

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

---

Varga Roxána

# ÁLLATOK MINTÁZATKÉPZŐDÉSE

BSc szakdolgozat

Témavezető:

Bátkai András, docens

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék



Budapest, 2011



# Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Bátikai Andrásnak a tanácsaiért és a türelméért. Valamint köszönet illeti a csoporttársaimat is a rengeteg bátorításért, biztatásért és tanácsért.



# Tartalomjegyzék

<b>Bevezető</b>	<b>1</b>
<b>1. Reakció-diffúzió</b>	<b>3</b>
1.1. Az egyenlet . . . . .	3
1.2. Reakció-diffúzió mechanizmusok . . . . .	4
1.3. Stabilitás vizsgálat . . . . .	5
1.4. Szóráskapcsolat . . . . .	11
<b>2. A Schnakenberg-reakció</b>	<b>13</b>
2.1. A Schnakenberg-reakció . . . . .	13
2.2. Szóráskapcsolat . . . . .	16
2.3. Lehetséges mintázatok . . . . .	19
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>22</b>

# Bevezető

Az embriológia a biológiának azon része, amely az embrió kialakulásával és növekedésével foglalkozik a megtermékenyítéstől a születésig. Az embrió növekedése egy alaptervet követő folytonos folyamat, ez az alapterv a terhesség korai szakaszában alakul ki.

Az alakfejlődés vagy morfogenetika a mintázat és a forma növekedésével foglalkozik. A növekedési alapterv kialakulása ismeretlen, akárcsak a mechanizmusok amelyek szükségessé teszik a helyi mintázatok kialakulását, hogy különböző szervek jöjjenek létre. A dolgozatban olyan mechanizmusokról lesz szó, amelyek képesek helyi mintázatot illetve formákat létrehozni, és amelyek különböző morfogén esetekben is helytállóak lehetnek.

A sejtosztódás a megtermékenyítés után kezdődik meg. Elégendő sejtosztódás után a növekedő embrióban a legfontosabb kérdés, hogy hogyan oszlik el a homogén sejt tömeg és a növekedési folyamat hogyan zajlik. Biológiai értelemben a sejtek megkülönböztetődnek, attól függően, hogy a szervezetben hol helyezkednek el.

A kémiai mintázat szempontjából az embriológia a növekedés folyamatát több lépésre bontja fel: a legelső lépés a morfogén koncentráció kialakítása. A morfogén egy olyan kémiai anyag amely az alakfejlődésben vesz részt. A helyzeti információ a kémiai előírás alapján alakul, vagyis egy sejt a kémiai koncentrációból tudja kiolvasni a helyét és elválni, hogy alkalmas alakváltozáson menjen keresztül, vagy annak megfelelően helyet változtasson. Így, ha a mintázat megalapozott, az alakfejlődés már egy előírt folyamat. A dolgozat reakció-diffúzió modellekkel foglalkozik, mint lehetséges biológiai mintázatok kialakító mechanizmussal. Az alap gondolat, hogy az alakfejlődésben reakció diffúzió játszik szerepet Turingtól (1952) származik.



# 1. fejezet

## Reakció-diffúzió

### 1.1. Az egyenlet

Legyen  $V \subset \mathbb{R}^3$  egy tetszőleges tartomány a térben,  $S = \partial V$ , a  $V$ -t határoló felület. Tételezzük fel, hogy a tartományon belül bizonyos egyedek vannak, és ezek arra áramlanak, amerre kevesebb egyed található. Ekkor  $V$ -ben az egyedek mennyiségének az időben való változása megegyezik az  $S$  határon áramló egyedek és a  $V$ -ben született egyedek összegével. Így felírhatjuk a következő képletet:

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_V c(x, t) \, dx = - \int_S J \, ds + \int_V f \, dx.$$

Itt  $c$  az időtől ( $x$ ) és helytől ( $t$ ) függő koncentrációfüggvény,  $J$  a határon való áramlás, vagyis a fluxus,  $f$  pedig a tartományon belül született új egyedek számát jelöli, ami függhet  $c$ -től,  $x$ -től és  $t$ -től. Alkalmazzuk Gauss divergenciatételét a felületi integrálra:

$$(1.2) \quad \int_S J \, ds = \int_V \nabla \cdot J \, dx.$$

Ezt felhasználva és feltéve, hogy  $c$  folytonos függvény, kapjuk:

$$(1.3) \quad \int_V \left[ \frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot J - f(c, x, t) \right] dx = 0.$$

Mivel feltevésünk szerint  $V$  tetszőleges lehet, az integrandusnak 0-nak kell lennie. Így felírható  $c$ -re a következő egyenlet:

$$(1.4) \quad \frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot J = f(c, x, t).$$



Ez még bármilyen fluxusra igaz, de mi most diffúziót tételezünk fel (vagyis, hogy az egyedek az alacsonyabb koncentrációjú tartomány felé áramlanak). Így  $J = -D\nabla c$ , ahol  $D$  függhet  $x$ -től és  $c$ -től. Ezzel az utóbbi egyenletünket így írhatjuk fel:

$$(1.5) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = f(c, x, t) + \nabla \cdot (D\nabla c).$$

Most tegyük fel, hogy több egyed vagy kémiai anyag van egymással kölcsönhatásban. Legyen  $u = (u_1(x, t) \ u_2(x, t) \ \dots \ u_m(x, t))$  vektor, ahol  $u_i(x, t)$ ,  $i = 1 \dots m$  a különböző egyedek koncentrációja, mindegyik a saját  $D_i$  diffúziós együtthatójával, amik  $f$ -től függően viselkednek. Ekkor az (1.5) egyenlet így alakul:

$$(1.6) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = f + \nabla \cdot (D\nabla u).$$

Ahol  $D$  a diffúziós együtthatókból alkotott mátrix, ha nincsen az egyedek között keresztbe áramlás, akkor diagonális. Mivel itt  $\nabla u$  egy tenzor,  $\nabla \cdot (D\nabla u)$  vektor lesz.

## 1.2. Reakció-diffúzió mechanizmusok

Turing javasolta először, hogy bizonyos körülmények között kémiai anyagok tudnak úgy reagálni és diffundálni, hogy azzal kémiai vagy morfogén jellegű helyi heterogén térbeli mintázatot alakítsanak ki.

Tekintsük a következő alakban az előző részben levezetett egyenletet:

$$(1.7) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = f(c) + D\nabla^2 c,$$

ahol  $c$  a morfogén koncentrációt tartalmazó vektor,  $f$  a reakcióban fellépő mozgás, és  $D$  a pozitív konstans diffúziós együtthatókat tartalmazó diagonális mátrix. A dolgozat két kémiai anyagra felírt modellel fog foglalkozni, legyenek ezek  $A(r, t)$  és  $B(r, t)$ . Ekkor az egyenletrendszer:

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= F(A, B) + D_A \nabla^2 A, \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= G(A, B) + D_B \nabla^2 B, \end{aligned}$$

ahol  $F$  és  $G$  a mozgás, sosem lineárisak.

Bizonyos skálázásbeli változtatásokkal és új változók bevezetésével minden reakció-

diffúziós rendszert fel lehet írni a következő általános alakban:

$$(1.9) \quad \begin{aligned} u_t &= \gamma f(u, v) + \nabla^2 u, \\ v_t &= \gamma g(u, v) + d \nabla^2 v, \end{aligned}$$

Ehhez tekintsük az egyenletet a következő alakban:

$$(1.10) \quad \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u, v) \\ g(u, v) \end{pmatrix} + \nabla^2 \begin{pmatrix} D_1 u \\ D_2 v \end{pmatrix},$$

Tegyük fel, hogy  $x \in [0, L]$ , legyen  $y = \frac{x}{L}$ . Ekkor  $y \in [0, 1]$  és:

$$(1.11) \quad \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u, v) \\ g(u, v) \end{pmatrix} + \frac{1}{L^2} \nabla^2 \begin{pmatrix} D_1 u(y(x), t) \\ D_2 v(y(x), t) \end{pmatrix}.$$

Az egyenletet szorozva  $\frac{L^2}{D_1}$ -el:

$$(1.12) \quad \frac{L^2}{D_1} \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \frac{L^2}{D_1} \begin{pmatrix} f(u, v) \\ g(u, v) \end{pmatrix} + \nabla^2 \begin{pmatrix} u(y(x), t) \\ \frac{D_2}{D_1} v(y(x), t) \end{pmatrix}.$$

$t^* := \frac{D_1 t}{L^2}$ ,  $d := \frac{D_2}{D_1}$  és  $\gamma := \frac{L^2}{D_1}$ . Ezeket felhasználva megkapjuk (1.9)-et:

$$(1.13) \quad \begin{pmatrix} u_{t^*} \\ v_{t^*} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} f(u, v) \\ g(u, v) \end{pmatrix} + \nabla^2 \begin{pmatrix} u \\ dv \end{pmatrix}.$$

$d$  a diffúziós együtthatók aránya és  $\gamma$ -nak háromféle jelentése lehet:

- $\gamma^{\frac{1}{2}}$  a tartomány egydimenziós mértékével arányos, míg  $\gamma$  a kétdimenziós területtel.
- $\gamma$  a reakcióban résztvevő anyagok relatív erősségét is jelentheti.
- $\gamma$  növekedésére gondolhatunk úgy, mint  $d$  csökkenésére.

### 1.3. Stabilitás vizsgálat

Egy reakció-diffúzió rendszer akkor okoz diffúzió okozta instabilitást, vagy Turing instabilitást, ha a homogén egyensúlyi pont stabil kis zavarásokra ha nincs diffúzió, míg instabil kis helyi zavarásokra, ha diffúzió van jelen. Tehet a kialakult helyi mintázatot diffúzió okozza. Ebben a szakaszban levezetjük a szükséges és elégséges

feltételeket a diffúzió okozta instabilitáshoz valamint a kialakuló mintázat alapjait az alarendszer esetében.

Tekintsük a következő feladatot:

$$(1.14) \quad \begin{aligned} u_t &= \gamma f(u, v) + \nabla^2 u, & v_t &= \gamma g(u, v) + d\nabla^2 v, \\ (n \cdot \nabla) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= 0, & r \in \partial B, & \quad u(r, 0) \text{ és } v(r, 0) \text{ adottak} \end{aligned}$$

ahol  $\partial B$  a zárt határa a  $B$  tartománynak, ahol a reakció-diffúziós rendszert értelmezzük.  $n$  a normális egységvektora  $\partial B$ -nek. Minket a mintázat önfejlődése érdekel ezért 0 fluxussal a külső behatásokat kizárjuk. Most levezetjük ehhez a feladathoz a mintázatképződéshez szükséges feltételeket.

Tekintsük az  $(u_0, v_0)$  egyensúlyi pontot, amely megoldása az  $f(u, v) = 0$ ,  $g(u, v) = 0$  egyenleteknek. Ennek az egyensúlyi pontnak a lineáris stabilitására vagyunk kíváncsiak, ami csakis a helytől függ. Vagyis, ha nincs semmilyen helybéli változás, az egyensúlyi pontnak stabilnak kell lennie. Most az ehhez szükséges feltételeket vezetjük le.

Ha nincs helyzeti változás, akkor  $u$  és  $v$  kielégíti a következő egyenleteket:

$$(1.15) \quad u_t = \gamma f(u, v), \quad v_t = \gamma g(u, v)$$

Linearizálnunk kell  $(u_0, v_0)$  egyensúlyi pont körül. Ehhez legyen

$$(1.16) \quad w = \begin{pmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{pmatrix}$$

és  $J$  a Jacobi-mátrix az  $(u_0, v_0)$  pontban, vagyis:

$$(1.17) \quad J = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}_{(u_0, v_0)}.$$

Ekkor  $(u_0, v_0)$  kicsi környezetében, vagyis elég kicsi  $|w|$ -re fennáll a következő egyenlet:

$$(1.18) \quad w_t = \gamma J w$$

Ez már egy lineáris egyenlet, aminek az általános megoldását  $w = r e^{\lambda t}$  alakban keressük, ahol  $\lambda$  sajátérték és  $r$  a hozzá tartozó sajátvektor. Tudjuk, hogy a  $w = 0$

egyensúlyi pont lineárisan stabil, ha  $Re\lambda < 0$ , mivel ekkor  $w \rightarrow 0$ , ha  $t \rightarrow \infty$ . Tehát (1.18) így írható:

$$(1.19) \quad \lambda r e^{\lambda t} = \gamma J r e^{\lambda t}.$$

Egyszerűsítve  $e^{\lambda t}$ -vel:

$$(1.20) \quad \lambda w = \gamma J w.$$

Ebből kapjuk a következő sajátérték-problémát:

$$(1.21) \quad 0 = |\gamma J - \lambda I|$$

$$|\gamma J - \lambda I| = \begin{vmatrix} \gamma f_u - \lambda & \gamma f_v \\ \gamma g_u & \gamma g_v - \lambda \end{vmatrix} = (\gamma f_u - \lambda)(\gamma g_v - \lambda) - \gamma^2 f_v g_u = 0$$

$$(1.22) \quad \Rightarrow \lambda^2 - \gamma(f_u + g_v)\lambda + \gamma^2(f_u g_v - f_v g_u) = 0.$$

Ebből a másodfokú egyenlet megoldóképletébe behelyettesítve kapjuk, hogy

$$(1.23) \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\gamma \left[ (f_u + g_v) \pm \left\{ (f_u + g_v)^2 - 4(f_u g_v - f_v g_u) \right\}^{\frac{1}{2}} \right].$$

Tehát  $Re\lambda < 0$  biztosan, ha

$$(1.24) \quad Tr J = f_u + g_v < 0, \quad |J| = f_u g_v - f_v g_u > 0.$$

Mivel  $u_0$  és  $v_0$  a mozgási paraméterek függvényei, a fenti két egyenlőtlenséggel megszorításokat kaptunk ezekre. Bár  $Tr J$  és  $|J|$  bármilyen előjelű lehet, számunkra csak ez az egy lehetőség érdekes.

Most foglalkozzunk a teljes diffúziós rendszerrel és linearizáljuk ezt is az egyensúlyi pont körül, ami az előbbi  $w$ -vel a  $w = 0$  pont. Így az egyenletünk:

$$(1.25) \quad w_t = \gamma J w + D \nabla^2 w, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

Ahhoz, hogy meg tudjuk oldani ezt az egyenletet a peremfeltételekkel, először meg kell oldanunk a sajátérték-feladatot. Tehát legyen  $W(r)$  az időtől ( $t$ ) független megoldása a következő sajátérték-feladatnak:

$$(1.26) \quad \nabla^2 W + k^2 W = 0, \quad (n \cdot \nabla) W = 0, \quad \text{ha } r \in \partial B,$$

ahol  $k$  sajátérték. Például egydimenzióban az egyenlet  $\ddot{W} = -k^2W$ . Ha mondjuk  $0 \leq x \leq a$ , akkor a megoldás  $W = \alpha \cos(\frac{n\pi x}{a})$  alakú, ahol  $n$  egész szám. Ez kielégíti a peremfeltételeket  $x = 0$  és  $x = a$  esetén. A sajátérték  $k = \frac{n\pi}{a}$ , és  $\frac{1}{k} = \frac{a}{n\pi}$  a mértékegysége a hullám-szerű mintának. A  $k$  sajátértéket hullámszámnak (wavenumber) szokás nevezni és  $\frac{1}{k}$  a  $w_c$  hullámhosszal (wavelength) arányos. Ebben a példában  $w_c = \frac{2\pi}{k} = \frac{2a}{n}$ .

Legyen  $W_k(r)$  a  $k$  sajátértékhez tartozó sajátfüggvény. Korlátos tartományt tételeztünk fel, így a sajátértékproblémának véges sok sajátértéke és sajátfüggvénye van, amelyek teljes orthonormált rendszert alkotnak. Az (1.25) feladat  $w(r, t)$  megoldásait Fourier-sorba fejtve keressük:

$$(1.27) \quad w(r, t) = \sum_k c_k e^{\lambda t} W_k(r),$$

ahol  $c_k$  a  $W_k(r)$ -hez tartozó Fourier-együttható,  $\lambda$  sajátérték. Írjuk vissza a megoldást az egyenletrendszerbe, ekkor minden  $k$ -ra fennáll:

$$(1.28) \quad c_k \lambda e^{\lambda t} W_k = \gamma J c_k e^{\lambda t} W_k + D \nabla^2 c_k e^{\lambda t} W_k.$$

$c_k e^{\lambda t}$ -vel egyszerűsítve:

$$(1.29) \quad \lambda W_k = \gamma J W_k + D \nabla^2 W_k.$$

$k$  sajátértéke  $W_k$  sajátfüggvénynek, így

$$(1.30) \quad \lambda W_k = \gamma J W_k + D k^2 W_k.$$

$W_k$ -ra nemtriviális megoldást várunk el, így  $\lambda$ -t megkaphatjuk a karakterisztikus polinom gyökeiből:

$$(1.31) \quad |\lambda I - \gamma J + D k^2| = 0.$$

Írjuk be  $J$  és  $D$  helyébe a mátrixukat:

$$(1.32) \quad 0 = \begin{vmatrix} \lambda - \gamma f_u + k^2 & -\gamma f_v \\ -\gamma g_u & \lambda - \gamma g_v + dk^2 \end{vmatrix} = (\lambda - \gamma f_u + k^2)(\lambda - \gamma g_v + dk^2) - \gamma^2 f_v g_u$$

$\lambda$ -ra rendezve:

$$(1.33) \quad 0 = \lambda^2 + \lambda[k^2(d+1) - \gamma(g_v + f_u)] + h(k^2),$$

$$(1.34) \quad h(k^2) = dk^4 - \gamma(df_u + g_v)k^2 + \gamma^2(f_u g_v - f_v g_u).$$

$(u_0, v_0)$  egyensúlyi pont akkor lesz lineárisan stabil, ha a fenti másodfokú egyenlet  $\lambda$  megoldására  $Re\lambda < 0$ . Már megoldottuk azt az esetet, amikor nincs semmilyen helybeli változás, ekkor  $Re\lambda(k^2 = 0) < 0$ . Erre az esetre a feltételek (1.25)-ben találhatóak. Ahhoz, hogy az egyensúlyi pont instabillá váljon valamilyen helybeli változásra  $Re\lambda(k) > 0$  szükséges valamilyen  $k \neq 0$  mellett. Ez lehetséges, ha  $\lambda$  együtthatója negatív, vagy ha  $h(k^2) < 0$  valamilyen  $k \neq 0$  esetén. Mivel  $g_v + f_u < 0$  szükséges és  $k^2(d+1) > 0$  bármilyen  $k \neq 0$ -ra, ezért  $\lambda$  együtthatója nem lehet negatív:

$$(1.35) \quad [k^2(d+1) - \gamma(g_v + f_u)] > 0.$$

Vagyis ahhoz, hogy  $Re\lambda(k) > 0$  legyen, az egyetlen lehetőség, hogy  $h(k^2) < 0$ ,  $k \neq 0$ . Ez rögtön látható az másodfokú egyenlet megoldásából is:

$$(1.36) \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ - \left( k^2(d+1) - \gamma(g_v + f_u) \right) \pm \left\{ \left[ k^2(d+1) - \gamma(g_v + f_u) \right]^2 - 4h(k^2) \right\}^{\frac{1}{2}} \right].$$

Mivel megköveteljük, hogy  $f_u g_v - f_v g_u > 0$ , ezért  $h(k^2)$  csak úgy lehet negatív, ha  $df_u + g_v > 0$ . De azt is megköveteljük, hogy  $f_u + g_v < 0$  legyen, így  $d \neq 1$  esetén  $f_u$ -nak és  $g_v$ -nek ellenkező előjelűnek kell lenniük. Így az eddigi feltételeinkhez hozzá kell vennünk a következőt is:

$$(1.37) \quad df_u + g_v > 0 \Rightarrow d \neq 1.$$

Ez egy szükséges de nem elégséges feltétel ahhoz, hogy  $Re\lambda(k) > 0$  legyen. Ahhoz, hogy  $h(k^2)$  negatív legyen valamilyen  $k$ -ra,  $h_{min} < 0$  szükséges. Ehhez deriváljuk le  $h(k^2)$ -et  $k^2$  szerint:

$$(1.38) \quad h'(k^2) = d2k^2 - \gamma(df_u + g_v).$$

Ebből kapjuk, hogy a minimumhely:

$$(1.39) \quad k^2 = \frac{\gamma(df_u + g_v)}{2d}.$$

Ezt  $h$ -ba visszaírva megkapjuk a minimumértéket:

$$(1.40) \quad h_{min} = d \frac{\gamma^2 (df_u + g_v)^2}{4d^2} - \gamma (df_u + g_v) \frac{\gamma (df_u + g_v)}{2d} + \gamma^2 (f_u g_v - f_v g_u) = \gamma^2 \left[ |J| - \frac{(df_u + g_v)^2}{4d} \right].$$

Ezzel egy újabb feltételt kaptunk arra, hogy  $h(k^2) < 0$  legyen valamilyen  $k \neq 0$ -ra:

$$(1.41) \quad \frac{(df_u + g_v)^2}{4d} > |J|.$$

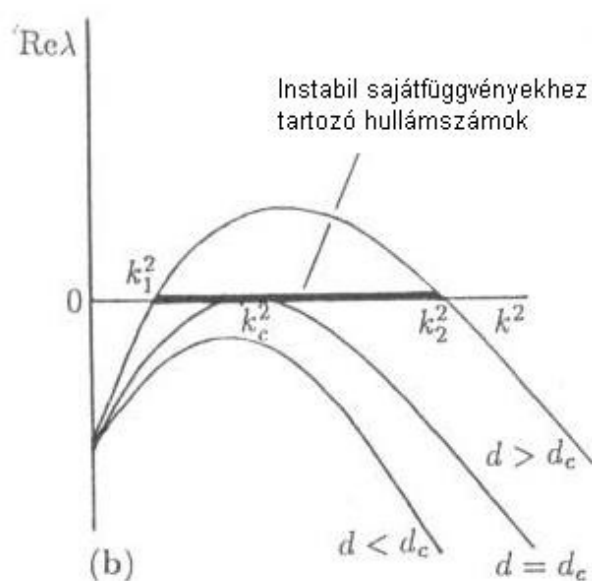
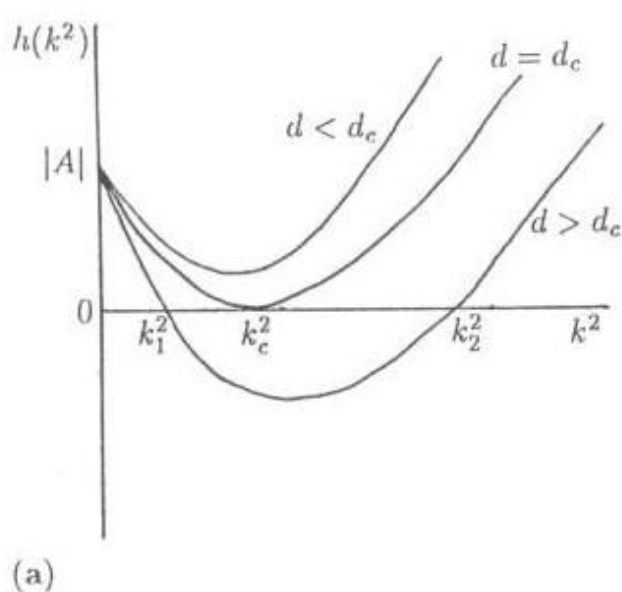
$h_{min} = 0$  pontosan akkor, ha  $\frac{(df_u + g_v)^2}{4d} = |J|$ . Ez azt jelenti, hogy adott mozgási paraméterek meghatároznak egy  $d_c$  kritikus diffúziós együtthatót:

$$(1.42) \quad |J| = f_u g_v - f_v g_u = \frac{d_c^2 f_u^2 + 2d_c f_u g_v + g_v^2}{4d_c}$$

$$(1.43) \quad d_c^2 f_u^2 + 2(2f_v g_u - f_u g_v) d_c + g_v^2 = 0.$$

Valamint ezek az együtthatók  $k_c$  kritikus hullámszám értékét is meghatározzák:

$$(1.44) \quad k_c^2 = \gamma \frac{d_c f_u + g_v}{2d_c} = \gamma \left[ \frac{|J|}{d_c} \right]^{\frac{1}{2}} = \gamma \left[ \frac{f_u g_v - f_v g_u}{d_c} \right]^{\frac{1}{2}}.$$



Minden olyan  $k$ -ra, amelyre  $h(k^2) < 0$   $\lambda$  pozitív lesz. Valamint minden  $d > d_c$ -re az instabil hullámszámok összessége  $h(k^2)$  két gyöke,  $k_1$  és  $k_2$  között helyezkedik el:

$$(1.45) \quad k_1^2 = \gamma \frac{(f_u + g_v) - \sqrt{(f_u + g_v)^2 - 4d|J|}}{2d} < k^2 < \gamma \frac{(f_u + g_v) + \sqrt{(f_u + g_v)^2 - 4d|J|}}{2d} = k_2^2.$$

$\lambda = \lambda(k^2)$ -et szóráskapcsolatnak (dispersion relation) nevezzük.  $d > d_c$  esetén az instabil hullámszámokra  $Re\lambda(k^2) > 0$  maximuma  $k_m^2 = \frac{\gamma(df_u + g_v)}{2d}$ -ben van.

Visszatérve  $w(r, t)$  megoldásra, a lényeges tagok azok, amikor  $Re\lambda(k^2) > 0$ , ugyanis  $t$  növekedésével csak ezek nem tartanak 0-hoz exponenciálisan. Tehát azokhoz a hullámszámokhoz tartozó sajátfüggvények érdekesek, melyekre  $k_1^2 < k^2 < k_2^2$ . Vagyis a megoldásunk elég nagy  $t$  esetén így írható:

$$(1.46) \quad w(r, t) \sim \sum_{k_1}^{k_2} c_k e^{\lambda(k^2)t} W_k(r).$$

Fontos megjegyeznünk, hogy véges tartományban vagyunk, így a sajátérték-problémának is csak véges sok sajátértéke van. Vagyis a hullámszámok egy diszkrét sorozatot alkotnak, így csak bizonyos  $k$ -kra érdekes a megoldás.

A kulcs feltevés az, hogy a megoldásban a lineárisan instabil sajátfüggvények egy ideig exponenciálisan nőnek, majd a reakció-diffúziós rendszer nemlineáris tagjainak hatására ez a növekedés hirtelen megszakad, ezzel egy végső, helyzetileg inhomogén egyensúlyi pontot kialakítva. A feltevésünkben lényeges szerepet játszik, hogy az együttthatók végesek.

## 1.4. Szóráskapcsolat

Helyi mintázat kialakulásához két tulajdonságnak egyszerre kell teljesülnie, nevezetesen:

1. az egyensúlyi pontnak kis zavarásra stabilnak kell lennie, vagyis minden  $\lambda(k^2)$ -re  $\lambda(k^2 = 0) < 0$  kell, hogy legyen;
2. csak bizonyos  $k$  hullámszámokra kezdhet el mintázat nőni, amikor is  $\lambda(k^2 \neq 0) > 0$ .



Ezeket a feltételeket a szóráskapcsolat magában hordozza  $(\lambda, k^2)$  illetve  $(\lambda, w^2)$  formájában. A második tulajdonság magában foglalja azt is, hogy ha a helyi zavarás mintázathoz tartozó  $k$  nagy, akkor a zavaráshoz tartozó hullámhossz túl kicsi, így az egyensúlyi pont újra stabil lesz. Ebből következően a szóráskapcsolat egyből megadja a különböző méretű mintázatok növekedésének kezdő mértékét, avagy hanyatlását. Mivel a lineáris sajátérték feladat megoldásai koszinuszokból és szinuszból állnak, a különböző helyi mintázatok mérete a trigonometrikus függvények hullámhosszaiban mérhető. Így egydimenzióban a növekedő mintázat vizsgálata leredukálódik arra, hogy mennyi hullám fér bele a tartományba. Kétdimenzióban is hasonló a feladat, csak ott figyelni kell arra is, hogy a hullámok hogyan helyezkednek el együtt. A szóráskapcsolat görbéje megmutatja, hogy egy mintázat nő-e, és ha igen, akkor mekkora lesz a mérete. A görbe két nélkülözhetetlen jellemzője:

1.  $(k = 0, w = \infty)$  helyen stabil, vagyis a nagyon nagy hullámszámhoz tartozó hullámok növekedése negatív.
2. a hullámhosszoknak csak kis halmaza tud nőni, ezek közül van egy ami a leggyorsabban nő, az ami legközelebb van a görbe csúcsához.

Általában a rendszer paramétereit közül egyet változtatunk addig, amíg el nem éri a görbe a kívánt alakot. A kritikus  $k_c$  értéket, ami mellett még van instabil megoldás, már megadtuk  $d = d_c$  mellett (1.44)-ben. Ekkor van egy kritikus hullámhossz is:

$$(1.47) \quad w_c = \frac{2\pi}{k_c} = 2\pi \left[ \frac{d_c}{\gamma^2(f_u g_v - f_v g_u)} \right]^{\frac{1}{4}}, \quad k_c = \left[ \gamma \left[ \frac{f_u g_v - f_v g_u}{d_c} \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

## 2. fejezet

# A Schnakenberg-reakció

Ebben a fejezetben a Schnakenberg-reakció néven ismert reakció-diffúziós rendszerrel fogunk foglalkozni. Levezetjük a hozzá tartozó stabilitás-vizsgálatot először egy-, majd kétdimenzióban, valamint bővebben foglalkozunk a szóráskapcsolattal.

### 2.1. A Schnakenberg-reakció

Az egydimenziós Schnakenberg-rendszer a következő:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} u_t &= \gamma f(u, v) + u_{xx} = \gamma(a - u + u^2v) + u_{xx}, \\ v_t &= \gamma g(u, v) + dv_{xx} = \gamma(b - u^2v) + dv_{xx}. \end{aligned}$$

Az egyenlet nullklináit az  $f(u, v) = 0$  és  $g(u, v) = 0$  egyenletek megoldásaiból kapjuk. Nevezetesen:

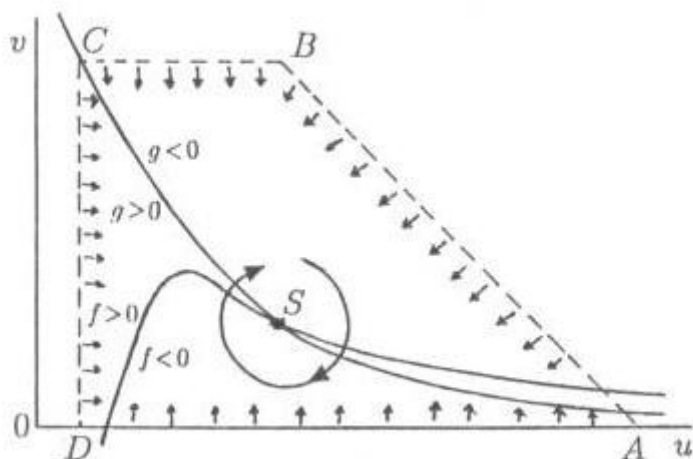
$$(2.2) \quad v_1 = \frac{u - a}{u^2}, \quad v_2 = \frac{b}{u^2}.$$

Az  $(u_0, v_0)$  pozitív egyensúlyi pont pedig:

$$(2.3) \quad u_0 = a + b, \quad v_0 = \frac{b}{(a + b)^2}, \quad b > 0, \quad a + b > 0.$$

Ekkor az egyensúlyi pontban a parciális deriváltak:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} f_u(u, v) = -1 + 2uv &\Rightarrow f_u(u_0, v_0) = -1 + 2\frac{b}{a + b} = \frac{b - a}{a + b}, \\ f_v(u, v) = u^2 &\Rightarrow f_v(u_0, v_0) = (a + b)^2, \\ g_u(u, v) = -2uv &\Rightarrow g_u(u_0, v_0) = -2\frac{b}{a + b}, \\ g_v(u, v) = -u^2 &\Rightarrow g_v(u_0, v_0) = -(a + b)^2. \end{aligned}$$



Az előző fejezet harmadik szakaszában levezettük a helyi mintázat kialakulásához szükséges feltételeket az  $(u_0, v_0)$  egyensúlyi pont körül. Ezek most a következő feltételeket adják a paraméterekre:

$f_u$  és  $g_v$  különböző előjelű, ha  $b > a$ .

(2.5)

$$\begin{aligned} f_u g_v - f_v g_u &= (a + b)^2 > 0, \\ f_u + g_v < 0 &\Rightarrow 0 < b - a < (a + b)^3, \\ df_u + g_v > 0 &\Rightarrow d(b - a) > (a + b)^3, \\ (df_u + g_v)^2 - 4d(f_u g_v - f_v g_u) > 0 &\Rightarrow [d(b - a) - (a + b)^3]^2 > 4d(a + b)^4. \end{aligned}$$

Az ezekkel az egyenlőtlenségekkel meghatározott  $(a, b, d)$  paramétertartományt nevezük Turing-tartománynak (Turing-space). Ezen a tartományon belül lesz a rendszer instabil bizonyos zavarásokra adott  $k$  hullámszámok mellett.

Tekintsük most a feladathoz tartozó sajátérték-problémát, ha  $0 < x < p$ :

$$(2.6) \quad W_{xx} + k^2 W = 0, \quad W_x = 0, \quad \text{ha } x = 0, p$$

Ennek a megoldásai

$$(2.7) \quad W_n(x) = A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

ahol  $A_n$ -ek tetszőleges konstansok.  $k = \frac{n\pi}{p}$  sajátértékek a diszkrét hullámszámok,  $w = \frac{2\pi}{k} = \frac{2p}{n}$  pedig a hozzájuk tartozó hullámhosszok. Minden olyan  $k$ -ra, melyre

(1.45) teljesül, a hozzá tartozó  $W_n$  sajátfüggvény lineárisan instabil lesz, és  $t$ -vel együtt  $\exp\left\{\lambda\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 t\right\}$  gyorsasággal fog nőni.

A megfelelő hullámszámokat a következő egyenlőtlenségekkel határozhatjuk meg:

(2.8)

$$\begin{aligned} \gamma L(a, b, d) = k_1^2 < k^2 = \left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 < k_2^2 = \gamma M(a, b, d), \quad \text{ahol} \\ L(a, b, d) = \frac{1}{2d(a+b)} \left[ d(b-a) - (a+b)^3 - \sqrt{(d(b-a) - (a+b)^3)^2 - 4d(a+b)^4} \right] \\ M(a, b, d) = \frac{1}{2d(a+b)} \left[ d(b-a) - (a+b)^3 + \sqrt{(d(b-a) - (a+b)^3)^2 - 4d(a+b)^4} \right]. \end{aligned}$$

$W_n$  instabilitásához a szükséges hullámhosszok:

$$(2.9) \quad \frac{4\pi^2}{\gamma L(a, b, d)} = w_1^2 > w^2 = \left(\frac{2p}{n}\right)^2 > w_2^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M(a, b, d)}.$$

Érdeemes észrevenni, hogy  $\gamma$  mennyire fontos szerepet tölt be: a legkisebb hullámszám  $\frac{\pi}{p}$ , amit  $n = 1$  esetben kapunk. Ez azt jelenti, hogy adott  $(a, b, d)$  paraméterek esetén, ha  $\gamma$  elég kicsi, akkor nincs hullámszám a megengedett tartományban. Vagyis nincs olyan  $W_n$  sajátfüggvény, ami instabil volna. Ebből következően minden  $w(r, t)$  megoldás exponenciálisan tart a 0-hoz és az egyensúlyi pont stabil.

Tehát az eredeti rendszer megoldásai:

$$(2.10) \quad w(r, t) \sim \sum_{n_1}^{n_2} C_n \exp\left\{\lambda\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 t\right\} \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)$$

alakúak.  $\lambda$  adott, (1.33) pozitív megoldása.  $n_1$  a legkisebb olyan egész, amely nagyobb vagy egyenlő  $\frac{pk_1}{\pi}$ -vel,  $n_2$  pedig a legnagyobb olyan egész, amely kisebb vagy egyenlő  $\frac{pk_2}{\pi}$ -vel.  $C_n$ -ek a megfelelő (nem nulla) Fourier-együtthatók.

Most térjünk át a kétdimenziós rendszerre, ahol a tartományunk:  $0 < x < p$ ,  $0 < y < q$ , a határa pedig  $\partial B$ . A sajátérték-probléma így alakul:

$$(2.11) \quad \nabla^2 W + k^2 W = 0, \quad (n \cdot \nabla) W = 0 \quad \text{ha} \quad (x, y) \in \partial B,$$

a sajátfüggvények pedig:

$$(2.12) \quad W_{p,q}(x, y) = C_{n,m} \cos\frac{n\pi x}{p} \cos\frac{m\pi y}{q},$$

ahol  $n$  és  $m$  egész számok. A kétdimenziós lineárisan instabil megoldások azok a  $W_k(x, y)$  függvények, melyekre a  $k$  hullámszám

$$(2.13) \quad k^2 = \pi^2 \left( \frac{n^2}{p^2} + \frac{m^2}{q^2} \right)$$

alakú, és benne fekszik az  $a, b, d$  paraméterek által meghatározott tartományban. Tegyük fel, hogy  $\gamma$  olyan nagy, hogy van legalább egy hullámszám, amihez tartozik megfelelő sajátfüggvény. Ekkor az instabil megoldása a rendszernek:

$$(2.14) \quad w(x, y, t) \sim \sum_{n,m} C_{n,m} \exp\left\{\lambda(k^2)t\right\} \cos\frac{n\pi x}{p} \cos\frac{m\pi y}{q},$$

$$\gamma L(a, b, d) = k_1^2 < k^2 = \pi^2\left(\frac{n^2}{p^2} + \frac{m^2}{q^2}\right) < k_2^2 = \gamma M(a, b, d).$$

A szumma minden olyan  $(n, m)$  párra értendő, amelyek kielégítik az egyenlőtlenséget,  $L$  és  $M$  pedig ugyanúgy vannak definiálva, mint az egydimenziós esetben,  $\lambda(k^2)$  pedig ugyancsak a pozitív megoldása (1.33)-nak.  $t$  növekedésével egy helyi mintázat alakul ki, amit  $w(x, y, t)$  hoz létre.

## 2.2. Szóráskapcsolat

A Schnackenberg-reakcióban 4 paraméter van: a két mozgási paraméter  $a$  és  $b$ , a diffúziós együttható  $d$ , valamint  $\gamma$  a skálázás paramétere. A továbbiakban meghatározzuk a paramétertartományt.  $a, b$  és  $d$ -re már megadtuk a feltételeket (2.5)-ben ahhoz, hogy helyi mintázat jöhessen létre. Azt is megmutattuk, hogy  $\gamma$  milyen szerepet játszik ebben. A kapott egyenlőtlenségekkel algebrailag meglehetősen nehéz bánni. Tehát közelítsük meg a problémát egy kicsit máshogyan. Legyen  $(u_0, v_0)$  az egyensúlyi pont, és tekintsük  $u_0$ -t egy nemnegatív paraméter-változónak. Ekkor  $v_0$  és  $b$  megadhatóak  $a$  és  $u_0$  segítségével:

$$(2.15) \quad v_0 = \frac{u_0 - a}{u_0}, \quad b = u_0 - a.$$

A parciális deriváltakat az egyensúlyi pontban ekkor így írhatjuk:

$$(2.16) \quad \begin{aligned} f_u &= -1 + 2u_0v_0 = 1 - \frac{2a}{u_0}, & f_v &= u_0^2, \\ g_u &= -2u_0v_0 = -2\frac{u_0 - a}{u_0}, & g_v &= -u_0^2. \end{aligned}$$

Ezekkel kifejezve a diffúzió-okozta instabilitáshoz szükséges feltételeket, olyan új feltételeket kapunk, amelyek újabb határokat definiálnak a paramétertartományban.

Az első feltétel (2.5)-ből:

$$\begin{aligned}
 f_u + g_v < 0 &\Rightarrow 1 - \frac{2a}{u_0} - u_0^2 < 0, \\
 (2.17) \quad &\Rightarrow a > \frac{u_0(1 - u_0^2)}{2}, \\
 b = u_0 - a < u_0 - \frac{u_0(1 - u_0^2)}{2} &= \frac{u_0(1 + u_0^2)}{2}.
 \end{aligned}$$

Ekkor a határgörbe  $b = \frac{u_0(1+u_0^2)}{2}$ . Ezekkel az egyenlőtlenségekkel az  $(a, b)$  térben meghatároztunk egy tartományt paraméteresen minden  $u_0$  pozitív értékre. Az összes többi egyenlőtlenségre ugyanezt megcsináljuk.

$$(2.18) \quad f_u g_v - f_v g_u > 0 \Rightarrow u_0^2 > 0.$$

Ez minden esetben teljesül.

$$\begin{aligned}
 df_u + g_v > 0 &\Rightarrow d\left(1 - \frac{2a}{u_0}\right) - u_0^2 > 0 \\
 (2.19) \quad &\Rightarrow a < \frac{u_0(d - u_0)}{2d}, \\
 \Rightarrow b = u_0 - a > u_0 - \frac{u_0(d - u_0)}{2d} &= \frac{u_0(d + u_0)}{2d},
 \end{aligned}$$

és a határgörbe  $b = \frac{u_0(d+u_0)}{2d}$ .

$$\begin{aligned}
 (df_u + g_v)^2 - 4d(f_u g_v - f_v g_u) &> 0, \\
 (2.20) \quad \Rightarrow \left(d\left(1 - \frac{2a}{u_0}\right) - u_0^2\right)^2 - 4du_0^2 &> 0 \\
 \Rightarrow [u_0(d - u_0^2) - 2ad]^2 - 4du_0^4 &> 0 \\
 \Rightarrow 4a^2d^2 - 4adu_0(d - u_0^2) + [u_0^2(d - u_0^2)^2 - 4du_0^4] &> 0.
 \end{aligned}$$

Ezzel kaptunk egy másodfokú egyenlőtlenséget  $a$ -ra. Aminek a megoldásai:

$$\begin{aligned}
 (2.21) \quad a_1 &< u_0 \frac{1 - \frac{u_0^2}{d} - \frac{2u_0}{\sqrt{d}}}{2}, \\
 a_2 &> u_0 \frac{1 - \frac{u_0^2}{d} + \frac{2u_0}{\sqrt{d}}}{2}.
 \end{aligned}$$

Ez az egyenlőtlenség így két határgörbét határoz meg:

$$\begin{aligned}
 (2.22) \quad b_1 &= u_0 \frac{1 + \frac{u_0^2}{d} + \frac{2u_0}{\sqrt{d}}}{2}, \\
 b_2 &= u_0 \frac{1 + \frac{u_0^2}{d} - \frac{2u_0}{\sqrt{d}}}{2}.
 \end{aligned}$$

Ahhoz, hogy  $f_u$  és  $g_v$  különböző előjelűek legyenek  $b > a$  szükséges. A görbék és a közrezárt tartomány paraméteresen meghatároznak egy paramétertartományt, vagy

Turing-tartományt, ahol az egyensúlyi pont diffúzió által instabillá tud válni, ezzel helyi mintázatot létrehozva.

Ezeket a görbéket minden  $u_0$  pozitív értékre értelmezzük adott  $d$  mellett. A Turing-tartományt öt görbe határozza meg, de van olyan, amelyik ugyanazt a görbét definiálja, mint egy másik. Például, mivel  $u_0 > 0$  mindig:

$$(2.23) \quad a_1 < u_0 \frac{1 - \frac{u_0^2}{d} - \frac{2u_0}{\sqrt{d}}}{2} < u_0 \frac{1 - \frac{u_0^2}{d}}{2} = a < \frac{u_0(d - u_0)}{2d}$$

Vagyis ha, (2.21)-ből  $a_1$  teljesül, akkor a (2.19) automatikusan teljesül.

Mivel

$$(2.24) \quad u_0 \frac{1 - \frac{u_0^2}{d}}{2} < u_0 \frac{1 - \frac{u_0^2}{d} + \frac{2u_0}{\sqrt{d}}}{2}$$

ezért a (2.19)-nek és (2.21)-ből  $a_2$ -nek nincs közös része.

$d > 1$  miatt

$$(2.25) \quad u_0 \frac{1 - \frac{u_0^2}{d}}{2} > u_0 \frac{1 - u_0^2}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy az (2.17) egyenlőtlenség által meghatározott határvonal (2.19) alatt helyezkedik el: vagyis előbbi kisebb tartományt határol.

Tehát a rendszer Turing-tartományához két paraméteres görbe elegendő:

$$(2.26) \quad \begin{aligned} a &> \frac{u_0(1 - u_0^2)}{2}, & b &= \frac{u_0(1 + u_0^2)}{2}, \\ a &< u_0 \frac{1 - \frac{u_0^2}{d} - \frac{2u_0}{\sqrt{d}}}{2}, & b &= u_0 \frac{1 + \frac{u_0^2}{d} + \frac{2u_0}{\sqrt{d}}}{2} \end{aligned}$$

$d = 1$  esetén a két egyenlőtlenség egymásnak ellentmondó, így nincs Turing-tartomány, vagyis helyi mintázat sehol nem tud kialakulni. Ha  $d > 1$ , akkor van egy kritikus  $d = d_c$  érték, amelytől kezdve a Turing tartomány nő. Például, ha  $a = 0$  és  $b = 1$ , akkor a  $d_c$  értékét ki tudjuk számolni:

$$(2.27) \quad \begin{aligned} d_c^2 f_u^2 + 2(2f_v g_u - f_u g_v) d_c + g_v^2 &= 0. \\ d_c^2 \left(1 - \frac{2a}{u_0}\right)^2 + 2(-3u_0^2 + 2au_0) d_c + u_0^4 &= 0. \end{aligned}$$

Ha  $a = 0$  akkor a megoldás:

$$(2.28) \quad (d_c)_{1,2} = u_0^2(3 \pm 2\sqrt{2})$$

Valamint, ha  $b = 1$ , akkor  $u_0 = 1$ , és így a megoldás  $d_c = 3 + 2\sqrt{2}$ . A tartomány így két felület által van meghatározva az  $(a, b, d)$  térben. Attól, hogy adott  $d$  mellett  $a$  és  $b$  a Turing tartományba esnek, még nem biztos, hogy a rendszer képes mintázatot létrehozni, hiszen a skallázás ( $\gamma$ ) és a rendszer értelmezési tartománya is fontos szerepet játszanak. Előfordulhat az is, hogy a sajátfüggvények nem adnak megengedett megoldást.

## 2.3. Lehetséges mintázatok

Tekintsük az (2.10) és (2.14) által definiált egy-, és kétdimenziós instabil megoldásokat. Ebben a részben levezetjük, hogy milyen mintázatok alakulhatnak ki. Először az egydimenziós esettel foglalkozunk.

Legyen most  $\gamma$  olyan, hogy csak  $n = 1$  esetben legyen hullámszám a (2.8) által definiált tartományban. Ekkor  $w = 2p$  és az egyetlen instabil sajátfüggvény  $\cos\frac{\pi x}{p}$ , az instabil megoldás pedig:

$$(2.29) \quad w(r, t) = C_1 \exp\left\{\lambda\left(\frac{\pi}{p}\right)^2 t\right\} \cos\left(\frac{\pi x}{p}\right),$$

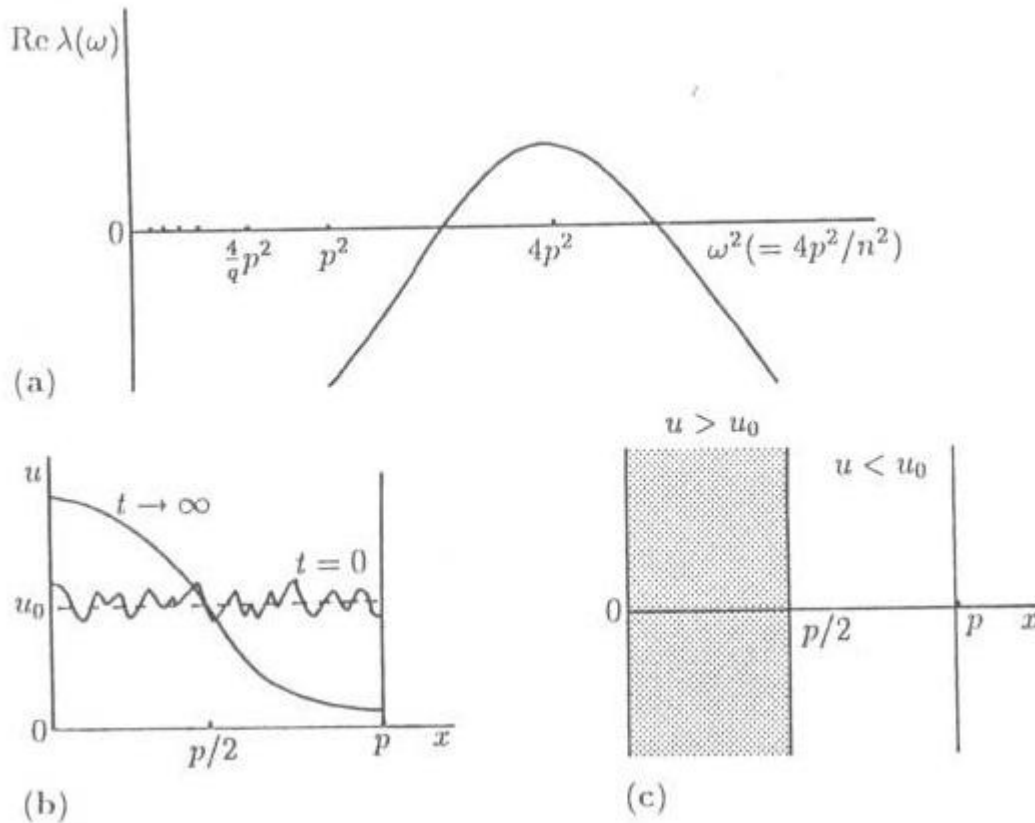
ahol  $\lambda$  a pozitív megoldása (1.33)-nek  $k^2 = \left(\frac{\pi}{p}\right)^2$ -el. Minden más  $n$ -re a sajátfüggvények exponenciálisan tartanak 0-hoz, ha  $t \rightarrow \infty$ .  $C_1$ -et csak a kezdeti feltételekből lehet kiszámítani. Ahhoz, hogy valamennyire meg tudjuk érteni, hogy mi történik vegyük most  $C_1$ -et  $(\varepsilon, \varepsilon)$ -nak valamilyen kicsi  $\varepsilon$ -ra, valamint tekintsük  $u$  morfogént. Ekkor, az utolsó egyenletből, valamit  $w$  definíciójából (1.16)-ből kapjuk:

$$(2.30) \quad u(x, t) \sim u_0 + \varepsilon \exp\left\{\lambda\left(\frac{\pi}{p}\right)^2 t\right\} \cos\left(\frac{\pi x}{p}\right).$$

Ezt az instabil megoldást, ami  $t$  növekedésével növekszik, mutatja az alábbi képen a (b) ábra. A szóráskapcsolat az  $u$  által létrehozott mintázatot jósolja meg, ((a) ábra). A (c) ábrán a sötétebb rész az, ahol  $u$  koncentrációja az egyensúlyi pont felett van, a világosabb rész pedig ahol alatta.

Nyilvánvalóan, ha az exponenciálisan növekedő megoldás minden  $t$ -re érvényes lenne, akkor  $t \rightarrow \infty$  esetén  $u \rightarrow \infty$  is. A mi példánkban a mozgási paraméterek a pozitív negyedre vannak korlátozva, ami a megoldást is korlátozza. Az a feltevésünk,





hogy ez a növekedő megoldás végül egy helyi mintázatot alakít ki, ami hasonlít egy koszinusz görbéhez. Ezt számos numerikus vizsgálat és más analitikus vizsgálatok alátámasztják.

Duplazzuk meg a tartományt. Mivel egydimenzióban  $\sqrt{\gamma}$  arányos a hosszal, így ha  $\gamma$  a mértékegység, akkor a tartomány megduplázása azt jelenti, hogy  $\gamma$ -t négygel szorozzuk. Ez pedig azt jelenti, hogy a szóráskapcsolat és az instabil tartomány is a  $k^2$  illetve  $w^2$  tengelyen mozognak.

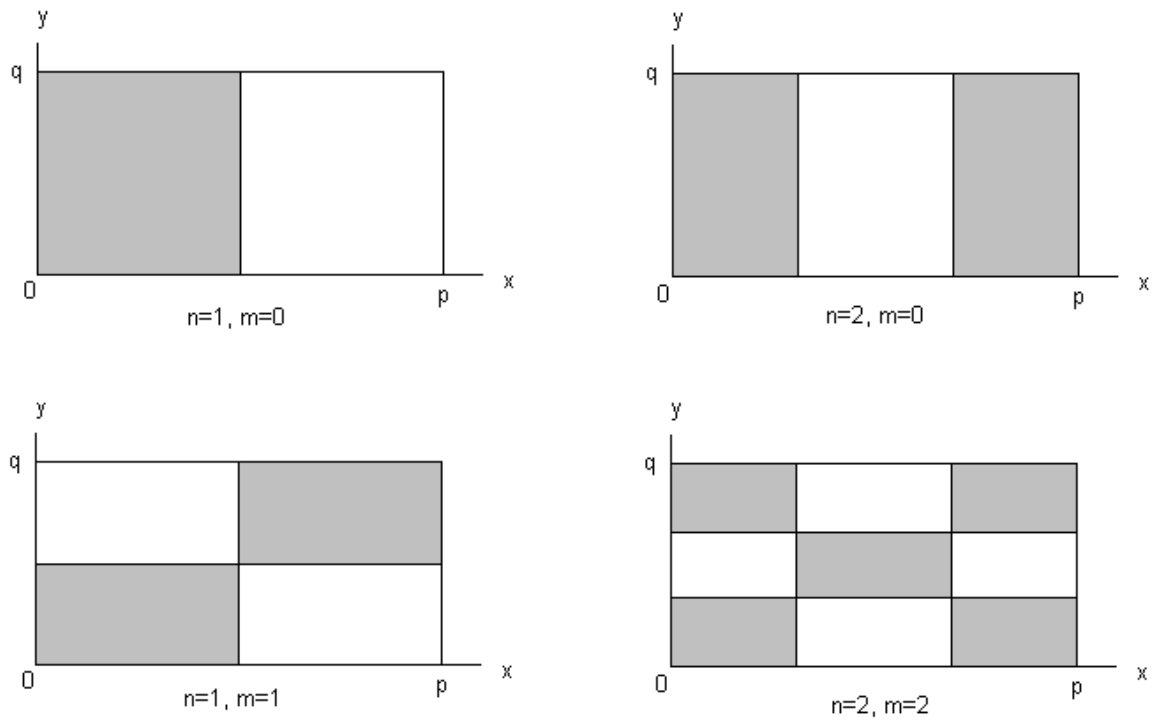
Vegyük az eredeti  $\gamma = \gamma_1$ -et. Ekkor az instabil sajátfüggvényekhez tartozó hullámhosszok :

$$(2.31) \quad \frac{4\pi^2}{\gamma_1 L(a, b, d)} > w^2 > \frac{4\pi^2}{\gamma_1 M(a, b, d)}$$

Újra megduplázva a tartományt, hogy  $\gamma = 4\gamma_1$  legyen, a szóráskapcsolat ugyanúgy néz ki, mint az előző esetben, csak arrébbtolva a  $w^2$  tengelyen, mivel az instabil sajátfüggvények hullámhossza  $w = p$  lesz és  $n=2$ . Ebből is látszik, hogy a tartomány

mérete mennyire befolyásolja a kialakuló mintázatot.

Kétdimenzióban az instabil sajátfüggvények a tartomány hosszúságától ( $p$ ) és szélességétől ( $q$ ) is függenek,  $\gamma$  csak a skálázást határozza meg. Ha  $q$  elég kicsi, vagyis  $m = 1$  kívül esik az instabil tartományon, akkor visszkapjuk az egydimenziós esetet. A szélesség növekedésével már valódi kétdimenziós instabil sajátfüggvények lesznek, mivel  $\pi^2(\frac{n^2}{q^2} + \frac{m^2}{p^2})$  az instabil tartományon belül esik. Néhány lehetséges mintázat az alábbi ábrákon láthatóak különböző  $n$  és  $m$  értékek mellett:





# Irodalomjegyzék

- [1] J.D.Murray, *Mathematical Biology* (1989), 9. és 14.fejezetek
- [2] <http://www2.imperial.ac.uk/~hharring/research/finalpatterns.pdf>