Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

A Black-Scholes parciális differenciálegyenlet

BSc szakdolgozat

Fábián Anikó
Matematika BSc, Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető: Sikolya Eszter, adjunktus
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest, 2012

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

A matematika a hétköznapi élet számos jelenségének leírására is használható. Szakdolgozatom célja, hogy ezen alkalmazási területek egy nagyon kis szegmensébe, a pénzügyi matematikába nyújtsak betekintést, azon belül is az európai típusú opciók árazásába.

Szakdolgozatomban az európai típusú opciók árazására a Black-Scholes formulát használom. Ezen formula levezetésének rengeteg megközelítését olvashatjuk a különböző szakirodalmakban. Ezen számos megközelítési mód közül jelen dolgozatban a Black-Scholes egyenletet mint parciális differenciálegyenletet mutatom be. Az ehhez szükséges matematikai háttér fogalmait a 2. fejezetben írom le. Itt nem csak a parciális differenciálegyenletek alapfogalmait definiálom, de a későbbiekben fontos szerepet játszó hővezetési egyenletet és annak megoldását is bemutatom.

A Black-Scholes formula, mint az az első bekezdésből is kiderül, közgazdaságtanban használt modell. Tehát ahhoz, hogy formulát megértsük, szükségünk van néhány alapvető közgazdaságtani fogalom ismeretére. Ezen fogalmak leírása a 3. fejezetben található, ahol a fogalmak megértését elősegítendő egy egyszerű pénzügyi feladatot is megoldok.

Ezek után a 4. fejezetben, szakdolgozatom főrészében levezetem a Black-Scholes parciális differenciálegyenletet és annak megoldását. A fejezet lezárásaként egy grafikus példa segítségével szemléltetem a kapott eredményeket.

2. fejezet

Matematikai bevezető

2.1. Parciális differenciálegyenlet

Mint azt a bevezetőben is említettük, jelen dolgozatban az európai típusú opciók árazását a Black-Scholes parciális differenciálegyenlettel modellezük. A modell könnyebb megértésének érdekében ebben az alfejezetben röviden összefoglaljuk a parciális differenciálegyenlet legfontosabb alapfogalmait.

2.1.1. Alapfogalmak

2.1.1. Definíció. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény és $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$-beli pont. Rögzítsük az $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ pont koordinátáit az i-edik tag kivételével, és tekintsük a megfelelő*

$$t \mapsto f_i(t) = f(a_1, ..., a_{i-1}, t, a_{i+1}, ..., a_n)$$

szekciófüggvényt. Az így kapott egyváltozós f_i függvény a_i pontban vett deriváltja az f függvény a pontbeli i-edik ***parciális deriváltja****.*
Jelölése: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ vagy $f_{x_i}(a)$ stb.

2.1.2. Definíció. *Az $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}_+{}^n$ vektort* ***multiindexnek*** *nevezzük. Ekkor, ha $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény, jelölje*

$$\partial^\alpha u := \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} ... \partial_n^{\alpha_n} u,$$

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

2.1.3. Definíció. *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartomány (nyílt, összefüggő), $m > 0$ egész, jelölje N az olyan $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ multiindexek számát, amelyekre*

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \leq m.$$

Adott $F : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ függvény. Olyan $u : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényt keresünk, amely m-szer folytonosan differenciálható és $\forall x \in \Omega$ esetén

$$F(x; u(x), \partial u(x), ..., \partial^\alpha u(x), ...) = 0.$$

Ha u eleget tesz ennek, akkor u-t az

$$F \circ (id, u, \partial_1, ..., \partial^\alpha u, ...) = 0$$

parciális differenciálegyenlet megoldásának *nevezzük.*

A parciális differenciálegyenleteket a fizikában is előszeretettel alkalmazzák. Egy ilyen alkalmazás a hővezetési egyenletek, melyeknek egydimenziós változatára a későbbiekben szükségünk lesz, ezért ezzel bővebben is foglalkozunk.

2.1.2. Hővezetési egyenlet

A Black-Scholes parciális differenciálegyenletet a 4. fejezetben addig egyszerűsítjük, míg egy egydimenziós hővezetési egyenlethez jutunk, ld.(2.1). Így most nézzük meg, hogy mi is ez valójában.
A *hővezetés egy dimenzióban* az alábbi modellt jelenti: vékony, homogén rúdban hővezetés játszódik le. Az $u(x, \tau)$ kifejezés jelöli a hőmérsékletet az x helyen, τ időben. Ekkor a hozzá tartozó parciális differenciálegyenlet:

$$u_\tau = u_{xx}, \tag{2.1}$$
$$-\infty < x < \infty, \tau > 0,$$

ahol u_τ az u függvény τ szerinti egyszeres, míg az u_{xx} az x szerinti kétszeres parciális deriváltját jelöli. A kezdeti feltétel:

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

Tegyük fel, hogy $u_0(x)$-nak legfeljebb véges számú szakadása van illetve, hogy a megoldás kielégíti a következő peremfeltételeket:

– $\lim_{|x|\to\infty} u_0(x)e^{-ax^2} = 0$ minden $a > 0$,

– $\lim_{|x|\to\infty} u(x,\tau)e^{-ax^2} = 0$ minden $a > 0$.

Ezen feltételek mellett egyértelmű megoldás létezik.

2.1.4. Definíció. *A hővezetési egyenlet alapmegoldása:*

$$\Phi(x,\tau) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{x^2}{4\tau}} & x \in \mathbb{R}, \tau > 0, \\ 0 & x \in \mathbb{R}, \tau \leq 0. \end{cases}$$

Az alapmegoldás segítségével meghatározhatjuk egy adott kezdeti feltételből kiinduló megoldást.

1. Tétel. *A hővezetési egyenlethez tartozó kezdetiérték-probléma megoldása*

$$\begin{aligned} u(x,\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x-s,\tau) u_0(s) ds = \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|x-s|^2}{4\tau}} u_0(s) ds. \end{aligned} \tag{2.2}$$

3. fejezet

Közgazdaságtani kellékek

A Black-Scholes modell megértéséhez szükségünk van néhány alapvető közgazdaságtani fogalom ismeretére. Ebben a fejezetben nemcsak ezen fogalmak rövid leírása, de egy egyszerű pénzügyi feladat levezetése is megtalálható.

3.1. Fogalmak

[1]Egyik legfontosabb alapfogalmunk az *értékpapír*, mely vagyonnal kapcsolatos jogot testesít meg; formailag forgalomképes okiratként, vagy (az elektonikus értékpiacon) számlán megjelenő összegként. Az értékpapír kibocsátója lehet az államkincstár – a bankrendszeren keresztül (pl. államkötvények), vagy a vállalkozói szféra – a tőzsdén keresztül (pl. részvények). Mivel az értékpapírok nem pusztán árunak tekinthetőek, hanem különleges jogokat is megtestesítenek, ez utóbbiaknak az értékpapíron pontosan szerepelniük kell. Csoportosításuk többféle szempontból történhet.

1. Az *értékpapírban foglalt jog* szerint léteznek követelést, részesedést, valamely áruval kapcsolatos jogot, valamint egyéb jogokat megtestesítő papírok.

2. Az értékapírfajták *az átruházás módja* szerint lehetnek: bemutatóra szóló, névre szóló és forgatható értékpapírok.

3. *Hozamuk* szerint léteznek formailag nem kamatozó, fix kamatozású és változó hozamú értékpapírok. Ez utóbbit nevezik még osztalékpapírnak is. Az utóbbi évtizedekben létrejöttek a fix és a változó kamatozású értékpapírok keverésével átmeneti formák, mint például a változó kamatozású kötvény, az elsőbbségi részvény illetve az opciós kötvény.

[1] Ebben az alfejezteben az [2] irodalom 5. fejezetének egyes részeit követem.

4. Az értékpapírok a *lejáratuk* szerint lehetnek rövid, közép-, hosszú lejáratúak, valamint lejárat nélküliek.

5. *Forgalmazásuk köre* szerint léteznek nyilvános, kizárólag nemzetközi forgalomba szánt, tőzsdén jegyzett ill. tőzsdén nem jegyzett értékpapírok.

6. A *kibocsátó köre* szerint megkülönböztethetünk az állam által valamint jogi személyek által kibocsátott értékpapírokat.

7. *Megjelenési forma* szerint az értékpapír lehet okirati és dematerializált.

Az előzőek során említett két fontos értékpapírfajta a kötvény és a részvény, melyeknek a későbbiekben jelentős szerepük lesz, mivel ezek szolgálnak majd a portfóliónk alapjául. Így velük kicsit részletesebben is foglalkozunk.

Részvény ♦ A részvény vállalatok alapításakor vagy alaptőkéjük emelésekor kibocsátott értékpapír, amely a társaság tőkéjéből a névértéknek megfelelő hányadot testesít meg. Egy adott részvényfajtához tartozó részvényeknek mindig azonos névértékűeknek kell lenniük. A részvényest részvénye névértéke arányában illeti meg a szavazati jog, és így részesedik a társaság eredményéből is osztalék formájában. A vállalati alaptőke csökkenése esetén előfordul, hogy a részvényes tulajdonjoga megszűnik, de osztalékkövetelési joga megmarad. Ekkor számára úgynevezett élvezeti jegyet bocsátanak ki. Több részvénytípus ismeretes.

– A *névre szóló részvény* tulajdonosainak nevét a részvénytársaság részvénykönyvébe bejegyzik, hogy pontosan ismert legyen a tulajdonos vagy tulajdonosok személye.

– Az *elsőbbségi részvények* esetében garantált, meghatározott százalékú osztalékkifizetés történik, de korlátozott szavazati jog áll fenn.

– *Korlátoltan forgalomképes részvény* az ún. *dolgozói részvény*, amely ingyenesen vagy kedvezményes áron szerezhető meg, névre szóló, és csak a vállalat dolgozói, nyugdíjasai között lehet átruházni, továbbá tulajdonosát megilleti az osztalék- és szavazati jog.

Az osztalék, azaz az egy részvényre jutó tiszta nyereség nagyságát a közgyűlés évente meghatározza és a részvénytársaság mindig névértékhez viszonyítva teszi közzé az éves mérlegadatokkal együtt. A részvény árfolyama a tőzsdén általában eltér névértékétől, a részvény keresletének és kínálatának alakulásától függően. A tőzsde résztvevői számára nem a részvényosztalék névértékhez viszonyított aránya, hanem az osztalék és a részvényárfolyam aránya nyújt fontos tájékoztatást, mivel ezen az alapon vethetik össze a tőzsdei befektetők jövedelmezőség szempontjából a különféle részvényeket.

Kötvény ♦ A kötvény fix ill. változó kamatozású, általában hosszabb lejáratú értékpapír, amely szólhat névre és bemutatóra. A kötvény kibocsátója arra vállal kötelezettséget, hogy legkésőbb a lejáratkor a névértéknek megfelelő összeget visszafizeti és az addig esedékes kamatokat kifizeti. A kötvényszelvényre járó kamat kétféle lehet:

– *kamatozó kötvény* esetében a névértékre jutó kamatot a tulajdonosok meghatározott időpontban (évente, félévente, ritkán havonta) megkapják,

– *nyereménykötvény* esetén a kölcsön előre meghatározott kamatának megfelelő összeget nyereményként sorsolják ki a kötvénytulajdosok között.

A kötvény alapvetően hitelviszonyt megtestesítő okirat, tulajdonosa – eltérően a részvény tulajdonosától – sem valóságosan sem formálisan tulajdonossá – így vállalati vagyon felett tulajdonosi jogok gyakorlójává – nem válik. Kivételt képez az úgynevezett *opciós kötvény*. Ez fix – az átlagosnál alacsonyabb – kamatozású, amely a kötvénnyel rendelkező számára jogot biztosít meghatározott időn belül és árfolyamon arra, hogy a kibocsátó társaság részvényét megvásárolja. A változó kamatozású kötvények hozama jobban függ a befektetés jövedelmezőségétől, vagy a piaci kamatlábak változásától, mint a fix kamatozásúaké, így tőzsdei árfolyamuk is érzékenyebben változik. Kötvényt állam, pénzintézet, vállalat egyaránt kibocsáthat. A kibocsátás feltételeit, körülményeit törvény szabályozza, és pénzintézetek közreműködésével történik.

Opció ♦ Az opció egy olyan szerződés mely az egyik félnek jogot biztosít valamely termék előre meghatározott áron való megvételére vagy eladására illetve a másik félnek kötelezettséget jelent az adott termék meghatározott áron történő eladására vagy megvételére. Az opiós ügylet során az opció megvásárlója az, aki joghoz jut, melynek megszerzéséért úgynevezett opciós díjat kell fizetnie az opció eladójának. Ha az opció megvásárlója él a jogával, azaz meg akarja vásárolni vagy el akarja adni a szóban forgó terméket, akkor az opció eladójának kötelezettsége van azt az előre meghatározott áron eladni vagy megvenni. Ebben a "szerződésben" az opció eladója vállal nagyobb kockázatot, hiszen annak ellenére, hogy az opció megvásárlója opciós díjat fizet, ő döntheti el, hogy él-e a jogával, és természetesen ezt csak akkor teszi meg ha ez neki megéri.

Attól függően, hogy az opció egy termék megvételére vagy eladására szól megkülönböztetünk *vételi* (ismertebb nevén call) és *eladási* (put) opciót.

Vételi opció során az opció vevője arra szerez jogot, hogy az adott terméket előre meghatározott időben és áron megvegye. Míg az opció eladója kötelezettséget vállal, hogy ezt a terméket ezen a meghatározott áron és időben eladja.

Eladási opcióról beszélünk, amikor az opció megvásárlója arra vesz jogot, hogy az adott terméket előre meghatározott áron és időben eladja. Ekkor az opció eladója pedig kötelezettséget vállal, hogy ezt a terméket ezen a meghatározott árfolyamon megvegye.

Az opció során megvásárolt jog nem használható fel a végtelenségig, van egy *lejárati ideje*, ami után az opciós jog megvásárlójának joga elveszik, illetve az opció eladójának kötelezettsége megszűnik. Az opciók esetében attól függően, hogy az opciós jogot megvásárló fél mikor élhet a jogával, beszélhetünk európai és amerikai típusú opcióról.

– Az *európai típusú opció* során az opciós jog megvásárlója csak a lejárat napján élhet a jogával.

– *Amerikai típusú opció*nak nevezzük azt az opciót, amikor is az opciós jogot megvásárló a jog megvásárlásának napjától a lejáratig bármikor élhet – vételi vagy eladási – jogával.

Az opció paraméterei:

– Az opció alapterméke az az *eszköz*, amelynek megvételére vagy eladására az opció jogot biztosít.

– Az opció *lejárata* az az időpont, amikor vagy ameddig az opciót le lehet hívni, azaz a joggal élni lehet.

– Az opció *kötési árfolyama* az az árfolyam, amelyen az opció lehívása esetén az alapterméket meg lehet vásárolni vagy el lehet adni.

– A következő paraméter eltér az eddigiektől annyiban, hogy a szerződésnek magának nem paramétere, azonban az opció értékének igen. Az opció *volatilitása* az opció alaptermékének hozamának szórása.

Piacait tekintve beszélhetünk tőzsdei illetve tőzsdén kívüli, más néven OTC (Over-the-counter), opcióról.

- *Tőzsdei opciók*: A tőzsdéken az opciós szerződések tulajdonságai (alaptermék, lejárat, kötési árfolyam) szabványosítva vannak. A legismertebb opciós termékek a tőzsdeindexekre szóló opciók.

- *OTC opciók*: A tőzsdén kívüli, azaz bankközi piacon leginkább a devizákra és kamatlábakra szóló opciók valamint az ún. egzotikus opciók kereskedése zajlik. Ezek az opciók már a kisbefektetők számára is elérhetőek az egyre szaporodó elektronikus kereskedési rendszerek segítségével.

Az *opciók árazása* során a következő kérdésre kapunk választ: mennyit fizetnek most egy T időpontbeli jövőbeni garantált S összegért? Az *európai opciók árazásá*ra az elfogadott módszer a *Black-Scholes-formula*, amivel a következő fejezetben ismerkedhetünk meg. *Amerikai opció*k esetében az opció *árazása* a binomiális módszerrel történik. A *binomiális opcióértékelési modell* azt feltételezi, hogy az alaptermék ára egy egységnyi idő elmúltával két értéket vehet fel, vagy emelkedik, vagy csökken egy bizonyos mértékben. A lejáratig hátralevő időt ilyen időegységekre osztva az alaptermék ára az egyes lépések végén kiszámítható. Az alaptermék árának lejáratkori lehetséges értékeihez meghatározhatóak az opció lejáratkori értékei, és ezekből az opcióértékekből kiindulva visszafelé levezethető az opció értéke az egyes időegységek végén, amiből kiszámolható az opció jelenlegi értéke. Minél rövidebb időintervallumokra kerül felosztásra a lejáratig hátralevő idő, annál több értéket vehet fel lejáratkor az alaptermék ára. Végtelen kis részekre szabdalva az időt, az eredmény a lejáratkori részvényárfolyamok folytonos eloszlása lesz. Nagyon sok lépésre osztva a lejáratig hátralevő időt a binomiális modell nagyon nehézkes eszköz az opció értékének meghatározására. A probléma megoldása *Black, Scholes és Merton* nevéhez fűződik, akik egy első ránézésre bonyolultnak tűnő, de a gyakorlatban roppant egyszerűen használható formulát dolgoztak ki az opciók értékének megállapítására. A Black-Scholes képlet az alaptermék azonnali árának, a volatilitásnak, a lehívási árnak, a kamatlábnak és a lejárati időnek a függvényében meghatározza egy európai jellegű opció értékét.

Portfolió ♦ A portfolió a portfolió-kezelési tevékenységet végző számára átadott eszközök, illetőleg ezen eszközökből a portfolió-kezelési tevékenységet végző által összeállított, többféle vagyonelemet tartalmazó eszközök összessége. Ilyen eszközök lehetnek például az értékpapírok és a részvények. Portfolió-kezelés azt a tevékenység jelenti, amelynek során a befektető meghatározott eszközei azzal a céllal kerülnek a portfolió-kezelési tevékenységet végző szervezet (hitelintézet, befektetési vállalkozás, befektetési alapkezelő) rendelkezése alá, hogy meghatározott feltételek mellett, egyedi módon, a befektető által adott megbízás alapján befektetési eszközökbe fektesse és kezelje a befektető javára azzal, hogy a befektető a megszerzett befektetési eszközökből eredő kockázatot és hozamot, így különösen annak nyereségét és veszteségét, közvetlenül viseli.

A hatékony piac ♦ A hatékony piac elmélete szerint a mindenkori részvényárak tartalmazzák az összes rendelkezésre álló, valamennyire is jelentős nyilvános információt. Az új információk megjelenésével egyidejűleg az árfolyamok is változnak, az ebből levezethető logikus következtetés pedig az, hogy ez esetben egyetlen befektetőnek sem lehet előnye a többiekkel szemben. Az elmélet szerint ugyanis a felcsillanó lehetőségek még azelőtt árazódnak be a részvénybe, hogy azt ki lehetne használni. Ebből viszont az következik, hogy ha egy adott részvény árfolyama tükrözi az összes rendelkezésre álló információt, akkor a jövőbeli ármozgások teljességgel megjósolhatatlanok, előre nem láthatók.

3.2. Egy egyszerű pénzügyi feladat

[2] Legyen adott egy részvény melynek ára a t_0 kiindulási időpontban S_0. Tudjuk, hogy a t időpontban ennek értéke S_1 vagy S_2 lesz attól függően, hogy nő vagy csökken a részvény értéke, azaz $S_1 < S_0 < S_2$. Az értéknövekedés vagy csökkenés bekövetkezési valószínűségeiről nem teszünk fel semmit. Ugyanezen a piacon forgalmaznak még egy fix kamatozású kötvényt is, melynek ára a t_0 időpontban B_0, és a t időpontban

$$B_0 e^{r(t-t_0)},$$

ahol r a (konstans) kamatláb. Adott egy X követelés melynek értéke $f(1)$ ha a részvény értéke csökken, illetve $f(2)$ ha nő. A befektetőnk egy olyan portfóliót szeretne összeállítani ezen részvény és kötvény segítségével, amivel az X követelést teljesíteni tudja a t időpontra. A portfólió összetétele legyen ξ darab részvény és η darab kötvény. Ennek ára a t_0 időpontban

$$\xi S_0 + \eta B_0.$$

A t időpontban a portfólió értéke

$$\xi S_2 + \eta B_0 e^{r(t-t_0)} = f(2)$$

[2] Ez a feladat megtalálható a [1] irodalom 4-5. oldalán.

kell legyen abban az esetben, ha a részvény ára nő, és

$$\xi S_1 + \eta B_0 e^{r(t-t_0)} = f(1),$$

ha csökken. Az ebből a két egyenletből álló egyenletrendszert megoldva, ξ és η értékére a következőket kapjuk:

$$\xi = \frac{f(2)-f(1)}{S_2-S_1}, \tag{3.1}$$

$$\eta = \frac{1}{B_0} e^{-r(t-t_0)} \left(f(2) - \frac{f(2)-f(1)}{S_2-S_1} S_2 \right). \tag{3.2}$$

Ezek után a portfólió kiindulási értéke is kiszámítható,azaz

$$\begin{aligned} V &= \xi S_0 + \eta B_0 = \\ &= \frac{f(2)-f(1)}{S_2-S_1} S_0 + {B_0}^{-1} e^{-r(t-t_0)} \left(f(2) - \frac{f(2)-f(1)}{S_2-S_1} S_2 \right) B_0 = \\ &= f(1) \left(\frac{-S_0}{S_2-S_1} + \frac{S_2}{S_2-S_1} e^{-r(t-t_0)} \right) + f(2) \left(\frac{S_0}{S_2-S_1} + e^{-r(t-t_0)} (1 - \frac{S_2}{S_2-S_1}) \right). \end{aligned}$$

Definiáljuk a q számot a következőképp:

$$q = \frac{S_0 e^{r(t-t_0)} - S_1}{S_2-S_1}. \tag{3.3}$$

Ekkor a portfólió értékére kapott kifejezés leegyszerűsödik:

$$V = e^{-r(t-t_0)}((1-q)f(1) + qf(2)).$$

3.2.1. Állítás. *Hatékony piacon a fenti q számra*

$$0 < q < 1$$

teljesül.

Most pedig nézzünk egy konkrét példát!
Tegyük fel, hogy a kamatláb zérus, azaz a kötvény értéke nem változik. A £100 értékű részvény a t időpontban £200-t vagy £50 fog érni. Annak a fogadásnak szeretnénk az értékét meghatározni, amely a részvény árnövekedése esetén £100-t, egyébként semmit nem fizet. Az előző jelölések alapján:

$$\begin{aligned} r &= 0 \\ S_0 &= B_0 = £100 \\ S_1 &= £50 \\ S_2 &= £200 \\ X &= \begin{cases} £100, & \text{ha a részvény ára nő,} \\ £0, & \text{különben .} \end{cases} \end{aligned}$$

A (3.3) képletbe helyettesítve

$$q = \frac{100 - 50}{200 - 50} = \frac{1}{3}$$

adódik. Így fenti követelés értéke:

$$V = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot 0 + \frac{1}{3}100 = \frac{100}{3}.$$

Az így kapott követelést teljesítő portfólió a (3.1) és (3.2) egyenletek megoldásaként számolható

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{100 - 0}{200 - 50} = \frac{2}{3}, \\ \eta &= \frac{1}{100}\left(100 - \frac{100 - 0}{200 - 50}200\right) = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy ahhoz, hogy teljesíteni tudjuk az X követelést, $\frac{2}{3}$ részvényt kell vennünk és $\frac{1}{3}$ kötvényt kell kölcsönadnunk.

4. fejezet

A Black-Scholes egyenlet

A Black-Scholes modell a pénzügyi piac és a származékos pénzügyi eszközök matematikai leírása. A modell a parciális differenciálegyenletekből alakult ki és megoldását, a Black-Scholes formulát, széles körben használják az európai stílusú opciók árazásában.

Ezt a modellt először Fischer Black és Myron Scholes fogalmazták meg 1973-as "Az opciók árazása és vállalati kötelezettségek" című munkájukban. A Black-Scholes mélyebb megismerésének alapja az, hogy az opciókkal közvetve kereskednek. Robert Merton volt az első, aki publikálta az opciók árazási modellének matematikai megértését elősegítő formulákat, és megalkotta a Black-Scholes opciók árazási modelljének fogalmát.

Merton és Scholes munkájukért 1997-ben közgazdaságtani Nobel díjat kaptak. Mivel Black 1995-ben meghalt, így nem kapta meg a díjat, de a svéd akadémia megemlítette közreműködését.

4.1. A Black-Scholes egyenlet

Ebben az alfejezetben [3] irodalom 2. fejezetének 2.2-es bekezdése és a 3. fejezetének 3.4-es bekezdése lapján lépésről lépésre levezetjük a Black-Scholes parciális differenciálegyenletet.
Szinte az összes opcióárazási modell az eszköz áringadozását írja le származtatott paraméterek segítségével. Ilyen származtatott paraméterek például a történelmi adatok. Gyakran állítják, hogy a Hatékony Piac elmélete szerint az eszközök árának véletlenszerűen kell mozognia. Ennek az elméletnek számos különböző formája ismert, különböző korlátozó feltételekkel, de ezek mind alapvetően ugyanazt a két dolgot állítják:

– A múlt történését teljes mértékben tükrözi a jelenlegi ár, ami nem tartalmaz további információt.

– A piacok azonnal reagálnak minden, az eszköz áráról szóló új információra.

Így az eszköz árának modellezése valójában az újonnan érkező, az eszköz árát befolyásoló információk modellezése. Az előző két feltevéssel az eszköz árának változása egy *Markov-folyamat*.

Az eszköz árában történő változást úgy definiáljuk, mint az árváltozás osztva az eredeti értékkel. Ezt a változást *hozam*nak nevezzük. Most tegyük fel, hogy az eszköz ára a t időben S. Ekkor S egy sztochasztikus folyamat. Nézzük a következő kis időintervallumot dt-t. Ezalatt az S ár $S + dS$-re változik. Hogyan modellezhetjük az eszköz megfelelő hozamát, azaz $\frac{dS}{S}$-t? A leggyakoribb modell két részre bontja ezt a hozamot.

– Az egyik rész egy előre meghatározott, determinisztikus hozam, mely hasonlít a kockázatmentesen bankba fektetett pénz hozamára. Ez egy

$$\mu dt \tag{4.1}$$

járulékot ad a $\frac{dS}{S}$ hozamhoz, ahol μ az eszköz árának átlagos növekedési üteme, más néven *drift*. Az egyszerű modellekben, mint amit mi is használunk μ állandó. Bonyolultabb modellekben, pl. átváltási árfolyamoknál, μ lehet S és t függvénye is.

– A másik tényező $\frac{dS}{S}$ hozamban az eszköz árának külső hatásokra történő véletlen változását modellezi. Ilyen hatás lehet például egy váratlan hír. Ez egy véletlen, normális eloszlású Wiener-folyamat, 0 várható értékkel, σ szórással. Ez a

$$\sigma dX \tag{4.2}$$

kifejezésként járul hozzá a $\frac{dS}{S}$ értékéhez. Itt σ egy szám, az úgynevezett *volatilitás*, amely a hozamok szórását adja meg.

Az előző kifejezéseket összeadva, azaz (4.1)-et és (4.2)-öt, a következő sztochasztikus differenciálegyenlethez jutunk:

$$\frac{dS}{S} = \sigma dX + \mu dt \tag{4.3}$$

amely matematikailag megadja a generáló eszköz árának egy egyszerű leírását. Az egyetlen paraméter, amit még eddig nem tárgyaltunk, a dX. Itt dX az X Wiener-folyamata dt időben. A $\sigma = 0$ választással ez a dX-et tartalmazó kifejezés kiesik és a következő egyszerű differenciálegyenlethez jutunk:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt$$

vagy

$$\frac{dS}{dt} = \mu S.$$

Ha μ állandó, akkor ez pontosan megoldható, és a megoldás az eszköz értékének exponenciális növekedését adja, azaz:

$$S = S_0 e^{\mu(t-t_0)},$$

ahol S_0 az eszköz (kezdeti) értéke a $t = t_0$ időpontban. Így ha $\sigma = 0$, az eszköz ára determinisztikus, és pontosan meg tudjuk mondani az eszköz jövőbeni árát.

Itt szükségünk van egy eredményre, melyet nem bizonyítunk. Teljesül, hogy

$$dX^2 \to dt \text{ 1 valószínűséggel, ha } dt \to 0. \tag{4.4}$$

Vagyis dt minél kisebb, dX^2 annál közelebb van hozzá.
Tegyük fel, hogy $f(S)$ egy sima függvény és felejtsük el, hogy S szochasztikus folyamat. Ha S-et megváltoztatjuk egy kis dS mennyiséggel, akkor f is megváltozik. A Taylor sor kifejtéséből a következőt kapjuk:

$$df = \frac{df}{dS}dS + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dS^2}dS^2 + ..., \tag{4.5}$$

ahol a pontok a maradék tagokat jelentik, melyek kisebbek, mint bármelyik kifejezés amit megtartottunk. Most emlékezzünk vissza, hogy dS a (4.3) egyenlet segítségével kifejezhető. Itt dS egy szám. Emeljük négyzetre a következő módon:

$$\begin{aligned} dS^2 &= (\sigma S dX + \mu S dt)^2 \\ &= \sigma^2 S^2 dX^2 + 2\sigma\mu S^2 dt dX + \mu^2 S^2 dt^2. \end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg nagyságrendileg az előző egyenlet egyes tagjait. Mivel

$$dX = O(\sqrt{dt}),$$

az első kifejezés a legnagyobb kis dt esetén, így a többi tag elhanyagolható. Tehát ha $dt \to 0$, akkor $dX^2 \to dt$ és $dS^2 \to \sigma^2 S^2 dt$. Helyettesítsünk be a (4.5) egyenletbe és tartsuk meg azokat a kifejezéseket melyek nagyságrendileg legalább $O(dt)$

nagyságúak. Felhasználva dS (4.3)-ban kapott értékét, a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} df &= \frac{df}{dS}(\sigma S dX + \mu S dt) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2 f}{dS^2} dt \\ &= \sigma S \frac{df}{dS} dX + \left(\mu S \frac{df}{dS} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2 f}{dS^2}\right) dt. \end{aligned}$$

4.1.1. Lemma. *(Ito-lemma) Legyen G egy sztochasztikus-folyamat melyre az alábbi sztochasztikus differenciálegyenlet teljesül*

$$dG = A(G,t)dX + B(G,t)dt.$$

Ekkor tetszőleges $f(G)$ függvényre

$$df = A\frac{df}{dG}dX + \left(B\frac{df}{dG} + \frac{1}{2}A^2\frac{d^2 f}{dG^2}\right) dt$$

összefüggés igaz.

Most láthatjuk, hogy az előbb kapott kifejezés az Ito-lemma állítása a $G = S$, $A = \sigma S$ illetve $B = \mu S$ esetre. Az előző eredményt tovább lehet általánosítani a sztochasztikus folyamat és az idő függvényeként, $f(S)$ helyett $f(S,t)$-t írva. Ez maga után vonja a parciális deriválás használatát, hiszen most már két független változónk van: S és t. Az S és t megváltozása az f függvényben $f(S+dS, t+dt)$-ként írható. Ezt a bővítést használva és Taylor sorba fejtve a következőt kapjuk:

$$df = \frac{\partial f}{\partial S}dS + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}dS^2 + ...$$

Felhasználva a (4.3) kifejezést dS-re és a (4.4)-et dX^2-re, egy új egyenlethez jutunk

$$df = \sigma S\frac{\partial f}{\partial S}dX + \left(\mu S\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t}\right) dt.$$

Ez az Ito-lemma egy általánosított formája.
Ezek alapján tegyük fel, hogy van egy opciónk, melynek értéke, $V(S,t)$, csak S-től és t-től függ. Nem szükséges pontosítani, hogy V egy vételi vagy egy eladási opció: valójában lehet különböző opciók egész portfóliójának értéke. Az egyszerűség kedvéért legyen most egy egyszerű vételi opció, azaz egy darab valamilyen részvényre vonatkozó vételi jog. Az előzőek szerint, az Ito-lemma általánosított formáját használva, a V értékének változására a következő egyenletet kapjuk:

$$dV = \sigma S\frac{\partial V}{\partial S}dX + \left(\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right) dt. \tag{4.6}$$

4.1.1. Megjegyzés. *Itt megköveteljük, hogy V-nek t szerint legalább egyszer, S szerint pedig legalább kétszer deriválhatónak kell lennie.*

Most állítsunk össze egy portfóliót úgy, hogy álljon egy opcióból és az alapul szolgáló eszköz (például egy részvény) $-\Delta$-szorosából. Ezt a Δ számot a későbbiekben pontosítjuk. Az így kapott Π portfólió értéke a t_0 időben:

$$\Pi = V - \Delta S. \tag{4.7}$$

Ezen portfólió értéké a t időpontban, azaz $\delta t = t - t_0$ idő múlva:

$$d\Pi = dV - \Delta dS. \tag{4.8}$$

Itt Δ nem változik a δt idő alatt: ha változna, akkor $d\Pi$-ben a $d\Delta$ mennyiség szerepelne Δ helyett. Az eddig kapott eredményeket a (4.6) egyenletbe helyettesítve a következőt kapjuk:

$$d\Pi = \sigma S\left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right) dX + \left(\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - \mu\Delta S\right) dt.$$

Ebben az egyenletben dX eltüntethető Δ következő módon történő megválasztásával:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}. \tag{4.9}$$

4.1.2. Megjegyzés. *A t_o kezdeti időpontban a $\frac{\partial V}{\partial S}$ értéke Δ.*

Ekkor ez egy olyan portfóliót eredményez melynek növekedése teljes egészében determinisztikus:

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt. \tag{4.10}$$

Most a Π összeget kockázatmentes eszközbe fektetve, hozama a dt idő múlva $r\Pi dt$ lesz, ahol r a kockázatmentes kamatláb értékét jelöli. Ekkor a (4.8) egyenletet alkalmazva, átrendezés után a következőt kapjuk:

$$r\Pi dt = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt. \tag{4.11}$$

Behelyettesítve a (4.7) és a (4.9) egyenleteket a (4.11)-be, és mindenütt dt-vel leosztva a

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{4.12}$$

egyenlethez jutunk.

4.1.1. Definíció. *A* ***Black-Scholes parciális differenciálegyenlet***

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

4.2. A Black-Scholes egyenlet megoldása

[1] A Black-Scholes parciális diferenciálegyenlet:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \tag{4.13}$$

A következő peremfeltételek érvényesek:

$$V(0,t) = 0,$$
$$\frac{V(S,t)}{S} \to 1, \text{ ha } S \to \infty$$
$$\text{és } V(S,T) = \max(S-K{,}0).$$

Jelölések:

- $V(S,t)$: Az európai vételi opció értéke
- S: Az alapul szolgáló eszközök jelenértéke
- t: idő
- σ: a volatilitás
- r: a kockázatmentes kamatláb
- T: lejárati idő
- K: kötési ár

4.2.1. Megjegyzés. – *A $V(0,t) = 0$ peremfeltétel meghatározza a megoldás értékét a probléma egy érzékeny határán. A határ érzékeny, mivel az értékpapír ára csak nulla vagy pozitív lehet. Ez a peremfeltétel azt mondja, hogy ha az értékpapír értéke 0, akkor a vételi érték (K kötési árral) is 0 értékű.*

– *A másik peremfeltétel $\frac{V(S,t)}{S} \to 1$, ha $S \to \infty$. Ez nem pénzügyi érzékenység, hanem azt mondja, hogy nagyon nagy részvény árnál, a vételi érték K kötési árral megközelítőleg S. Ez lényegében benne van a technikai feltételekben, így ezt következmények nélkül figyelmen kívül hagyhatjuk.*

– *Mivel itt $V(S,t)$ egy európai vételi opció, így opciónkat csak akkor érvényesítjük, ha a lejárati idő elteltével ez nekünk megéri, azaz az eszköz értéke és a kötési ár különbsége pozitív lesz. Ezt a* 3. *feltétel írja le.*

[1] Ebben az alfejezetben a [5] irodalmat követem.

Ezen bevezető és néhány megjegyzés után nézzük a Black-Scholes parciális differenciálegyenlet megoldását.

4.2.2. Megjegyzés. *A következő átparaméterezésekre és átalakításokra azért van szükségünk, hogy végül a 2. fejezetben említett egyszerű hővezetési egyenlethez jussunk, melynek megoldása ismert.*

Először is legyen

$$t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2},$$
$$S = Ke^x,$$

így a $V(S,t)$ átparaméterezése a következő:

$$V(S,t) = Kv(x,\tau). \tag{4.14}$$

Kifejezve τ-t és x-et az előző egyenletekből, a következőt kapjuk:

$$\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t),$$
$$x = \ln\left(\frac{S}{K}\right).$$

V-nek t szerinti első deriváltja:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = K\frac{\partial v}{\partial \tau}\frac{d\tau}{dt} = K\frac{\partial v}{\partial \tau}\frac{-\sigma^2}{2}, \text{ mivel}$$
$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{-\sigma^2}{2}.$$

V-nek S szerinti első deriváltja:

$$\frac{\partial V}{\partial S} = K\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dS} = K\frac{\partial v}{\partial x}\frac{1}{S}, \text{ mivel}$$
$$\frac{dx}{dS} = \frac{1}{S}.$$

Az egyenletben még szükségünk van V-nek S szerinti második deriváltjára is:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right) = \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{K}{S}\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
&= -\frac{K}{S^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{K}{S}\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
&= -\frac{K}{S^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{K}{S}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{dx}{dS} \\
&= -\frac{K}{S^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{K}{S}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{1}{S}.
\end{aligned}$$

A végső állapot

$$\begin{aligned} V(S,T) &= \max(S-K,0) = \max(Ke^x - K, 0), \\ \text{de } V(S,T) &= Kv(x,0), \\ \text{így } v(x,0) &= \max(e^x - 1, 0). \end{aligned}$$

Helyettesítsük be az eddigieket a Black-Scholes egyenletbe:

$$K\frac{\partial v}{\partial \tau}\left(\frac{-\sigma^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\left(-\frac{K}{S^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{K}{S^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + rS\left(\frac{K}{S}\frac{\partial v}{\partial x}\right) - rKv = 0. \quad (4.15)$$

Most kezdjük el az egyszerűsítéseket:

– Emeljük ki K-t, és egyszerűsítsünk vele.

– Vigyük át a τ szerinti deriváltat az egyenlet másik oldalára, és osszunk le $\frac{\sigma^2}{2}$-vel.

– Vegyük észre, hogy a második deriváltban S^2-tel, és az első deriváltban S-sel tudunk egyszerűsíteni, így

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{r}{\frac{\sigma^2}{2}}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{r}{\frac{\sigma^2}{2}}v = \frac{\partial v}{\partial \tau}.$$

– Legyen a visszamaradó konstans $\frac{r}{\frac{\sigma^2}{2}} = k$. Ekkor k méri a kockázatmentes kamatláb és a volatilitás arányát.

Ezek után az egyenlet így néz ki:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1)\frac{\partial v}{\partial x} - kv. \quad (4.16)$$

Ez jelentős előre lépés, ugyanis:

– Most már csak egy konstans k paraméter, a kockázatmentes kamatláb és a volatilitás többszöröse, illetve az átparaméterezett lejárati idő, $\frac{1}{2}\sigma^2 T$, maradt, nem pedig az eredeti 4 dimenziós mennyiségek, K, T, σ^2 és r.

– Az egyenletet a $-\infty < x < \infty$ intervallumon definiáljuk, mivel ez az intervallum meghatározza a változók megváltozását, $S = Ke^x$, ahol $0 < S < \infty$.

– Az egyenlet most már állandó együtthatójú.

Ezek után, elvileg, direkt úton is meg tudnánk oldani az egyenletet, de ehelyett egyszerűsítsük tovább a következő átparaméterezéssel:

$$v(x,\tau) = e^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau), \tag{4.17}$$

ahol α és β konstansok, melyeket később definiálunk. Az egyszerűség kedvéért jelölje v_τ a v-nek τ szerinti deriváltját, v_x pedig az x szerintit. Ezen jelölések és átírás alapján, a szorzat-szabályt alkalmazva:

$$\begin{aligned}
v_\tau &= \beta e^{\alpha x+\beta\tau}u + e^{\alpha x+\beta\tau}u_\tau,\\
v_x &= \alpha e^{\alpha x+\beta\tau}u + e^{\alpha x+\beta\tau}u_x,\\
v_{xx} &= \alpha^2 e^{\alpha x+\beta\tau}u + 2\alpha e^{\alpha x+\beta\tau}u_x + e^{\alpha x+\beta\tau}u_{xx}.
\end{aligned}$$

Helyettesítsük be ezeket a (4.16) állandó együtthatós parciális differenciálegyenletünkbe, majd emeljük ki mindenhonnan a közös tényezőt, $e^{\alpha x+\beta\tau}$-t és osszunk le vele. Így

$$\begin{aligned}
\beta e^{\alpha x+\beta\tau}u + e^{\alpha x+\beta\tau}u_\tau &= \alpha^2 e^{\alpha x+\beta\tau}u + 2\alpha e^{\alpha x+\beta\tau}u_x + e^{\alpha x+\beta\tau}u_{xx}+\\
&\qquad + (k-1)(\alpha e^{\alpha x+\beta\tau}u + e^{\alpha x+\beta\tau}u_x) - e^{\alpha x+\beta\tau}u \Rightarrow\\
\beta u + u_\tau &= \alpha^2 u + 2\alpha u_x + u_{xx} + (k-1)(\alpha u + u_x) - ku.
\end{aligned}$$

Rendezzük ezt a következő alakra:

$$u_\tau = u_{xx} + [2\alpha + (k-1)]u_x + [\alpha^2 + (k-1)\alpha - k - \beta]u.$$

Válasszuk meg most a konstansokat az alább módon:

$$\begin{aligned}
\alpha &:= -\frac{k-1}{2},\\
\beta &:= \alpha^2 + (k-1)\alpha - k = -\frac{(k-1)^2}{4},
\end{aligned}$$

így az u együtthatója 0 lesz. Ezekkel a választásokkal az egyenlet a következőre egyszerűsödik

$$u_\tau = u_{xx}$$

$$-\infty < x < \infty, \tau > 0.$$

Ez egy az egyben a 2. fejezetben bemutatott egydimenziós hővezetési egyenlet, ld.(2.1) képlet. Szükségünk lesz a kezdeti feltételek transzformálására is. Ez a transzformáció

$$\begin{aligned} u(x,0) = u_0(x) &= e^{-(-\frac{k-1}{2})x-(-\frac{(k+1)^2}{4})\cdot 0} \cdot v(x,0) \\ &= e^{(\frac{k-1}{2})x} \cdot \max(e^x - 1, 0) \\ &= \max(e^{(\frac{k+1}{2})x} - e^{(\frac{k-1}{2})x}, 0). \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy ez a függvény szigorúan pozitív, ha az x független változó szigorúan pozitív, azaz

$$\begin{aligned} &u_0(x) > 0 \text{ ha } x > 0 \ , \\ &u_0(x) = 0 \text{ ha } x \leq 0. \end{aligned}$$

Most már alkalmazhatjuk az ismert hővezetési egyenlet megoldását, azaz a (2.2) képletet

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{\frac{-(x-s)^2}{4\tau}} ds.$$

Először azonban helyettesítsük a változókat a következő módon:

$$z = \frac{s-x}{\sqrt{2\tau}}, dz = \frac{-1}{\sqrt{2\tau}} dx.$$

Ezek után az integrál a következő:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(z\sqrt{2\tau} + x) e^{\frac{-x^2}{2}} dz.$$

Ekkor az integrálási tartomány, ahol $u_0 > 0$, most $z > -\frac{x}{\sqrt{2\tau}}$. Ezen a tartományon:

$$u_0 = e^{(\frac{k+1}{2})(x+z\sqrt{2\tau})} - e^{(\frac{k-1}{2})(x+z\sqrt{2\tau})}.$$

Így az integrál

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{(\frac{k+1}{2})(x+z\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{(\frac{k-1}{2})(x+z\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Nevezzük ezt a két integrált I_1-nek és I_2-nek. Először I_1-et értékeljük ki. Könnyebb, ha a kitevőt teljes négyzetté alakítjuk, azaz

$$\begin{aligned} \frac{k+1}{2}\left(x + z\sqrt{2\tau}\right) - \frac{z^2}{2} &= -\frac{1}{2}\left(z^2 - \sqrt{2\tau}(k+1)z\right) + \frac{k+1}{2}x \\ &= -\frac{1}{2}\left(z^2 - \sqrt{2\tau}(k+1)z + \frac{\tau(k+1)^2}{2}\right) + \frac{k+1}{2}x + \frac{\tau(k+1)^2}{4} \\ &= -\frac{1}{2}\left(z - \sqrt{\frac{\tau}{2}}(k+1)\right)^2 + \frac{(k+1)x}{2} + \frac{\tau(k+1)^2}{4} \end{aligned}$$

Ezek után az integrál:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\left(\frac{k+1}{2}\right)(x+z\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$
$$= \frac{e^{\frac{(k+1)x}{2}+\frac{\tau(k+1)^2}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z-\sqrt{\frac{\tau}{2}}(k+1))^2} dz.$$

Most ismét helyettesítsünk az integrálban a

$$y = z - \sqrt{\frac{\tau}{2}(k+1)}, dy = dz$$

választással, természetesen ekkor az integrálási határ is változik:

$$\frac{e^{\frac{(k+1)x}{2}+\frac{\tau(k+1)^2}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-\sqrt{\frac{\tau}{2}}(k+1)}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dz.$$

Az egyszerűbb alakban való felíráshoz tekintsük a normális eloszlás eloszlásfüggvényét, amit általában Φ-vel jelölünk. Azaz

$$\Phi(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

így

$$I_1 = e^{\frac{(k+1)x}{2}+\frac{\tau(k+1)^2}{4}} \Phi(d_1),$$

ahol

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \sqrt{\frac{\tau}{2}}(k+1).$$

Az I_2 ugyanígy számolhatjuk, csak annyi változtatással, hogy a $(k+1)$ helyére $(k-1)$-et írunk. Azaz,

$$I_2 = e^{\frac{(k-1)x}{2}+\frac{\tau(k-1)^2}{4}} \Phi(d_2),$$

ahol

$$d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \sqrt{\frac{\tau}{2}}(k-1).$$

Ezek után a transzformált hővezetési egyenlet megoldása a kezdetiérték-prolémára

$$u(x,\tau) = e^{\frac{(k+1)x}{2}+\frac{\tau(k+1)^2}{4}} \Phi(d_1) + e^{\frac{(k-1)x}{2}+\frac{\tau(k-1)^2}{4}} \Phi(d_2).$$

Most már csak vissza kell vezetnünk minden helyettesítést. Először is (4.15)-be helyettesítve

$$v(x,\tau) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x-\frac{1}{4}(k+1)^2} u(x,\tau)$$

adódik. Most helyettesítsük be

$$
\begin{aligned}
x &= \ln\left(\frac{S}{K}\right), \\
\tau &= \frac{1}{2}\sigma^2(T-t), \\
V(S,t) &= Kv(x,\tau).
\end{aligned}
$$

A végső megoldás a **Black-Scholes formula**.

4.2.1. Definíció. *A **Black-Scholes formula** egy európai vételi opció értékére, T időben, K kötési árfolyammal, ha az alapul szolgáló részvény ára a t időpontba S, a kockázatmentes kamatláb r és a volatilitás σ:*

$$V(S,t) = S\Phi\left(\frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).$$

Ez egy hosszú formula, ezért a könnyebb érthetőség kedvéért sok helyen az alábbi átírásokkal szerepel:

$$
\begin{aligned}
g_1 &= \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\
g_2 &= \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},
\end{aligned}
$$

így:

$$V(S,t) = S\cdot\Phi(g_1) - Ke^{-r(T-t)}\cdot\Phi(g_2). \tag{4.18}$$

Formálisan a modell a következő feltételezéseken alapult:

– *A részvényárfolyamra vonatkozó* feltételezések: a drift és a volatilitás független az időtől, azaz μ és σ konstans.

– *A piaci kamatra vonatkozó* feltételezés: a kockázatmentes kamatláb r, az opció futamideje alatt konstans.

– *A részvényekre vonatkozó* feltételezések: a modell feltételezése szerint a részvény nem fizet osztalékot az opció futamideje alatt.

– *A kereskedésre vonatkozó* feltételezések: nincsenek tranzakciós költségek. Lehetőség van az úgynevezett short sellingre, azaz eladhatunk úgy egy részvényt valakinek, hogy az nincs a birtokunkban, csak a megegyezés szerint helyt kell állnunk érte valamikor a jövőben. A feltételezés szerint a short sellingnek nincsenek többletköltségei. Nincs továbbá költsége a kölcsönvételnek sem, azaz lehetőségünk van kockázatmentes kamatláb mellett kölcsönt felvenni. Minden időpontban lehetőség van a kereskedésre. A befektetőt nem befolyásolja a kereskedésben az általa fizetendő adó.

- *Az opcióra vonatkozó* feltételezések: a modellben európai típusú opcióról van szó, amit az opcióárazásnál ki is használunk.
- *A piacra vontakozó* feltételezés: nincs lehetőség arbitrázsra.

4.3. A Black-Scholes egyenlet megoldásának grafikus ábrázolása

[2]Ahhoz, hogy a Black-Scholes egyenlet megoldását grafikusan ábrázoljuk tekintsünk egy konkrét példát. Legyen egy vételi opciónk K kötési árral, ahol $K = 150$. A kockázatmentes kamatláb egy évre folyamatos lekötés mellett 6 %, azaz $r = 0.06$. Legyen a T lejárati idő 1 év, a részvény hozamának szórása, másnéven a volatilitás $\sigma = 0.10$. A vételi opció alapjául szolgáló eszköz árát jelölje S. Ennek értéke a lejáratkor $100 \leq S \leq 200$. Tehát a lejáratkor az egyenletünk a konkrét adatokkal a következőképp írható:

$$g_1 = \frac{\ln(\frac{S}{150}) + (0.06 + \frac{0.1^2}{2})(1-0)}{0.1\sqrt{1-0}},$$

$$g_2 = \frac{\ln(\frac{S}{150}) + (0.06 - \frac{0.1^2}{2})(1-0)}{0.1\sqrt{1-0}},$$

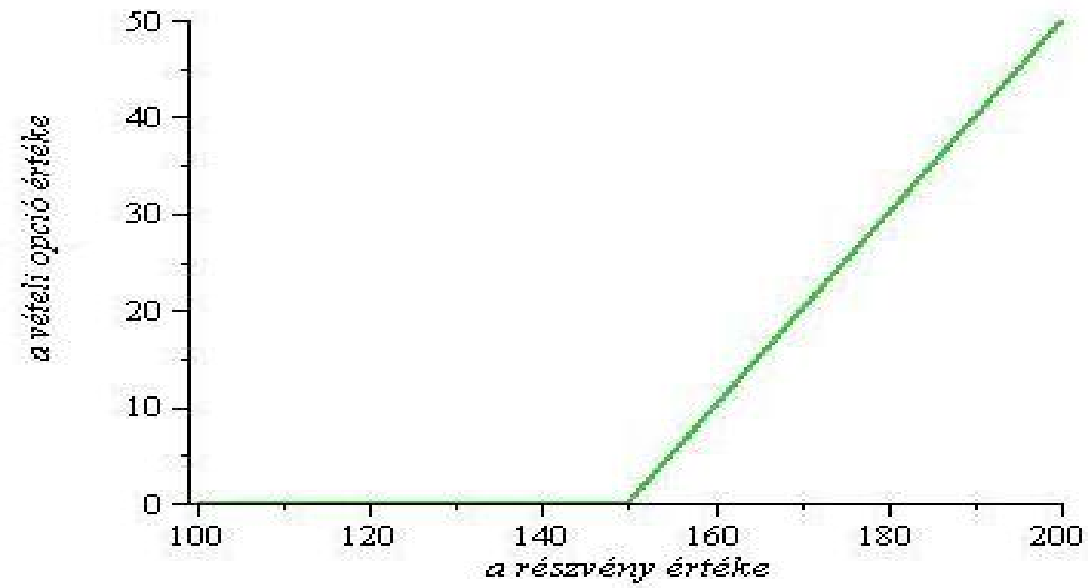
azaz

$$V(S,1) = S \cdot \Phi(d_1) - 150e^{-0.06(1-0)} \cdot \Phi(d_2).$$

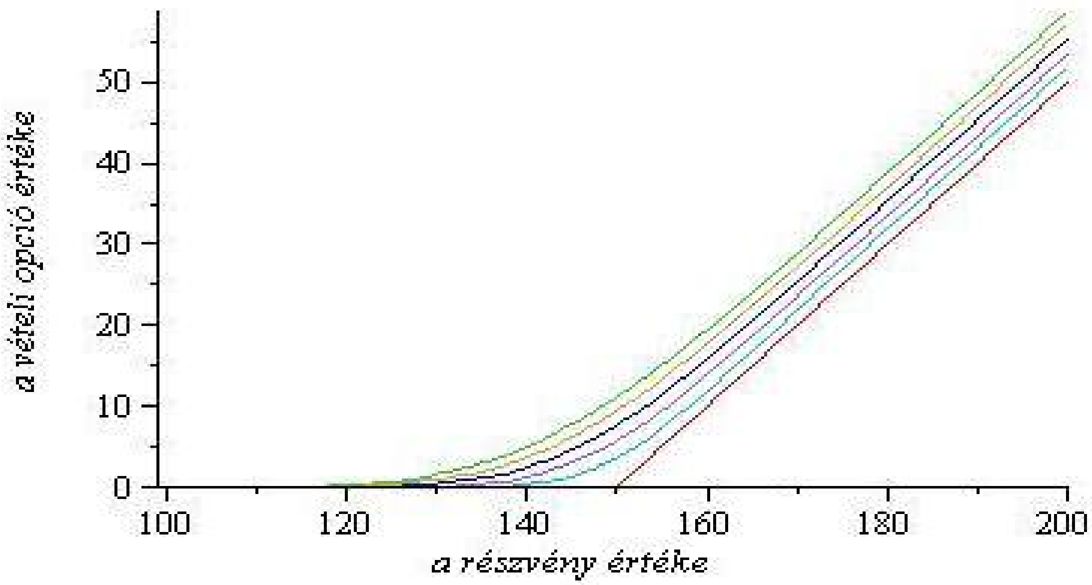
Ezen vételi opció értékét a lejáratkor a (4.1) ábra mutatja, ahol $100 \leq S \leq 200$.

Használjuk a Black-Scholes formulát a fenti vételi opció értékének kiszámítására a lejárati időt megelőzően! Az előző paramétereket használva a részvény árát a lejárati időpontot megelőző t időpontban, ahol $t = 1{,}0.8{,}0.6{,}0.4{,}0.2{,}0$, a (4.2) ábrán szemléltetjük.

[2] Ebben a fejezetben a példa grafikus ábrázolásához a Maple program pénzügyi csomagjának blackscholes függvényét használtam.

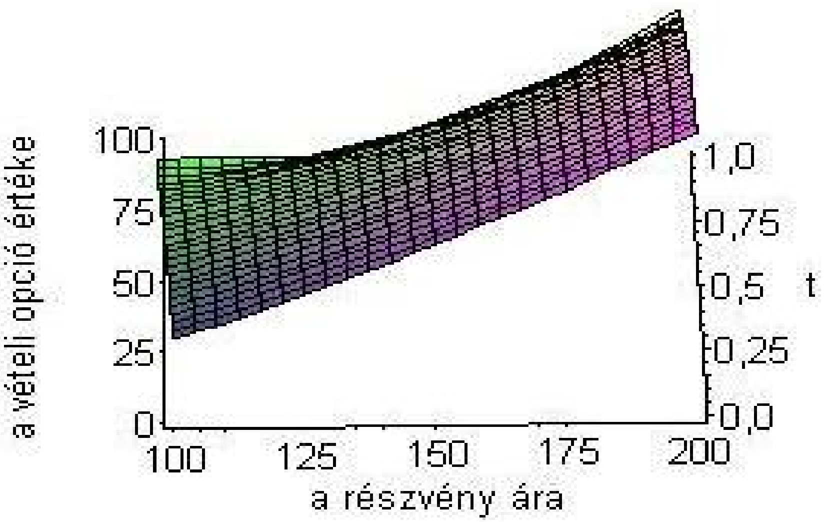


4.1. ábra. A vételi opció értéke a lejáratkor



4.2. ábra. A vételi opció értéke a lejáratot megelőző t időpontokban

A Black-Scholes egyenlet megoldását felületként is ábrázolhatjuk, a részvény ára és a lejáratot megelőző idő függvényeként. A konkrét példánkra ezt a felületet a (4.3) ábra mutatja.



4.3. ábra. A Black-Scholes formula felülete

Irodalomjegyzék

[1] Gerencsér László, Michaletzky György, Vágó Zsuzsanna, *Bevezetés a pénzügyi matematikába*, Oktatási segédlet, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Valószínűségelméleti és Statisztikai Tanszék, 1998.

[2] Kurtán Lajos, *Piacgazdaságtan*, ELTE Eötvös Kiadó, 2007.

[3] Paul Wilmott, Jeff Dewynne, Sam Howison, *Option Pricing. Mathematical models and computation*, Oxford Financial Press, 1993.

[4] Rényi Alfréd, *Valószínűségszámítás*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1968.

[5] http://www.math.unl.edu/ sdunbar1/MathematicalFinance/Lessons/ BlackScholes/Solution/solution.xmlx1-80011