Végtelen gráfelméleti tételek

Szakdolgozat

Írta: Hermann Gábor

Matematika BSc

Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Kovács Erika Renáta

MTA-ELTE Egerváry Jenő Komb. Opt. Kut. Csop.

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2012

Köszönetnyilvánítás

Ez úton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek Kovács Erika Renátának, akinek a legvégső tisztázásig terjedő rendszeres útmutatásai, tanácsai, értelmezést segítő példái segítették szakdolgozatom elkészülését. Külön köszönet, hogy külföldön tartózkodása alatt is rengeteget foglalkozott a dolgozattal, valamint időt szakított a konzultációkra.

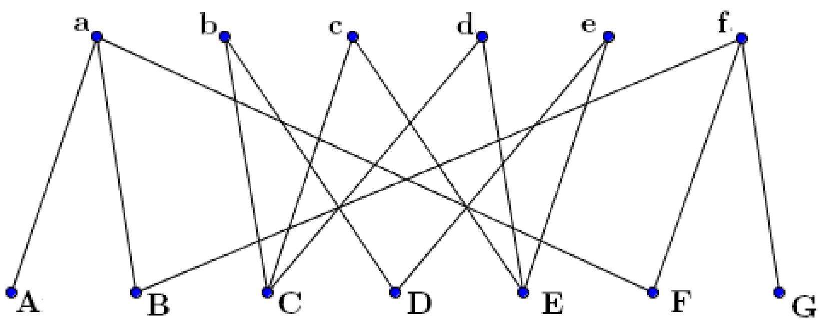
Budapest, 2012. május

Hermann Gábor

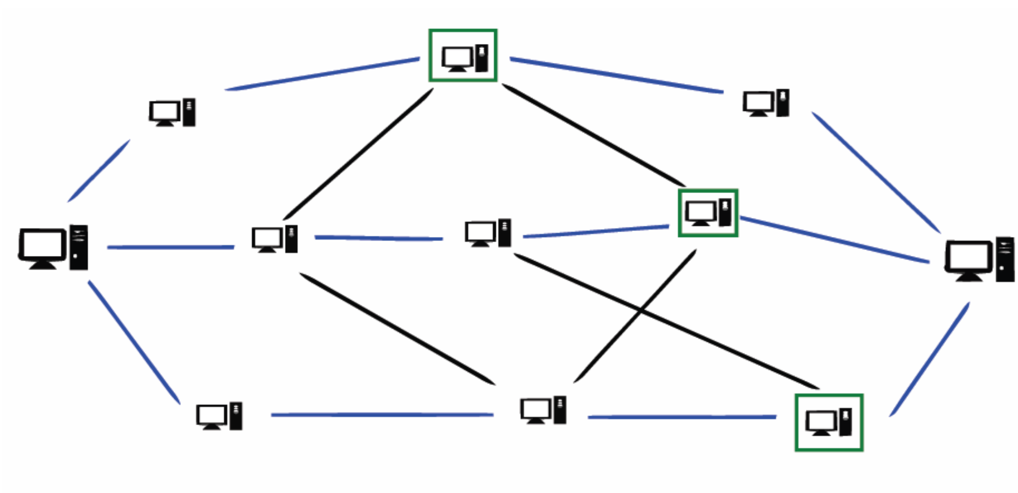
Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Egy cég állásajánlatokat hirdet, melyekre várja a pályázatokat, egy személy több különböző állást is megpályázhat. Vajon a jelentkezőkkel fel tudja a cég tölteni az összes állást? Ha igen, akkor hogyan válassza ki a pozíciókra a jelentkezőket, hogy mindegyik be legyen töltve? Ha nem, akkor maximálisan hány állás tölthető be? A kérdéseinkre könnyedén megkaphatjuk a választ, ha a problémát egy páros gráfon ábrázoljuk, melyben az egyik független ponthalmazt a betöltendő pozíciók, a másikat a jelentkezők alkotják, és két pontot akkor tekintünk szomszédosnak, ha az adott jelentkező megpályázza az adott állást. *Kőnig* tétele kimondja, hogy a gráfban létezik maximális párosítás, valamint egy (vele megegyező elemszámú) minimális lefogó ponthalmaz, és a jól ismert alternáló utas algoritmussal meg is találhatjuk a maximális párosítást, mely megadja nekünk a pályázók optimális munkákra való elosztását. Alábbi ábránk egy konkrét esetet mutat be, melyben a kis betűkkel jelölt állások nem tölthetők fel teljesen a nagy betűvel jelölt jelentkezőkkel, ugyanis a $\{b, c, d, e\}$ állásokra összesen csak hárman $\{C, D, E\}$ jelentkeztek.



Egy másik, az életben talán gyakrabban felmerülő probléma egy kapcsolat biztonságának kérdése. Vegyünk például egy számítógép-hálózatot, melyben a különböző számítógépek különböző firewall beállításai miatt egyes számítógépek között lehetséges fájlok átvitele, más számítógépek között viszont nem, azonban két gép közötti fájlátvitelhez a többi számítógépet is fel tudjuk használni. Kérdés, hogy két számítógép között mennyire biztonságos a kapcsolat, azaz maximum hány számítógép kiesése esetén biztosított a kapcsolat? Ezt a problémát is tudjuk modellezni gráffal, kérdésünkre pedig *Menger* tétele adja meg a választ, ugyanis kimondja, hogy mindenképp létezik két pont között független utak halmaza, valamint vele megegyező elemszámú, a két pont közötti összes utat elvágó ponthalmaz. Ennek a két halmaznak az elemszáma lesz a válasz kérdésünkre.



A fenti esetek mindegyikében véges halmazokat vizsgáltunk, kérdéseinkre pedig a gráfelméleti tételek megadták a választ. Mi van azonban abban az esetben, ha a modellünk egy végtelen gráf? Vajon a véges gráfokra kimondott tételek igazak végtelen esetekben is? A válasz nem triviális, ugyanis a véges esetekben definiált fogalmak, a használt bizonyítási technikák többsége közvetlenül nem alkalmazhatóak végtelen gráfokra, nézzünk néhány példát.

Több tételünk foglalkozik maximális számú független élhalmazokkal, ám mit is jelent végtelenben az a szó, hogy maximális? Két végtelen halmaz közül melyik a nagyobb? A javító utak módszere véges gráfoknál több esetben is megfelelő algoritmusnak bizonyult, végtelen utakat tudunk javítani?

A dolgozatban átfogalmazzuk az ismert, véges gráfokra kimondott tételeket. Mivel már előbb is említettük, hogy végtelenben nehéz értelmezni a maximum fogalmát, a kiterjesztésnél a két halmaz egymásra való illeszkedésére fogunk támaszkodni. Természetesen az illeszkedés a véges gráfoknál is felválthatja a minimum és maximum fogalmát, ennek megfelelően a véges gráfokra kimondott tételeknek is megadjuk egy ekvivalens, illeszkedéses változatát. A tételek bizonyításánál ugyancsak több olyan elem van, melyet fel kell váltanunk egy alternatív módszerrel, ilyen például az alternáló utas algoritmus, a dolgozat fejezeteiben ezekre a módszerekre is fény derül majd.

2. Néhány gráfelméleti tétel véges gráfokra

2.1. Fogalmak bevezetése

Legyen G=(V,E) egy egyszerű gráf, ahol V elemeit pontok, E elemeit pedig V-ből képzett rendezetlen párok alkotják, melyeket éleknek nevezünk.

Az a_1,$a_2$$\in$ V pontok **szomszédosak**, ha $(a_1,a_2) \in E$, és **függetlenek**, ha $(a_1,a_2) \notin E$ (amennyiben egy pont az összes többitől független, akkor **izolált**). Egy $H \subseteq V$ ponthalmaz szomszédsági halmazát $\Gamma(H)$-val jelöljük, azaz $\Gamma(H) = \{p \in V | \exists h \in H : ph \in E\}$. Azt mondjuk, hogy $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$ $(n \geq 2)$ pontok **függetlenek**, ha páronként függetlenek. A pontokhoz hasonlóan éleket függetlennek nevezünk, ha páronként nincsenek közös végpontjaik. A független éleket párosításnak is nevezzük, maximális számukat ν_{max}-szal jelöljük. Ha egy párosítás $S \subseteq V$ ponthalmaz minden pontját tartalmazza, akkor azt mondjuk, hogy a párosítás fedi S-t.

A gráf pontjainak egy halmazát **lefogó ponthalmaznak** nevezzük, amennyiben a gráf minden élének legalább egyik végpontját tartalmazza. A lefogó ponthalmaz minimális elemszámát τ_{min}-nel jelöljük.

Az A=$(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ $a_i \in V$ i=$1, 2, \ldots, m$ rendezett halmazokat, ahol $(a_\mu$,$a_{\mu+1}) \in E$ $(1 \leq \mu < m)$, **utaknak** nevezzük. Egy út állhat egyetlen tetszőleges pontból is, vagy lehet üres (ekkor $A = \emptyset$). (A dolgozatban az a kezdőpontú, b végpontú utakat egyszerűen ***ab*-útnak** fogjuk nevezni.) Az A=$(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ és B=$(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ $a_i, b_j \in V$ i=$1, \ldots, m$, j=$1, \ldots, n$ utak **függetlenek**, ha $a_i$$\neq$$b_j$ i=$1, \ldots, m$, j=$1, \ldots, n$. Az $A_1, A_2, \ldots, A_m$ $(m \geq 2)$ utak **függetlenek**, ha páronként függetlenek.

A gráf pontjainak halmaza egyértelműen felbontható olyan V_i $(i \geq 1)$ ponthalmazokra, hogy bármely $a, b \in V_i$-re létezik ab-út, viszont bármely $a \in V_i$ és $p \notin V_i$ között nem létezik ap-út. Ezeket a V_i ponthalmazokat nevezzük a gráf összefüggőségi komponenseinek.

2.2. Menger-tétel

A következő részben a független utak és lefogó ponthalmazok kapcsolatával foglalkozunk. A bevezetésben feltett kérdésünkre is választ kaphatunk, melyben Menger tétele lesz segítségünkre. A tétel kimondása előtt tisztázunk néhány fogalmat.

Már bevezettük az ab-út fogalmát. Ebben a fejezetben rögzítünk a és b pontokat, és feltesszük, hogy függetlenek (azaz nem megy közöttük él). Legyen $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ út, $aa_1, a_mb \in E$, $a_i \in V$ $(i = 1, \ldots, m)$, $a, b \notin A$ és $m \geq 1$, ekkor egy ab-utat $aAb = (a, a_1, \ldots, a_m, b)$-vel fogjuk jelölni. Az aA_1b és aA_2b utak függetlenek, ha A_1 és A_2 utak függetlenek. Ennek megfelelően **független ab-utak maximális számát** κ-val fogjuk jelölni, az **összes ab-utat elvágó pontok minimális számát** pedig α-val.

2.2.1. Tétel (Menger, min-max változat). *Legyen G=(V, E) gráf, a és b rögzített pontok. Ekkor:*

$$\kappa = \alpha$$

Azaz a páronként független ab-utak maximális száma megegyezik az összes ab-utat elvágó pontok minimális számával.

Az ismert, *Menger* által adott alternáló utas bizonyítás egy V elemszámán alapuló indukció, amely azt jelenti, hogy bármely $||V|| = n$, $n \in \mathbb{N}$ méretű gráfra alkalmazható, végtelenre azonban nem. A tételre *Gallai* által adott bizonyítás előnye, hogy nem induktív, így egy sokkal jobb kiindulópontja a végtelen esetekre való bizonyításnak.

2.2.1. Gallai bizonyítása Menger tételére

Bizonyítás:[1]

Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ páronként független utak, melyekre aA_ib ab-út

[1]Forrás: [1]

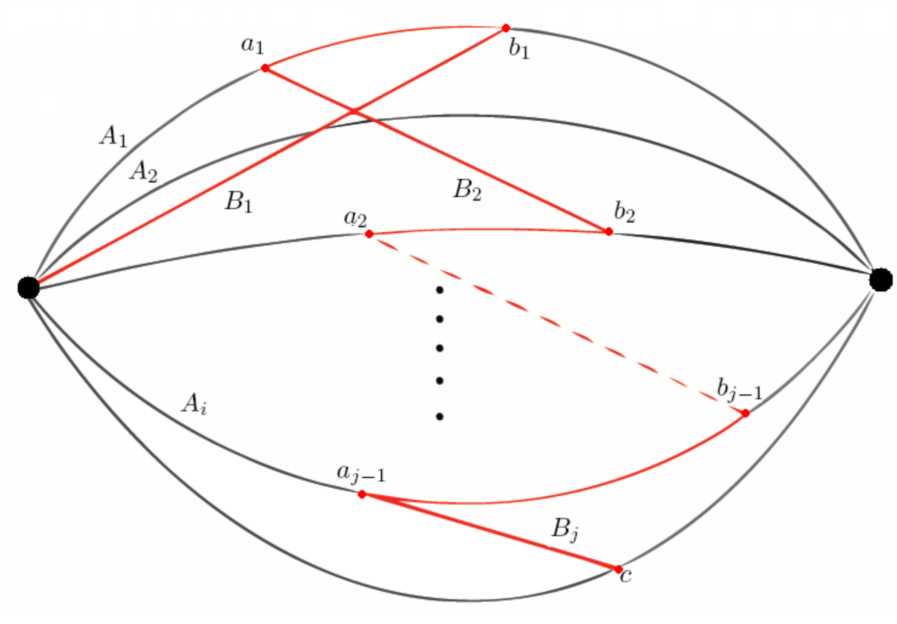
($i = 1, \ldots, n$), és jelöljük ezen A_i utak halmazát U-val. Tegyük fel, hogy n maximális. Az világos, hogy $\alpha \geq \kappa$, ugyanis n független út lefogásához biztosan kell n db különböző pont, így elég azt belátnunk, hogy $\alpha \leq \kappa$. Ennek igazolására bevezetünk két fogalmat:

Legyen a $a_i < a_j$ tranzitív reláció a következőképp definiálva:

Ha a_i és a_j különböző pontjai egy aAb útnak ($A \in U$), valamint $i < j$, akkor $a_i < a_j$ (azaz "a_i után áll a_j").

Azt mondjuk, hogy egy c pont **elérhető** (a-ból), ha léteznek olyan B_β utak, valamint a_β, b_β pontok ($1 \leq \beta \leq m$), melyekre:

$$\begin{cases} a_\beta B_\beta b_\beta & (1 \leq \beta \leq m) \\ B_\beta \bigcap A = \emptyset & (\forall A \in U, 1 \leq \beta \leq m) \\ a_1 = a, b_m = c & \\ b_\beta > a_{\beta+1} & (1 \leq \beta < m) \end{cases}$$



A fenti definíciók alapján két esetet fogunk vizsgálni:

1.eset:

Megmutatjuk, hogy ha b nem elérhető, akkor létezik U-n az összes ab-utat fedő ponthalmaz, melyben minden pont pontosan egy ab-úton fekszik.

2.2.1. Lemma. *Ha b nem elérhető, akkor létezik az összes ab-utat elvágó ponthalmaz, melynek minden pontja U valamely A_i útján fekszik, és minden A_i út az elvágó ponthalmaz pontosan egyik pontját tartalmazza.*

Bizonyítás:

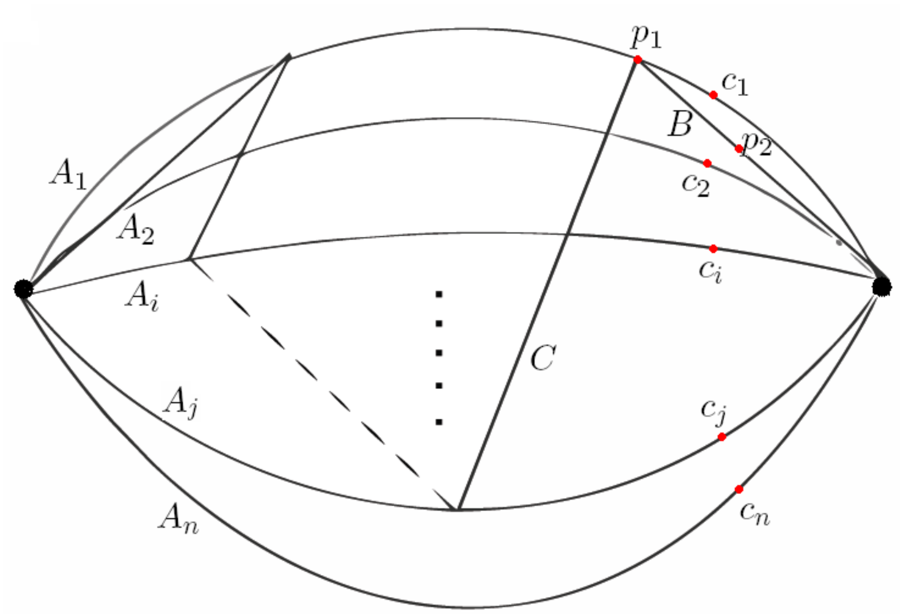
Tegyük fel, hogy b nem elérhető. Bármely $A_i \in U$ úton van elérhető pont, ugyanis az $a\emptyset c$ azt jelenti, hogy c elérhető ($m = 1$ eset), ekkor $B_1 = \emptyset$, így $c \in A_i$ valamely $A_i \in U$-ra.

Legyen c_i minden $A_i \in U$ úton az utolsó elérhető pont, azaz amelyre igaz, hogy $\nexists\, v \in V : c_i < v < b$. Jelöljük ezen pontok halmazát S-sel. Ha belátjuk, hogy S egy összes ab-utat elvágó ponthalmaz, akkor készen vagyunk:

2.2.2. Lemma. *Az $S = \{c_i : 1 \leq i \leq n\}$ halmaz egy összes ab-utat elvágó ponthalmaz.*

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy S nem egy összes ab-utat elvágó ponthalmaz, ekkor létezik C út, melyre aCb ab-út, és független S-től. Legyen p_1 az utolsó pont C-n, melyre fennáll $p_1 < c_i$ valamely $c_i \in S$-re, mondjuk c_1-re. Feltehetjük, hogy van ilyen p_1 pont, ugyanis ha nincsen, akkor az első p pont C-n, amely találkozik valamely A_i úttal olyan, hogy $p = c_i$, ugyanis az első ilyen pont elérhető az a-t és p-t összekötő szakaszon keresztül, és feltettük, hogy c_i utolsó elérhető pont. Ezt pontosan azt jelentené, hogy bármely ab-út találkozik S-beli ponttal, azaz S elvágó ponthalmaz. Tegyük akkor fel, hogy létezik p_1, és legyen p_2 C-n a p_1-et követő első pont, melyre $c_i \leq p_2$ fennáll valamely $c_i \in S$-re, mondjuk c_2-re. Feltehetjük, hogy létezik ilyen p_2 pont, ugyanis ha nem létezne, akkor mivel c_1 elérhető, a rendszerhez hozzácsatolva a $c_1 p_1$ utat, p_1 pontot és $p_1 b$ utat b elérhető lenne. Legyen B a C-n p_1-et és p_2-t összekötő útszakasz. Világos, hogy $B \bigcap A_i = \emptyset$ $(\forall A_i \in U)$



B független az U-beli utaktól, ugyanis ha volna olyan p, melyre $p \in B$ és $p \in A_i$ valamely $A_i \in U$-ra, akkor $p < c_i$ vagy $p > c_i$ fennálna a megfelelő $c_i \in S$-re. Ha $p < c_i$, akkor találtunk egy C-n p_1 után álló p pontot, melyre $p < c_i$ valamely $c_i \in S$-re, ami p_1 definíciója miatt lehetetlen. Ha $p > c_i$, akkor találtunk C-n egy p_2 előtt álló p pontot, melyre $p > c_i$ valamely $c_i \in S$-re, ami p_2 definíciója miatt lehetetlen.

Mivel c_1 elérhető, a definíció szerint léteznek B_β utak, valamint $a_\beta, b_\beta \in V$ pontok, melyekre:

$$\begin{cases} a_\beta B_\beta b_\beta & (1 \leq \beta \leq m) \\ a_1 = a, b_m = c_1 & \\ b_\beta > a_{\beta+1} & (1 \leq \beta < m) \end{cases}$$

Ezt kiegészíthetjük $p_1 B p_2$-vel úgy, hogy $b_m = c_1 > p_1 = a_{m+1}$, $B_{m+1} = B$ és $b_{m+1} = p_2$, azaz p_2 elérhető.

Mivel c_2 definíciója alapján A_2-n a maximális elérhető pont, így $p_2 \leq c_2$. Emellett p_2-t úgy választottuk, hogy $p_2 \geq c_2 \Rightarrow p_2 = c_2$, ez ellentmond a feltételnek, miszerint C független S-től.

A fentiekből az következik, hogy tetszőleges C út, melyre aCb ab-út tartalmazza valamely $c_i \in S$ pontot, azaz S minden ab-utat elvágó ponthalmaz, tehát a 2.2.2. Lemmát bebizonyítottuk, azaz ekkor $\alpha \leq \kappa$.

2.eset:

Belátjuk, hogy amennyiben b elérhető, bővíteni tudjuk a független utak számát, azaz U nem maximális.

2.2.3. Lemma. *Ha b elérhető, akkor létezik P ab-út, mely független U-tól.*

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy b elérhető. Ekkor léteznek B_β utak, valamint $a_\beta, b_\beta \in V$ pontok, melyekre:

$$\begin{cases} a_\beta B_\beta b_\beta & (1 \leq \beta \leq m) \\ a_1 = a, b_m = b & \\ b_\beta > a_{\beta+1} & (1 \leq \beta < m) \end{cases}$$

Válasszunk egy olyan rendszert, ahol m minimális. Igazolunk néhány állítást a B_β utakkal és a a_β, b_β pontokkal kapcsolatban:

Állítás:

$B_\chi \cap B_\psi = \emptyset$ $(1 \leq \chi < \psi \leq m)$

Ha létezne χ, ψ melyekre nem igaz az előző állítás, akkor $\exists$ B': $a_\chi B' b_\psi$.

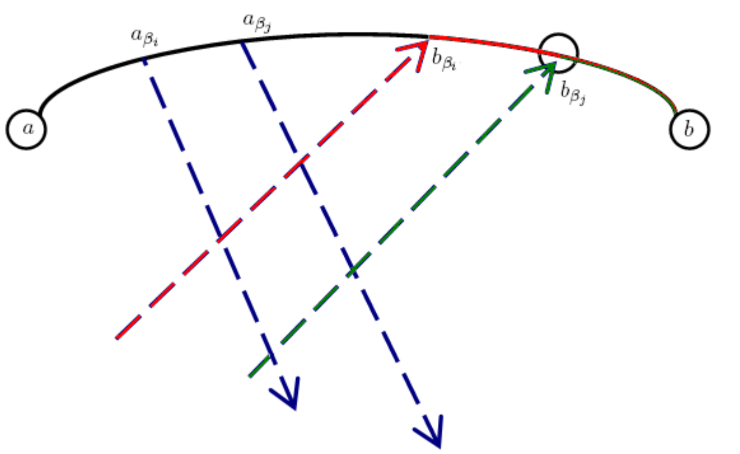
Ekkor fennáll:

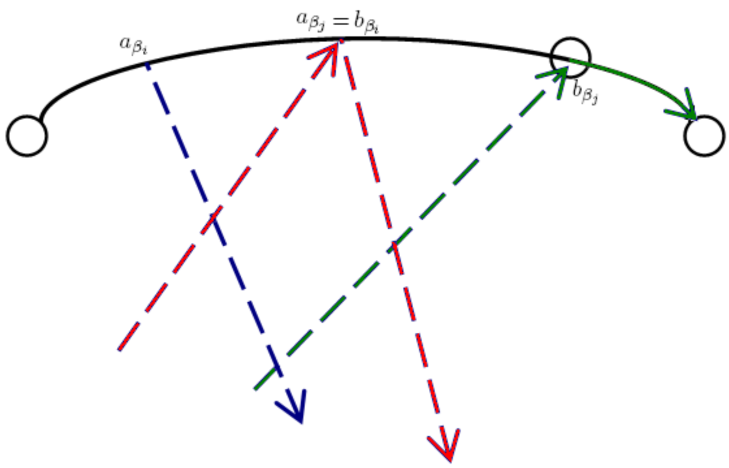
$$\begin{cases} a_\gamma B_\gamma b_\gamma & (1 \leq \gamma < \chi) \\ a_\chi B' b_\psi & \\ a_\delta B_\delta b_\delta & (\psi < \delta \leq m) \end{cases}$$

Azaz $m' = (\chi - 1) + 1 + (m - \psi) = m - (\psi - \chi) < m$ (ugyanis $\psi > \chi$)

Ez ellentmondás, hiszen m-et minimálisnak választottuk, tehát B_β utak páronként függetlenek.

Azt is be kell látnunk, hogy az $A_i \in U$ utak azon részei, melyek a $b_\beta, a_{\beta+1}$ $(1 \leq \beta < m)$ pontokat kötik össze, legfeljebb a végpontokban találkozhatnak, ugyanis ha valamely $A_i \in U$-n létezik b_{β_i}, b_{β_j} (mondjuk $b_{\beta_i} < b_{\beta_j}$), hogy $a_{\beta_j} < b_{\beta_i} < b_{\beta_j}$, akkor b_{β_j} pontban 2 út biztosan találkozni fog (ahogyan az ábra is mutatja). A végpontokban ezen részek találkozhatnak.





Állítás:

$A_i \in U$ azon részei, melyek $b_\beta, a_{\beta+1}$ $(1 \leq \beta < m)$ pontokat kötik össze, legfeljebb a végpontokban találkozhatnak.

Valójában ennél többet is be fogunk látni, igazoljuk, hogy nem létezik ϑ, ι:

$a_\iota < b_\vartheta$ és $3 \leq \vartheta + 2 \leq \iota \leq m$

Ha létezne ι és ϑ, melyek kielégítik az előző feltételt, akkor fennálna a következő:

$$\begin{cases} a_\gamma B_\gamma b_\gamma & (1 \leq \gamma \leq \vartheta) \\ a_\delta B_\delta b_\delta & (\iota \leq \delta \leq m) \end{cases}$$

Azaz $m' = \vartheta + (m - \iota + 1) = m - (\iota - \vartheta - 1) < m$ (ugyanis $\iota > \vartheta + 2 - 1$)

Ez m minimális választása miatt ellentmondás, tehát $b_\vartheta \not> a_\iota$

$\Rightarrow$ ha $1 \leq \vartheta < \iota < m$, és ha ezen kívül $a_{\vartheta+1}$ és $a_{\iota+1}$ ugyan azon az A_i-n vannak, akkor $a_{\vartheta+1} < b_\vartheta \leq a_{\iota+1} < b_\iota$, amivel igazoltuk a feltevésünket.

Állítás:

$a_\beta \neq a$ $1 < \beta \leq m$-re

Ez szinte triviális, ugyanis ha $\exists\ \beta_0 > 1$:

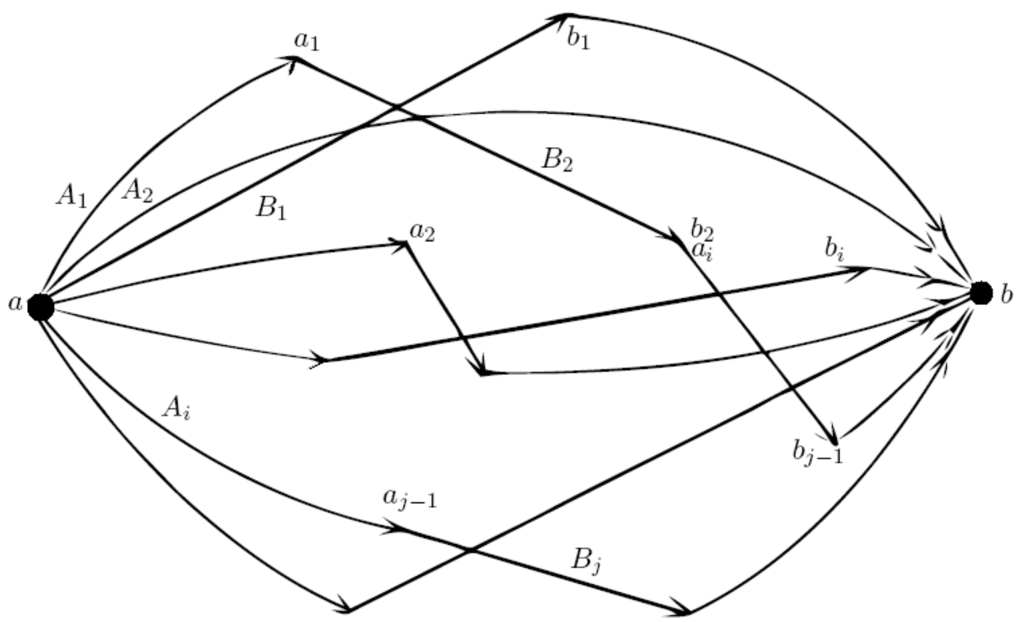
$$\begin{cases} a_\beta B_\beta b_\beta & (\beta_0 \leq \beta \leq m) \\ a_{\beta_0} = a, b_m = b & \end{cases}$$

Ekkor ismét rácáfolnánk m minimalitására, tehát a feltevésünk igaz.

(A $b_\beta \neq b$ $(1 \leq \beta < m)$ hasonlóan bizonyítható.)

Ezek alapján belátjuk, hogy b csak akkor elérhető, ha a független utak száma nem maximális, azaz az eredeti n független, és a fent definiált útból létre tudunk hozni $n+1$ független utat.

Először töröljük $\forall A_i \in U$ azon szakaszait, melyek $b_\beta, a_{\beta+1}$ $(1 \leq \beta < m)$ pontokat kötik össze, előbb beláttuk, hogy ezek a szakaszok csak a végpontokban találkozhatnak, így ezt egyértelműen meg tudjuk tenni. A törlések következtében feldarabolt A_i út részeit a-ból indulva számozzuk meg, és jelöljük őket A_i^j-vel, ahol $j = 1, 2, \ldots$ jelenti a szakasz sorszámát. Ezen szakaszok halmazát jelöljük U'-vel. Ezután irányítsuk a gráf éleit oly módon, hogy az U'-beli éleket irányítsuk az a-tól távolabbi pont, azaz b felé. A B_β utak éleit irányítsuk a megfelelő b_β pont felé. Olyan irányított utakat kapok, melyben a és b kivételével minden pont befoka és kifoka 1.



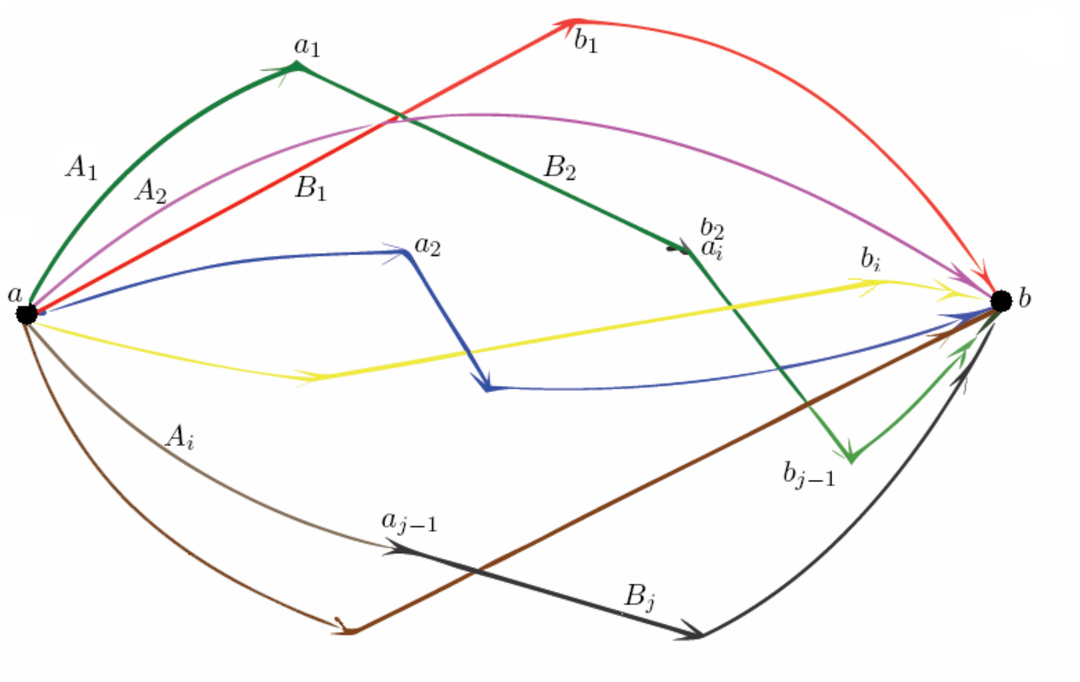
Állítás:

A fenti módszerrel $n + 1db$ egyértelmű, független irányított ab-utat kaptunk

Bizonyítás:

Bármely irányított $\overrightarrow{A_i^1}$-n $(i = 1, \ldots, n)$ elindulva egy egyértelmű irányított úton jutunk el b-be. Mivel minden pont befoka és kifoka 1, az utak kezdőpontja a, így nem alakulhat ki kör, minden pntból eljuthatunk b-be. Az egyértelműség

oka, hogy $\forall \overrightarrow{A_i^j} \in U'$ végpontja valamely a_β pont, amely egyértelműen meghatározza az irányított $\overrightarrow{B_\beta}$ utat, melyen továbbhaladunk (amelynek a kezdőpontja).
A $\overrightarrow{B_\beta}$ irányított utak végpontja minden esetben a megfelelő b_β pont, amely pedig egyértelműen meghatározza a következő $\overrightarrow{A_i^j} \in U'$-t, melyen továbbhaladunk (egy egyértelmű A_i-nek a pontja, és egy egyértelmű A_i^j-nek a kezdőpontja).
Így n db utat kaptunk, belátjuk, hogy ezek függetlenek:
Azt már beláttuk, hogy az irányított utak $\overrightarrow{B_\beta}$ szakaszai függetlenek, hasonlóan $\overrightarrow{A_i^j} \in U'$ szakaszai is triviálisan függetlenek, ugyanis azokat eredetileg is függetlennek definiáltuk, mely a szakaszok törlésével nem változott meg. Ez alapján elég azt belátnunk, hogy minden irányított szakasz, valamint a_β és b_β pont legfeljebb egy irányított ab-útnak lehet a része.
Tegyük fel, hogy ez nem igaz, azaz létezik olyan szakasz vagy pont, amely több irányított ab-úton is rajta van. Az egyértelműség miatt az ab-utak a közös szakasztól kezdve b pontig teljesen meg fognak egyezni. Tegyük fel, hogy nem teljesen egyeznek meg, azaz van olyan a_β vagy b_β pont, ahol találkoznak. Az a_β pont esetében ez azt jelentené, hogy a_β több különböző $\overrightarrow{A_i^j} \in U'$ végpontja, ami az irányított szakaszok függetlensége miatt lehetetlen. A b_β pontban való találkozás azt jelentené, hogy egy b_β pont több különböző $\overrightarrow{B_\beta}$ végpontja. Ez azért lehetetlen, mert ekkor $\overrightarrow{B_\beta}$-t követő b_β és $a_{\beta+1}$ közötti szakaszok közül az egyik tartalmazná a másikat, az előbb pedig beláttuk, hogy ez nem lehetséges.
Beláttuk, hogy az $n$db $\overrightarrow{A_i^1}$ $(i = 1, \ldots, n)$ kezdetű egyértelmű irányított ab-út független. Legyen az $n+1$-edik út a $\overrightarrow{B_1}$ szakasszal kezdődő egyértelmű irányított ab-út. Ez az út független az első $n$db úttól, ugyanis az előbb beláttuk, hogy ha valamelyikkel lenne közös szakasza vagy pontja, akkor azzal teljesen megegyezne, ez viszont nem lehetséges, ugyanis a kezdő szakasz a többi esetben valamely $A_i^1 \in U'$ volt, az $n+1$-dik út első szakasza $\overrightarrow{B_1}$.



Beláttuk tehát, hogy ha b pont elérhető, akkor bővíteni tudunk az összes ab-utat elvágó pontok halmazán. Emiatt, ha a halmazunk elemszáma maximális, akkor b nem elérhető, az előbb bebizonyítottuk, hogy ekkor viszont igaz a tételünk, a bizonyítás teljes.

□

A tétel végtelen gráfokra való kiterjesztéséhez magát az állítást is át kell majd fogalmaznunk, ugyanis az állításban szereplő fogalmak, mint például a független ab-utak maximális száma, nem értelmezhetőek végtelen gráfok esetén. Azonban nem elég a tételt átfogalmazni, maga a bizonyítás, habár nem induktív, végtelen gráfokra mégsem megfelelő, ugyanis már a bizonyítás elején feltesszük, hogy U n db A_i utat tartalmaz, valamint a bizonyítás arra a feltevésre épül, hogy n, azaz az A_i független ab-utak száma maximális, ez pedig végtelenben nem értelmezhető. Fel tudjuk használni majd viszont a 2.2.1-lemmát és a 2.2.3-lemmát, ugyanis az elvágó ponthalmaz és a függetlenség végtelen gráfok esetén is értelmezhető fogalmak.

A kiterjesztéshez a maximális független ab-úthalmazok és minimális lefogó ponthalmazok azon tulajdonságát fogjuk felhasználni, hogy *illeszkednek egymásra*, azaz bármely maximális független úthalmazra és bármely minimális lefogó ponthalmazra igaz, hogy az úthalmaz minden útja pontosan egy ponttal találkozik. Gondoljuk meg, hogy ha veszünk egy L lefogó ponthalmazt valamint egy F független úthalmazt, és igaz, hogy minden F-beli út pontosan egy L-beli pontot tartalmaz, és minden L-beli pontot tartalmazza valamely F-beli út, akkor nem létezik L' lefogó ponthalmaz, melynek elemszáma kisebb mint L, ugyanis az biztosan nem fogja le az összes F-beli utat, mivel azok függetlenek, tehát L minimális. Ugyanígy F pedig maximális, ugyanis mivel L lefogó ponthalmaz, nem létezik olyan út, mely független lenne tőle, és mivel minden L-beli pontot tartalmaz valamely F-beli út, nem lehet független F-től sem. A *maximum* és *minimum* egyenlősége tehát pontosan azt jelenti, hogy létezik olyan F és L, melyek illeszkednek egymásra, azaz a 2.2.1.Tétel ekvivalens az alábbival, melyet egyenesen kiterjeszthető végtelen gráfokra:

2.2.2. Tétel (Menger, illeszkedéses változat). *Legyen G=(V, E) gráf, a és b rögzített pontok. Ekkor G tartalmaz független ab-utak $\mathcal{P}$ halmazát, valamint $\mathcal{P}$-n fekvő minden ab-utat elvágó ponthalmazt (azaz olyan elvágó ponthalmazt, melynek minden pontja $\mathcal{P}$-beli, és minden $\mathcal{P}$-beli út az elvágó ponthalmaz pontosan egy pontját tartalmazza).*

2.3. Páros gráfok

Egy G=(V, E) gráfot **párosnak** nevezünk, ha pontjai két csoportba oszthatóak oly módon, hogy csoporton belül lévő pontok függetlenek (a függetlenség miatt a páros gráfok két színnel színezhetőek, ezért a csoportokat **színosztályokként** is szoktuk említeni). Páros gráfokra a következő jelölést fogjuk használni Amennyiben az egyik színosztály az S, a másik a T elnevezést kapja, akkor a páros gráfot jelölhetjük a következő módon: G=(S, T, E). Páros gráfok esetén egy független élhalmazt párosításnak is nevezhetünk. A következő tételek véges páros gráfokra vonatkoznak.

2.3.1. König-tétel

2.3.1. Tétel (Kőnig, min-max változat). *Legyen* $G=(S,T,E)$ *véges, páros gráf. Ekkor igaz a következő:*

$$\nu_{max} = \tau_{min}$$

Azaz véges páros gráfokban a maximális párosítás mérete megegyezik a minimális lefogó ponthalmaz méretével.

Célunk, hogy később a 2.3.1.Tételre végtelen gráfok esetén is jó bizonyítást adjunk. Véges esetben *König* tétele egyszerűen visszavezethető *Menger* tételére, melyet előbb már bebizonyítottunk, végtelen gráfoknál is ezt a módszert fogjuk választani. Azonban hasonlóan a Menger tételhez, már magát a tétel kimondását sem egyszerű jelenlegi formájában kiterjeszteni a végtelen gráfokra, ugyanis például a maximális párosítás számát nem fogjuk tudni értelmezni. Ezért első lépésben kimondunk egy vele ekvivalens állítást, melyet már könnyebben ki tudunk majd terjeszteni végtelen gráfokra, majd megmutatjuk, hogyan vezethető vissza véges esetben a 2.2.2.Tételre.

2.3.2. Tétel (Kőnig, illeszkedéses változat). *Legyen* $G=(S,T,E)$ *véges, páros gráf. Ekkor igaz a következő:*
Létezik K *független élhalmaz, melyhez létezik* H *lefogó ponthalmaz, hogy minden* $e \in K$ *élre pontosan egy* $p \in H$ *pont illeszkedik.*

Bizonyítás:

Vegyünk fel a gráfhoz egy a és egy b pontot úgy, hogy a-t összekötjük az összes S-beli ponttal, b-t pedig az összes T-beli ponttal, legyen G' a keletkezett gráf. Legyen K' azon aeb-utak halmaza, hogy $e \in K$. Mivel K párosítás, K' független élhalmaz, és a K-t lefogó H ponthalmaz lefogja az összes K'-beli utat. A 2.2.2.Tétel miatt léteznek K' és H halmazok G', azaz K és H halmazok G-ben.

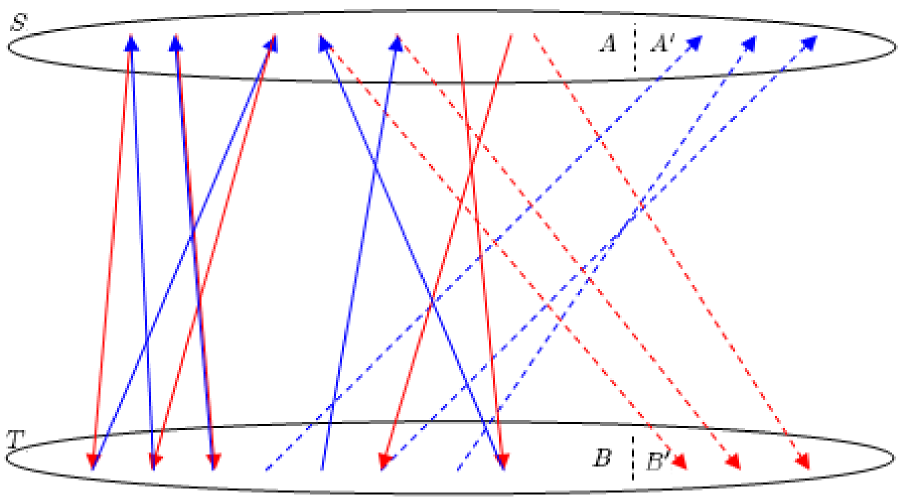
$\square$

2.3.2. Mendelsohn-Dulmage-tétel

2.3.3. Tétel (Mendelsohn-Dulmage). [2] *Legyen* $G=(S,T,E)$ *véges, páros gráf. Legyen* $A \subseteq S$*,* $B \subseteq T$ *ponthalmazok, valamint tegyük fel, hogy létezik* A*-t fedő és létezik* B*-t fedő párosítás. Ekkor létezik* $A \cup B$*-t fedő párosítás is.*

Bizonyítás:

Jelöljük az A-t fedő független élhalmazt F-fel, a B-t fedőt pedig H-val. Első lépésben minden $f \in F$ élnek feleltessünk meg egy $\overrightarrow{ST}$ irányítású $\overrightarrow{f}$ élt, valamint minden $h \in H$ élnek egy $\overrightarrow{TS}$ irányítású $\overrightarrow{h}$ élt. Világos, hogy azonos irányú élek függetlenek. Jelöljük A'-vel a $\Gamma(B) \setminus A$ ponthalmazt, valamint B'-vel a $\Gamma(A) \setminus B$ ponthalmazt. Vegyük azt a $\overrightarrow{G'}=(A \cup A', B \cup B', \overrightarrow{F} \cup \overrightarrow{H})$ gráfot, melyet az előbb definiált irányított utak, valamint kezdő- és végpontjaik alkotnak. A keletkezett gráf a következőképp fog kinézni:



Kékkel jelöltük a H, pirossal az F-beli éleket.

[2]Forrás: [2]

Világos, hogy kizárólag az $A \cup B$ halmazból lép ki irányított él. Az egyirányú élek függetlensége miatt a gráf minden pontja maximum egy irányitott él kezdőpontjapontja, és maximum egy végpontja, azaz a gráfot $A \cup B$-ből induló független irányított utak és körök alkotják. Belátjuk, hogy minden összefüggőségi komponensben fedhetőek az $A \cup B$-beli pontok.
Egy komponens vagy elhagyja $A \cup B$-t és ebben az esetben egy $A' \cup B'$-ben végződő út, vagy nem hagyja el, ekkor (mivel véges sok pont van és minden pont foka maximum kettő) egy páros kört alkot, ebben az esetben a páros kör azonos irányú élei a kör pontjainak egy párosítása. Amennyiben a komponens egy $A' \cup B'$-ben végződő út, az út első élével megegyező irányítású élek az út pontjainak jó párosítását alkotják.

$\square$

A tétel ebben a formában kimondható végtelen gráfokra is, a bizonyítás viszont közvetlenül nem igaz, ugyanis egyrészt feltettük benne, hogy $A \cup B$ véges sok pontot tartalmaz, másrészt az utakról feltettük, hogy van végpontjuk, azaz végesek. Kisebb módosításokkal azonban a bizonyítást is ki tudjuk majd terjeszteni.

3. Tételek kiterjesztése végtelen gráfokra

3.1. Fogalmak bevezetése

Megszámlálhatóan végtelennek *(vagy a továbbiakban végtelennek)* nevezzük azt a $G{=}(V,E)$ gráfot, ahol $V = \{v_i | i \in \mathbb{N}\}$. A gráf pontjainak számozása lehet *egyoldali*, ekkor $V = \{v_0, v_1, v_2, \dots\}$, vagy *kétoldali*, ekkor $V = \{\dots, v_{-1}, v_0, v_1, \dots\}$.

Véges gráfokhoz hasonlóan egy **út** olyan gráfbeli pontok sorozata, melyben az egymást követő pontok között fut él. A pontok számozásához hasonlóan utakat is megadhatunk *kezdőpont definiálásával* $P = \{v_0 v_1 v_2 \dots\}d$, ill. *kezdőpont nélkül* $P = \{\dots v_{-1} v_0 v_1 \dots\}$. Természetesen a végtelen gráfok esetén megengedjük a véges utakat is. A P út által G-ben fedett pontok halmazát $V(P)$-vel jelöljük. Legyen $A, B \subset V$,az olyan utakat, melyek egyik végpontja A, másik B-beli, AB-útnak nevezünk. Legyen P út, $p_1, p_2 \in P$. Ekkor $p_1 P p_2$ a P út p_1 és p_1 közötti részútját jelöli (beleértve a végpontokat). **Lefogó ponthalmazon** olyan $H \subseteq V$ halmazt értünk, hogy $\nexists\, e \in E$ él, hogy $e \notin H(E)$.

3.2. Menger-tétel kiterjesztése

3.2.1. Definíciók, állítások

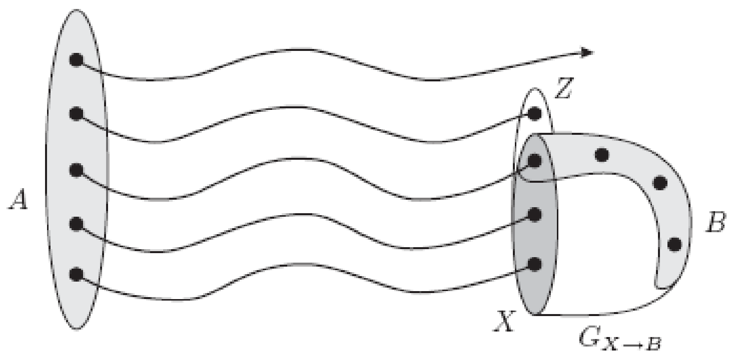
A következőkben véges vagy végtelen $G = (V, E)$ gráfokat fogunk vizsgálni, melyben rögzítünk $A, B \subseteq V$ ponthalmazokat. A G-ben az összes AB -utat elvágó ponthalmazt röviden **elvágó ponthalmaznak** fogunk nevezni. Legyen X tetszőleges G-beli ponthalmaz, ekkor $G - X$ jelöli G azon részgráfját, mely G-ből keletkezik az X-beli pontok (és a hozzájuk tartozó élek) törlésével. Legyen $G_{X \to B}$ a G azon részgráfja, mely az X-beli pontokból és azon $G - X$-beli összefüggőségi komponsensekből áll, melyeknek van közös pontjuk B-vel.

Legyen $\mathcal{W} = (W_a \mid a \in A)$ független utak családja, ahol W_a kezdőpontja

a. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{W}$ egy $A \to B$ **hullám**, ha az utak végpontjainak egy Z halmaza elvágó ponthalmaz. Vegyük észre, hogy egy hullám tartalmazhat végtelen hosszú utat is, melynek nincsen végpontja, így egyik pontja sem Z-beli.

Amennyiben $\mathcal{W}$ hullám, legyen $\mathcal{W}$ **határa** az az $X \subseteq Z$ ponthalmaz, melynek elemeit a $Z \cap B$ és azon pontok alkotják, melyeknek van szomszédjuk $G_{Z \to B} - Z$-ben. Az X határú $\mathcal{W}$ hullámot $(\mathcal{W}, X)$-szel jelöljük. **Állítás:**
A hullám határa elvágó ponthalmaz, valamint tartalmazásra nézve minimális.
Bizonyítás:
Egy $z \in Z$ pont akkor és csak akkor van X-ben, ha összeköthető B-vel egy olyan úton keresztül, melynek z-n kívül nincsen pontja $\mathcal{W}$-ben, azaz X elvágó ponthalmaz. Mivel a $\mathcal{W}$-beli utak függetlenek, a határ bármely pontját elhagyva, nem lesz elvágó ponthalmaz, azaz tartalmazásra nézve minimális.

$\square$



Forrás:[3] R. Diestel

Amennyiben egy $\mathcal{W}$ hullám minden útja véges és $X = Z$ (azaz végpontjainak halmaza egyben a hullám határa), akkor a hullámot **nagy**-nak nevezzük, máskülönben **kicsi**-nek. Egy hullám tehát akkor és csak akkor kicsi, ha tartalmaz végtelen utat, vagy határa a végpontjainak valódi részhalmaza.

Egy $\mathcal{W}$ hullám **szép**, ha tartalmaz legalább egy nem-triviális (azaz nem egy pontból álló) utat, vagy mindegyik út triviális, de határa a végpontjainak (azaz ebben az esetben A-nak) valódi részhalmaza. Egy hullám tehát kizárólag abban az esetben nem szép, ha minden útja triviális, és határa A. Minden kicsi hullám például egy szép hullám, ugyanis vagy tartalmaz végtelen (azaz nem-triviális) utat, vagy határa a végpontjainak valódi részhalmaza, ez esetben nem lehet A. Fontos megjegyezni, hogy bármely G gráfban A és B tetszőleges választásával létezik $A \to B$ hullám (pl.: $(\{a\} | a \in A)$), viszont nem feltétlenül létezik szép hullám.

Legyen $(\mathcal{U}, X)$ egy $A \to B$ hullám G-ben, és $(\mathcal{V}, Y)$ egy $X \to B$ hullám $G_{X \to B}$-ben, ekkor $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ azt jelenti, hogy az $\mathcal{U}$-beli, X-ben végződő független utakhoz hozzákapcsoljuk a $\mathcal{V}$-beli X-ben kezdődő független utakat.

Állítás:

A $\mathcal{W} = \mathcal{U} + \mathcal{V}$ egy $A \to B$ hullám G-ben Y határral.

Bizonyítás:

Ez igaz, ugyanis $\mathcal{W}$ minden A-beli pontot tartalmaz, valamint mivel $\mathcal{V}$ $X \to B$ hullám, minden X-beli pontotot összeköti $\mathcal{V}$ valamely végpontjával, $\mathcal{W}$ végpontjainak halmaza megegyezik $\mathcal{V}$ végpontjainak halmazával, és emiatt határa Y.

$\square$

Definiáljuk a $\leqslant$ relációt a következőképp: legyen $\mathcal{W} = (W_a \mid a \in A)$ és $\mathcal{U} = (U_a \mid a \in A)$ hullám, és azt mondjuk, hogy $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{W}$, azaz $\mathcal{W}$ bővebb $\mathcal{U}$-nál, ha $U_a \subseteq W_a$ $\forall a \in A$-ra.

Legyen $(\mathcal{W}^i, X^i)_{i \in I}$ hullámok lánca, ahol $\mathcal{W}^i = (W_a^i \mid a \in A)$. Legyen $\mathcal{W}^* = (W_a^* \mid a \in A)$, ahol $W_a^* = \bigcup_{i \in I} W_a^i$. Világos, hogy $\mathcal{W}^i \leqslant \mathcal{W}^*$ minden $i \in I$-re, ugyanis mivel $W_a^* = \bigcup_{i \in I} W_a^i$ minden $a \in A$-ra, $W_a^i \subseteq W_a^*$ minden $a \in A$-ra és $i \in I$-re.

Állítás:

A fent definiált $\mathcal{W}^*$ is hullám.

Bizonyítás:

Az állítást indirekt látjuk be. Tegyük fel, hogy $\mathcal{W}^*$ nem hullám, azaz a W_a^* utak nem függetlenek, vagy végpontjainak halmaza nem elvágó ponthalmaz. Ha a W_a^* utak nem függetlenek, akkor létezik egy p pont, mely két különböző útnak is eleme, legyenek ezek $W_{a_1}^*$ és $W_{a_2}^*$. Mivel $p \in W_{a_1}^*$, létezik $W_{a_1}^i$, hogy $p \in W_{a_1}^i$, hasonlóan létezik $W_{a_2}^j$, hogy $p \in W_{a_2}^j$, ez viszont a W_a^i utak függetlensége miatt lehetetlen. Ha végpontjainak halmaza nem elvágó ponthalmaz, akkor létezik olyan R AB-út, mely független tőle. Ekkor létezik W_a^i, mely független R-től, ami szintén lehetetlen, mivel minden i-re W_a^i hullám.

$\square$

A $\mathcal{W}^*$-ot a $\mathcal{W}^i$ hullámok **limeszének** nevezzük.

3.2.2. Aharoni tétele

Véges gráfokról szóló 2.2.1.tételről megállapítottuk, hogy közvetlenül nem terjeszthető ki végtelen gráfokra, viszont megmutattuk, hogy vele ekvivalens a 2.2.2.tétel, ami viszont igen, és melynek végtelen verzióját *Aharoni* bizonyította.

3.2.1. Tétel (Aharoni). [3] *Legyen G tetszőleges gráf, $A, B \subseteq V$, ahol $A = \{a_1, a_2, \dots\}, B = \{b_1, b_2, \dots\}$. Ekkor G tartalmaz független AB-utak $\mathcal{P}$ halmazát, valamint $\mathcal{P}$-n fekvő elvágó ponthalmazt (azaz olyan elvágó ponthalmazt, melynek minden pontja $\mathcal{P}$-beli, és minden $\mathcal{P}$-beli út az elvágó ponthalmaz pontosan egy pontját tartalmazza).*

[3] Forrás:[3]

Bizonyítás:

Bevezettük már a hullám fogalmát, valamint azt is kimondtuk, hogy bármely G gráfra és A, B ponthalmazokra létezik $A \to B$ hullám. Ilyen hullámok egy láncát minden esetben korlátozza az ő limeszük, azaz a *Zorn-lemmát* alkalmazva kapjuk, hogy mivel minden hullámnak létezik felső korlátja, létezik maximális $A \to B$ hullám. Legyen innentől egy maximális hullám $\mathcal{W}$, határa X. A határ egy elvágó ponthalmaz, így a tétel bizonyításához elég belátnunk, hogy minden esetben létezik egy olyan $\mathcal{W}$-től és önmagában független útrendszer, mely X minden pontját összeköti B-vel, ugyanis azt az útrendszert $\mathcal{W}$-hez kapcsolva egy független AB-utak $\mathcal{P}$ halmazát, valamint $\mathcal{P}$-n fekvő elvágó ponthalmazt kapunk.

Belátjuk, hogy ha $\mathcal{W}$ maximális, akkor nem létezik szép $X \to B$ hullám $G_{X \to B}$-ben. Ha ugyanis létezne, akkor vagy létezne a hullámban egy nem-triviális út, vagy az összes útja triviális, határa (X') pedig X-nek valódi részhalmaza lenne. Az első esetben a nem-triviális utat $\mathcal{W}$-hez csatolva egy nála bővebb hullámot kapnánk, ami nem lehetséges, ugyanis $\mathcal{W}$ maximális. A második esetben $(\mathcal{W}, X')$ is hullám lenne, ám a határ minimalitása miatt X' nem lehet valódi részhalmaza X-nek. Elég tehát azt belátni, hogy amennyiben a $G_{X \to B}$ gráfban nincs szép $X \to B$ hullám, abból már következik, hogy létezik X összes pontját B-hez kötő független úthalmaz. Ezt mondja ki a következő lemma:

3.2.1. Lemma. *Ha G-ben nincs szép $A \to B$ hullám, akkor G tartalmaz független AB-utak halmazát, amely az összes A-beli pontot összeköti B-vel.*

A lemma bizonyításához felsoroljuk az A-beli pontokat: $A = \{a_1, a_2, \dots\}$, majd egymás után megkeressük a szükséges P_n utakat: $P_n = a_n \dots b_n$. Ehhez szükségünk lesz egy újabb lemma kimondására, melyhez bevezetünk egy új fogalmat. Legyen $\hat{A}$ G-beli ponthalmaz. Azt mondjuk, hogy $a \notin \hat{A}$ **hozzácsatolható** $(G, \hat{A}, B)$-hez, ha $G - \hat{A}$ tartalmaz egy P aB-utat és egy

$Q \supseteq V(P)$ ponthalmazt, hogy $G - Q$-ban van maximális és nagy $\hat{A} \to B$ hullám.

3.2.2. Lemma. *Legyen $a^* \in A$ és $\hat{A} = A \backslash \{a^*\}$, és tegyük fel, hogy G-ben nincs szép $A \to B$ hullám. Ekkor a^* hozzácsatolható $(G, \hat{A}, B)$-hez.*

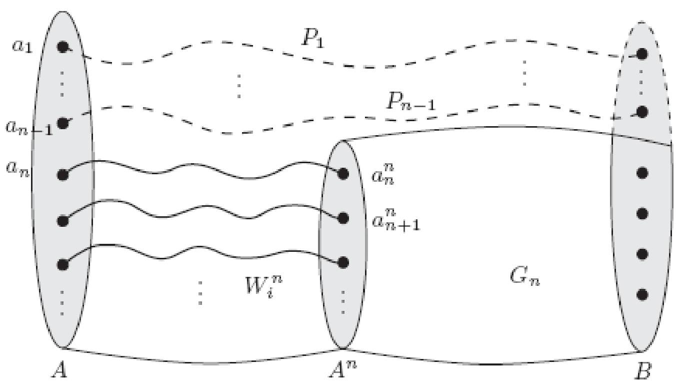
A 3.2.1 Lemma bizonyítása:

Tegyük fel, hogy G nem tartalmaz szép $A \to B$ hullámot. Megmutatjuk, hogy ekkor meg tudjuk konsrtuálni a szükséges független úthalmazt. Legyen $A^n = \{a_n^n, a_{n+1}^n, a_{n+2}^n, \ldots\}$.

Definiálink $G_1, G_2, \ldots \subseteq G$-t, hogy G_n-re igazak a következők:

- G_n tartalmazza az A^n ponthalmazt
- G_n nem tartalmaz szép $A^n \to B$ hullámot
- G tartalmaz független P_i $(i < n)$ AB-utakat, melyek függetlenek G_n-től
- G tartalmaz független W_i^n $(i \geq n)$ AA^n-utakat, melyek függetlenek $G_n - A^n$-től

A definícióban leírt P_i utak alkotják azt a halmazt, mely az összes A-beli pontot összeköti B-vel.



Forrás:[3] R. Diestel

Legyen $G_1 = G$, $a_i^1 = a_i$ és $W_i^1 = \{a_i\}$ $\forall i \geq 1$-re. Mivel G-ben nincs szép $A \to B$ hullám, G_1 kielégíti a definíciót az $n = 1$ esetben.

Tegyük most fel, hogy n-re kielégíthető a definíció. Legyen $\hat{A}^n = A^n \backslash \{a_n^n\}$. Mivel G_n-ben nincsen szép $A^n \to B$ hullám, a 3.2.2 lemma miatt a_n^n hozzácsatolható $(G_n, \hat{A}^n, B)$-hez, azaz létezik $G_n - \hat{A}^n$-ben egy P $a_n^n B$-út és egy $X_n \supseteq V(P)$ halmaz, hogy $G_n - X_n$-ben van maximális és nagy $\hat{A}^n \to B$ hullám, legyen ez $(\mathcal{W}, A^{n+1})$. Legyen $P_n = W_n^n \cup P$. Ha $i \geq n+1$, legyen W_i^{n+1} a W_i^n út hozzákapcsolva az a_i^n végpontját a_i^{n+1}-gyel összekötő $\mathcal{W}$-beli úttal. Mivel $\mathcal{W}$ maximális, nem létezik szép $A^{n+1} \to B$ hullám $G_{n+1} = (G_n - X_n)_{A^{n+1} \to B}$-ben. Továbbá definiáltuk A^{n+1}-et, definiáltuk W_i^{n+1} utakat úgy, hogy azok függetlenek, $(G_n - X_n)_{A^{n+1} \to B}$ definíciója miatt független $G_{n+1} - A_{n+1}$-től, valamint kiegészítettük a P_i úthalmazt P_n-nel, amely független a többi P_i úttól, valamint G_{n+1}-től is, így $n+1$-re is kielégíthető a definíció, amivel a lemmát beláttuk.

$\square$

Most bebizonyítjuk a 3.2.2 lemmát is,ehhez szükségünk lesz egy újabb lemma kimondására, melyet később bizonyítunk:

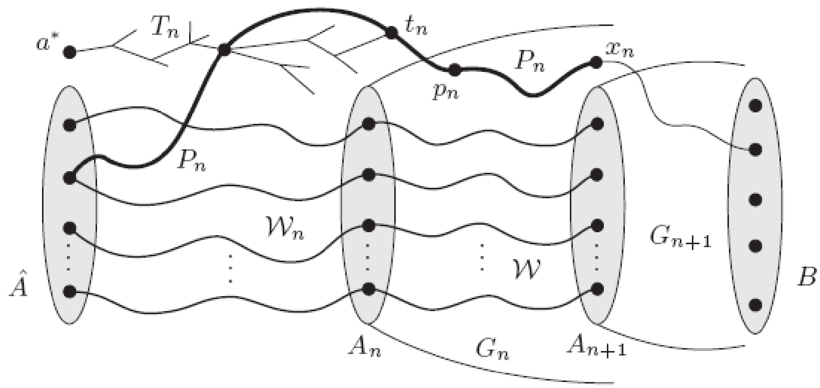
3.2.3. Lemma. *Legyen $x \in V(G - A)$. Ha G-ben nincs szép $A \to B$ hullám, de $G - x$-ben van, akkor minden $A \to B$ hullám $G - x$-ben nagy.*

A 3.2.2 Lemma bizonyítása:

Legyen $a^* \in A$ és $\hat{A} = A \backslash \{a^*\}$, és tegyük fel, hogy G-ben nincs szép $A \to B$ hullám. Első lépésben létrehozunk $a^* \in T_0 \subseteq T_1 \subseteq \dots$ fákat $G - (\hat{A} \cup B)$-ben, valamint $\mathcal{W}_0 \leq \mathcal{W}_1 \leq \dots$ hullámokat G-ben úgy, hogy bármely $\mathcal{W}_n$ hullám maximális és nagy $\hat{A} \to B$ hullám $G - T_n$-ben.

Legyen $\mathcal{W}_0 = (\{a\} | a \in \hat{A})$. Ekkor $\mathcal{W}_0$ egy maximális és nagy $\hat{A} \to B$ hullám $G - a^*$-ban. Indirekt tegyük fel, hogy nem az, ekkor $G - a^*$-ban van szép $\hat{A}{\to}B$ hullám, melyet $\{a^*\}$ triviális úttal kiegészítve, G-ben egy szép hullámot kapunk, mely a lemma feltevése miatt lehetetlen.

Ha $a^* \in B$, akkor mivel $\mathcal{W}_0$ maximális és nagy (azaz Q-t választhatjuk $\{a^*\}$-nak), a^* hozzácsatolható $(G, \hat{A}, B)$-hez. Tegyük fel tehát, hogy $a^* \notin B$. Legyen $T_0 = \{a^*\}$ és $\mathcal{W}_0$ az előbb definiált hullám. Tegyük most fel, hogy T_n-et és $\mathcal{W}_n$-et már definiáltuk, legyen A_n a $\mathcal{W}_n$ hullám végpontjainak halmaza. Mivel $\mathcal{W}_n$ nagy, $\mathcal{W}_n$ határa A_n, és mivel maximális, $G_n = (G-T_n)_{A_n \to B}$-ben nincs szép $A_n{\to}B$ hullám.



Forrás:[3] R. Diestel

Figyeljük meg, hogy A_n nem elvágó ponthalmaz G-ben, ugyanis, ha az lenne, $a^* \notin B$ miatt $\mathcal{W}_n \cup \{a^*\}$ kicsi $A{\to}B$ hullám lenne G-ben, és mivel kicsi, ezért szép is, ez pedig a feltétel miatt nem lehetséges. Emiatt $G - A_n$ tartalmaz egy P_n AB-utat, melynek mindenképp van közös pontja T_n-nel, ugyanis $(\mathcal{W}_n, A_n)$ hullám $G - T_n$-ben, azaz A_n a T_n-belieken kívül az összes AB-utat elvágja. Legyen t_n az utolsó P_n-beli pont T_n-en, p_n pedig a P_n úton t_n-et követő első pont (ilyen p_n pont létezik, ugyanis T_n független B-től, P_n végpontja pedig B-beli). Ekkor igaz, hogy $p_nP_n \subseteq G_n - A_n$ G_n definíciója miatt.

Legyen $P_n' = a^*T_nt_nP_n$. Ez egy a^*B-út $G - \hat{A} - A_n$-ben. Mivel $\mathcal{W}_n$ maximális és nagy hullám $G - T_n$-ben, ha $G_n - p_nP_n$ nem tartalmaz szép

$A_n \to B$ hullámot, akkor $\mathcal{W}_n$ $G - T_n - p_nP_n$-ben is maximális és nagy hullám lesz,azaz a^* hozzácsatolható $(G, \hat{A}, B)$-hez a P_n' a^*B úttal, $Q = V(T_n \cup p_nP_n)$ választással, ekkor ugyanis $G - Q$-ban $\mathcal{W}_n$ maximális és nagy hullám.

A továbbiakban tegyük fel, hogy $G_n - p_nP_n$-ben van szép $A_n \to B$ hullám. Mivel G_n-ben nincs szép $A_n \to B$ hullám, létezik p_nP_n-en x pont, hogy $G_n - p_nP_nx$-ben van szép hullám, legyen x_n az első ilyen pont p_nP_n-en. Ekkor $G_n' = G_n - p_nP_n\dot{x}_n$-ben nincs szép $A_n \to B$ hullám, de $G_n' - x_n$-ben van, így a 3.2.3 miatt minden $A_n \to B$ hullám $G_n' - x_n$-ben, azaz $G_n - p_nP_nx_n$-ben nagy. Ekkor létezik közöttük maximális, jelölje ezt $\mathcal{W}$, és legyen $\mathcal{W}_{n+1} = \mathcal{W}_n + \mathcal{W}$ valamint $T_{n+1} = T_n \cup t_nP_nx_n$. Ekkor $\mathcal{W}_{n+1}$ maximális és nagy $\hat{A} \to B$ hullám $G - T_{n+1}$-ben. Ha $x_n \in B$, akkor T_{n+1} tartalmaz utat, mely a^*-ot B-hez csatolja, ez kielégíti a lemmát $\mathcal{W}_{n+1}$ és $X = V(T_{n+1})$ választással.

Tegyük fel tehát, hogy $x_n \notin B$, azaz $T_{n+1} \subseteq G - (\hat{A} \cup B)$. Legyen $T^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$. Ekkor $\mathcal{W}_n$ $\hat{A} \to B$ hullámok lánca $G - T^*$-ban, legyen $(\mathcal{W}^*, A^*)$ ezeknek egy felső korlátja. Megmutatjuk, hogy A^* nem csak $G - T^*$-ban elvágó ponthalmaz, hanem G-ben is, ekkor ugyanis $(\mathcal{W}^* \cup \{a^*\}, A^*)$ kicsi $A \to B$ hullám G-ben ($a^* \notin B$ miatt) , ami szép, így ellentmondásra jutunk.

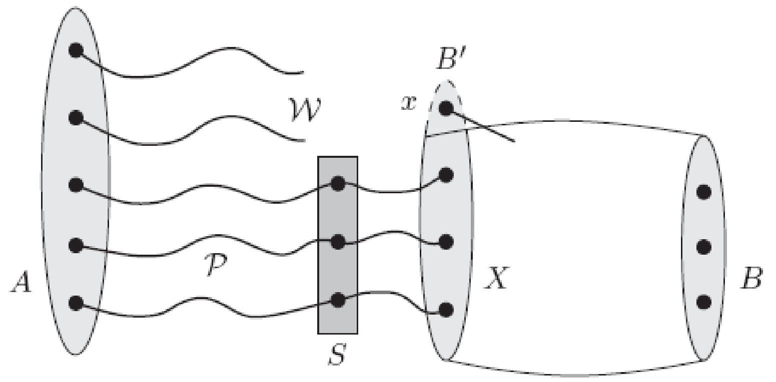
Tegyük fel, hogy létezik Q AB-út $G - A^*$-ban. Legyen t az utolsó T^*-beli pont Q-n. Mivel T^*-nak nincsen közös pontja B-vel, létezik t-t követő p pont Q-n. Mivel T^* definíciója miatt az összes p_n pontot tartalmazza, p-t viszont nem, így $P = a^*T^*tQ$-t nem lehet egyenlő egyik P_n-nel sem. Legyen n elég nagy, hogy $t \in T_n$. Mivel P nem egyezik meg P_n-nel, A_n pedig elvágó ponthalmaz, P-nek a pQ szakaszban, azaz T_n-en kívül van közös pontja A_n-nel, legyen ez a pont q. Mivel q egy P-beli pont, $q \notin A^*$. Legyen W az a $\mathcal{W}_n$-beli út, ami összeköti $\hat{A}$-t q-val, ennek szintén nincsen közös pontja A^*-gal. Ezek szerint WqQ egy $\hat{A}B$-út $G - T^*$-ban, melynek nincsen közös pontja A^*-gal, ami ellentmond A^* definíciójával.

□

Ezzel beláttuk a 3.2.2. lemmát is, a tétel teljes bizonyításához már csak meg kell mutatnunk, hogy ha G-ben nincs szép $A \to B$ hullám, de $G - x$-ben van, akkor minden $A \to B$ hullám $G - x$-ben nagy.

A 3.2.3 Lemma bizonyítása:

Tegyük fel, hogy $G - x$-ben van kicsi $A \to B$ hullám, legyen ez $(\mathcal{W}, X)$. Legyen $B' = X \cup \{x\}$ és jelölje $\mathcal{P}$ az AX-utak halmazát $\mathcal{W}$-ben. Ha G tartalmaz egy S A-t és B'-t elvágó ponthalmazt $\mathcal{P}$-n, akkor $\mathcal{W}$-ben minden $P \in \mathcal{P}$ utat az ő S-ben végződő, A-ban kezdődő részútjukkal helyettesítünk, G-ben egy kicsi (azaz szép) $A \to B$ hullámot kapunk, ami ellentmond a feltételnek.



Forrás:[3] R. Diestel

A 2.2.1.Lemma és a 2.2.3.Lemma miatt G tartalmaz $\mathcal{P}'$ független AB'-utak halmazát $\mathcal{P}$-t kiegészítve, úgy $\mathcal{P}'$ végpontjainak halmaza tartalmazza X-et, valamint x-et is. Emiatt $\mathcal{P}'$-t ki tudjuk egészíteni egy $A \to B$ hullámmá a $\mathcal{P}'$ által fedetlen, A-beli pontok, azaz triviális utak hozzáadásával. Mivel x $\mathcal{P}'$-beli, de nem A-beli, $\mathcal{P}'$ egy szép $A \to B$ hullám, ami ellentmond a feltételnek.

$\square$

3.3. Páros gráfok kiterjesztése

3.3.1. Kőnig-tétel kiterjesztése

A *Menger-tételhez* hasonlóan a *Kőnig-tételt* is a halmazok illeszkedését felhasználva lehet megfogalmazni végtelen esetben.

3.3.1. Tétel (Aharoni). [4] *Legyen G=(S, T, E) végtelen, páros gráf. Ekkor igaz a következő:*
$\exists$ K független élhalmaz, melyhez $\exists$ H lefogó ponthalmaz, hogy $\forall$ $e \in K$ élre pontosan egy $p \in H$ pont illeszkedik.

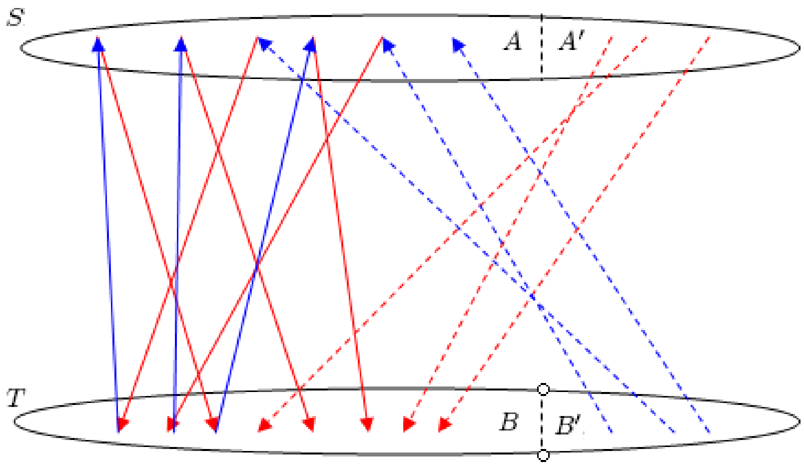
A tétel közvetlenül következik a 3.2.1.tételből, ugyanis annak speciális esete az $A = S$, $B = T$ választással.

3.3.2. Mendelsohn-Dulmage kiterjesztése

3.3.2. Tétel (Aharoni). [5] *Legyen G=(S, T, E) végtelen, páros gráf. Legyen $A \subseteq S$, $B \subseteq T$ ponthalmazok, valamint tegyük fel, hogy létezik A-t fedő és létezik B-t fedő párosítás. Ekkor létezik $A \cup B$-t fedő párosítás is.*

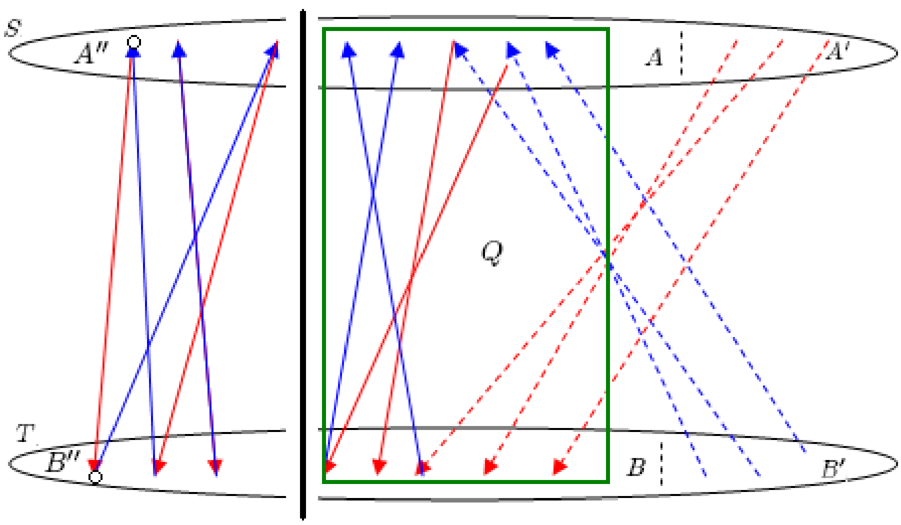
Bizonyítás:
Hasonlóan indulunk el, mint a véges gráfokra való bizonyítás esetén, azonban az élek irányítását másképp választjuk meg:
Jelöljök az A-t fedő független élhalmazt F-fel, a B-t fedőt pedig H-val. Első lépésben minden $f \in F$ élnek feleltessünk meg egy $\overrightarrow{TS}$ irányítású $\overrightarrow{f}$ élt, valamint minden $h \in H$ élnek egy $\overrightarrow{ST}$ irányítású $\overrightarrow{h}$ élt. Világos, hogy azonos irányú élek függetlenek egymással. Jelölük A'-vel a $\Gamma(B) \setminus A$ ponthalmazt, valamint B'-vel a $\Gamma(A) \setminus B$ ponthalmazt. Vegyük azt a $\overrightarrow{G'}$=$(A \cup A', B \cup B', \overrightarrow{F} \cup \overrightarrow{H})$ gráfot, melyet az előbb definiált irányított élek, valamint kezdő- és végpontjaik alkotnak.

[4] Forrás: [2]
[5] Forrás: [2]



Kékkel jelöltük az F, pirossal a H-beli éleket.

Világos, hogy a gráfot egymástól független irányított utak alkotják, valamint, hogy az $A' \cup B'$ halmazba nem lép be irányított él. Jelöljük Q-val az $A' \cup B'$-ből irányított úton elérhető $A \cup B$-beli pontok halmazát. Legyen $A''{=}A \setminus Q$, $B''{=}B \setminus Q$, és bontsuk két részre a gráfunkat:



Világos, hogy Q-ból sem A''-be, sem B''-be nem megy irányított él, ugyanis az $A'' \cup B''$-beli pontok nem érhetőek el Q-ból. Fordítva is igaz, azaz $A'' \cup B''$-ból sem megy Q-ba irányított él, ugyanis a gráf minden pontjának befoka maximum 1, a Q-beli élek pedig elérhetőek, azaz a rájuk mutató irányított élek kezdőpontja is elérhető pont, tehát nem $A'' \cup B''$-beli. Az $A'' \cup B''$ halmaz tehát független Q-tól, így külön-külön vizsgálhatjuk párosíthatóságukat.

Első lépésben megmutatjuk, hogy Q párosítható. A Q-beli pontok irányított utakon elérhetőek, ezek az utak pedig függetlenek egymástól, így annyit kell csak tennünk, hogy az utakat egymástól függetlenül párosítjuk. Ezt a végtelen utak esetén könnyedén megtehetjük (ugyanis minden út $A' \cup B'$-beli kezdőpontú, így azt sem kell meglkötnünk, hogy az első él irányának megfelelő éleket kell választanunk), véges utak esetén pedig egszerűen az utolsó élnek megfelelő irányítású élek alkotják a párosítást..

Már csak annyit kell belátnunk, hogy $A'' \cup B''$ fedhető párosítással. Ehhez azt mutatjuk meg, hogy az $A \cap A''$-t fedő párosítás például ilyen.

Állítás:

Az $A \cap A''$-t fedő párosítás egy $A'' \cup B''$-t párosító élhalmaz.

Bizonyítás:

Világos, hogy minden A''-beli pontba kizárólag B''-beli pontból vezethet él, azaz $\nexists p \in A''$, melynek nincsen B''-beli szomszédja.

$\square$

Irodalomjegyzék

[1] T. Gallai: *Ein neuer Beweis eines mengerischen Satzes*, 13 April, 1938.

[2] R. Aharoni: *Infinite matching theory*, 15 January, 1990.

[3] R. Diestel: *Graph Theory*, Chapter 8., 3. kiadás 2005.