

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

A MANDELBROT HALMAZ

BSc szakdolgozat

Készítette: **Bertalan Ágnes**

Matematika Bsc

Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető: **Sigray István**

műszaki tanár

Analízis Tanszék



Budapest, 2011

Tartalomjegyzék

1. Alapfogalmak és tételek	4
1.1. Riemann-gömb	4
1.2. A Julia halmaz	5
1.3. Lokális vizsgálat	7
1.4. Kitöltött Julia halmaz	9
2. Mandelbrot halmaz	12
2.1. Benoît Mandelbrot öröksége	12
2.2. Az összefüggőség bizonyítása	13
2.3. A iteráció újra gondolása	14
3. Program	16
3.1. mandelbrot.m	17
3.2. julia.m	19
3.3. mm.m	20
4. Eredményeink	22
4.1. A paraméter megválasztása	22
4.2. A generált halmaz összefüggőségének vizsgálata	25

Bevezetés

A szakdolgozatban a Mandelbrot halmaz egy általánosításával foglalkozunk. Vizsgálataink alapötletét az adja, hogy az iterációt leíró függvényt szétbontjuk valós és képzetes részre, majd azt figyeljük, hogy ezen valós függvények különböző változtatása a Mandelbrot halmazon milyen torzulást okoz. Vizsgáljuk továbbá a halmaz és a hozzá tartozó Julia halmazok összefüggőségét.

Az első fejezetben a témakör elméleti hátterét foglaljuk össze röviden, a szükséges definíciók, állítások és tételek segítségével. Az alfejezetekben a Riemann-féle számgömb definíciója és konstruálása található, a Fatou és Julia halmazokkal kapcsolatos fontosabb összefüggéseket, majd a halmazok lokális tulajdonságait vizsgáljuk. A fejezet végén a kitöltött Julia halmaz által kerülünk közelebb a címben említett halmazhoz.

A második fejezetben magával a Mandelbrot halmazzal foglalkozunk. Pontosan definiáljuk a halmazt, majd röviden összegezzük Benoît Mandelbrot munkásságát és az összefüggőségről szóló cikk tartalmát ismertetjük. A fejezet végén a egy nem túl ismert megközelítést vázolunk, ez a szakdolgozat témája.

A következő részben az általam írt programok kódjai szereplenek és rövid ismertető a működésükről.

Az utolsó fejezet két kérdést fogalmaz meg, melyekre megpróbálunk választ adni. Ebben a fejezetben van leírva a saját eredményünk. Az érhetőség érdekében sok képpel illusztráltuk a leírtakat.

1. fejezet

Alapfogalmak és tételek

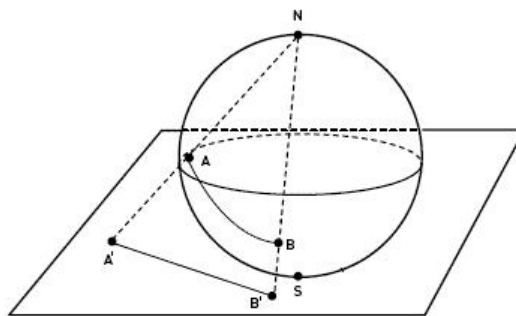
A fejezetben megismerkedünk a fontosabb definíciókkal és tételekkel. Ahol szükséges példát is mutatunk.

1.1. Riemann-gömb

Törtlineáris leképezések vizsgálatánál érdekesebb a komplex síkot egy ∞ ponttal kiegészíteni, amelynek a környezetei a korlátos halmazok komplementeri, és úgy tekinteni, hogy a $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$ leképezésnél $-d/c$ képe ∞ és a ∞ képe a/c . Az így kiegészített komplex síkot Riemann-féle számgömbnek nevezzük és $\overline{\mathbb{C}}$ jelöljük.¹

A számgömb elnevezés azért helyénvaló, mert a sík és az egységgömb felület között bijekciót lehet adni, ezt hívjuk **sztereografikus projekciónak**.

A vetítés alapgondolata az, hogy a gömb déli pólusát (S) és a komplex számsíkon az origót feleltessük meg egymásnak. A sík minden pontját (A illetve B) kössük össze az északi pólussal



ahol ez a szakasz metszi a gömbfelületet ott lesz a komplex szám képe (A' illetve B'). Ahogy az origótól távolodunk a síkon, azaz a komplex szám abszolútértéke tart a végtelenhez, úgy közeledünk a gömbfelületen az északi pólushoz, de azt soha nem

¹Járai Antal: Modern alkalmazott analízis

érjük el, ez feleljen meg a ∞ képének. Az így kapott leképezés kölcsönösen egyértelmű a Riemann-féle szögömb és az egységömb felület között.

Vizsgáljuk meg a sík és a gömbfelület konvergencia viszonyait is. Mindkét irányban folytonos a megfeleltetés, így ha a síkon $z_n \rightarrow z$, akkor a gömbön is igaz lesz a konvergencia, azaz $z'_n \rightarrow z'$. Ez nyilván való a $z \neq \infty$ esetben. Ha $z_n = \infty$ akkor a konvergenciát éppen a gömbi képe után értelmezzük, vagyis a $z_n \rightarrow \infty$ jelenti a $|z_n| \rightarrow \infty$. Emiatt nem kell a $-\infty$ -t hozzá venni a Riemann-gömbhöz.

Ezek után könnyen meggondolható, hogy a szakasz képe geodetikus szakasz, az egyenes képe pedig egy, az északi póluson áthaladó kör.

1.2. A Julia halmaz

1.1. Definíció. Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány. \mathcal{F} elemei $g : D \mapsto \mathbb{C}$ holomorf függvények. \mathcal{F} -et **normális családnak** nevezzük, ha minden $g_n \in \mathcal{F}$ sorozatnak van D -n lokálisan egyenletesen konvergens részsorozata.

1.1. Megjegyzés. Weierstrass tétele miatt a részsorozatok is holomorf függvényhez konvergálnak.

Ezt szokták általában normális családnak nevezni. Nekünk egy általánosabb definícióra lesz szükségünk.

1.2. Definíció. Legyen $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, ami a gömb felületet rész tartománya. \mathcal{F} -nek D -n meromorf függvények az elemei. Ezeket a függvényeket $f : D \subset S^2 \rightarrow S^2$ függvényekkel azonosítjuk, ahol $S^2 = \{x, y, z : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Az \mathcal{F} **normális család**, ha létezik g_{k_n} lokálisan egyenletesen konvergens rész sorozata a gömb felületen.

1.2. Megjegyzés. A 1.1 és a 1.2 definíciók nem teljesen ekvivalensek, még akkor sem ha \mathcal{F} csak holomorf függvényeket tartalmaz.

Például: legyen $f(z) = z^n$ alakú függvények, az egység kör külsején a 1.1 definíció szerint nem tartozik f normális családjába, míg a 1.2 definíció szerint bele tartozik, mert z^n lokálisan egyenletesen tart a végtelenhez.

Az viszont igaz, hogy ha \mathcal{F} csak holomorf függvényekből áll és a 1.1 definíció szerinti normális család, akkor minden g_n sorozathoz található olyan g_{k_n} részsorozat,

melyre lokálisan egyenletesen konvergál vagy egy g holomorf függvényhez vagy a végtelenhez, azaz $\forall g_n$ sorozathoz $\exists g_{k_n}$ részsorozat: vagy $g_{k_n} \rightarrow g$, ahol g holomorf vagy $g_{k_n} \rightarrow \infty$ lokálisan egyenletesen.

1.1. Tétel (Vitali-Montel). Ha létezik olyan $K > 0$ szám, hogy minden $g \in \mathcal{F}$ esetén $|g| \leq K$, akkor \mathcal{F} normális család.

1.3. Definíció. Legyen $f^{\circ 0}(z) = id$, $f^{\circ 1}(z) = f(z)$, $f^{\circ 2}(z) = f \circ f(z)$, ..., $f^{\circ n}(z) = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n(z)$, azaz $f^{\circ n}$ az n -szeres iterált.

1.4. Definíció. Legyen $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ racionális törtfüggvény. Ha z_0 -nak van olyan D környezete, melyre $f^{\circ n}$ D -n normális család akkor $z_0 \in F(f)$, azaz z_0 az f függvény **Fatou halmazában** van.

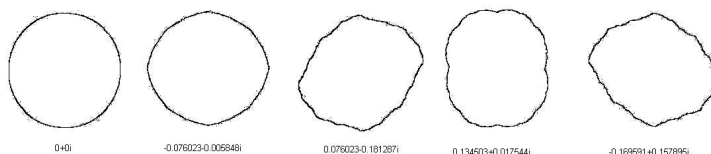
A $J(f) = \overline{\mathbb{C}} \setminus F(f)$ az f függvényhez tartozó **Julia halmaz**.

Egy egyszerű példa a Julia halmazra: a $f(z) = z^2$ függvény. Vizsgáljuk meg, hogy ennek a leképezésnek mi a Julia és mi lesz a Fatou halmaza!

Azt állítom, hogy az f -hez tartozó Julia halmaz az egységkörvonal. A tér többi része azaz az egységkör külseje és belseje pedig az f -hez tartozó Fatou halmaz. Ezt könnyen be tudjuk látni, ha a definíciókat ellenőrizzük.

Nézzük először az egységkör belsejét. Ha $r < 1$, akkor $f^{\circ n}(B(0, r)) = B(0, r^{2^n})$, tehát f lokálisan egyenletesen konvergál a 0-hoz $B(0, 1)$ -en. Hasonlóan meggondolhatjuk, hogy a kör külseje is a Fatou halmaz része.

Az egységkörvonal bármely kis környezetében van olyan pont, amely a végtelenhez és olyan, amely a 0-hoz konvergál, ezért nem lehet a $F(f)$ -ben.

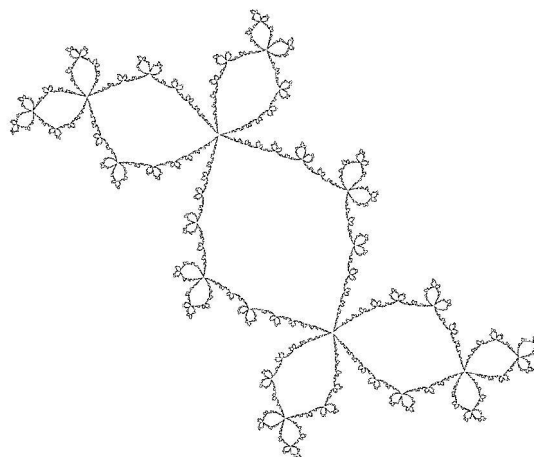


1.1. ábra.

$\overline{\mathbb{C}} = J(f) \cup F(f)$ összefüggés miatt az egységkörvonal az f -nek a Julia halmaza. Kivételes ez az eset, abban, hogy a Julia halmaz nagyon sima, egyszerű. Általában

sokkal összetettebb. Nézzük meg, hogy kicsi perturbáció esetében hogyan viselkedik a Julia halmaz. Vegyük a $f(z) = z^2 + c$ függvényt, ahol $c \in \mathbb{C}$ és kicsi abszolút értékű.

Ekkor a Julia halmaza már nem kör lesz, hanem a kör egy perturbáltja. Minél nagyobb a c abszolútértéke annál nagyobb lesz az eltérés a körtől (1.1). Nagyobb abszolút értékű konstans esetén már semmilyen hasonlóság nem fedezhető fel az körrel. A 1.2 képen a ún. Douady nyúl látható, mely a $c = -0.122565 + 0.744864i$ ponthoz tartozik. Ez a halmaz Adrien Douady francia matematikusról kapta a nevét, és jól szemlélteti a Julia halmazok komplexitását.



1.2. ábra.

$z_0 = \infty$ esetén a $g(z) = \frac{1}{f(\frac{1}{z})}$ függvényt vizsgáljuk a 0 pontban, mert az így kapott új függvény a 0-ban ugyan úgy viselkedik, mint az eredeti a ∞ -ben.

1.1. Állítás. *Ha f foka legalább 2, akkor $J(f)$ -ben nincs izolált pont.*

1.2. Állítás. *$J(f)$ invariáns f -re nézve, azaz $f(J(f)) = f^{-1}(J(f)) = J(f)$.*

1.3. Lokális vizsgálat

Most a pontok lokális környezetét vizsgáljuk meg és osztályozzuk.

1.5. Definíció. *Legyen z_0 f -hez tartozó fixpont. Ekkor a **fixpont sajátértékén** a $f'(z_0)$ -t értjük, ha $z_0 \neq \infty$.*

Ha $z_0 = \infty$, akkor vegyük a $g(z) = \frac{1}{f(\frac{1}{z})}$ segéd függvényt. Ebben az esetben z_0 f -hez tartozó sajátértékén $g'(0)$ -t értjük.

Jelölés: $\lambda_f(z_0)$, ha f és z_0 egyértelmű akkor λ -val jelölünk.

1.6. Definíció. *Azt mondjuk, hogy z_0 az f függvénynek*

- **vonzó fixpontja**, ha sajátértékének abszolútértéke kisebb egynél, azaz $|\lambda| < 1$,
- **szupervonzó fixpontja**, ha sajátértéke 0, azaz $\lambda = 0$,
- **taszító fixpontja**, ha sajátértékének abszolútértéke nagyobb egynél, azaz $|\lambda| > 1$.

1.7. Definíció. Legyen z_0 az f függvény k -hosszú periodusa. Ekkor a **periodikus pont sajátértékén** a $(f^{\circ k})'(z_0)$ -t értjük, ha $z_0 \neq \infty$.

1.8. Definíció. A vonzó, szupervonzó és taszító periodikus pont az előbbiekhöz hasonlóan definiálható. Azt mondjuk, hogy z_0

- **vonzó periodikus pont**, ha $|\lambda| < 1$,
- **szupervonzó periodikus pont**, ha $\lambda = 0$,
- **taszító periodikus pont**, ha $|\lambda| > 1$.

Legyen $D_0 = B(z_0, \varepsilon)$ $\varepsilon > 0$. Jelöljük D_1 -gyel $f^{-1}(B(z_0, \varepsilon))$ -nak azon komponensét, amely tartalmazza z_0 -t. Hasonló gondolatmentet alkalmazva D_n legyen az $f^{-1}(D_{n-1})$ -nak azon komponense, amely tartalmazza z_0 -t.

Könnyen meggondolható, hogy ezen tartományok monoton növvő sorozatot alkotnak, azaz $D_0 \subset D_1 \subset \dots \subset D_{n-1} \subset D_n \subset \dots$

Legyen $D = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$. Ekkor D a z_0 -hoz tartozó **vonzási tartomány**.

1.3. Megjegyzés. D független ε -tól.

1.2. Tétel. Minden vonzó periodikus pont pályája a Fatou halmazban van. Tehát $D \subset F(f)$, de $\partial D \subset J(f)$.

Minden taszító periodikus pont pályája a Julia halmazban van.

1.9. Definíció. Azt mondjuk, hogy z_0 **kritikus pont**, ha $z_0 \neq \infty$, $f(z_0) \neq \infty$, de $f'(z_0) = 0$ teljesül.

1.3. Állítás (Kritikus pont). Legyen f racionális törtfüggvény, z_0 f -nek egy vonzó fixpontja, és ω z_0 vonzási tartománya. Ekkor ω tartalmazza f legalább egy kritikus pontját.

1.10. Definíció. Egy periódikus pontot **parabolikusnak** ($f^{\circ n}(z_0) = z_0$) nevezünk, ha a sajátértéke 1 és az $f^{\circ n}$ nem az identitás.

1.4. Megjegyzés. $f^{\circ n}$ csak akkor lehet identitás, ha f olyan lineáris törtfüggvény, amelynek két fixpontja van, melyeknek sajátértéke n -edik egységgyök.

1.3. Tétel (Koenigs). Legyen $f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$. Ha $|\lambda| \neq \{0, 1\}$, akkor ha létezik θ -nak olyan nyílt környezete S , és létezik $\phi : S \rightarrow \mathbb{C}$ racionális törtfüggvény $\phi(0) = 0$, $w = \phi(z)$, hogy $\phi \circ f \circ \phi^{-1} : w \mapsto \lambda w$ lineáris leképezés, és ϕ konstanssal való szorzás erejéig egyértelmű.

1.4. Tétel (Böttcher). Legyen $f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n$, ahol $k \geq 2$, $a_k \neq 0$ racionális törtfüggvény. Akkor ha létezik θ -nak olyan nyílt környezete S , és létezik $\phi : S \rightarrow \mathbb{C}$ leképezés $\phi(0) = 0$, $w = \phi(z)$, hogy $\phi \circ f \circ \phi^{-1} : w \mapsto w^k$, és ϕ egyértelmű egy $(k-1)$ -szeres gyökkel való szorzás erejéig.

1.4. Kitöltött Julia halmaz

1.11. Definíció. Legyen $f(z)$ d -ed fokú polinom, $d \geq 2$. Jelöljük $K(f)$ -fel azon pontok halmazát, amelyek pályája korlátos, $K(f)$ komplementerének bármely z pontjára az iteráltjai a végtelenhez tartanak. Ekkor $K(f)$ -et az f függvényhez tartozó **kitöltött Julia-halmazának** hívjuk.

1.4. Állítás. Legyen $f(z) = z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_1 z + a_0$, és legyen $C := 2 + 2(|a_{k-1}| + |a_{k-2}| + \dots + |a_1| + |a_0|)$ (csak f -től függő) konstans.

1. $\{f^{\circ n}(z_0)\}$ korlátos, azaz z_0 eleme a $K(f)$ -nek.

2. $\{f^{\circ n}(z_0)\}$ nem korlátos.

2.1 $f^{\circ n}$ tart a végtelenbe, $n \rightarrow \infty$ esetén.

3. minden $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ esetén $|f^{\circ n}(z_0)| \leq C$.

4. létezik $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, hogy $|f^{\circ n}(z_0)| > C$.

Ekkor az 1.) ekvivalens a 3.)-mal, illetve a 2.) a 2.1) és a 4.) is ekvivalensek.

1.5. Megjegyzés. Az előző állítás 1. és 2. (2.1), illetve a 3. és 4. pontja egymás ellentétei.

1.4 Bizonyítás:

2.) \Rightarrow 2.1) Triviális.

2.) \Rightarrow 4.) Ha $f^{\circ n}$ nem korlátos, akkor minden C' esetén létezik olyan n , hogy az $|f^{\circ n}|$ nagyobb C' -nél. Legyen $C' = C$ -nek, ekkor a 4.) állítás igaz lesz.

4.) \Rightarrow 2.1) $|z_0| > C$ akkor

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= |z_0^n + a_{n-1}z_0^{n-1} + \dots + a_1z_0 + a_0| \geq \\ &\geq |z_0^n| - |z_0^{n-1}|(|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_1| + |a_0|) \geq \\ &\geq |z_0^{n-1}| \{ |z_0| - (|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_1| + |a_0|) \} \geq \\ &\geq 2|z_0^{n-1}| \geq 2|z_0| \end{aligned}$$

$|f^{\circ k}(z_0)| \geq 2^k|z_0| \geq 2^kC$. Ha $|f^{\circ l}(z_0)| > C$, akkor $|f^{\circ l+k}(z_0)| > 2^kC$, azaz $f^{\circ n}$ a végtelenbe tart, ha n -el a végtelenbe tartunk.

3.) \Rightarrow 1.) Ez az irány is egyértelmű, mert ha z_0 pályája kisebb C -nél, azaz van felső korlátja akkor z_0 benne van $K(f)$ -ben.

1.) \Rightarrow 3.) A 1.5 megjegyzésből következik. ■

1.4 állítás egy másik átfogalmazása:

1.5. Állítás. Legyen $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$, és legyen

$C := 2 + 2(|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_1| + |a_0|)$ (csak f -től függő) konstans, melyre $z_0 \in K(f)$ akkor és csak akkor, ha z_0 pályája C -nél kisebb abszolútértékű pontokból áll.

1.6. Állítás. $\partial K = J(f)$

Bizonyítás:

1) $J(f) \subset \partial K$

$\text{int}(K) \subset F(f)$ a Vitali-Montel tétel miatt. $\mathbb{C} \setminus K = \text{ext}(K)$ és minden $z_0 \in \text{ext}(K)$ pontnak egy környezetében $f^{\circ n}$ lokálisan egyenletesen tart végtelenbe.

Ebből következik, hogy $\text{ext}(K) \subset F(f)$. Tudjuk, hogy $F(f) \cup J(f) = \mathbb{C}$, ezért $J(F) \subset \partial K$

$$2) \partial K \subset J(f)$$

Legyen $z_0 \in \partial K$, akkor z_0 bármilyen kicsi környezetében vannak olyan z és w pontok, melyekre igaz, hogy $|f^n(z)| \leq K$ és $f^n(w) \rightarrow \infty$. Emiatt ∂K nem lehet része az $F(f)$ -nek. Tehát $\partial K \subset J(f)$

Ha tudjuk, hogy $J(f) \subset \partial K$ és $\partial K \subset J(f)$ akkor $\partial K = J(f)$ ■

1.7. Állítás. *Legyen f polinom. Ekkor $J(f)$ akkor és csak akkor összefüggő, ha $K(f)$ tartalmazza f összes kritikus pontját.*

2. fejezet

Mandelbrot halmaz

2.1. Definíció. Legyen $M \subset \mathbb{C}$ halmaz, ahol $M = \{c \in \mathbb{C} \mid x_n = x_{n-1}^2 + c \not\rightarrow \infty\}$, az M halmazt **Mandelbrot halmaznak** nevezzük.

Azaz a Mandelbrot halmaz elemei olyan komplex számok, melyekre a $x_n = x_{n-1}^2 + c$ iteráció nem tart a végtelenbe. Ha ezen pontokat ábrázoljuk a komplex számsíkon akkor kapjuk a már sokak által ismert fraktálalakzatot. Az 1.7 állítás alapján megfogalmazható egy másik, az előbbivel ekvivalens definíció.

2.2. Definíció. Legyen $f_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény ahol $f(z) = z^2 + c$. Azon $c \in \mathbb{C}$ pontokat melyekre a hozzájuk tartozó Julia halmazok összefüggőek **Mandelbrot halmaznak** nevezzük.

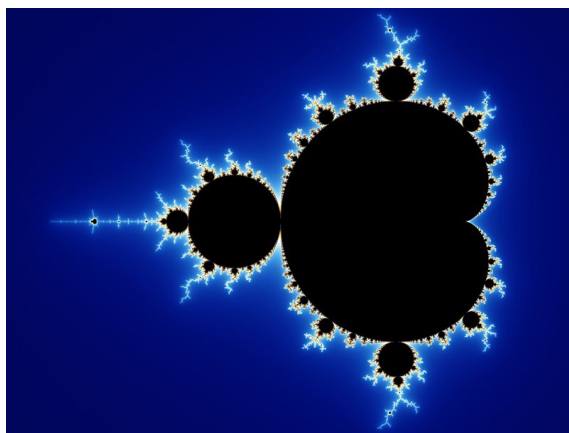
2.1. Benoît Mandelbrot öröksége

A történelem folyamán nem Mandelbrot volt az, aki először vizsgált iterációkat, például Helge von Koch, Waclaw Sierpiński, Gaston Julia, Pierre Fatou, vagy Riesz Frigyes. Mandelbrot új szemléletében az volt az üttörő jelentőségű, hogy nem csak magát az iterációt vizsgálta, hanem a kapott alakzat is érdekelte. Így jutott el az önhasonló alakzatok világához. A fraktál elnevezést is ő alkotta meg, 1975-ben jelent *Les objets fractals, forme, hasard et dimension* című cikkében, a latin fractus szóból, amely töröttet jelent utalva a dimenzió számra.

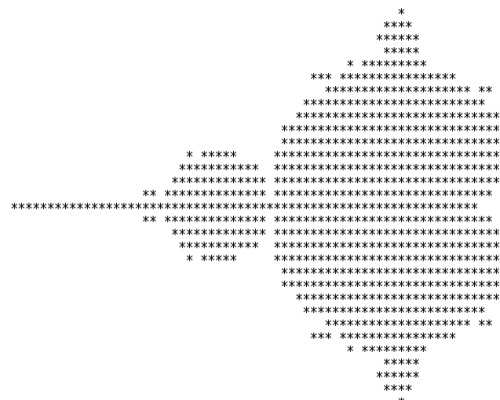
Legkorábbi élménye ezzel a témakörrel 1945-ben volt, amikor nagybátyja, aki

szintén matematikus volt Gaston Julia egyik cikkére hívta fel a figyelmét. Ekkor még nem fordult ebbe az irányba, csak mintegy 25 évvel később. Benoît Mandelbrot (1924-2010) sokat foglalkozott a káosszal, komplex rendszerekkel, mégis amiről mindenki ismeri a nevét, az a róla elnevezett halmaz. Ezt először a 1979-ben rajzolta ki (2.1 ábra), de csak '82-ben Adrien Douady és J. Hubbard nevezte el a halmazt.

Egy iterációval foglalkozott a komplex számsíkon, amelyet már a bevezetőben említettünk. Itt z értéke állandó és c értéke változik. Azt vizsgálta, hogy milyen c esetén lesz konvergens az iteráció és mikor nem. Észre vette hogy ha konvergens a sorozat, akkor vagy 0-hoz vagy ∞ -hez konvergál.



2.2. ábra.



2.1. ábra. Mandelbrot-halmaz

Megállapította, hogy ha az iteráció során a szám abszolútértéke meghalad egy határt, akkor biztosan a végtelenhez tart. A színes ábrákon legtöbb esetben a fekete rész azon számok halmaza, amelyek korlátosak, ez a halmaz belseje. A többi szín pedig a végtelenhez való konvergálás sebességét jelenti. 2.2 ábrán egy pont minél sötétebb kékkel van színezve annál gyorsabb a konvergencia sebessége.

2.2. Az összefüggőség bizonyítása

Évekig nyitott kérdés volt a Mandelbrot halmaz összefüggősége. Az ábrák alapján azt gondolták, hogy a halmaz nem összefüggő, de az első rajz megszületése után

4 évvel, 1983-ben be lett bizonyítva, hogy ez a halmaz összefüggő. A Douady és J.H. Hubbard *Iteration of complex quadratic polynomials* cikkében publikálták az eredményt. Ezen cikk felvetett több fontos máig tisztázatlan kérdést. A mai napig nem született ennél jelentősebb, közérthető eredmény a témával kapcsolatban. A következőkben röviden ismertetjük a cikk tartalmát:

A cikk a másodfokú leképezések iterációival foglalkozik a Riemann-számgömb felett, pontosabban a $f_c(z) = z^2 + c$ alakú függvényekkel, ahol $c \in \mathbb{C}$. A ∞ erős vonzó pontja f_c -nek és a vonzási tartomány az egyetlen kritikus pontot vagy tartalmazza vagy nem tartalmazza. Az első esetben f_c Julia halmaza Cantor-típusú nem összefüggő halmaz, míg a másik esetben a Julia halmaz ugyan összefüggő, azonban topológiája nem egyszerű (Ld Douady nyúl 1.2).

Az első tétel kimondja, hogy M összefüggő, komplementere pedig konform ekvivalens az egység körlappal. A komplementere pedig konform ekvivalens az egység körlappal. A harmadik tétel pedig M komplementuma és az egységkörlap közötti természetes konform bijekciót a határon, azaz az egységkörvonalon vizsgálja. Belátták, hogy M belsejének mindegyik komponense konform ekvivalens az egységkörlappal. (A konform leképezés expliciten adott.) Bővebb részleteket ld. [4].

2.3. A iteráció újra gondolása

Azóta, hogy az első ábrák elkészültek már sokan sokféleképpen újra gondolták a szabályt, és az általánosítás lehetőségét. Volt aki a hatványt növelte, volt aki más polinommal dolgozott, de szinte mindig komplex számsík feletti iteráció volt.

Ha $z^3, z^4 \dots$ szabállyal készült ábrákat megnézzük, akkor semmilyen hasonlóságot nem lehet felfedezni az alaphalmaznak tekinthető Mandelbrot halmazzal. Ezekben az esetekben határozottan látszik valamilyen fajta középponti szimmetria, mely az eredeti halmaz esetében nem volt meg. Mi arra törekedtünk, hogy minél kisebb változást idézzünk elő a kapott halmazokban.

Ezért egy még nem sokak által vizsgált megközelítést alkalmaztunk. A szakdolgozatban két kétváltozós valós függvényként tekintünk a problémára. Ha komplex függvényként néznénk akkor az egyik függvény lenne a valós rész, míg a másik a

képzetes rész. Tehát az esetünkben a Mandelbrot-halmaz hozzárendelési szabálya: $f(x, y) = x^2 - y^2 + c_1$, $g(x, y) = 2xy + c_2$, ahol $x, y, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Ilyen jellegű vizsgálatokat előttünk már többen is végeztek, például Bergweiler [6], Flechter és Goodman [5]. A szakdolgozat alapötlete ezen művektől függetlenül született meg, és a munka során nem használtuk fel a tartalmukat. Azon olvasók számára, akik érdeklődését felkeltettük ezen témakör iránt, úgy gondoljuk jó kiinduló pont lehet e két cikk.

A programnak inputként teszőleges valós függvény megadható, nem feltétlenül csak polinomok. Ezen tulajdonság a program megírásának következménye, de minket elsősorban csak a polinom inputok érdekelnek, azok közül is csak azok melyek az általunk az elején meghatározott kritériumokat teljesítik.

Első sorban azt vizsgáltuk, hogy a paraméterek változtatása milyen hatással van a kapott halmazra: látványban, a halmaz illetve a hozzá tartozó Julia halmazok összefüggőségére. A dolgozatban egyetlen függvény párt vizsgálalunk:

$$f(x, y) = x^2 - y^2, g(x, y) = 2xy + 0.9x^2.$$

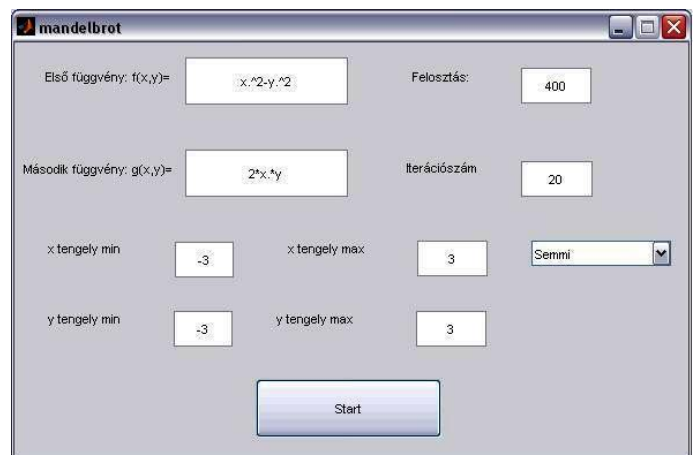
3. fejezet

Program

A program MATLAB-ban készült, 3 részből áll: mandelbrot.m, julia.m, mm.m. A program megírása során a korábban tanultakat használtam fel, illetve ahol szükséges volt ott segítségét kértem.

A könnyebb kezelhetőség érdekében készítettem egy GUI-t, mely segítségével a paramétereket könnyebben lehet állítani. A vezérlő panel a 3.1 ábrán látható.

A felosztás finomságát célszerű 1000 alatt tartani, mert ekkor még könnyen számolható az iteráció, 2000 nagyság rend esetén már a plottolás nehézséget okoz a gépnek. Az iteráció számot 35 felé már nem érdemes emelni, mert ekkor már nincs látványos eltérés az addig kapott ábrákkal, de a program futási idejét megnöveli. A tengely minimum és maximum koordinátái esetében figyelni



3.1. ábra.

kell arra, hogy egy négyzet intervallumot adjunk meg, ha nem így teszünk akkor az ábra torzulni fog.

A 3 féle mód közül tudunk választani, melyet a legördülő menüben találunk:

Semmi: A halmaz kirajzolása után a program leáll.

Julia: A kezdő halmaz 3 kattintással kiválasztott pontjaihoz tartozó Julia halma-

zokat rajzolja ki, minden ábra külön ablakban jelenik meg, a kiválasztott pontokat az ábra felső részén megtaláljuk.

Nagyít: A kezdő halmaz egy kattintással választott pontja kis környezetében újra számolja az iteráció, ezáltal nagyítani lehet a képet. Ezt egymás után 3-szor lehet megismételni.

Az iteráció futtatását a Start gomb megnyomása után kezdi el, és a készített ábrát külön ablakban mutatja.

A két rajzolást biztosító program minden beállított értéket felhasznál. A programok úgy lettek megírva, hogy önállóan is tudjanak futni, de ekkor minden paramétert kézzel kell megadni, a megfelelő input sorrendet tartva.

Az alapértékek a GUI-ban úgy lettek megválasztva, hogy viszonylag gyorsan fusson a program és a kapott ábra mutassa a sajátosságokat. A kezdő függvények a Mandelbrot halmazt rajzolják ki.

A dolgozatban szereplő képek esetében az iteráció szám 25, a felosztás szám 700 volt. Ekkor egy kép elkészítése körülbelül fél percet vett igénybe. A 2000 iteráció számnál ez több volt mint 3 perc, de a képek között szabadszemmel észrevehető eltérés nem volt.

3.1. mandelbrot.m

Ez a program vezérli a GUI-t. Az itt található kód nem teljes, ez csak a lényegi rész.

```
function pushbutton_start_Callback(hObject, eventdata, handles)
f=get(handles.edit_f,'String');
fstr=f;
save f f
load f
f=@(x,y)eval(f);
g=get(handles.edit_g,'String');
save g g
```

```
load g
gstr=g;
g=@(x,y)eval(g);
m=get(handles.edit_feloszt,'String');
m=str2num(m);
xmin=get(handles.edit_xmin,'String');
xmin=str2num(xmin);
xmax=get(handles.edit_xmax,'String');
xmax=str2num(xmax);
ymin=get(handles.edit_ymin,'String');
ymin=str2num(ymin);
ymax=get(handles.edit_ymax,'String');
ymax=str2num(ymax);
iter=get(handles.edit_iter, 'String');
iter=str2num(iter);
figure
mm(m,f,g,xmin,xmax,ymin,ymax,fstr,gstr,iter);
switch get(handles.popupmenu_valaszt,'Value')
    case 2
        [p1,q1]=ginput(1);
        [p2,q2]=ginput(1);
        [p3,q3]=ginput(1);
        p1=(xmax-xmin)*p1/m+xmin;
        q1=(ymax-ymin)*q1/m+ymin;
        p2=(xmax-xmin)*p2/m+xmin;
        q2=(ymax-ymin)*q2/m+ymin;
        p3=(xmax-xmin)*p3/m+xmin;
        q3=(ymax-ymin)*q3/m+ymin;
        figure
        julia(m,p1,q1,f,g,xmin,xmax,ymin,ymax);
        figure
```

```

        julia(m,p2,q2,f,g,xmin,xmax,ymin,ymax);
        figure
        julia(m,p3,q3,f,g,xmin,xmax,ymin,ymax);
    case 3
        n=1;
        for n=1:3
            [xx,yy]=ginput(1);
            xx=(xmax-xmin)*xx/m+xmin;
            yy=(ymax-ymin)*yy/m+ymin;
            xmin=xx-0.57^n;
            xmax=xx+0.57^n;
            ymin=yy-0.57^n;
            ymax=yy+0.57^n;
            mm(m,f,g,xmin,xmax,ymin,ymax,fstr,gstr);
            n=n+1;
        end
    end
end

```

3.2. *julia.m*

Ez a program tartalmazza a Julia halmaz kirajzolásának kódját. A fontosabb paraméterek állíthatók. A készített ábrán a halmazhoz tartozó pont koordinátái az ábra tetjén található, felül a valós alul a képzetes rész.

```

function []=julia(m,c1,c2,f,g,xmin,xmax,ymin,ymax)
% m felosztás
% c1, c2 a julia halmazhoz tartozó konstans
% f,g a függvények
% xmin, xmax, ymin,ymax a koordináták
x=linspace(-3,3,m);
y=linspace(-3,3,m);
[X,Y]=meshgrid(x,y);

```

```

T=X;
TT=Y;
for k=1:20
    F1= f(T,TT)+c1;
    F2=g(T,TT)+c2;
    T=F1;
    TT=F2;
end
W=exp(-sqrt(F1.^2+F2.^2));
pcolor(W);
colormap 'hot';
shading flat;
axis('square','equal');
title([c1,c2]);
end

```

3.3. mm.m

Mandelbrot-szerű halmaz kirjzolása, az ábra tetején az a 2 valós függvény található melyek alapján az iteráció fut.

```

function [] = mm( m,f,g,xmin,xmax,ymin,ymax,fstr,gstr,iter )
% m felosztás finomsága
% f,g valós függvények, ezek alapján készíti az ábrát
% xmin xmax ymin ymax a korrdináta tengelyek min és max értékei
% fstr gstr a függvények mint Stirngek
% iter iterációszám
x=linspace(xmin,xmax,m);
y=linspace(ymin,ymax,m);
[X,Y] = meshgrid(x,y);
T=zeros(m);
TT=zeros(m);

```

```
for h=1:iter;
    F1=f(T,TT)+X;
    F2=g(T,TT)+Y;
    Z=F1+1i*F2;
    T=F1;
    TT=F2;
end
W=abs(Z);
colormap('Hot')
pcolor(W);
shading flat;
axis('square','equal','off');
title({fstr;gstr});
end
```

4. fejezet

Eredményeink

Mandelbrot halmaz $z_0^2 + c$ iteráljához tartozik. Főbb tulajdonságai:

- i) 2 kritikus pontja van: $0, \infty$
- ii) Irányítás tartó.

Douady és Hubbard által az összefüggőségre adott bizonyításban fontos momentum volt az, hogy csak egyetlen véges kritikus pontja van a halmaznak, ezért olyan Mandelbrot-szerű halmazokat vizsgálunk, melynek pontosan egy véges kritikus pontja van és ez legyen a 0 . Az irányítástartást szerepét nem vizsgáljuk, de ezen tulajdonságát megtartjuk.

Ezek alapján két fő kérdésre keressük a választ a dolgozat folyamán:

1. A kapott halmaz összefüggő-e?
2. Az egyes pontokhoz tartozó Julia halmaz összefüggő-e?

4.1. A paraméter megválasztása

Mint már korábban leírtuk egy komplex függvény helyett két valós függvénnyel dolgozunk, ezek $f(x, y) + \alpha$ és $g(x, y) + \beta$ alakúak, ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. A kritikus pontra vonatkozó legerősebb állítás az, ha a Jacobi-mátrix determinánsa 0 .

Az általunk használt program a Mandelbrot halmazt a $f(x, y) = x^2 - y^2$ és $g(x, y) = 2xy$ függvények segítségével rajzolja ki. Az alapgondolat az volt, hogy ezen

függvények perturbációit vizsgáljuk, mind a vizuális és mind matematikai szempontból.

Azt az esetet nézzük, amikor a $g(x, y)$ -t változtatjuk, és az $f(x, y)$ -t nem. Legyen az új függvényünk $g(x, y) = 2xy + \lambda x^2 + \beta$ alakú. Keressük meg azt az intervallumot, ahonnan a λ értékeit vehetjük. Feltesszük, hogy $\lambda \geq 0$.

Vizsgáljuk meg az $f(x, y)$ és $g(x, y)$ függvényekhez tartozó együttes Jacobi mátrix a determinánsát:

$$\begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y + 2\lambda x & 2x \end{vmatrix} = 4x^2 + 4y^2 + 4\lambda xy = 4(x^2 + y^2 + \lambda xy) = 4\left(x + \frac{\lambda}{2}y\right)^2 - \left(\frac{\lambda^2}{4} - 1\right)y^2.$$

Ha $\lambda = 0$ akkor az eredeti Mandelbrot halmazt kapjuk vissza.

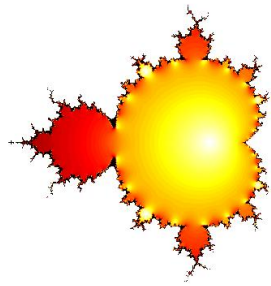
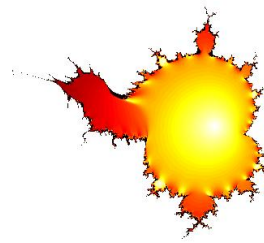
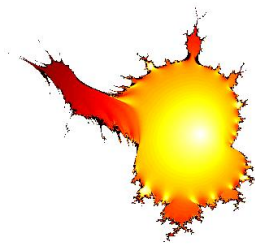
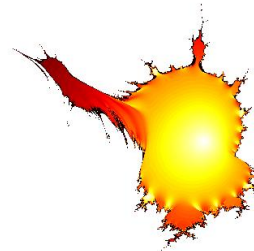
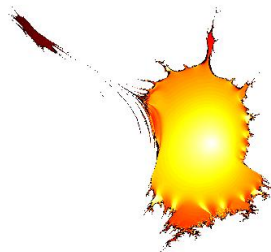
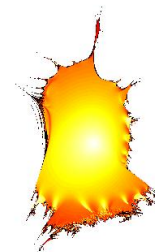
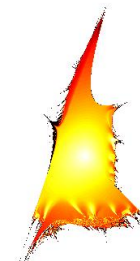
Ha $\lambda = 2$ lenne akkor nem egy kritikus pontja lenne a halmaznak, hanem egy egyenes mentén lennének ilyen pontok.

Ha $\lambda > 2$ akkor görbe mentén a determináns 0 lenne.

Tehát a λ értékét a $(0, 2)$ intervallumból kell venni.

Az ábrák alapján látszik (4.1(a)-4.1(h)), hogy ha a λ értéke 0-hoz közeli akkor a kapott kép nem mutat jelentős eltérést az eredeti halmaztól, viszont a 2-hez közeli értékek esetében már jelentős az eltérés.

A $\lambda = 0.9$ értéket választottuk (4.1(e))és ezen halmaz tulajdonságait vizsgáltuk. Ebben az esetben a Jacobi mátrix: $\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y + 1.8x & 2x \end{pmatrix}$ Ennek a determinánsa $4((x + 0.45y)^2 + (1 - 0.45^2)y^2)$ alakban írható fel. Innen is látszik hogy ez a kifejezés akkor és csak akkor lesz 0, ha $x = y = 0$. Könnyen belátható, hogy a $(0, 0)$ pont képe a (α, β) pont pár lesz és ennek bármely kis környezetében lévő pontnak pontosan két ősképe van, de a (α, β) ősképe egyértelmű. Ugyan ez az állítás igaz a végtelen kis környezetére is. Ezen tulajdonság is igazolja, hogy a 0 és a végtelen kritikus pont. Ez a tulajdonság igaz a Mandelbrot halmazra is, vagyis a 0 kis környezetében az ősképe nem egyértelmű. A szakdolgozat egyik alapkérdése hogy a megváltoztatott szabály megőrzi-e ezen tulajdonságokat, vagy a Mandelbrot halmaz ilyen téren egyedülálló.

(a) $\lambda = 0$ (b) $\lambda = 0.3$ (c) $\lambda = 0.5$ (d) $\lambda = 0.6$ (e) $\lambda = 0.9$ (f) $\lambda = 1.2$ (g) $\lambda = 1.5$ (h) $\lambda = 2$ 4.1. ábra. λ paraméter változtatásai

4.2. A generált halmaz összefüggőségének vizsgálata

Az algoritmus otthoni számítógépen futtatuk, így a felhasználható kapacitástól is függött a készült kép részletessége és minősége illetve a program tárhely igényét is figyelembe kellett venni. Nem kizárt, hogy ha ezt a programot vagy ennek egy javított kiadását egy jobb teljesítményű számítógépen futatnánk akkor észre vennék a most nem látott részleteket is, és ezek a válaszokat befolyásolhatják.

Az előzőekben feltett kérdésekre most megpróbálunk választ adni. Az eredményeink csak intuíciók, matematikai eszközökkel nincs bebizonyítva. A Mandelbrot halmaz összefüggősége esetén a bizonyítás meghaladta a Bsc képzés alatt tanultak szintjét. Fontos azt is megjegyezni, hogy először a Mandelbrot halmazról is azt hitték, hogy nem összefüggő és csak később bizonyosodott be, hogy az egyes pontok között mindig van kapcsolat, igaz néha az ábrákon ez egy hajszálvékony szálként látszik csak.

Az 1. kérdés megválaszolásában fontos szerepet játszott a kapott kép nagyításának lehetősége. Több esetben a nagyobb felbontású ábrán már látszott az összefüggőségre utaló szál, míg ez az eredeti felbontásban nem volt kivehető.

A (4.1(e))ábrán látható a vizsgált függvények által kirajzolt Mandelbrot-szerű halmaz. Két részére külön elnevezést használunk a könnyebb érthetőség érdekében. A kép jobb oldalán lévő részt törzsnek míg a bal oldalon lévő csóvának fogjuk nevezni. Az kép alapján nem jelenthetjük ki biztosan hogy ezek összefüggőek. Az látható kép 700-as felosztás mellett és 25-szörös iterációval készült, így a kapott eredményt valóságként gondoljuk. A nagyítást követően sem tűntek fel olyan, az eredeti ábrán nem látható szálak, ami alapján összefüggőségre gondolunk. A (4.2(a))-4.2(d)) ábrákon a törzs csóva felőli részét látjuk különböző nagyítások mellett ezt az alattuk található szám jelzi. Az (4.2(e)-4.2(g)) ábrákon a csóva törzs felőli része található, hasonló jelölés rendszerrel. Minden esetben külön állónak látszik a két rész, de nem zárhatjuk ki annak a valószínűségét sem hogy ez csak a program korlátai miatt van. De az mindenképp igaznak tűnik, hogy a törzs csóva felőli részén van egy külön álló nyúlvány mely a nagyítás során se látszott összefüggőnek.

A határvonal ennél a felosztásnál egységesnek tűnik. Az érdekesség az, hogy 400-as felosztás mellett a határ sraffozottnak látszik. A teszt fázisokban mind végig a

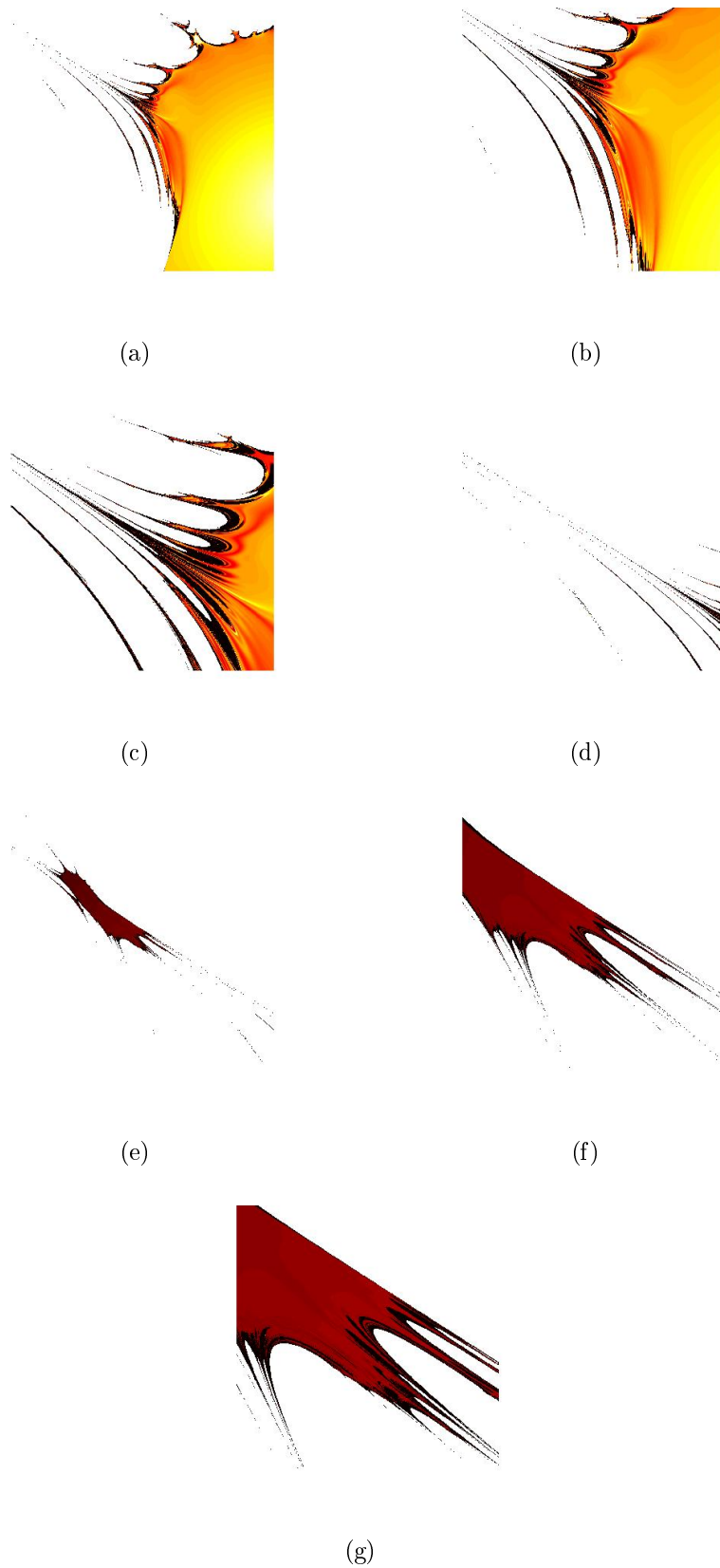
400-as felbontás használtuk és csak az eredmények pontosítása miatt tértünk rá a finomabb esetre. Ekkor tűnt fel ez a jelenség.

A 2. kérdés vizsgálatánál a program azon tulajdonságát használtuk ki, hogy ki tudja rajzolni az adott ponthoz tartozó Julia halmazt. A Mandelbrot-halmaz esetében tudjuk, hogy a halmaz belsejéből választott pont összefüggő, míg a komplementerből nem összefüggő a Julia halmazt kapunk. Ezért elsősorban a határvonal pontjaihoz tartozó halmazokat vizsgáltuk. A kép felső részében megtalálható szám-párok azt a pontot jelentik melyhez a Julia halmaz tartozik.

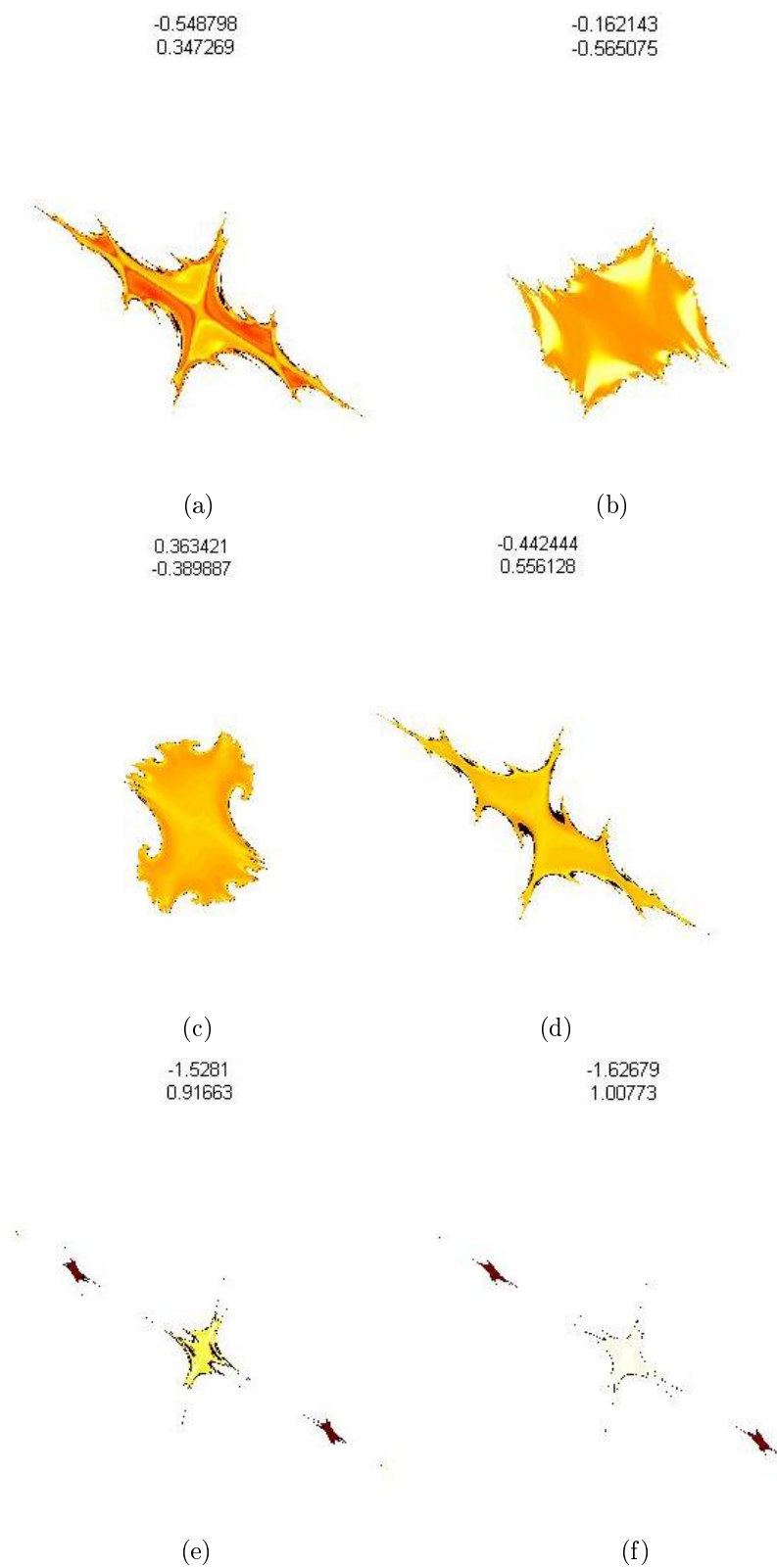
Néhány kísérlet után már látszott, hogy a törzs belső pontjaihoz tartozó Julia halmazok összefüggők (4.3(a)-4.3(d) ábra). A csóva esetében már nem tudtunk ilyen fajta megállapítást tenni. Az esetek csekély részében találtunk olyan Julia halmazt, mely szabad szemmel összefüggőnek tűnt (4.3(e)-4.3(f)), mindegyik részekre szakad.

A Julia halmazok sok félesége és összetettsége továbbra is megmaradt, de megfigyelhető egyfajta tendencia, a kapott halmazok közül sok nagy hasonlóságot mutat egymással, van egy kitüntetett halmaz, természetesen a csóva és a törzshöz tartozóak esetén ez más-más alakzat. Egy másik megállapításunk az volt, hogy a halmazoknak van egy északnyugat-délkelet tájoltságuk, ez a Mandelbrot halmaz esetében ez a vízszintes tengely.

Az előbbieken leírtak alapján megfogalmazható a kérdéseinkre a válaszok: A kapott halmaz nem összefüggő, a fej és a csóva nem biztos, hogy diszjunktak, de található olyan része a képeknek melyeknél nincs a kapcsolatra utaló jel. A Julia halmazok esetében tehát a törzshöz tartozóak összefüggőnek látszanak, de a csóva esetében ez nem látszik.



4.2. ábra. Nagyítások



4.3. ábra. Julia halmazok

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani elsősorban témavezetőmnek, Sigray István-nak, aki a konzultációk során mindig türelemmel fordult felém, tanácsaival és idejével is segítette a szakdolgozat elkészültét.

Köszönettel tartozom családomnak is a támogatásért.

Irodalomjegyzék

- [1] JOHN MILNOR: DYNAMICS IN ONE COMPLEX VARIABLE, F. VIEWEG & SOHN (1999)
- [2] JÁRAI ANTAL: MODERN ALKALMAZOTT ANALÍZIS, TYPOTEX KIADÓ, (2007)
- [3] SZÓKEFALVY-NAGY BÉLA: KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN, TANKÖNYVKIADÓ (1980)
- [4] ADRIEN DOUADY; JOHN HAMAL HUBBARD: ITÉRATION DES POLYNÔMES QUADRATIQUES COMPLEXES, C.R.ACAD. SCI. PARIS SÉR. I MATH. (1982), NO. 3, 123-126
- [5] ALASTAIR FLECHTER; DAN GOODMAN: QUASIREGULAR MAPPING OF POLYNOMIAL TYPE IN \mathbb{R}^2 , CONFORMAL GEOMETRY AND DYNAMICS V. 14, 322-336 (2010)
- [6] WALTER BERGWELER: ITERATION OF QUASIREGULAR MAPPINGS, PREPRINT: ANALYSIS.MATH.UNI-KIEL.DE/BERGWELER/PAPERS/93W.PS