Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

# Szimmetrikus bolyongások

Szakdolgozat

Milotai Zoltán

Matematika BSc
nappali tagozat

Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:
Prokaj Vilmos
egyetemi docens

*Budapest, 2010*

# Tartalomjegyzék

# 1. fejezet

# Bevezetés

## 1.1. Mi is az a szimmetrikus bolyongás?

Tegyük fel, hogy van egy mindkét irányban végtelen számegyenesünk, és a nulla pontban ül egy bolha. Minden egész másodpercben gondol egyet és arrébb ugrik egy mezőt jobbra vagy balra. Mindkét irányt helytől, és időtől függetlenül azonos, azaz $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel választja. Ekkor magát az utazást amit a bolha végrehajt nevezzük szimmetrikus bolyongásnak. Az elnevezést először Karl Pearson használta 1905-ös The problem of the random walk című cikkében: „Egy ember az $O$ pontból indul és egyenesen sétál $l$ métert; majd egy tetszőleges szöggel való elfordulás után megint $l$ métert megy. Ezt $n$-szer megismétli. Keressük annak a valószínűségét, hogy ezen $n$ db út után, $r$ és $r + \mathrm{d}r$ távolság között lesz kezdeti $O$ indulási pontjától." Ezzel a feladattal szemben mi lényegesen egyszerűbb eseteket vizsgálunk, a szöget megszorítva dimenziószám*2-féle lehetséges értékre.

## 1.2. A Szavazási probléma

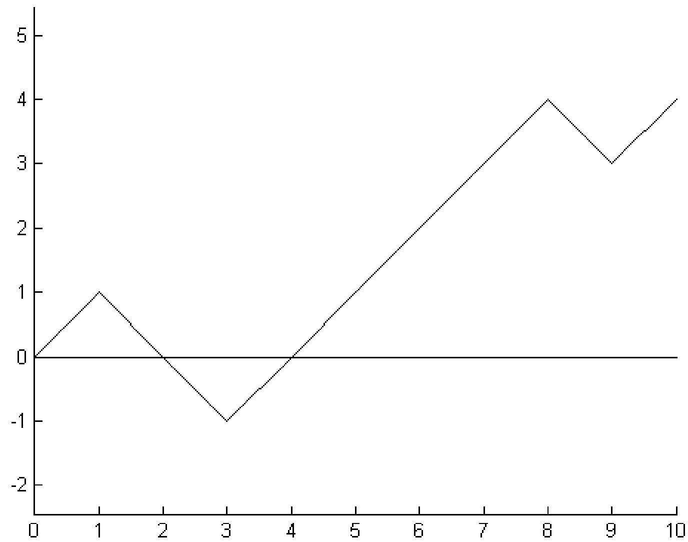
Az alábbi Bertrand által 1887-ben publikált lemma, mely szavazási probléma (ballot problems) néven ismert, volt az egész témakör elindítója.

**1. Lemma** (Szavazási probléma)**.** *Tegyük fel, hogy egy szavazásnál $P$ jelöltnek $p$ szavazata lesz, $Q$ jelöltnek $q$, ahol $p$ nagyobb mint $q$. Annak a valószínűsége, hogy a szavazatszámlálás során végig több szavazatunk lesz $P$-re mint $Q$-ra egyenlő $(p - q)/(p + q)$.*

A lemma bizonyítása előtt be kell vezetnünk pár jelölést és definíciót. Matematikai nyelven próbáljuk leírni az előzőekben megfogalmazottakat. Legyen $x = p+q$, és $\epsilon_1$,$\epsilon_2$,...,$\epsilon_x$, $x$ darab $\in \{+1, -1\}$ értékű változó, amely közül $p$ pozitív, $q$ pedig negatív. A részletösszeg jelölése: $s_k$=$\epsilon_1$+...+$\epsilon_k$, vagyis ez mutatja meg, hogy a $k$-adik lépés után éppen mennyi P előnye Q-val szemben. Ekkor nyilván $s_x = p - q$. Így

$$s_i - s_{i-1} = \epsilon_i = \pm 1, \quad s_0 = 0. \tag{1.1}$$

Másrészt tetszőleges $s_1, \ldots, s_x$ egészek melyek kielégítik (1.1)-et, egy lehetséges szavazást jelentenek. Geometriailag a legkönnyebb elképzelni egy ilyen szavazást, tegyük fel, hogy egy koordinátarendszer origójából indulunk, és minden szavazásnál egyet lépünk jobbra, plusz a szavazatnak megfelelően fel vagy le is. Az így kapott $-1$ és 1 meredekségű útdarabokból álló töröttvonalat fogjuk útnak nevezni.




1.1. ábra. Példa a szimmetrikus bolyongásra.

Mivel a feladat szerint az $\epsilon_i$-közül $p$ db pozitív és $q$ db negatív, így az alábbi egyenlőségek is fennállnak:

$$x = p + q, \quad y = p - q, \quad x \geq y \geq -x. \tag{1.2}$$

Egy adott $(x, y)$ pont csak akkor köthető össze az origóval egy úttal, ha $x$ és $y$ megfelelnek (1.2)-nek. Tehát rögzített $x = p+q$ esetén annyiféle megfelelő utunk van, mint amennyiféleképpen ki tudjuk választani az $x$ útdarab közül a felfelé vezetőket. Vagyis:

$$N_{x,y} = \binom{p+q}{p} = \binom{p+q}{q}, \tag{1.3}$$

különböző út van. Legegyszerűbb $N_{x,y}$-et 0-nak venni amikor $x$ és $y$ nem teljesíti a (1.2) feltételeket. Tehát azt kaptuk, hogy összesen $N_{x,y}$ út létezik az origóból az $(x, y)$ pontba. Bertrand szavazási problémája pedig immár szabatosan megfogalmazva azt állítja, hogy $y > 0$ esetén $(y/x)N_{x,y}$ olyan út létezik, mely teljesíti a

$$s_1 > 0, s_2 > 0, \ldots, s_x = y$$

feltételeket. Ha valamely $k$-ra $s_k$=0, akkor ez ugye a szavazatok pillanatnyi egyenlőségét jelenti, ami előfordulhat, azonban olyan ritka esemény, amely az összképet nem befolyásolja, így újra meg újra kitérni rá felesleges. Mondjuk ezért azt, hogy a $k$. lépésben P vezet, ha $s_k > 0$ vagy $s_k = 0$ és $s_{k-1} > 0$. Így a kifejezés, hogy az $n$. lépés után P vezet azt jelenti, hogy az út $n$. éle az $x$-tengely felett van. Tehát a szavazási probléma olyan utakkal foglalkozik, melyek teljes egészében az $x$-tengely felett vannak.

Nyilván az előbbiekkel összhangban szavazás helyett egy szabályos érmével való dobálást is vizsgálhatunk, arra az eddig kimondottak ugyanúgy igazak. Érdekes kérdés, hogy a vezetés egy szavazás során milyen gyakran váltakozik. A józan ész azt diktálná, hogy egy elég hosszú érmedobássorozat esetén várhatóan a feldobások felénél az egyik játékos, a másik felénél a másik játékos vezet. Azonban – mint később látni fogjuk – 20000 érmedobásból álló sorozat esetén 88-szor akkora a valószínűsége, hogy a vezetés sosem változik mint hogy fele-fele arányban vezet mindkét játékos. És a dobások számát növelve ez az arány csak romlik.

Visszatérve a szavazási problémára, hogy belássuk, szükségünk lesz a tükrözési tételre.

**1. Definíció** (Út tükörképe)**.** *Az $(s_0, s_1, \ldots, s_x)$ út tükörképének nevezzük az $(-s_0, -s_1, \ldots, -s_x)$ utat.*

**2. Tétel** (Tükrözési tétel)**.** *Az $A$-ból $B$-be vezető olyan utak száma, melyek érintik vagy keresztezik az $x$-tengelyt, megegyeznek az $A'$-ből $B$-be vezető* *összes utak számával, ahol $A'$ alatt az $A$ pont $x$-tengelyre vett tükörképét értjük.*

Bizonyítás: Vegyünk egy $A$-ból $B$-be menő, $x$-tengelyt érintő vagy keresztező utat, és a kezdettől az $x$-tengely első érintéséig tartó részét tükrözzük. Így a tükrözött részt összecsatlakoztatva az eredeti végződéssel kapunk egy $A' - B$ utat. Ez egy-egy értelmű megfeleltetés az összes $A' - B$ és $A - B$ $x$-tengely érintő utak közt, így számuk megegyezik.

**3. Tétel** (Szavazási Probléma)**.** *Legyen $x > 0$,$y > 0$ az olyan $(s_0, \ldots, s_x = y)$ origóból induló utak száma melyre $s_1 > 0, \ldots, s_x > 0$ teljesül, egyenlő $(y/x)N_{x,y}$-vel.*

Bizonyítás: Az origóból induló utakra $s_1 = \pm 1$, így minden feltételeknek eleget tevő útra $s_1 = 1$ kell, hogy teljesüljön. Tehát a feladat úgy fogalmazható át, hogy a keresett utak száma nem más, mint az $(1, 1)$ pontból az $(x, y)$-ba menő, $x$-tengelyt nem érintő utak száma. Az 2. tétel alapján ez pedig nem más mint:

$$N_{x-1,y-1} - N_{x-1,y+1} = \binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{q-1} =$$

$$= \frac{p-q}{p+q}\binom{p+q}{p} = \frac{y}{x}N_{x,y}.$$

# 2. fejezet

# Fontosabb tételek

## 2.1. Dualitási elv

Majdnem minden utakat érintő tétel újraformulázható, hogy egy formálisan új tételt nyerjünk, egyszerűen az utakat 180 fokkal elforgatva. Például a szavazási probléma megadja nekünk az origót $(x, y)$-nal összekötő utak számát, melyek végig a „0 fölött” vannak. Ezt a dualitási elvvel úgy lehet átfogalmazni, hogy az utolsó elem által megszabott felső határt nem lépik át az elemek, vagyis:

**4. Tétel** (Első duális)**.** *Az olyan $(s_1, \ldots, s_x)$ origóból $(x, y)$ba vezető utak száma, melyekre $s_i < s_x$ $(\forall i \leq x)$ teljesül, nem más mint $(y/x)N_{x,y}$.*

Ez a tétel az első áthaladásokra határoz meg később felhasználandó tulajdonságokat.

Jelölés: Legyen az $n$. Catalan szám: $C_{2n} := \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

**5. Tétel** (Összefüggés a szimmetrikus bolyongások, és a Catalan számok között)**.** *A $(0,0)$-ból a $(2n, 0)$-be vezető $\binom{2n}{n}$ db út közül*

*(a) pontosan $C_{2n-2}$ olyan út van melyre*

$$s_1 > 0, s_2 > 0, \ldots, s_{2n-1} > 0, (s_{2n} = 0). \tag{2.1}$$

*(b) pontosan $C_{2n}$ olyan út van melyre*

$$s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, \ldots, s_{2n-1} \geq 0, (s_{2n} = 0). \tag{2.2}$$

*Vagyis annyi teljesen $x$-tengely fölötti út van $2n$-ig mint amennyi nem $x$-tengely alá menő $2n-2$-ig.*

Bizonyítás: Minden olyan út amely kielégíti (2.1)-t, át kell hogy haladjon a $(2n-1,1)$ ponton. Az előző tétel alapján olyan útból, mely az origóból indul, és az $x$-tengelyt nem érintve jut a $(2n-1,1)$ pontba, összesen van:

$$\frac{1}{2n-1}\binom{2n-1}{n-1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} = C_{2n-2}.$$

Ezzel az (a) részt beláttuk. Vegyünk egy (2.1)-t kielégítő utat. A legelső és legutolsó darabját elhagyva egy $(1,1)$ pontot a $(2n-1,1)$ ponttal összekötő úthoz jutunk, amelynek minden pontja az $y=1$ egyenesen, vagy afölött van. Ez megint egy-egy értelmű hozzárendelés, a (2.1)-nek eleget tevő $2n$ hosszú utak, és a (2.2)-nak megfelelő $2n-2$ hosszú utak között, így az utóbbiból $C_{2n-2}$ darab van, és mivel az állításban $2n$ hosszú szerepel, így ebből nyilván $C_{2n}$ darab van.

Következzen most egy érdekesebb tétel:

## 2.2. Érdekes tétel

A következő tétel ékes bizonyítéka annak, hogy a legtöbb szimmetrikus bolyongásbeli utakra vonatkozó állítás a Catalan-számok és teljes indukció segítségével belátható.

**6. Tétel.** *Legyen $C_{2k,2n}$ az olyan $2n$ hosszú $(0,0)$ ból $(2n,0)$-ba menő utak száma, melyek $2k$ időt töltenek az $x$-tengely felett. Ekkor azt állítjuk, hogy $k$-tól függetlenül $C_{2k,2n} = C_{2n}$.*

Bizonyítás: A bizonyítás során használni fogom az alábbi azonosságot:

$$C_{2n} = \sum_{i=0}^{n-1} C_{2i}C_{2n-2i-2}, \quad n \geq 2 \tag{2.3}$$

A bizonyítást teljes indukcióval végezzük, $n=1$ esetén egy olyan út van, mely kettő egységet tölt az $x$-tengely felett, szintén egy mely kettő időt tölt alatta, és ez a közös egy érték megegyezik a várt $C_2 = 1$-gyel. Most tehát tegyük fel, hogy az állítás már minden $n$-nél kisebb számra teljesül, vagyis $C_{2k,2l} = C_{2l}$,$\forall\ l < n$-re.

Bontsuk 3 részre az utakat melyek $2k$ időt töltenek a pozitív részen. Az első rész tartson az origótól addig, ameddig az adott bolyongás a negatív térfélen tartózkodik (ez akár természetesen 0 hosszúságú is lehet). A második rész legyen onnan ahol először pozitívba ér át, és tartson az ezután az origóba való első visszatérésig (vagyis az első kirándulás a pozitív oldalon). Kényelmi okokból tegyük fel, hogy ez a rész legalább 2 hosszúságú. A harmadik rész pedig legyen az ezek után megmaradó. Legyen az első rész $2l$ hosszúságú, a második $2p$, a harmadik ezek szerint $2n-2l-2p$. (Az egyes részek lehetséges hosszára persze k hatást gyakorol, de ezt majd csak a végén a szummázásnál veszem figyelembe).

Így az előző tétel (2.2) pontja miatt az első részt $C_{2l}$-féleképpen választhatom. A második rész ugyanazon tétel (2.1) alapján $C_{2p-2}$-féleképpen választható, ugyanis itt az első visszatérés csak a $2p$ helyen következhet be. És a harmadik részre alkalmazhatjuk az indukciós feltételt, mivel a hosszúsága $2n-2l-2p$, ezért $C_{2n-2l-2p}$ megfelelő utunk lesz.

Az eddigieket konkrét képletben összegezve, vagyis a $2k$ részt a pozitív térfélen töltő utak száma:

$$\sum_{l=0}^{n-k}\sum_{p=1}^{k} C_{2l}C_{2p-2}C_{2n-2l-2p},$$

ahol a szumma határa $p$ esetében azért tart $k$-ig mert az összes pozitív oldalon töltött időnél nem lehet hosszabb az út második része, és hasonló megfontolásból $n-k$ nál sem lehet hosszabb $l$.

Annak belátásához, hogy ez a mennyiség $k$-tól független, vesszük ugyanezt a képletet $k$-ra és $k+1$-re és a növekményről belátjuk hogy 0. A két kifejezést egymásból kivonva szinte minden kiesik, mindössze annyi marad, hogy:

$$\sum_{l=0}^{n-k-1} C_{2l}C_{2k}C_{2n-2l-2k-2} - \sum_{p=1}^{k} C_{2n-2k}C_{2p-2}C_{2k-2p}.$$

A szummától nem függő tagokat kiemelve kapjuk:

$$C_{2k}\sum_{l=0}^{n-k-1} C_{2l}C_{2n-2l-2k-2} - C_{2n-2k}\sum_{p=1}^{k} C_{2p-2}C_{2k-2p}.$$

És végül alkalmazva a bizonyítás elején említett (2.3) azonosságot:

$$C_{2k}C_{2n-2k} - C_{2n-2k}C_{2k} = 0.$$

Így a $k = 1 \ldots n$ esetén a keresett utak száma független $k$-tól, és az $n$ eset szimmetrikus párja a 0, így $\forall k = 0, \ldots, n$-re igaz az állítás, vagyis tényleg $C_{2k,2n} = C_{2n}$.

**2. Definíció.** *Azt mondjuk, hogy az n. időpont visszatérés a 0-ba, ha* $S_n = 0$. *Azt mondjuk, hogy az n. időpont első visszatérés a 0-ba, ha:*

$$s_1 \neq 0, s_2 \neq 0, \ldots, s_{n-1} \neq 0, s_n = 0$$

*Az* $r > 0$*-ra az r. szint elérése az n. időpontban történik, ha:*

$$s_1 < r, s_2 < r, \ldots, s_{n-1} < r, s_n = r$$

A második, harmadik,... visszatérés és áthaladás hasonlóan definiálható. Mivel visszatérés a nullához csak párosadik időpontban következhet be, ezért gyakran tételeinket is megszorítjuk csak páros esetekre.

Mostantól inkább valószínűségekkel koncentrálva, az eddigi utak számára vonatkozó eredményeinket átfogalmazzuk, hogy valószínűségekkel dolgozhassunk. Vezessük be az alábbi jelöléseket:

**3. Definíció.** $u_{2n} = \binom{2n}{n} 2^{-2n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$

**4. Definíció.** $f_0 = 0, f_{2n} = \frac{1}{2n} u_{2n-2}, \quad n = 1, 2, \ldots.$

Azonnal látszik hogy:

$$f_{2n} = u_{2n-2} - u_{2n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

## 2.3. Áttérés valószínűségekre

**7. Tétel** (Utak számának átfogalmazása valószínűségekre)**.** *Minden* $n \geq 0$*-re teljesülnek az alábbi egyenlőségek:*

$$u_{2n} = P(s_{2n} = 0), \tag{2.4}$$

$$u_{2n} = P(s_1 \neq 0, s_2 \neq 0, \ldots, s_{2n} \neq 0), \tag{2.5}$$

$$u_{2n} = P(s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, \ldots, s_{2n} \geq 0), \tag{2.6}$$

*vagyis a három eseménynek: $2n$-ben visszatérünk a 0-ba, az első $2n$ lépésben egyszer sem térünk vissza a 0-ba, végig a nem negatív térfélen maradunk ugyanakkora a valószínűsége, mégpedig: $u_{2n}$.*

*Továbbá:*

$$f_{2n} = P(s_1 \neq 0, s_2 \neq 0, \dots, s_{2n-1} \neq 0, s_{2n} = 0), \tag{2.7}$$

$$f_{2n} = P(s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, \dots, s_{2n-2} \geq 0, s_{2n-1} < 0). \tag{2.8}$$

Bizonyítás: (2.4) azonosság:

Összesen $2n$ hosszú az utunk melynek a 0-ból a 0-ba kell érkeznie, ekkor nyílván $n$ db olyan rész lesz benne mely felfelé megy, és $n$ olyan mely lefelé, és nyílván minden út amelyre az előbbi igaz meg is felel, tehát a szám megegyezik azzal, hogy hányféleképpen tudunk $2n$ hosszú utat összeállítani melyben $n$ fel és $n$ le rész van, és ez nem más mint $\binom{2n}{n}$, és mivel összesen $2^{2n}$ db út van, ezért: $\binom{2n}{n}2^{-2n}$

(2.7)-(2.8). azonosság:

Az (2.1) állításból következően $C_{2n-2}$ olyan út létezik, amely végig a (szigorúan) pozitív térfélen tartózkodik, és a $2n$. pontban tér vissza először a 0-hoz, így kétszer ennyi van amely $2n$-re tér vissza először a 0-hoz, vagyis $2C_{2n-2}2^{-2n} = f_{2n}$, amivel beláttuk (2.7)-et. Az (2.2)-ből hasonlóan következik az (2.8).

(2.5)-(2.6). azonosság:

A valószínűség, hogy nem fordul elő 0-ba visszatérés $2n$-ig, nem más mint 1 mínusz azoknak a valószínűségeknek az összege, hogy az első visszatérés a $2k$. helyen következik be, ahol $2k \leq 2n$. Itt a (2.7), már előzőleg belátott részt felhasználva:

$$1 - f_2 - f_4 - \dots - f_{2n} = 1 - (1 - u_2) - (u_2 - u_4) - \dots - (u_{2n-2} - u_{2n}) = u_{2n},$$

amivel (2.5)-őt beláttuk. Hasonlóan a (2.6). állításban szereplő valószínűség=1-(a valószínűségek összege hogy az első áthaladás a $-1$-en $2k+1$-ben következik be, ahol $2k+1 \leq 2n$), az (2.8) részt felhasználva megint az előbbi összeghez jutunk.

**8. Tétel** ($u$ kifejezése rekurzívan $f$-ekkel)**.** *Minden $n \geq 1$ esetén:*

$$u_{2n} = \sum_{r=1}^{n} f_{2r} u_{2n-2r}.$$

Bizonyítás: Az olyan utakban, ahol a $2n$. helyen 0-ba visszatérés történik, az első 0-ba visszatérés nyílván valamely $2r \leq 2n$ helyen történik. Épp az előbb láttuk be, hogy olyan utakból melyek (2n,0)-ba mennek, és a $2r(\leq 2n)$ helyen térnek vissza először a 0-ba: $2^{2r} f_{2r} 2^{2n-2r} u_{2n-2r}$ db van. Ezt $r$ szerint 1-től $n$-ig összegezve pont a kívánt egyenletet kapjuk.

A dolgozat elején említett 4. tétel következményét átfogalmazva kapjuk az alábbi tételt:

**9. Tétel.** *Annak a valószínűsége, hogy az első $y > 0$-n áthaladás $2n - y$-nál következik be:*

$$f_{2n}^{(y)} = \frac{y}{2n-y} \binom{2n-y}{n} 2^{-2n+y}, \quad n \geq y \geq 0.$$

A dualitás tétel nagy erejét bizonyítja ez a tétel (mint a szavazási probléma egyszerű következménye), ugyanis ennek a direkt analitikus levezetése hosszadalmas és bonyolult.

Az előbbinek egy testvértétele az alábbi:

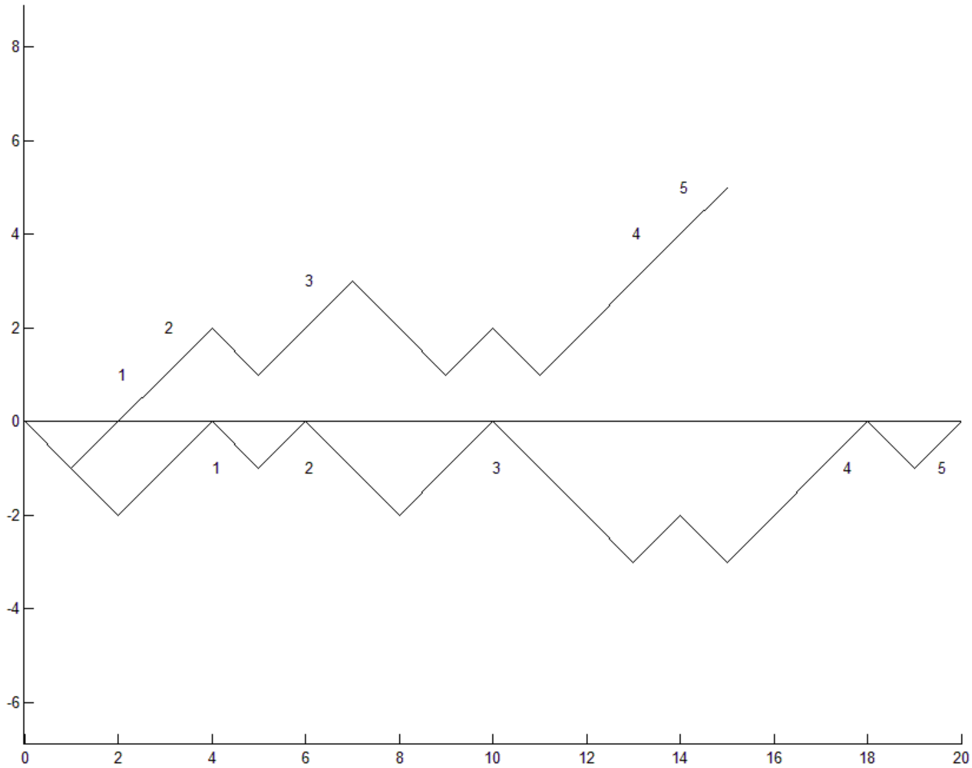
**10. Tétel** (Hasznos tétel)**.** *A valószínűség, hogy az $y$. visszatérés a 0-ba a $2n$ időpontban következik be: (szintén)*

$$f_{2n}^{(y)} = \frac{y}{2n-y} \binom{2n-y}{n} 2^{-2n+y}, \quad n \geq y \geq 0.$$

Bizonyítás: Azt fogjuk igazolni, hogy az ilyen utak száma megegyezik az előző tételben szereplő utak számával.

Vegyünk egy utat, mely az origóból indul, és $2n - y$-ban halad át először az $y$-on.

Csináljunk ebből egy új utat az alábbi módon: tegyünk hozzá lefelé menő útdarabkákat úgy, hogy a $k$-n való először áthaladás átalakuljon, 0-hoz való $k$. visszatéréssé. Ekkor a kapott út $2n$ hosszúságú, jelöljük: $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{2n})$. Ekkor $\sigma_i \leq 0$ és $\sigma_{2n} = 0$. És ez nyilván egy-egy értelmű hozzárendelése a két fajta utaknak, így a számuk valóban megegyezik.




2.1. ábra. Példa az átalakításra y=5 2n-y=15 esetben.

# 3. fejezet

# A hosszú vezetések valószínűsége, vagyis az első arkusz szinusz törvény

**5. Definíció.** *A részecske a $k-1$-től $k$-ig terjedő időtartamot a pozitív oldalon töltötte, ha $max(s_{k-1}, s_k) > 0$.*

Az utak már régebben említett furcsa ellentmondásossága az alábbi tételből lesz levezethető:

**11. Tétel.** *Legyen $p_{2k,2n}$ annnak a valószínűsége, hogy a 0-tól $2n$-ig terjedő időintervallumban a részecske $2k$ időt tölt a pozitív oldalon. Ekkor:*

$$p_{2k,2n} = u_{2k}u_{2n-2k}.$$

Bizonyítás:

Az előző tételben szerepelt az az eset, amikor a részecske az összes időt a pozitív oldalon tölti, ebben az esetben $p_{2n,2n} = u_{2n}$, vagyis a feltétel teljesül. Szimmetria miatt ekkor természetesen a $k = 0$ eset is kész, és így már csak a közöttes, $1 \geq k \geq n-1$ esetekkel kell foglalkozni. A részecske mely $2k$ időt a pozitív oldalon tölt, és a többit a negatívon, biztosan áthalad a 0-n, és eszerint fogjuk osztályozni az utainkat. Legyen $2r$ a 0-hoz való első visszatérés időpontja.

Két kategória lesz, az első melyben a részecske az első $2r$ időt a pozitív oldalon tölti, és a maradék lépésből pedig $2k-2r$ időt tölt a pozitív oldalon. Ekkor $2^{2r}f_{2r}$ db $2r$ hosszúságú út van mely $2r$ időpontban tér vissza először az 0-ba, és ezeknek a fele tölti az időt a pozitív oldalon. Továbbá, definíció szerint összesen $2^{2n-2r}p_{2k-2r,2n-2r}$ db $2n-2r$ hosszúságú út van mely a $(2r, 0)$ pontból indul, és pontosan $2k-2r$ időt tölt a pozitív térfélen. Így az első osztályba tartozó utak összesen:

$$\frac{1}{2}2^{2r}f_{2r}2^{2n-2r}p_{2k-2r,2n-2r} = 2^{2n-1}f_{2r}p_{2k-2r,2n-2r}.$$

A második osztályban a részecske az első $2r$ időt a negatív térfélen tölti, így a maradék $2n-2r$ időben tölti az összes $2k$ időt a pozitív oldalon. Itt az előző érvelést megismételve kapjuk: $2^{2n-1}f_{2r}p_{2k,2n-2r}$.

A lehetséges $r$-ekre összegezve, $1 \geq k \geq n-1$ esetén:

$$p_{2k,2n} = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k} f_{2r}p_{2k-2r,2n-2r} + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-k} f_{2r}p_{2k,2n-2r}.$$

Most tegyük fel indukcióval, hogy $p_{2k,2v} = u_{2k}u_{2v-2k}$ már minden $n$-nél kisebb $v$ egészre fennáll, ekkor az előző formula az alábbivá egyszerűsödik:

$$p_{2k,2n} = \frac{1}{2}u_{2n-2k}\sum_{r=1}^{k} f_{2r}u_{2k-2r} + \frac{1}{2}u_{2k}\sum_{r=1}^{n-k} f_{2r}u_{2n-2k-2r}.$$

És 8. tétel szerint az első szumma összege $u_{2k}$, a másodiké $u_{2n-2k}$ és ezeket beírva kész is az állítás.

Az utak kapcsán az az előérzésünk van, hogy a $\frac{k}{n}$ hányados mely az összes pozitív oldalon töltött idő arányát adja meg általában $\frac{1}{2}$ körül lesz. Azonban, éppen az ellenkező igaz,az $\frac{1}{2}$-hez közeli értékek éppen a legvalószínűtlenebbek, és a 0 és 1 értékeknek van a legnagyobb valószínűsége. A tétel állításának segítségével most már a konkrét valószínűségeket is fel tudjuk írni.

A következő táblázat illusztrálja ezt a paradox helyzetet. Ha pénzfeldobásos környezetben nézzük a problémát, akkor az derül ki, hogy például már 20 pénzfeldobás esetén 0.3524 valószínűséggel a kevésbé szerencsés játékos soha nem is vezet a 20 dobás során. A legtöbb esetben (0.5379) a kevésbé szerencsés játékos csak egyszer vagy egyszer sem lesz pozitívban. Másrészt annak az esélye hogy mind a ketten 10-10 kört vezetnek mindössze 0.0606.

A 3.1. Az alant szereplő táblázatban $p_{k,20}$=$u_k u_{20-k}$ a valószínűség, hogy egy adott játékos pontosan $k$ körig vezet, $P_{k,20}$ pedig annak a valószínűsége, hogy valamely játékos legfeljebb $k$-t vezet, vagyis a másik legalább $20-k$-t.

3.1. táblázat. A vezetés eloszlása 20 érmefeldobás esetén.

| | k=0 k=20 | k=2 k=18 | k=4 k=16 | k=6 k=14 | k=8 k=12 | k=10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_{k,20}$ | 0.1762 | 0.0927 | 0.0736 | 0.0655 | 0.0617 | 0.0606 |
| $P_{k,20}$ | 0.3524 | 0.5379 | 0.6851 | 0.8160 | 0.9394 | 1 |

Az előző tétel elején kapott formula ugyan egzakt, de mégse túl informatív, és ezért inkább átírjuk egy egyszerűbb alakba. Ehhez szükségünk lesz az ún. Stirling formulára:

$$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}.$$

Ebből következik:

$$u_{2n}\sqrt{\pi n} = \binom{2n}{n} 2^{-2n}\sqrt{\pi n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} 2^{-2n}\sqrt{\pi n} \sim$$

$$\sim \frac{\sqrt{\pi n}(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}\sqrt{\pi n}}{(2\pi) n^{2n+1} e^{-2n} 2^{2n}} = 1, \quad (n \to \infty).$$

És ez nem más mint:

$$p_{2k,2n} \sim \frac{1}{\sqrt{k(n-k)\pi}},$$

ahol a két oldal aránya rohamosan tart 1-hez ha $k \to \infty, n-k \to \infty$. Így a valószínűség, hogy a pozitív oldalon töltött idő aránya $\frac{1}{2}$ és $\alpha$ között van ($\frac{1}{2} \geq \alpha \geq 1$):

$$\sum_{\frac{1}{2}n<k<n\alpha} p_{2k,2n} \sim \frac{1}{\pi n} \sum_{\frac{1}{2}n<k<n\alpha} \sqrt{\left[\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\right]}.$$

Itt a jobb oldalon megfigyelhető egy Riemann összeg, mely az alábbi integrált közelíti:

$$\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{\alpha} \frac{\mathrm{d}x}{\{x(1-x)\}^{\frac{1}{2}}} = 2\pi^{-1} \arcsin\sqrt{\alpha} - \frac{1}{2}.$$

Szimmetria okok miatt ugye a valószínűség, hogy $\frac{k}{n} \geq \frac{1}{2}$ tart $\frac{1}{2}$-hez ahogy $n \to \infty$. Ezt a valószínűséget hozzáadva az előzőleg kapotthoz adódik az alábbi tétel:

**12. Tétel** (Arkusz szinusz tétel). *Rögzített $\alpha$ ($0<\alpha<1$) számra, és $n \to \infty$ esetén a valószinűsége, hogy a $\frac{k}{n} < \alpha$*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\alpha \frac{\mathrm{d}x}{\{x(1-x)\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\alpha}.$$

A formula közelítésen alapszik, így csak nagyobb $n$-ekre van közel a tényleges értékhez, az alábbi táblázatban megfigyelhető, hogy $n = 100$ esetén még elég jelentősek az eltérések.

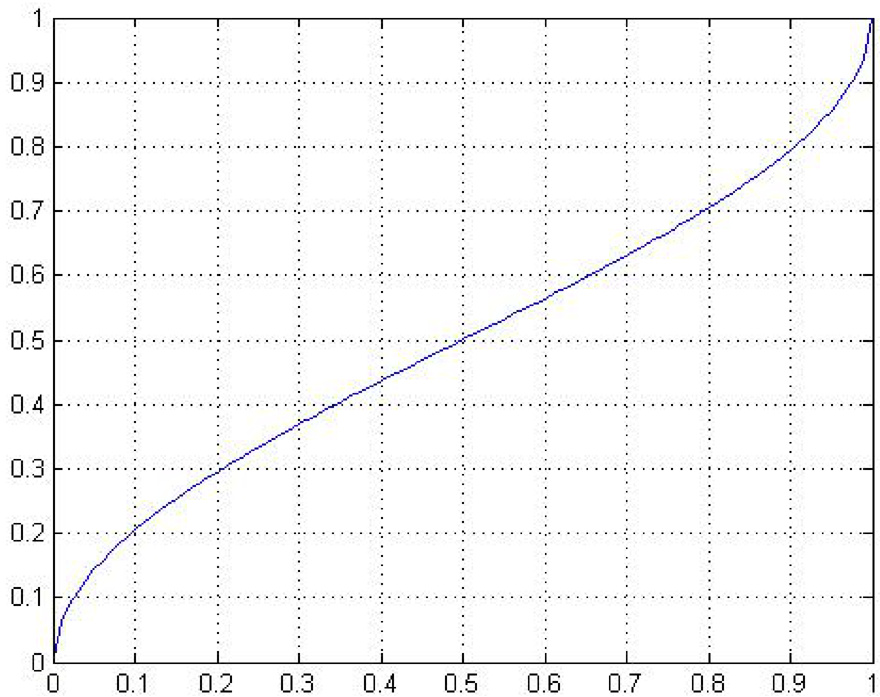
3.2. táblázat. A közelítés pontossága n=100 esetén.

| $\frac{k}{100}$ | A pontos érték | A függvény közelítő értéke |
|---|---|---|
| 0.06 | 0.1758 | 0.1575 |
| 0.10 | 0.2192 | 0.2048 |
| 0.16 | 0.2733 | 0.2620 |
| 0.20 | 0.3053 | 0.2952 |
| 0.26 | 0.3495 | 0.3406 |
| 0.30 | 0.3772 | 0.3690 |
| 0.36 | 0.4171 | 0.4097 |
| 0.40 | 0.4399 | 0.4359 |
| 0.46 | 0.4765 | 0.4745 |
| 0.50 | 0.5 | 0.5 |

Az előző képletben szereplő integrandus egy U alakú görbe, mely 0-ban és egyben a végtelenhez tart. Ez a tény mutatja legjobban, hogy a pozitív oldalon töltött időhányados sokkal valószínűbben lesz közel 0-hoz vagy 1-hez, mint a várt $\frac{1}{2}$-hez. 0.2 valószínűséggel a részecske az idő 97.6 százalékát azonos oldalon tölti. 0.1-os valószínűséggel pedig már az idő 99.4 százalékát tölti el ugyanazon az oldalon. Egy másik példa erre:

Az 3.3 táblázat azt mutatja, hogy ha egy érmét másodpercenként egyszer egy évig (365 nap) folyamatosan dobálunk, és a kevésbé szerencsés játékos által vezetésben töltött idő aránya $z$, akkor annak az eseménynek a valószínűsége hogy $t_p < z$ közelítőleg $p$.

Ez a táblázat megmutatja pl. hogy $p = 0.05$ határ esetén, vagyis húszból egy esetben a szerencsésebb játékos több mint 364 napig és 10 óráig lesz




3.1. ábra. A $\frac{2}{\pi} \arcsin \alpha^{\frac{1}{2}}$ függvény képe a $[0, 1]$ intervallumon.

vezető pozícióban. Kevesen hinnék, hogy egy szabályos érme ilyen dobássorozatot produkál, melyben a vezető játékos nem változik millió feldobások során sem, és mégis, ez az amit egy „jól viselkedő” érme általában tesz.

Az arkusz-szinusz törvény magyarázata abban rejlik, hogy általában borzasztóan sok feldobásra van szükség, mire az érme visszatér a 0-ba (ezt később részletesen is látni fogjuk). Intuitíve úgy érezzük, hogy ha két játékos nagyon hosszú ideig, mondjuk $2n$ feldobásig játssza az érmés játékot, akkor várhatóan a döntetlenek száma a játék hosszával, vagyis $2n$-nel lesz arányos. Azonban ez nem így van. Valójában ez $(2n)^{\frac{1}{2}}$-nel arányos, mint a következőkben majd látni fogjuk.

**13. Tétel.** *Legyen $z_{2n}^{(r)}$ annak a valószínűsége, hogy az első $2n$ lépés során a*

3.3. táblázat. Vezetési hosszak valószínűségének eloszlása egy év folyamán.

| p | $t_p$ |
|---|---|
| 0.9 | 153.95 nap |
| 0.8 | 126.10 nap |
| 0.7 | 99.65 nap |
| 0.6 | 75.23 nap |
| 0.5 | 53.45 nap |
| 0.4 | 34.85 nap |
| 0.3 | 19.89 nap |
| 0.2 | 8.93 nap |
| 0.1 | 2.24 nap |
| 0.05 | 13.5 óra |
| 0.02 | 2.16 óra |
| 0.01 | 32.4 perc |

*részecske 0-hoz pontosan $r$-szer tér vissza. Ekkor:*

$$z_{2n}^{(r)} = \frac{1}{2^{2n-r}}\binom{2n-r}{n}.$$

*Konkrétan* $z_{2n}^{(0)}=z_{2n}^{(1)}=u_{2n}$, *és*

$$z_{2n}^{(0)} = z_{2n}^{(1)} > z_{2n}^{(2)} > z_{2n}^{(3)} > \dots,$$

*vagyis szavakkal, a játék hosszától függetlenül valószínűbb, hogy egyáltalán nem térünk vissza a 0-hoz, vagy csak egyszer térünk vissza a nullához, mint bármely más visszatérésszámú eset.*

Bizonyítás: Először is emlékezzünk vissza arra hogy a (2.5), és (2.7) formulák alapján, hogy ugyanannyi olyan $2n$ hosszú út van, mely egyáltalán nem tér vissza a 0-ba, mint amely az utolsó lépésben visszatér 0-ba. Most nézzük az olyan utakat melyeknél az $r$. és egyben utolsó visszatérés $2n - 2v < 2n$ időpontban történik. Az a $2v$ hosszúságú rész amely a végén van annyiféleképpen választható, mint ahányféleképpen $(2n - 2v, 0)$-ból el tudunk jutni $(2n, 0)$-ba. Más szavakkal, annak a valószínűsége, hogy pontosan $r$ visszatérés a 0-hoz következik be $2n$ idő alatt nem más, mint azé, hogy $2n$-kor is egy visszatérés következik be, és ezt legalább $r$ megelőzi. Ez pedig a hasznos 10. tétel alapján:

$$z_{2n}^{(r)} = f_{2n}^{(r)} + f_{2n}^{(r+1)} + \dots,$$

ahol $f_{2n}^{(y)}$ a hasznos tétel előtt lett definiálva. Könnyen belátható, hogy

$$f_{2n}^{(y)} = \frac{1}{2^{2n-y}}\binom{2n-y}{n} - \frac{1}{2^{2n-y-1}}\binom{2n-y-1}{n},$$

és ezt összeadva $y = r, r+1, \dots$ kapjuk az első részét az állításnak. Mivel ennek a második rész triviális következménye, az állítást beláttuk.

A jobb használhatóság kedvéért érdemesebb ezt is egy más alakba átírni. Legyen ez az új alak:

$$z_{2n}^{r} = u_{2n}\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n})}{1-\frac{1}{2n})(1-\frac{2}{2n})\dots(1-\frac{k-1}{2n})},$$

ahogy már az első arkusz szinusz törvénynél láttuk, $u_{2n}(\pi n)^{\frac{1}{2}} \to 1$, ha $n \to \infty$ Ismert, hogy: $-1 < t < 1$ esetén:

$$\log\frac{1}{1-t} = t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \dots$$

Ez alapján $\log(1-\frac{v}{n})$ becsülhető $-v/n$-nel, $(v/n)^2$ nagyságrendű hibával. Ebből következik hogy $r^3/n^2$ nagyságrendű hibával kapjuk az alábbi közelítést:

$$\log z_{2n}^{(r)}\sqrt{\pi n} \approx -\frac{1}{2n}\sum_{v=1}^{r-1} v \approx -\frac{r^2}{4n}.$$

vagy

$$z_{2n}^{(r)} \approx \sqrt{\pi n}e^{-\frac{r^2}{4n}}.$$

A valószínűség, hogy $k$-szor vagy kevesebbszer térünk vissza, amely pontosan $z_{2n}^{0} + z_{2n}^{(1)} + \dots + z_{2n}^{(k-1)}$ lenne, közelíthető egy Riemann integrálközelítő összeggel, $\pi^{-1}e^{-\frac{1}{4}x^2}$ 0-tól $\frac{k}{n}$-ig, $k^3/n^2$ relatív hibával. Így kaptuk:

**14. Tétel.** *Minden rögzített $\alpha > 0$ esetén, a valószínűség, hogy $2n$-ig bezárólag a részecske kevesebbszer tér vissza a 0-ba mint $\alpha(2n)^{\frac{1}{2}}$, $n \to \infty$ esetén:*

$$f(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}s}\,\mathrm{d}s.$$

*Speciálisan, a valószínűség, hogy kevesebb mint $0,6745(2n)^{\frac{1}{2}}$ visszatérés történik, nagy $n$-re, közelítőleg $\frac{1}{2}$*

Egy normális eloszlás táblázat segítségével tudunk az $f(\alpha)$ értékekről többet megtudni

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + f(\alpha)) \to f(\alpha) = 2\left(\Phi(\alpha) - \tfrac{1}{2}\right), \quad \alpha > 0.$$

Például 10,000 érmedobásból álló kísérlet esetén $\frac{1}{2}$ valószínűséggel kevesebb mint 95 visszatérés lesz a 0-hoz, melynek ugye csak a fele jelent valódi vezetésváltozást, vagyis $\frac{1}{2}$ valószínűséggel a „hullámok" átlagos hossza vezetés váltások között kicsit több mint 200. 1,000,000 feldobás esetén pedig az átlagos hullámhosszúság 10-szeresére vagyis kb 2000 / hullám-ra növekedett. Tehát minél több a feldobás annál ritkább a visszatérés, és annál hosszabbak a hullámok. 0.01 valószínűséggel a vezetés sosem változik egy 10,000 dobásból álló sorozat során, és ugyanezen valószínűséggel 1,000,000 feldobás esetén kevesebb mint 10-szer változik.

# 4. fejezet

# A nullába való visszatérés valószínűsége

A szimmetrikus bolyongásnál érdekes kérdés, hogy mekkora valószínűséggel térünk vissza a 0-ba. A következőkben látni fogjuk, hogy egy és két dimenzió esetén még egy valószínűséggel visszatérünk, azonban magasabb dimenziószám esetén ez a valószínűség már, kisebb mint egy. Az egydimenziós eset meglehetősen könnyen kezelhető. Bevezetésnek nézzük az ún. tönkremenési feladatot:

Két játékos játszik egy igazságos játékot, vagyis minden körben $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel nyer egy pénzegységet az egyik a másiktól. A játék addig tart amíg valamelyik játékos tönkre nem megy, vagyis 0-ra csökken a pénze. Ha az egyik játékosnak $k$, a másiknak pedig $n-k$ egységnyi pénze van, mekkora valószínűsége van az egyes játékosoknak a nyerésre? $p(k) := P(\text{a k pénzzel rendelkező játékos tönkremegy}) = P(A)$. Ekkor nyílván $p(0) = 1$, $p(n) = 0$. Legyen $B_1$ az az esemény hogy első lépésben a $k$ pénzű játékos nyer, $B_2$ pedig az, hogy a másik nyer. Ekkor

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) = p(k+1)\frac{1}{2} + p(k-1)\frac{1}{2},$$

ahol $1 \leq k \leq n-1$, vagyis $2p(k) = p(k+1) + p(k-1)$, tehát a valószínűségek számtani sorozatot alkotnak, így $P(A) = p(k) = 1 - \frac{k}{n}$.

Legyen az az esemény, hogy visszatérünk a 0-ba $A$. Legyen $B_1$, hogy első lépésben balra lépünk, $B_2$ pedig, hogy jobbra. Ekkor a Teljes valószínűség tétel miatt $P(A) = P(A|B_1)\frac{1}{2} + P(A|B_2)\frac{1}{2}$. Itt $P(A|B_1)$ az a valószínűség, hogy 1-ből eljutunk 0-ba, aminek nem kisebb a valószínűsége mint, hogy

$$P(\text{1-ből előbb jutunk 0-ba mint n-be}) = 1 - \frac{1}{n},$$

így $P(A|B_1) \geq 1 - \frac{1}{n}$, minden $n$-re, így $P(A|B_1) = P(A|B_2) = 1$, vagyis $P(A) = 1$.

Azonban ebben az esetben azt is megkérdezhetnénk, hogy várhatóan hány lépés után fog ez bekövetkezni?

$\xi$ legyen a lépések száma $n$-ből a 0-ba, és $v(n) := E\xi$. Legyen $A$ az az esemény hogy első lépésben jobbra lépünk. Ekkor a teljes várható érték tétel alapján:

$$E\xi = E(\xi|A)\frac{1}{2} + E(\xi|\bar{A})\frac{1}{2},$$

itt $E(\xi|A) = 1 + v(n+1)$, és $E(\xi|\bar{A}) = 1 + v(n-1)$. Ekkor

$$2v(n) = 2 + v(n-1) + v(n+1) \quad v(0) = 0.$$

$$v(n+1) - v(n) = v(n) - v(n-1) - 2 = \cdots = v(1) - v(0) - 2n,$$

majd írjuk fel $v(n)$-et az alábbi alakban:

$$v(n) = v(n) - v(n-1) + v(n-1) + v(n-2) + \cdots + v(1) - v(0) + v(0),$$

és ebbe kettesével a tagokra alkalmazva az előző összefüggést, azt kapjuk hogy: $0 \leq v(n) = nv(1) - n(n-1) = n(v(1) - n - 1)$, ezáltal $v(1) \geq n - 1$ minden $n$-re, így $v(1) = +\infty$. Tehát már az egy dimenziós szimmetrikus bolyongásnál is csak várhatóan végtelen sok lépés után térünk vissza at origóba.

A két és három dimenziós esetekben ilyen elemien sajnos már nem lehet kiszámolni, pár új fogalomra és tételre szükségünk lesz.

Minden visszatérő esemény jellemzéséhez két sorozat szorosan hozzátartozik

$$u_n = P(\varepsilon \text{ bekövetkezik az n. lépésben})$$

$$f_n = P(\varepsilon \text{ elsőként az n. lépésben következik be})$$

Kényelmi okokból legyen:

$$u_0 = 1, \quad f_0 = 0.$$

Ekkor a két sorozat generátorfüggvénye:

$$F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k s^k, \; U(s) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k s^k \tag{4.1}$$

Megjegyzés. $u_k$ általában nem lesz valószínűség eloszlás, sőt, azt fogjuk látni, hogy a lényeges esetekben az $u_k$-k összege végtelen lesz. Ezzel szemben, mivel egy esemény csak egyszer történhet először, az $f_k$-k összege, melyet mostantól $f$-fel jelölünk, mindig kisebb vagy egyenlő lesz mint 1.

**6. Definíció** (állandó, tranziens)**.** *A $\varepsilon$ visszatérő esemény állandónak nevezzük, ha $f = 1$. $f < 1$ esetén tranziensnek nevezzük.*

**15. Tétel.** *Az $u_n$ és $f_n$ sorozatok generátorfüggvényei az alábbi kapcsolatban vannak egymással:*

$$U(s) = \frac{1}{1 - F(s)}$$

Bizonyítás: Annak a valószínűsége, hogy $\varepsilon$ először a $\nu$ helyen történik, és történik még egy későbbi $n > \nu$ helyen is : $f_\nu u_{n-\nu}$. Az összes lehetséges $\nu$-re összegezve megkapjuk, hogy:

$$u_n = f_1 u_{n-1} + f_2 u_{n-2} + \cdots + f_n u_0, \; n \geq 1$$

Itt a jobb oldalon áll az $f_k * u_k$ konvolúció, melynek a generátor függvénye: $F(s)U(s)$. A bal oldalon pedig az $u_n$ sorozatot találjuk, melyből az $u_0$ hiányzik, ezért ennek a generátorfv-e $U(s)$-1 lesz. Így hát $U(s)$-1=$F(s)U(s)$, amivel az állítást beláttuk.

**16. Tétel.** *Hogy a $\varepsilon$ visszatérő esemény állandó legyen, szükséges és elégséges, hogy*

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} u_j.$$

*összeg végtelen legyen. Ha ez mégis véges, akkor a valószínűség, hogy $\varepsilon$ legalább egyszer előfordul:*

$$\frac{u-1}{u}.$$

Bizonyítás: Mivel az $u_k$ együtthatók nem negatívak, így nyílván $U(s)$ monoton növekvő függvény, és ahogy $\lim_{s \to 1-}$, minden $n$-re:

$$\sum_{n=0}^{N} u_n \leq \lim_{s \to 1} U(s) \leq \sum_{n=0}^{\infty} u_n = u.$$

és mivel $U(s) = 1/(1-f)$, ha $f < 1$ és $\lim_{s\to 1-} U(s) = \infty$ ha $f = 1$ az állítást beláttuk.

**17. Tétel** (Pólya tétele)**.** *Szimmetrikusan bolyongó részecske egy, és két dimenzióban egy valószínűséggel előbb vagy utóbb visszatér az origóba, három dimenzióban pedig ez a valószínűség már csak körülbelül 0.34, és várható visszatérések száma kerekítve 0.53.*

Bizonyítás Az eddigieknek megfelelően azt kell bebizonyítanunk, hogy $n = 2$ dimenzió esetén $u$ végtelen, 3 dimenzióban pedig véges.

## 4.1. 2 dimenziós eset

Az origóba visszaérkezés akkor történik amikor az $x$ és $y$ tengelyek mentén pozitív irányba megtett lépések száma megegyezik ugyanezen tengelyek mentén a negatív irányba tett lépésekkel. Így $u_n$=0 ha $n$ páratlan, és felhasználva a polinomiális eloszlás képletét:

$$u_{2n} = \frac{1}{4^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!} = \frac{1}{4^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

**18. Lemma.** $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Bizonyítás: A képlet jobb oldalán azokat az utakat számoljuk össze melyek $2n$ hosszúak, és origóból origóba mennek, mégpedig úgy hogy a $2n$ útszakaszból kiválasztjuk a lefelé menők számát. A bal oldalon is ugyanezt számoljuk össze csak másképpen. Olyan 0-ba visszaérkező útból, mely az első $n$ lépés során 0 lépést tesz lefelé $\binom{n}{0}\binom{n}{0}$, azaz 1 db van. Olyan mely 1 lépést tesz lefelé $\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}$ van ugyanis mivel az első $n$ lépés során egyet lépett fel a második rész során $n-1$-et kell, hogy az origóba érjen. Kihasználva, hogy a binomiális együtthatók szimmetrikusak, és összegezve pont a bizonyítandó állítást kapjuk.

Ezzel a lemmával az előzőleg vizsgált kifejezés az alábbi formát ölti:

$$\frac{1}{4^{2n}} \binom{2n}{n}^2.$$

és nagy n-ekre ez a Stirling formula ($n! \approx (2\pi n)^{1/2}(n/e)^n$) alapján:

$$\frac{1}{4^{2n}} \binom{2n}{n}^2 \approx \frac{(2\pi 2n)^{1/2}(2n/e)^{2n}}{[(2\pi n)^{1/2}(n/e)^n]^4 4^{2n}} = \frac{1}{2\pi n}.$$

Tehát az $u_n$ sorozat nagyságrendje $\frac{1}{n}$, így az összeg végtelenhez tart. Ezzel a 2 dimenziós esetet beláttuk.

## 4.2. 3 dimenziós eset

Három dimenzióban az előzőhöz hasonló gondolatmenettel láthatjuk, hogy

$$u_{2n} = \frac{1}{6^{2n}} \sum_{j,k} \frac{(2n)!}{j!j!k!k!(n-j-k)!(n-j-k)!},$$

ahol a szummázás minden olyan $(j,k)$ párosra kiterjed, ahol $j+k \leq n$. Könnyen megmutatható, hogy

$$u_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{j,k} \left\{ \frac{1}{3^n} \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!} \right\}^2.$$

Itt a kapcsos zárójelen belül a trinomiális eloszlás tagjaival van dolgunk, így a tagok összege 1, és mivel négyzeten szerepelnek, ezért az egész négyzetösszeg kisebb mint a legnagyobb tagja, amely akkor vétetik fel, ha $j$ és $k$ közel van $\frac{n}{3}$-hoz. Ekkor a nagyságrend

$$\frac{1}{3^n} \frac{n!}{(\frac{n}{3}!)^3} \approx \frac{(2n\pi)^{\frac{1}{2}} (\frac{n}{e})^n}{3^n (2n\pi)^{\frac{3}{2}} (\frac{n}{3e})^n} = C * \frac{1}{n}$$

és emiatt $u_{2n}$ is $n^{-\frac{3}{2}}$ nagyságrendű, vagyis $\sum u_{2n}$ konvergál, mint ahogy vártuk. A konkrét valószínűség kiszámolásához szükség lesz a bolyongás karakterisztikus függvényére:

Három dimenziós szimmetrikus bolyongás esetén:

$$P(\xi_j = \pm e_i) = \frac{1}{6}, \quad i = 1,2,3. \quad S_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j$$

$$\Phi_{S_n}(t) = E(e^{i\langle t, S_n \rangle}) = E\Big( \prod_{j=1}^{3} e^{it\xi_j} \Big) = \prod_{j=1}^{3} E\Big(e^{it\xi_j}\Big) = \Big( \frac{\cos t_1 + \cos t_2 + \cos t_3}{3} \Big)^n$$

Emelett:

$$\int_{[-\pi,\pi]^3} \Phi_{S_n}(t)e^{-its'}\,\mathrm{d}t = \sum_s P(S_n = s)\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{its}e^{-its'}\,\mathrm{d}t,$$

ahol az integrál a tagok merőlegessége miatt egyedül az $s = s'$ esetben nem nulla, ekkor mivel az azonosan 1-et integráljuk, az integrál $(2\pi)^3$. Mivel a mi esetünkben az $n$. lépés után a 0-ban landolunk ($s' = 0$), ezért az egyenlet az alábbiképpen módosul:

$$P(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{S_n}(t)\,\mathrm{d}t$$

Ezt végtelenig összegezve, és $\Phi$-t beírva:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{\cos t_1 + \cos t_2 + \cos t_3}{3}\Big)^n\,\mathrm{d}t$$

Ami a változó szétbontása, és a mértani sor összegképletének felhasználása után:

$$\frac{3}{(2\pi)^3}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{3-\cos x-\cos y-\cos z} = \star$$

És ez nem más mint egyike G.N. Watson 3 híres integráljának, és 1939-ben megjelent cikke alapján tovább alakítható az első fajú teljes elliptikus integrál függvény, $K(k)$ segítségével

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}}$$

$$\star = \frac{12}{(\pi)^2}(18+12\sqrt{2}-10\sqrt{3}-7\sqrt{6})\{K[(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})]\}^2 =$$

$$= \frac{12}{(\pi)^2}(18+12\sqrt{2}-10\sqrt{3}-7\sqrt{6})\Big[1+2\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k^2\pi\sqrt{6}}\Big]^4.$$

Ezután pedig a Jacobi-féle $\theta$ fv segítségével írjuk át:

$$\theta(z;\tau) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(e^{\pi i\tau})^{n^2}\cos(2\pi nz)$$

$$= \frac{12}{(\pi)^2}(18 + 12\sqrt{2} - 10\sqrt{3} - 7\sqrt{6})\theta_3^4(0, -\pi\sqrt{6}) =$$

$$\frac{\sqrt{6}}{32\pi^3}\Gamma\left(\frac{1}{24}\right)\Gamma\left(\frac{5}{24}\right)\Gamma\left(\frac{7}{24}\right)\Gamma\left(\frac{11}{24}\right) \approx 1,516386$$

és így $p$ ami nem más mint 1 mínusz az előző reciproka $\approx 0,34053$.

# 5. fejezet

# Alkalmazások

A második világháború idején arra használták a szimmetrikus bolyongásokban elért eredményeket, hogy a hadifoglyok szökésénél kiszámítsák (lévén hogy idegen helyen tartották őket fogva, így mozgásukban determináltságot nem feltételezhetünk), hogy adott idő alatt milyen messzire juthattak.

Populáció genetikában véletlen bolyongással modellezik a genetikus sodródás jelenségét, vagyis azon evolúciós folyamatokat, melyek során egy adott populáció allélgyakoriságának változását csupán véletlenszerű események határozzák meg.

Pszichológiában, a véletlen bolyongás akkurátusan jellemzi a kapcsolatot az idő ami a döntés meghozásához szükséges, és egy bizonyos döntés meghozásának valószínűsége között.

Fizikában, a szimmetrikus bolyongások mint a Brown-mozgásnak egyszerű modelljei és, mint gáz és folyadékrészecskék véletlenszerű mozgásának szimulációi használatosak. (Pl diffúzió-limitált aggregáció). Továbbá a (szimmetrikus) véletlen bolyongások még a kvantumtérelmélet területén is fontos szerepet játszanak.

Matematikai biológiában, a szimmetrikus bolyongásokat arra használják, hogy az egyedi állati mozgásokat leírják, hogy gyakorlati eredményekkel tudják alátámasztani a biodiffúzziót, és időnként, hogy modellezzék a populációdinamikát.

# 6. fejezet

# Híres megoldatlan kérdések szimmetrikus bolyongásokon

## 6.1. Kedvenc helyek

**7. Definíció.** *Legyen az a szám, hogy egy n hosszú szimmetrikus bolyongás során hányszor jártunk* $x$*-ben* $L(n, x)$*. Az* $x$ *helyet (n lépésre vonatkozó) kedvencnek hívjuk, ha* $L(n, x) \geq L(n, y)\ \forall y$*.*

Erdős Pál és Révész Pál egy közös 1984-ös cikkükben(lásd forrásjegyzék) foglalkoztak kedvenc helyekkel. A következő problémákat is ők vetették fel. Könnyen látható:
$P$(„egy kedvenc hely van n lépés után" csak véges sok n-re teljesül) $= 0$ és
$P$(„két kedvenc hely van n lépés után" csak véges sok n-re teljesül) $= 0$
Azonban meglepően nehéz:
$P$(„2-nél több kedvenc hely van n lépés után” csak véges sok n-re teljesül) $=$ ? A sejtés az, hogy ez 1, azonban még bizonyítatlan. Ezzel a sejtéssel kapcsolatosan Tóth Bálint részeredményként belátta 2002-ben, hogy 3-nál nagyobbra igaz.

Intuitíve érezzük, hogy egyszerre több kedvenc hely viszonylag ritkán fordul elő. Egy másik érdekes probléma ezzel kapcsolatosan: legyen $n_1, n_2, \ldots$ monoton növekvő sorozat , ahol $\forall k$-ra $n_k$-nál legalább két kedvenc hely van. Vajon

$$\frac{n_k}{k} \to \infty?$$

Továbbá azzal kapcsolatosan, hogy milyen gyakran tűnnek fel új kedvenc helyek, legyen $A(n)$ az összes különböző kedvenc hely száma az $n$. lépésig.

Az ezzel kapcsolatos sejtés az, hogy:

$$\exists c > 0 : \quad 1 \text{ valószínűséggel } A(n) < \log(n)^c \quad \forall \text{ eléggé nagy } n\text{-re}$$

# 7. fejezet

# Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom Prokaj Vilmosnak, aki soha el nem fogyó lelkesedéssel javítgatta hibáim, és Lócsi Leventének, aki a LaTeX programcsomag használatában nyújtott számomra nélkülözhetetlen segítséget.

# 8. fejezet

# Forrásjegyzék

William Feller: An introduction to probability theory and its applications Volume I

Erdős Pál-Révész Pál: On the favourite points of a random walk. In: Mathematical Structures - Computational Mathematics - Mathematical Modelling 2 pp. 152-157. Sofia.

Watson, G. N. "Three Triple Integrals." Quart. J. Math., Oxford Ser. 2 10, 266-276, 1939.

Valószínűségszámítás - Arató Miklós előadásai alapján Elte jegyzet, készítette Tassy Gergely és Martinek László

Tóth, Bálint - No more than three favorite sites for simple random walk. Ann. Probab. 29 (2001), no. 1, 484-503.

Wolfram Mathworld - Pólya's Random Walk constants

Pearson, K. (1905). The problem of the Random Walk. Nature. 72, 294.

Wikipedia

# Táblázatok jegyzéke

# Ábrák jegyzéke