Aszimptotikus Analízis

Szakdolgozat

Írta: Kántor Endre

Matematika BSc

Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Tóth Árpád

egyetemi docens

Analízis Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2011

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Tóth Árpádnak, aki hasznos ötleteivel és tanácsaival segített e dolgozat megírásában. Köszönettel tartozom még a családomnak támogatásukért és bátorításukért.

Budapest, 2011 május 30.

Kántor Endre

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezető

Az aszimptotikus analízis célja valós függvények végtelenben történő viselkedésének vizsgálata. Gyakran bonyolultabb formában, pl. határozott integrálként vagy Taylor-sorral megadott függvények nagy számokon vett értékeire adunk elemibb alakot. A dolgozatomban először az aszimptotikus analízis alapfogalmait ismertetem, majd a Bessel-függvényeken keresztül mutatok be egy módszert ezek alkalmazására.

2. fejezet

Alapfogalmak

2.1. Definíció. *Legyenek* $f(z)$ *és* $g(z)$ *a komplex sík egy* H *részhalmazán értelmezett függvények,* $z_0 \in H$.
Ekkor $f(z) = O(g(z))$ *(*f *nagy ordó* g*), amint* $z \to z_0$*, ha létezik egy* K *konstans és* z_0*-nak egy olyan* $U \subset H$ *környezete, hogy minden* U*-beli* z *esetén* $|f(z)| \leq K|g(z)|$.

2.2. Definíció. *Legyenek* $f(z)$ *és* $g(z)$ *a komplex sík egy* H *részhalmazán értelmezett függvények,* $z_0 \in H$.
Ekkor $f(z) = o(g(z))$ *(*f *kis ordó* g*), amint* $z \to z_0$*, ha minden* ε *pozitív számhoz létezik* z_0*-nak olyan* U_ε *környezete, hogy* $|f(z)| \leq \varepsilon|g(z)|$ *minden* $z \in U_\varepsilon$*-ra.*

2.1. Megjegyzés. *Ha* $g(z)$ *nem 0* z_0 *egy kipontozott környezetében, akkor* $f(z) = o(g(z))$ *azzal ekvivalens, hogy* $\frac{f(z)}{g(z)} \to 0$.

2.1. Állítás. *Ha* $f(z) = o(g(z))$ *amint* $z \to z_0$*, akkor* $f(z) = O(g(z))$ *amint* $z \to z_0$.

2.2. Állítás. *Ha* $f(z) = O(g(z))$*,* $g(z) = O(h(z))$*, akkor* $f(z) = O(h(z))$.

2.3. Állítás. *Ha* $f(z) = o(g(z))$, $g(z) = o(h(z))$, *akkor* $f(z) = o(h(z))$.

2.3. Definíció. *Legyenek* $f(z)$ *és* $g(z)$ *a komplex sík egy* H *részhalmazán értelmezett függvények,* $z_0 \in H$, *és* $g(z)$ *nem nulla* z_0 *egy kipontozott környezetében.*

Ekkor $f(z) \sim g(z)$ *(aszimptotikusan egyenlő), ha* $\frac{f(z)}{g(z)} \to 1$ *amint* $z \to z_0$.

2.2. Megjegyzés. *Ez azzal ekvivalens, hogy* $f(z) = g(z) + o(g(z))$, *amint* $z \to z_0$.

2.4. Definíció. *Legyenek a* $\phi_n(z)$ *függvények értelmezve a* $H \subseteq \mathbb{C}$ *halmazon,* $z_0 \in H$.

Ekkor a $\{\phi_n(z)\}$ *sorozat aszimptotikus sorozat, ha* $\phi_{n+1}(z) = o(\phi_n(z))$ *minden* n*-re, amint* $z \to z_0$.

2.5. Definíció. *Legyen* $\{\phi_n(z)\}$ *egy aszimptotikus sorozat.*

Ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(z)$$

az $f(z)$ *függvény aszimptotikus sora, ha minden* N*-re*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n \phi_n(z) + o(\phi_N(z)), \text{ amint } z \to z_0$$

2.6. Definíció. *Az* $f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \dots$ *alakú kifejezés az* $f(x)$ *függvény aszimptotikus hatványsora, ha minden rögzített* n*-re*

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n + \epsilon_n(x)}{x^n}$$

ahol $\epsilon_n(x) \to 0$, *ha* $x \to \infty$.

2.4. Állítás. *Néhány egyszerű tulajdonság:*

1. *Legyen* $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k}$, *ahol* a_k *az* f *függvény aszimptotikus hatványsorának együtthatói. Ekkor* $f(x) - S_{n-1}(x) = o(\frac{1}{x^n})$.

2. f *és* g *aszimptotikus hatványsorainak összege* $f + g$ *aszimptotikus hatványsora.*

3. *Egy adott függvénynek egyértelmű az aszimptotikus hatványsora.*

4. *Ugyanakkor két különböző függvényhez tartozhat ugyanaz az aszimptotikus hatványsor.*

   Pl. e^{-x} *aszimptotikus hatványsora* $0 + 0 + \ldots$, *ezért* $f(x)$ *és* $f(x) + e^{-x}$ *aszimptotikus hatványsora ugyanaz.*

5. *Egy függvénynek nem feltétlenül létezik aszimptotikus hatványsora.*

   Pl. e^x*-nek nem létezik aszimptotikus hatványsora, mert* $e^x \to \infty$, *ha* $x \to \infty$.

6. *Legyen* $f(x)$ *olyan függvény, melynek létezik az összes deriváltja az* $x = 0$ *pontban. Ekkor az*

$$f(x) = f(0) + xf'(x) + \frac{x^2}{2!}f''(x) + \ldots$$

   kifejezésbe $\frac{1}{x}$*-et helyettesítve kapjuk, hogy:*

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = f(0) + \frac{f'(0)}{x} + \frac{f''(0)}{x^2} + \ldots$$

   ami az $f(1/x)$ *aszimptotikus hatványsora. ([5] 282.o. 11.4.Tétel)*

3. fejezet

Bessel-függvények

Ebben a fejezetben a Bessel-függvényeket és néhány alaptulajdonságukat tekintjük át. A Bessel-függvényeket először Bernoulli használta, később Friedrich Bessel német matematikus és csillagász általánosította a 19. században. A több tömegponttal rendelkező rendszerek gravitációjának vizsgálatakor dolgozta ki az elméletet. Ezen kívül a fizika sok területén alkalmazzák a Bessel-függvényeket, ugyanis bizonyos differenciálegyenletek megoldásánál nagyon fontosak. Ilyenek pl. a hőterjedés, elektromosság vagy hullámok terjedése, hengerszerű testek viselkedése, membránok rezgése, hidrodinamika és még számos egyéb terület.

3.1. Bessel-egyenlet

A fentebb említett problémák gyakran vezetnek a következő másodrendű közönséges lineáris differenciálegyenletre:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \tag{3.1}$$

Egy másik, ekvivalens felírása az egyenletnek:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0 \tag{3.2}$$

Mivel az egyenlet másodrendű, két lineárisan független megoldása van. Ezek meghatározzák az első- és másodfajú Bessel-függvényeket ($J_n(x)$ és $Y_n(x)$).

3.2. Elsőfajú Bessel-függvények

A Bessel-egyenlet azon megoldásait nevezzük elsőfajú Bessel-függvényeknek, amelyek regulárisak az origóban (a másodfajú Bessel-függvények szingulárisak az $x = 0$ pontban).

Szokás még hatványsorral definiálni a Bessel-függvényt, ekkor

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{1}{2}x\right)^{2m+n} \tag{3.3}$$

$n = 0$ speciális esetben

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots \tag{3.4}$$

3.1. Állítás. $J_0'(x) = -J_1(x)$

Bizonyítás:

$$J_0'(x) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(m!)^2 2^{2m}}\right)' = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m 2m x^{2m-1}}{(m!)^2 2^{2m}} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} 2(m+1) x^{2m+1}}{((m+1)!)^2 2^{2m+2}} = -\frac{2x}{2^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (m+1) x^{2m}}{((m+1)!)^2 2^{2m}} =$$

$$= -\frac{x}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{m!(m+1)!2^{2m}} = -J_1(x)$$

3.2. Állítás. $(xJ_1(x))' = xJ_0(x)$

Bizonyítás:

$$(xJ_1(x))' = \left(\frac{x^2}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{m!(m+1)!2^{2m}}\right)' = \left(\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2(m+1)}}{m!(m+1)!2^{2m}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m 2(m+1)x^{2m+1}}{m!(m+1)!2^{2m}} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x x^{2m}}{m!m!2^{2m}} = xJ_0(x)$$

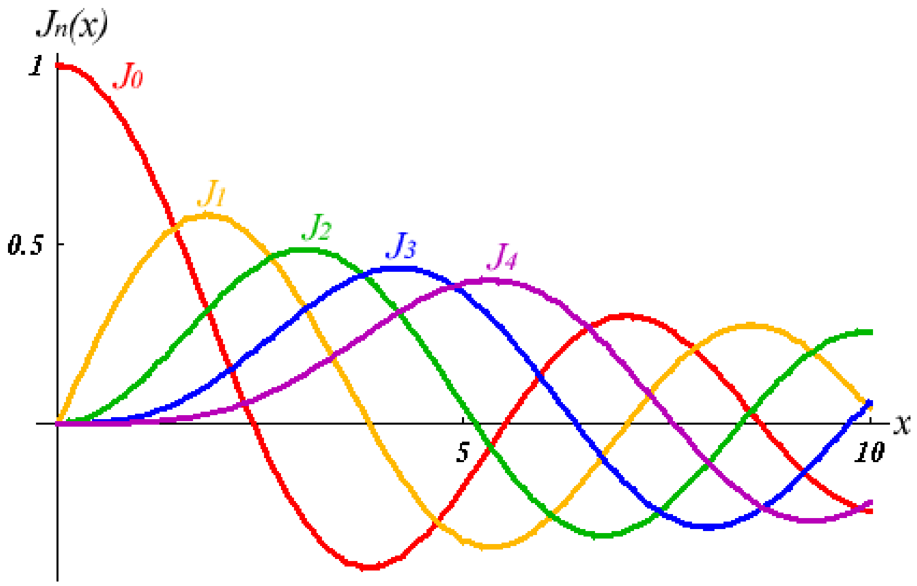
3.3. Állítás. *$J_0(x)$ kielégíti a Bessel-egyenletet.*

Bizonyítás: $xJ_0''(x) + J_0'(x) + xJ_0(x) = (xJ_0'(x))' + xJ_0(x) = -(xJ_1(x))' + xJ_0(x) = -xJ_0(x) + xJ_0(x) = 0$

3.1. Megjegyzés. *Általánosabban, valós α-ra is definiálhatjuk $J_\alpha(x)$-et:*

$$J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\alpha+1)}\left(\frac{1}{2}x\right)^{2m+\alpha} \tag{3.5}$$

ahol $\Gamma(z)$ a Gamma-függvény.



3.3. Másodfajú Bessel-függvények

A másodfajú Bessel-függvény a Bessel-egyenlet J_n-től lineárisan független megoldása.

Legyen $v = J_n(x)$ az egyik megoldás, és u a másik. Ekkor

$$xu'' + u' + xu = 0 \tag{3.6}$$

$$xv'' + v' + xv = 0 \tag{3.7}$$

Vegyük $v \times (3.6) - u \times (3.7)$-t:

$$x(u''v - uv'') + u'v - uv' = 0 \tag{3.8}$$

$$\frac{d}{dx}[x(u'v - uv')] = 0 \tag{3.9}$$

Így $x(u'v - uv') = B$ konstans. Osszunk xv^2-tel:

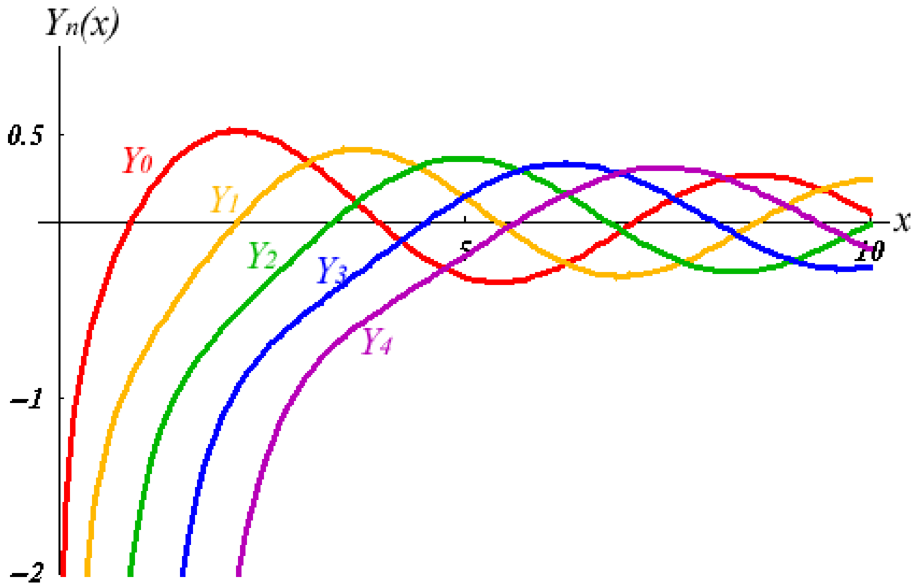
$$\frac{B}{xv^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) \tag{3.10}$$

$$\frac{u}{v} = A + B\int \frac{dx}{xv^2} \tag{3.11}$$

Átrendezve, és $v = J_n(x)$-et behelyettesítve:

$$u = AJ_n(x) + BJ_n(x)\int \frac{dx}{xJ_n^2(x)} = A'J_n(x) + B'Y_n(x) \tag{3.12}$$

ahol $Y_n(x)$ a másodfajú Bessel-függvény.



3.4. A Bessel-függvény integrál alakja

Gyakran célszerűbb egy határozott integrálként felírni J_n-t, pl. amikor a következő fejezetben az aszimptotikus viselkedését vizsgáljuk.
A következő két formulát használjuk fel:

$$e^{ix\sin\theta} = 1 + \frac{ix\sin\theta}{1!} + \frac{(ix\sin\theta)^2}{2!} + \dots \tag{3.13}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^n\theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ \frac{(n-1)(n-3)\cdots 3\cdot 1}{n(n-2)\cdots 4\cdot 2} & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases} \tag{3.14}$$

Ezekből:

$$\int_0^{2\pi} e^{ix\sin\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{ix\sin\theta}{1!} + \frac{(ix\sin\theta)^2}{2!} + \dots\right) d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{ix\sin\theta}{1!} d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{(ix\sin\theta)^2}{2!} d\theta + \dots =$$

$$= 2\pi + 0 + 2\pi \frac{(ix)^2}{2!} \frac{1}{2} + 0 + 2\pi \frac{(ix)^4}{4!} \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} + \ldots =$$

$$= 2\pi \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{4^2 2^2} - \frac{x^6}{6^2 4^2 2^2} \pm \ldots \right)$$

$$\int_0^{2\pi} e^{ix \sin\theta} d\theta = 2\pi J_0(x)$$

Tehát:

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \sin\theta} d\theta \tag{3.15}$$

3.2. Megjegyzés. *Néhány ekvivalens alak:*

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{ix \sin\theta} d\theta \tag{3.16}$$

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{ix \cos\theta} d\theta \tag{3.17}$$

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin\theta) d\theta \tag{3.18}$$

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x \cos\theta) d\theta \tag{3.19}$$

3.3. Megjegyzés. *Általánosabban, egész n-re:*

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta - x \sin\theta) d\theta \tag{3.20}$$

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n\theta - x\sin\theta)} d\theta \tag{3.21}$$

3.4. Megjegyzés. *Valós α-ra:*

$$J_\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\theta - x\sin\theta)d\theta - \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int_0^\infty e^{-x\sinh(t)-\alpha t}dt \tag{3.22}$$

vagy ha $\alpha > -\frac{1}{2}$:

$$J_\alpha(x) = \frac{1}{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\sqrt{\pi}x^\alpha}\int_0^x (x^2-\theta^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\cos\theta d\theta \tag{3.23}$$

3.1. Definíció. *J_n fentebb írt alakjait nevezik Bessel-integrálnak is.*

4. fejezet

A Bessel-függvények aszimptotikus viselkedése

Most az a célunk, hogy valami egyszerűbb alakot találjunk $J_n(x)$-nek és $Y_n(x)$-nek (pl. elemi függvényre vezessük vissza), ha x nagyon nagy.
Ehhez a komplex függvénytanban ismert módszereket használunk. Vesszük J_0 integrál alakját, és egy végtelenbe nyúló Jordan-görbe mentén számoljuk ki az értékét.

4.1. A Bessel-integrál kiszámítása komplex vonalintegrálként

Tekintsük J_0 következő alakját:

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{ix\sin\theta} d\theta \tag{4.1}$$

Legyen $t = \sin\theta$, $d\theta = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Ekkor

$$J_0(x) = \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{-1+\delta}^{1-\delta} \frac{e^{ixt}}{\sqrt{1-t^2}} dt \tag{4.2}$$

Legyen

$$y(x) = \lim_{\delta\to 0} \int_{-1+\delta}^{1-\delta} \frac{e^{ixt}}{\sqrt{1-t^2}} dt \tag{4.3}$$

Ekkor y megoldása a Bessel-egyenletnek:

$$y' = \lim_{\delta\to 0} \int_{-1+\delta}^{1-\delta} \frac{ite^{ixt}}{\sqrt{1-t^2}} dt \tag{4.4}$$

$$y'' = \lim_{\delta\to 0} \int_{-1+\delta}^{1-\delta} \frac{-t^2e^{ixt}}{\sqrt{1-t^2}} dt \tag{4.5}$$

$$xy'' + y' + xy = x(y''+y) + y' = \lim_{\delta\to 0} \int_{-1+\delta}^{1-\delta} \left(xe^{ixt} \frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{ite^{ixt}}{\sqrt{1-t^2}} \right) dt =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \int_{-1+\delta}^{1-\delta} \left(xe^{ixt}\sqrt{1-t^2} + \frac{ite^{ixt}}{\sqrt{1-t^2}} \right) dt = \lim_{\delta\to 0} \int_{-1+\delta}^{1-\delta} -i \frac{d[\sqrt{1-t^2}e^{ixt}]}{dt} dt =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} -i \left[\sqrt{1-t^2}e^{ixt} \right]_{t=-1+\delta}^{1-\delta} = -i \left[\sqrt{1-t^2}e^{ixt} \right]_{t=-1}^{1} \tag{4.6}$$

Most tekintsük az

$$y = \int_{[a,b]} \frac{e^{ixt}}{\sqrt{1-t^2}} dt \tag{4.7}$$

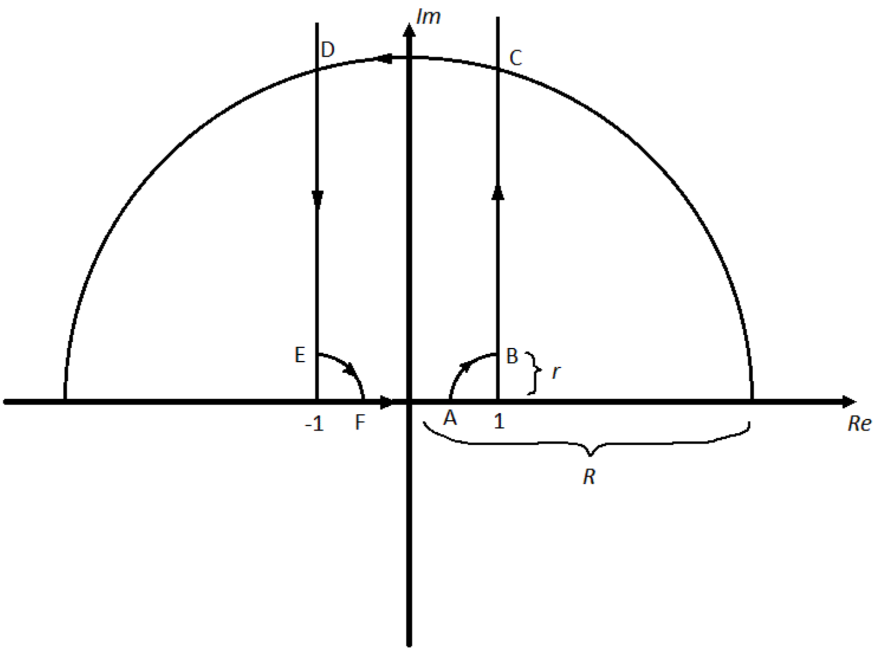
komplex vonalintegrált. Ekkor, mint előbb,

$$xy'' + y' + xy = \left[-i\sqrt{1-t^2}e^{ixt} \right]_a^b \tag{4.8}$$

Ha $a \to 1$ vagy $a \to -1$, és $b = i\eta$, $\eta \to \infty$, akkor

$$\left[-i\sqrt{1-t^2}e^{ixt}\right]_a^b = -i\left(\sqrt{1-b^2}e^{ixb} - 0\right) = -i\sqrt{1-i^2\eta^2}e^{ixi\eta} =$$

$$= -i\sqrt{1+\eta^2}e^{-x\eta} \to 0 \tag{4.9}$$



Legyen γ az ábrán látható $ABCDEF$ pontok által meghatározott görbe. $\gamma \cup int\gamma$-n $\frac{e^{ixt}}{\sqrt{1-t^2}}$ reguláris, ezért a Cauchy-tétel miatt

$$\int_\gamma \frac{e^{ixt}}{\sqrt{1-t^2}}dt = 0 \tag{4.10}$$

Az AB, CD és EF vonalakon az integrál értéke a 0-hoz tart, ha $R \to \infty$ és $r \to 0$, így

$$\int_{[-1+iR,-1+ir]} \frac{e^{ixt}}{\sqrt{1-t^2}}dt + \int_{[-1+r,1-r]} \frac{e^{ixt}}{\sqrt{1-t^2}}dt + \int_{[1+ir,1+iR]} \frac{e^{ixt}}{\sqrt{1-t^2}}dt \to 0 \tag{4.11}$$

ha $r \to 0$ és $R \to \infty$.

4.2. A Hankel-függvények

4.1. Definíció. *Legyenek:*

$$-\frac{\pi}{2}H_0^{(1)}(x) = \lim_{R\to\infty, r\to 0} \int_{[1+ir,1+iR]} \frac{e^{ixt}}{\sqrt{1-t^2}}dt \tag{4.12}$$

$$-\frac{\pi}{2}H_0^{(2)}(x) = \lim_{R\to\infty, r\to 0} \int_{[-1+iR,-1+ir]} \frac{e^{ixt}}{\sqrt{1-t^2}}dt \tag{4.13}$$

$H_0^{(1)}(x)$ és $H_0^{(2)}(x)$ az úgynevezett Hankel-függvények.

4.24 miatt

$$J_0(x) = \frac{1}{2}\left(H_0^{(1)}(x) + H_0^{(2)}(x)\right) \tag{4.14}$$

Most a komplex síkbeli szakasz helyett szeretnénk egy valós intervallumon integrálni, és szebb alakra hozni a kapott kifejezést.
Legyen $t = 1 + i\eta$, $dt = id\eta$. Ekkor:

$$\sqrt{1-t^2} = \sqrt{-2i\eta + \eta^2} = \sqrt{-2i\left(\eta + \frac{1}{2}i\eta^2\right)} = \sqrt{-2i}\sqrt{\eta + \frac{1}{2}i\eta^2} \tag{4.15}$$

$$-\frac{\pi}{2}H_0^{(1)}(x) = \int_{[F,H]} \frac{e^{ixt}}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^\infty \frac{e^{ix(1+i\eta)}id\eta}{\sqrt{-2i}\sqrt{\eta + \frac{1}{2}i\eta^2}} =$$

$$= \frac{e^{ix} i}{\sqrt{2}\sqrt{-i}} \int_0^\infty \frac{e^{-x\eta}}{\sqrt{\eta + \frac{1}{2} i\eta^2}} d\eta = \frac{e^{ix} i}{\sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}}} \int_0^\infty \frac{e^{-x\eta}}{\sqrt{\eta + \frac{1}{2} i\eta^2}} d\eta \tag{4.16}$$

$$H_0^{(1)}(x) = -\frac{2}{\pi} \frac{e^{ix} i}{\sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}}} \int_0^\infty \frac{e^{-x\eta}}{\sqrt{\eta + \frac{1}{2} i\eta^2}} d\eta = \frac{-i\sqrt{2} e^{ix + \frac{\pi}{4} i}}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-x\eta}}{\sqrt{\eta + \frac{1}{2} i\eta^2}} d\eta =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi} e^{-\frac{\pi}{2} i} e^{i(x + \frac{\pi}{4})} \int_0^\infty \frac{e^{-x\eta}}{\sqrt{\eta + \frac{1}{2} i\eta^2}} d\eta = \frac{\sqrt{2}}{\pi} e^{i(x - \frac{\pi}{4})} \int_0^\infty \frac{e^{-x\eta}}{\sqrt{\eta + \frac{1}{2} i\eta^2}} d\eta \tag{4.17}$$

Most helyettesítsünk be $u = x\eta$-t. Így $\eta = \frac{u}{x}$, $d\eta = \frac{du}{x}$. Ekkor

$$H_0^{(1)}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} e^{i(x - \frac{\pi}{4})} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{\frac{u}{x} + \frac{1}{2} i \left(\frac{u}{x}\right)^2}} \frac{du}{x} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} e^{i(x - \frac{\pi}{4})} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{\frac{u}{x}}\sqrt{1 + \frac{iu}{2x}}} \frac{du}{x} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi} e^{i(x - \frac{\pi}{4})} \int_0^\infty \frac{e^{-u}\sqrt{x}}{\sqrt{u}\sqrt{1 + \frac{iu}{2x}}} \frac{du}{x} = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{x}} e^{i(x - \frac{\pi}{4})} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \left(1 + \frac{iu}{2x}\right)^{-\frac{1}{2}} du$$

$$H_0^{(1)}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{i(x - \frac{\pi}{4})} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \left(1 + \frac{iu}{2x}\right)^{-\frac{1}{2}} du \tag{4.18}$$

Hasonló módon kijön, hogy

$$H_0^{(2)}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-i(x - \frac{\pi}{4})} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \left(1 - \frac{iu}{2x}\right)^{-\frac{1}{2}} du \tag{4.19}$$

Azaz $H_0^{(1)}(x)$ és $H_0^{(2)}(x)$ egymás konjugáltjai, és a valós részük $J_0(x)$. Be lehet látni azt is, hogy a képzetes részük $Y_0(x)$. Összefoglalva:

$$H_0^{(1)}(x) = J_0(x) + iY_0(x) \tag{4.20}$$

$$H_0^{(2)}(x) = J_0(x) - iY_0(x) \tag{4.21}$$

$$J_0(x) = \frac{1}{2}\left(H_0^{(1)}(x) + H_0^{(2)}(x)\right) \tag{4.22}$$

$$Y_0(x) = -\frac{1}{2}i\left(H_0^{(1)}(x) - H_0^{(2)}(x)\right) \tag{4.23}$$

4.3. A Hankel-függvények aszimptotikája

Írjuk $H_0^{(1)}(x)$-t a következő alakban:

$$H_0^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{i(x-\frac{\pi}{4})}f\left(\frac{1}{x}\right) \tag{4.24}$$

ahol

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\sqrt{1+\frac{iux}{2}}du \tag{4.25}$$

2.4/6-et szeretnénk alkalmazni $f(x)$-re, hogy megkapjuk $H_0^{(1)}(x)$ aszimptotikus hatványsorát. Ehhez azt kell belátni, hogy $f(x)$-nek létezik az összes deriváltja az $x = 0$ pontban.

$$f'(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\left(1+\frac{iux}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\frac{iu}{2}du$$

$$f''(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\left(1+\frac{iux}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{iu}{2}\right)^2du$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \int_0^\infty (-1)^{n-1}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\left(1+\frac{iux}{2}\right)^{\frac{1}{2}-n}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\left(\frac{iu}{2}\right)^n du$$

Azért tudunk bederiválni, mert az integrandus egyszerre folytonos x-ben és u-ban is.

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\left(\frac{i}{2}\right)^n\int_0^\infty e^{-u}u^{n-\frac{1}{2}}du =$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\left(\frac{i}{2}\right)^n\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) =$$

$$= (-1)^{n-1}1^2 3^2\cdots(2n-1)^2\frac{i^n\sqrt{\pi}}{8^n} \tag{4.26}$$

Tehát $f^{(n)}(0)$ létezik minden n-re, ezért nagy x-ekre $f\left(\frac{1}{x}\right)$ a következő aszimptotikus hatványsorral írható fel:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!x} + \frac{f''(0)}{2!x^2} + \ldots =$$

$$= \sqrt{\pi} - \frac{i\sqrt{\pi}}{8x} + \frac{1^2 2^2}{2!}\frac{i^2\sqrt{\pi}}{(8x)^2} - \frac{1^2 3^2 5^2}{3!}\frac{i^3\sqrt{\pi}}{(8x)^3} + \ldots =$$

$$= \sqrt{\pi}\left(1 - \frac{i}{8x} + \frac{1^2 2^2}{2!}\frac{i^2}{(8x)^2} - \frac{1^2 3^2 5^2}{3!}\frac{i^3}{(8x)^3} + \ldots\right) \tag{4.27}$$

Ezt 4.24-be behelyettesítve kapjuk, hogy

$$H_0^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{i(x-\frac{\pi}{4})}\left(1 - \frac{i}{8x} + \frac{1^2 2^2}{2!}\frac{i^2}{(8x)^2} - \frac{1^2 3^2 5^2}{3!}\frac{i^3}{(8x)^3} + \ldots\right) \tag{4.28}$$

és i helyére $-i$-t írva:

$$H_0^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-i(x-\frac{\pi}{4})}\left(1 + \frac{i}{8x} + \frac{1^2 2^2}{2!}\frac{i^2}{(8x)^2} + \frac{1^2 3^2 5^2}{3!}\frac{i^3}{(8x)^3} + \ldots\right) \tag{4.29}$$

4.4. J_0 és Y_0 aszimptotikája

J_0 aszimptotikus sorát a Hankel-függvények segítségével fogjuk meghatározni. Legyen

$$P = 1 - \frac{1^2 3^2}{2!}\frac{1}{(8x)^2} + \frac{1^2 3^2 5^2 7^2}{4!}\frac{1}{(8x)^4} - \ldots \tag{4.30}$$

$$Q = \frac{1}{8x} - \frac{1^2 3^2 5^2}{3!} \frac{1}{(8x)^3} + \dots \tag{4.31}$$

Ekkor a Hankel-függvények aszimptotikus sorát a következő alakban írhatjuk:

$$H_0^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \frac{\pi}{4})} (P - iQ) \tag{4.32}$$

$$H_0^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - \frac{\pi}{4})} (P + iQ) \tag{4.33}$$

Ezeket 4.14-be behelyettesítve a következőt kapjuk:

$$J_0(x) = \frac{1}{2} \left(H_0^{(1)}(x) + H_0^{(2)}(x) \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(e^{i(x-\frac{\pi}{4})}(P - iQ) + e^{-i(x-\frac{\pi}{4})}(P + iQ) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right)(P - iQ) + \right.$$

$$\left. + \left(\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - i \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right)(P + iQ) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[2P \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2Q \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[P \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + Q \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] \tag{4.34}$$

Hasonló gondolatmenettel kijön 4.23-ból, hogy

$$Y_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[P \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - Q \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] \tag{4.35}$$

A 2.5 definíció miatt:

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\left(1 + o(1)\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{8x}\right) \right) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

Ezért az alábbi egyszerűbb alakok írhatók:

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + p(x)\right] \tag{4.36}$$

$$Y_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + q(x)\right] \tag{4.37}$$

ahol $p(x)$ és $q(x)$ tartanak 0-hoz, ha $x \to \infty$.

4.1. Megjegyzés. *Ez nem is annyira meglepő eredmény, hiszen $J_{-1/2}(x)$ és $J_{1/2}(x)$ minden x-re*

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x \tag{4.38}$$

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \tag{4.39}$$

5. fejezet

A Bessel-függvény egy alkalmazása

Egy egyenletes n húzóerővel kifeszített kör alakú membrán szabadrezgését vizsgáljuk. A membrán anyaga homogén, tömegeloszlása egyenletes, állandó h vastagsága és ρ sűrűsége van. Jelölje $w(r, \theta, t)$ az időtől és helytől függő rezgésalakját a körmembránnak. A következő differenciálegyenletet írhatjuk fel w-re:

$$\triangle w = \frac{\rho h}{n} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{5.1}$$

Tegyük fel, hogy a keresett mozgás valamilyen harmonikus rezgőmozgások összege. Így w-t

$$w(r, \theta, t) = w(r, \theta) \cos \omega t \tag{5.2}$$

alakban kereshetjük. Ekkor w deriváltjai a következők:

$$\frac{\partial w(r, \theta, t)}{\partial t} = -\sin(\omega t) \omega w(r, \theta)$$

$$\frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial t^2} = -\cos(\omega t) \omega^2 w(r, \theta)$$

Ezt 5.1-be helyettesítve abból kiejthető kiejthető az időtől függő szorzótényező:

$$\triangle w(r,\theta,t) = \triangle w(r,\theta)\cos(\omega t) = -\frac{\rho h}{n}\cos(\omega t)\omega^2 w(r,\theta)$$

$$\triangle w(r,\theta) = -\frac{\rho h}{n}\omega^2 w(r,\theta) \tag{5.3}$$

Az egyenletet átrendezve egy kétváltozós, paraméteres homogén differenciálegyenletet kapunk:

$$\triangle w(r,\theta) + \frac{\rho h}{n}\omega^2 w(r,\theta) = 0 \tag{5.4}$$

Hogy egyszerűsítsük, tegyük fel hogy

$$w(r,\theta) = w_k(r)\cos(k\theta) \tag{5.5}$$

alakú, ahol $k = 0, 1, 2, \ldots$

Ezt 5.4-be helyettesítve, és $\triangle w$-t polárkoordinátákkal felírva:

$$\triangle w = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$$

$$\frac{\partial w(r)}{\partial r} = \frac{\partial w_k(r)}{\partial r}\cos(k\theta) \qquad \frac{\partial^2 w(r)}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 w_k(r)}{\partial r^2}\cos(k\theta)$$

$$\frac{\partial w(r)}{\partial \theta} = -w_k(r)\sin(k\theta)k \qquad \frac{\partial^2 w(r)}{\partial \theta^2} = -w_k(r)\cos(k\theta)k^2$$

$$\triangle w(r,\theta) = \frac{1}{r}\frac{\partial w_k(r)}{\partial r}\cos(k\theta) + \frac{\partial^2 w_k(r)}{\partial r^2}\cos(k\theta) - \frac{k^2}{r^2}w_k(r)\cos(k\theta)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial w_k(r)}{\partial r}\cos(k\theta) + \frac{\partial^2 w_k(r)}{\partial r^2}\cos(k\theta) - \frac{k^2}{r^2}w_k(r)\cos(k\theta) + \frac{\rho h\omega^2}{n}w_k(r)\cos(k\theta) = 0$$

A θ-tól függő tagot kiejtve:

$$\frac{\partial^2 w_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_k}{\partial r} + \left(\frac{\rho h \omega^2}{n} - \frac{k^2}{r^2}\right) w_k = 0 \tag{5.6}$$

Az

$$x = r\omega\sqrt{\frac{\rho h}{n}}$$

helyettesítéssel az alábbi Bessel-egyenletet kapjuk:

$$\frac{\partial^2 w_k(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial w_k(x)}{\partial x} + \left(1 - \frac{k^2}{x^2}\right) w_k(x) = 0 \tag{5.7}$$

Ennek az egyenletnek megoldásai a $J_k(x)$ és $Y_k(x)$ függvények. De mivel a másodfajú Bessel-függvények az $x = 0$ pont közelében a végtelenhez tartanak, ezért ebben a konkrét fizikai feladatban nem lehetnek megoldások. Ezért a membrán szabadrezgését csak az elsőfajú Bessel-függvények adják:

$$w_k(x) = CJ_k(x) \tag{5.8}$$

ahol C tetszőleges konstans.

Irodalomjegyzék

[1] Frank Bowman: *Introduction to Bessel Functions*

[2] Andrew Grey & G. B. Mathews: *A treatise on Bessel Functions and their Applications to Physics*

[3] B. G. Korenev: *Bessel Functions and Their Applications*

[4] Simon J.A. Malham: *An introduction to asymptotic analysis*

[5] Laczkovich - T. Sós: *Analízis I.*

[6] Dr. Hegedűs István: *Síkmembránok kis lehajlásai és rezgései*

[7] `http://en.wikipedia.org`

[8] `http://mathworld.wolfram.com`