz az ami alapján a Φ_q leképezés forgat.

4.5. Leképezés $SO(3)$ és a Φ_q transzformációk között

Hasonlóan ahogy a komplex számok egy egységkört alkotnak a kétdimenziós síkban, az is belátható, hogy az egységkvaterniók egy négydimenziós egységgömböt al-

kotnak az \mathbb{R}^3 Euklideszi térben. Az előző két tétel alapján ez a gömb megfeleltethető a forgatások $SO(3)$ csoportjának. Ahhoz, hogy pontossá tegyük ezt a megfeleltetést, be kell vezetnünk pár definíciót.

Definíció 4.5.1 *Azt mondjuk, hogy a q egységkvaternióhoz tartozó Φ_q leképezés egy $\mathcal{F}_{\mathbf{u},2\theta}$ forgatást reprezentál, ha $q = \cos \theta + \sin \theta \mathbf{u}$.*

Megjegyezhezjük, hogy q csak egy forgatást reprezentálhat, hiszen a trigonometrikus alakja egyértelmű – feltéve, hogy csak $0 < \theta \leq \pi$ közötti szögekre értelmezzük–.

Definíció 4.5.2 *Azt mondjuk, hogy a q egységkvaternióhoz tartozó Φ_q leképezés egy $\mathcal{F}_{\mathbf{u},2\theta}$ forgatás-ekvivalencia osztályt reprezentál, ha $\mathcal{F}_{\mathbf{u},2\theta}$ valamelyik elemét reprezentálja az előző definíció értelmében.*

A definíció tehát azt jelenti, hogy ha Φ_q leképezés egy $\mathcal{F}_{\mathbf{u},2\theta}$ forgatás-ekvivalencia osztályt reprezentál akkor $q = \cos \theta + \sin \theta \mathbf{u}$ vagy $q = \cos(\pi - \theta) + \sin(\pi - \theta)(-\mathbf{u})$. Ezek alapján könnyen beláthatjuk a következő állítást:

Állítás 4.5.1 *Ha a q egységkvaternióhoz tartozó Φ_q leképezés egy $\mathcal{F}_{\mathbf{u},2\theta}$ forgatás-ekvivalencia osztályt reprezentál, akkor pontosan két ilyen kvaternió van, ezek a q és a $-q$ kvaterniók.*

Bizonyítás. Nyilvánvalóan elegendő feltenni, hogy $q = \cos \theta + \sin \theta \mathbf{u}$. Ekkor $-q$ -ra igaz hogy $-q = -(\cos \theta + \sin \theta \mathbf{u}) = -\cos \theta - \sin \theta \mathbf{u} =$. Ezért $-q$ trigonometrikus alakja éppen $-q = \cos(\pi - \theta) + \sin(\pi - \theta)(-\mathbf{u})$. Tehát Φ_{-q} a $\mathcal{F}_{-\mathbf{u},2\pi-2\theta}$ forgatást reprezentálja. Ez a forgatás a (4.1)-es megjegyzés alapján éppen a $\mathcal{F}_{\mathbf{u},2\theta}$ -be eső másik a forgatás. Tehát $-q$ is a $\mathcal{F}_{\mathbf{u},2\theta}$ forgatás-ekvivalenciaosztályt reprezentálja.

Be kell még látni, hogy nincs több kvaternió ezeken kívül, ami ugyanezt a forgatásosztályt reprezentálja. Tegyük fel, hogy egy $p = \cos \psi + \sin \psi \mathbf{w}$ -hoz tartozó Φ_p leképezés is a $\mathcal{F}_{\mathbf{u},2\theta}$ osztályba tartozó forgatást reprezentálja. Ez a forgatás viszont a (5.4.2)-es definíció alapján csak az $\mathcal{F}_{\mathbf{w},2\psi}$ ekvivalencia osztálybeli forgatásokat reprezentálja. Így viszont a két ekvivalencia osztálynak meg kell egyeznie. Ez csak akkor lehetséges, ha $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ és $\psi = \theta$, vagy $\mathbf{w} = -\mathbf{u}$ és $\psi = \pi - \theta$. Tehát $p = q$ vagy $p = -q$. \square

Jól látszik, hogy az előző állítás nagyon hasznos hiszen azt mondja ki, hogy az $f : \mathbb{H}_1 \rightarrow SO(3)$ leképezés – ahol \mathbb{H}_1 az egységkvaterniók halmaza –, nem egyértelmű ugyan, de majdnem, hiszen egy $SO(3)$ -beli elemhez pontosan két egységkvaternió tartozik, amelyhez tartozó Φ_q leképezések őt reprezentálják. Ez nem meglepő, hiszen a forgatások is párban állnak, és ezeket a párok vannak egy ekvivalencia osztályban. Ezzel tehát az egységkvaterniók négydimenziós egységgömbjét megfeleltettük a háromdimenziós forgatások $SO(3)$ halmazának.

4.6. Egy alkalmazás: forgatások kompozíciója

Az előzőekben megmutattuk, hogy a $\Phi_q : \mathbf{v} \rightarrow q\mathbf{v}\bar{q}$ és a $\Phi_{\bar{q}} : \mathbf{v} \rightarrow \bar{q}\mathbf{v}q$ leképezések forgatásoknak feleltethetők meg a háromdimenziós Euklideszi téren. Ez sok szempontból nagyon előnyös felfedezés, nézzük meg egy alkalmazását!

A kérdés, amelyet most megvizsgálunk az, hogy milyen transzformáció lesz két forgatás kompozíciója. Geometriai eszközökkel is belátható, hogy az eredmény egy újabb forgatás lesz. Azonban nem olyan könnyű feladat azt megmondani, hogy a kompozíciónak mi lesz a tengelye és a szöge. Ehhez nyújt nagy segítséget a kvaterniókkal történő megfeleltetése a forgatásoknak. Lássuk be, hogy két forgatás kompozíciója valóban forgatást ad eredményül!

Állítás 4.6.1 *Tegyük fel, hogy p és q egységkvaterniók, és tekintsük az általuk definiált*

$$\Phi_p(\mathbf{u}) = p\mathbf{u}\bar{p}, \quad \Phi_q(\mathbf{v}) = q\mathbf{v}\bar{q}$$

forgatásokat. Ekkor a $\Phi_q \circ \Phi_p$ leképezés – tehát előbb Φ_p -t, majd Φ_q -t alkalmazva – is forgatás, még hozzá a qp szorzat által definiált Φ_{qp} forgatás.

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} \Phi_q \circ \Phi_p(\mathbf{u}) &= \Phi_q(\Phi_p(\mathbf{u})) = \Phi_q(p\mathbf{u}\bar{p}) = \\ &= q(p\mathbf{u}\bar{p})\bar{q} = qp\mathbf{u}\bar{p}\bar{q} = (qp)\mathbf{u}\overline{(qp)} = \Phi_{qp}(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

□

Ebből az állításból könnyen készíthetünk egy eljárást a kompozíció szögének és tengelyének előállítására.

Eljárás 4.6.1 *Legyen adva két szögével és tengelyével megadott forgatás:*

- \mathbf{u} vektor körüli α szögű
- \mathbf{v} vektor körüli β szögű

Feladat: Meghatározni a két forgatás kompozíciójának a szögét és tengelyét.

1. *Készítsük el a két forgatás kvaterniókkal meghatározott megfelelőjét:*

- $q := \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \mathbf{u}$
- $p := \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \mathbf{v}$

2. *Végezzük el a qp kvaterniószorzást: $r := qp$*

3. *Állítsuk elő a qp kvaternió trigonometrikus alakját: $qp = \cos \psi + \sin \psi \mathbf{w}$*

4. *A forgatáskompozíció szöge 2ψ , tengelye pedig \mathbf{w} lesz.*

5. fejezet

Kétféle megadás, kétféle reprezentáció

Az előző fejezetben megmutattuk, hogyan lehet megfeleltetni a forgatásokat kvaternióknak. Most nézzük meg mik a hasonlóságok, különbségek a két reprezentáció, a forgatásmátrixok és a Φ_q alakú leképezések között!

5.1. Átjárhatóság a két reprezentáció között

Az egyik különbség ami, szembeötlik, hogy a mátrixok a forgatásokon kívül más transzformációkat is jól leírnak, például eltolásokat, nyújtásokat, vetítéseket és ezek kombinációit. A kvaterniós reprezentáció ilyen nem tud.

Ha több transzformációt szeretnénk leírni, fontos, hogy a forgatás két reprezentációja között legyen átjárhatóság. Ugyanis több forgatás kompozícióját könnyen leírhatjuk kvaterniókkal – ezt az előző fejezet végén láttuk –, aztán kompozíció-forgatást átírhatjuk mátrixos alakba és akkor további – nem feltétlenül forgatás – transzformációkat is alkalmazhatunk.

Nézzük meg tehát, hogyan lehet megfeleltetni a forgatásmátrixokat kvaternióknak és fordítva!

5.1.1. Kvaternióból forgatásmátrix

Először vegyük azt az esetet, amikor adott egy $q = q_0 + \mathbf{q} = q_0 + (q_1, q_2, q_3)$ kvaternió és az ezáltal definiált Φ_q leképezés. Ekkor keressük azt az $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ forgatásmátrixot, melyre igaz, hogy tetszőleges $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ -ra, igaz, hogy $M\mathbf{v} = \Phi_q(\mathbf{v})$. Használjuk az (5.3)-as képletet Φ_q kiszámítására, mely szerint

$\mathbf{w} = \Phi_q(\mathbf{v}) = (2q_0^2 - 1)\mathbf{v} + 2\langle \mathbf{q}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{q} + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{v})$ egy három tagú összeg. Mindhárom tagot átalakíthatjuk úgy, mint egy mátrix és a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ mátrix szorzata a következőképpen:

$$1. (q_0^2 - 1)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} (2q_0^2 - 1) & 0 & 0 \\ 0 & (2q_0^2 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & (2q_0^2 - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$2. 2\langle \mathbf{q}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 2q_1^2 & 2q_1q_2 & 2q_1q_3 \\ 2q_2q_1 & 2q_2^2 & 2q_2q_3 \\ 2q_3q_1 & 2q_3q_2 & 2q_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$3. 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & -2q_0q_3 & 2q_0q_2 \\ 2q_0q_3 & 0 & -2q_0q_1 \\ -2q_0q_2 & 2q_0q_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Az első átalakítás nyilvánvaló, és második kettő sem túl bonyolult, így ezek belátását az olvasóra bízom. Viszont ha már átalakítottuk az összeadandókat, akkor ha vesszük az összeget, akkor a \mathbf{v} vektor kiemelhető és az eredmény a következő lesz:

$$\mathbf{w} = \Phi_q(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 2(q_1^2 + q_0^2) - 1 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_2q_1 + q_0q_3) & 2(q_2^2 + q_0^2) - 1 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_3q_1 - q_0q_3) & 2(q_3q_2 + q_0q_1) & 2(q_3^2 + q_0^2) - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Így előállítottuk a $\mathbf{w} = \Phi_q(\mathbf{v}) = q\mathbf{v}\bar{q}$ -t $\mathbf{w} = M\mathbf{v}$ alakban.

5.1.2. Forgatásmátrixból kvaternió

Megfordítva, legyen adott egy $M = [m_{ij}] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ forgatásmátrix. Ekkor tudjuk, hogy van olyan $q = q_0 + \mathbf{q} = q_0 + (q_1, q_2, q_3)$ egységkvaternió, amellyel képzett Φ_q

leképezés épp ugyanazt a forgatást eredményezi mint az M mátrixszal való szorzás.

Az előbb kiszámolt (6.1)-es képlet alapján visszafelé is gondolkodhatunk, hiszen:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(q_1^2 + q_0^2) - 1 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_2q_1 + q_0q_3) & 2(q_2^2 + q_0^2) - 1 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_3q_1 - q_0q_2) & 2(q_3q_2 + q_0q_1) & 2(q_3^2 + q_0^2) - 1 \end{bmatrix} -$$

ból a következő egyenleteket kaphatjuk q komponenseire:

$$4q_0q_1 = m_{32} - m_{23}$$

$$4q_0q_2 = m_{13} - m_{31}$$

$$4q_0q_3 = m_{21} - m_{12}$$

$$4q_0^2 - 1 = \text{Tr}(M)$$

Az utolsó egyenletből q_0 kifejezhető, azaz:

$$q_0 = \frac{1}{2} \sqrt{m_{11} + m_{22} + m_{33} + 1} \quad (5.2)$$

Így q többi komponensét is meghatározhatjuk:

$$q_1 = \frac{m_{32} - m_{23}}{4q_0} \quad (5.3)$$

$$q_2 = \frac{m_{13} - m_{31}}{4q_0} \quad (5.4)$$

$$q_3 = \frac{m_{21} - m_{12}}{4q_0} \quad (5.5)$$

Ezzel megadtuk azt a kvaterniót, amellyel való Φ_q leképezés ugyanazt a forgatást adja, mint az M forgatásmátrix.

5.2. A két reprezentáció összehasonlítása

Ebben a részben egyenként megvizsgáljuk a két reprezentációra jellemző pozitív és negatív tulajdonságokat a teljesség igénye nélkül.¹

5.2.1. Euler-szögek és forgatásmátrixok

Emlékezzünk vissza arra, hogy a fejezet elején ennek a megadásnak egyik nagy előnyét már említettük. Arra gondolok, hogy a mátrixok más transzformációkat is

¹Ennek a résznek felépítése a (8)-as forrás alapján készült

reprezentálnak a forgatásokon kívül. Ez igen jeletős előny az alkalmazások terén, például a számítógépes animációban, hiszen ott sok és sokfajta transzformáció egymásutánjára van szükség. Különösen a kétdimenziós síkba történő projekcióra lehet nagy szükség, hiszen általában egy sík képernyőn akarjuk megjeleníteni a háromdimenziós alakzatokat. A kvaterniókkal eltolásokat még lehet ábrázolni – a vektorhoz hozzáadásjuk a kvaternió képzetes részét –, de a projekció műveletére már egyáltalán nem ismerünk kvaterniókkal történő megoldást, csak mátrixosat.

Másik előnye, hogy szélesebben elterjedt. Visszatérve a számítógépes animációhoz, mivel a mátrixok szélesebben elterjedtek, ezért több előre megírt csomag található a mátrixokról a programozási nyelvekhez, mint amennyi csomag a kvaterniók reprezentációjához van.

Az Euler-szögek hátrányai közül már jópárat említettünk a negyedik fejezetben. Elenvenítsük fel, hogy a fő probléma abból fakadt, hogy az Euler-szögek nem egyértelműek abban az értelemben, hogy egy tengellyel és szöggel megadott forgatást több Euler-szöghármassal is meg lehet valósítani. Erre konkrét példát is mutattunk korábban. Ebből az is következik, hogy egy forgatásnak több különböző mátrixát is fel tudjuk írni, így ez a leképezés a mátrixok és a forgatások között nem injektív.

Egy másik probléma ezzel a reprezentációval az, amit már láttunk a negyedik fejezetben és "egy szabadsági fok elvesztésének" neveztünk el.² Ez is sok nehézséget okoz a számítógépes animációban. Ebben az esetben azt a feladatot tűztük ki, hogy egy forgatásmátrixról megállapítsuk, milyen (α, β, γ) Euler-szögekből képezhettük őt. Az derült ki, hogy ha a $\beta = \frac{\pi}{2}$, akkor nem lehet pontosan megmondani, hogy pontosan mennyi volt az α és γ szög, hiszen a végeredmény mátrix csak a két szög különbségétől függ. Tehát egymátrix több forgatást is reprezentálhat, például a $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$ és a $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{2\pi}{3}$ szöghármassokhoz ugyanaz a forgatásmátrix tartozik, hiszen a $\psi : \gamma - \alpha$ különbség mindkét esetben $\frac{\pi}{6}$. Az is jól látható, hogy ilyen α és γ szögekárokából végtelen sok van, így semmiképpen nem tudjuk megmondani, melyik kettő tartozik ehhez a mátrixhoz. Így a forgatásokból a mátrixokba történő leképezés nem injektív.

²Sok forrás utal erre pl. http://www.sidefx.com/docs/houdini8/content/base/handles_gimbal.xml

Az előző két bekezdést figyelembe véve elmondhatjuk, hogy a forgatásokból a mátrixokba történő leképezés nem injektív és nem is szürjektív.

Az Euler-szögek megadásánál fontos az alapforgatások sorrendje, erre is láttunk példát a negyedik fejezetben. A különböző alkalmazásokban nem mindig ugyanazt a sorrendet használják. Éppen ezért problémát jelenthet az, ha más munkáját szeretnénk alkalmazni és ő más sorrendben használta az alapforgatásokat. Ekkor ugyanis át kell írni újból az egyik munkában a forgatásmátrixokat, hogy passzoljon a kettőben az alapforgatások sorrendje.

Hátrányai közé tartozik még az is, hogy a kompozícióforgatás eredményéről nehéz megállapítani, hogy milyen Euler-szögek tartoznak hozzá. Két forgatásmátrixot összeszorozva forgatásmátrixot kapunk – ez következik Euler tételéből –, és a két mátrix szorzata lesz ennek a forgatásnak a mátrixa. Ez még pozitív tulajdonsága a forgatásmátrixoknak, viszont még ha tudtuk is mik voltak az eredeti két forgatásmátrixhoz tartozó Euler-szögek, a kompozícióról nehéz megmondani, hogy milyen szöghármas tartozik hozzá, sőt általában nem is lehet. Például, ha a kompozíciómátrixban a $\beta = \frac{\pi}{2}$ szerepelne, akkor az előzőekben is leírtak szerint nem lehet megállapítani, hogy melyek a α és γ szögek.

Végül azt is felróhatjuk a forgatásmátrixok számlájára, hogy túl nagy ahhoz képest, hogy mennyi információt hordoz. Ugyanis ha a mátrixokat csak forgatások reprezentálására használjuk, akkor három Euler-szög megadja hogy melyik forgatásra gondolunk, a forgatásmátrix viszont ennek eltárolására kilenc helyet használ fel.

Elég ellenérv és érv hangzott el a forgatásmátrixokkal kapcsolatban, most nézzük meg, milyen tulajdonságai vannak a kvaterniókkal történő reprezentációnak!

5.2.2. Forgatások reprezentálása kvaterniókkal

Első előnyként azt említem, hogy a kvaterniók sokkal szemléletesebb megadásai a forgatásoknak, mint a mátrixok. Ugyanis a kvaterniókhoz tartozó Φ_q leképezés a forgatás lényegét a tengely és a forgatás szögét őrzi információként.

Az előzőekhez kapcsolódóan azt is elmondhatjuk, hogy sokkal hatékonyabban lehet tárolni a kvaterniókkal való forgatást, hiszen egy kvaterniónak négy koordiná-

tája van és ezekkel megadja azt a háromdimenziós vektort, ami körül forgat, és azt az egy szöget, amekkora szöggel forgat. A mátrixok 9 számból állnak és ezekkel csak azt a három szöget tárolja el, amelyekkel a koordináta tengelyek körül forgat.

További nagy előny még, hogy a kvaternióreprezentációból könnyen meg lehet állapítani, hogy a két forgatás kompozíciójának mi lesz a tengelye és szöge. Ezt bebizonyítottuk és eljárást is adtunk rá a 6.6-os részfejezetben.

Az 5.2-es részfejezetben beláttuk, hogy a kvaterniók és a $SO(3)$ halmaz közötti leképezés ugyan nem egyértelmű, de csak pontosan két kvaternióhoz tartozik ugyanaz a forgatás-ekvivalenciaosztály. Ez sokkal előnyösebb tulajdonság a mátrixokénál, ahol egy forgatáshoz igen sok mátrix is tartozhat attól függően, hogy milyen Euler-szögekkel írjuk le azt.

Természetesen a kvaterniók reprezentáció esetében nem lét fel a szabadsági fok elvesztése, hiszen ez az Euler szögek sajátja.

Mint már a mátrixok jó tulajdonságainál említettem, nagy hátránya a kvaternióknak az, hogy nem lehet velük érdemben a forgatásokon kívül más vektrotranszformációkat leírni.

Másik hátrányuk, hogy jóval kevesebbet tanulunk róluk, mint a mátrixokról még a matematikai típusú szakokon is az egyetemeken. Például az ELTE-n alkalmazott matematikus szakon éppen csak a kvaterniók algebrájáról tanulunk, arról nem igazán hallunk, hogy milyen jól megfeleltethetőek a háromdimenziós forgatásoknak. Ezek után nem meglepő, hogy a szakmába kikerülve ritkán használják az programozók illetve alkalmazott matematikusok, hiszen nem igazán ismerik őket.

6. fejezet

Összegzés

Dolgozatom céljaként azt fogalmaztam meg, hogy bemutassam a kvaterniókat mint az algebra egyik hasznos fejezetét. Kissé hihetetlennek is tűnhet akár, hogy elvont fogalom, mint a kvaterniók jól használható legyen. Mert lássuk be igen nehéz elképzelni négydimenziós számokat, amelyek ráadásul vektorok is, meg párok is. Dolgozatom erre rácsáfolt, hiszen találtunk egy leképezést a kvaterniók halmazán, mellyel minden kvaternióhoz igen szemléletes módon egy forgatást rendelhetünk. Ez talán segíthet elképzelni a négydimenziós kvaterniókat, megfoghatóvá teszi őket. Ezen kívül az is kiderült, hogy ez a megfeleltetés nem csak a szemléletünk kialakulásának segít, hanem önmagában is hasznos leképezés. Sőt, számos jó tulajdonsággal rendelkezik a forgatások másik reprezentációjával, az Euler-szögekkel és forgatásmátrixokkal szemben. Sok alkalmazásban érdekesebb a kvaterniókat használni a forgatások leírásához, mint a forgatásmátrixokat.

Mindezek az érvek azt támasztják alá, hogy a kvaterniókkal érdemes foglalkozni, mert a legkülönlegesebb helyeken lehet őket alkalmazni, és remélem most már az olvasó is úgy gondolja, hogy önmagunkban is érdekesek a tanulmányozásra.

További kutatási területek, a témával kapcsolatban még a kvaterniókkal történő forgatások interpolálása. Ezt a számítógépes animációk megvalósításához érdemes vizsgálni. Ez a téma részletesen ki van dolgozva a [7]-es és [8]-as forrásban.

Másik érdekes téma, az a dolgozomban kevés helyet kapott az a Cayley-számok kapcsolata a hét- és nyolcdimenziós Euklideszi terekkel. Erről sok eredményt lehet találni [4]-es forrásban.

A Cayley-számok és a számfogalom lezárásának témájáról pedig a [2]-es és [5]-ös forrásban lehet igen sok érdekességet olvasni.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, dr. Ágoston Istvánnak, hogy maximálisan segítette munkámat. Sokat tanultam tőle, és rengetegszer segített megérteni valamit, ha valahol elakadtam, ami önbizalmat is adott a hátralévő anyag elsajátításában.

Köszönetet mondanék még Édesapámnak, aki mint gyakorlott szakdolgozati témavezető és bíráló, sok hasznos tanáccsal látott el.

7. fejezet

Irodalomjegyzék

1. Amy Buchman: A Brief History of Quaternions and the Theory of Holomorphic Functions of Quaternionic Variables
2. John C. Baez: The Octonions
3. Kiss Emil: Bevezetés az algebrába
4. John H. Conway - Derek A. Smith: On Quaternions and Octonions
5. I. L. Kantor - A. Sz. Szolodovnyikov: Hiperkomplex számok
6. Jack B. Kuipers: Quaterniond and Rotation Sequences
7. Ken Shoemake: Animating Rotation with Quaternion Curves
8. Erik B. Dam - Martin Koch - Martin Lillholm: Quaternions, Interpolation and Animation
9. <http://en.wikipedia.org>
10. <http://hu.wikipedia.org>
11. [//www.sidefx.com/docs/houdini8/content/base/handles_gimbal.xml](http://www.sidefx.com/docs/houdini8/content/base/handles_gimbal.xml)