Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi kar

Elliptikus függvények és alkalmazásaik

Szakdolgozat

Írta: Gimes Balázs

Matematika BSc
Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Tóth Árpád

egyetemi docens

Analízis Tanszék

Budapest, 2013

Tartalomjegyzék

Bevezető

Az elliptikus -azaz kétszeresen periodikus- függvények elmélete a XIX. század matematikájának egyik legszebb fejezete. A XVIII. században Fagnano, illetve Euler bizonyos geometriai problémák -például ellipszis, lemniszkáta ívhosszának számítása (ez magyarázza az elliptikus függvény elnevezést)- során speciális integrálokat, későbbi nevükön elliptikus integrálokat kezdtek vizsgálni, melyekre számos érdekes összefüggést, például addíciós képleteket fedeztek fel. A XIX. század elején egymástól függetlenül Gauss (eredményét nem publikálva), illetve Abel is eljutott ahhoz az ötlethez, hogy ezen integrálokat invertálják, az így kapott függvényeket nevezték először elliptikus függvényeknek. A század harmincas éveitől kezdve Jacobi, majd később Weierstrass dolgozta ki ezeknek a függvényeknek a mély elméletét. Az elliptikus függvények témaköre nem izolált érdekessége a matematikának, kapcsolódik egyéb speciális függvények (például a theta-függvények, vagy a moduláris formák) elméletéhez, de önmagában is érdekes és gazdag terület. Nagyon sok területen alkalmazták e függvényeket problémák megoldása során, a legjellegzetesebb alkalmazási területek között említhetjük az elméleti mechanikát, elemi és algebrai geometriát, számelméletet, de a valószínűségszámítás területén is előfordult alkalmazás, illetve a jelenleg is rendkívüli népszerűségű, aktívan kutatott terület, az elliptikus görbék elmélete is kapcsolódik hozzájuk.

A dolgozat első fejezetében részletesen megvizsgálunk egy mechanikai problémát motiváció gyanánt, az egyszerű ingát. Az inga mozgásegyenletének vizsgálata során természetes módon kerülnek elő konkrét elliptikus függvények (a Jacobi-féle elliptikus függvények), ezek tulajdonságait is röviden összefoglaljuk. A második fejezet az általános, absztrakt elméletet tárgyalja: általános tételeket bizonyítunk, majd bevezetjük a Weierstrass-féle elliptikus függvényt, melyet alaposabban is szemügyre veszünk. Ez azért is nevezetes függvény, mert e függvény és deriváltja segítségével az összes elliptikus függvény előállítható. A harmadik fejezetben két alkalmazást mutatunk be: az első az ellipszoid felszínének a számítása, ez a Jacobi-féle elliptikus függvények hasznosságát illusztrálja, a másik példa mechanikai, a gömbi inga egyenletének a levezetése, ez a Weierstrass-féle elliptikus függvény alkalmazhatóságára példa.

1. fejezet

Az egyszerű inga

Ez a fejezet egy mechanikai problémán, az egyszerű inga mozgásegyenletén keresztül mutat példát arra, hogy hogyan bukkanhatnak fel természetes módon a matematikában elliptikus függvények.

1.1. Az egyszerű inga mozgásegyenlete

Egyszerű inga alatt a következő idealizált modellt értjük: Legyen P egy m tömegű részecske -az inga feje-, mely egy súlytalannak tekintett, konstans, l hosszúságú feszes kötél egyik végéhez van rögzítve. A kötél másik vége egy rögzített, O ponthoz csatlakozik. Olyan mozgásokat vizsgálunk, melyek során a kötél mindvégig egy rögzített, függőleges síkban mozog. Súrlódás, illetve légellenállás miatt adódó energiaveszteséggel nem számolunk. Az inga egyensúlyi helyzetét jelöljük A-val, ehhez képest kitérítjük a fejet, és célunk θ, a kitérés (pozitívnak tekintett) szögének meghatározása az idő, t függvényében. Az AP ívhossz $l\theta$, azaz a mozgó fej sebessége

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(l\theta) = l\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta,$$

és lefelé mutató erő, mg hat rá, melynek érintőirányú komponense $-mg\sin\theta$. Ebből Newton második törvénye alapján felírható a következő egyenlet:

$$m\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}l\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) = -mg\sin\theta,$$

vagyis

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0. \tag{1.1}$$

Ha bevezetjük az $x = (g/l)^{\frac{1}{2}}$ változót (ahol x t-hez hasonlóan az időt jelzi, csak más egységben), a következő alakú egyenletet kapjuk:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2} + \sin\theta = 0. \tag{1.2}$$

Fizikai megfontolások alapján nyilvánvalónak látszik, hogy ennek a differenciálegyenletnek létezik megoldása, viszont ez matematikai szigorúsággal is belátható. Ehhez bevezetjük az $\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}$ változót, és a segítségével felírjuk a differenciálegyenletet elsőrendű autonóm differenciálegyenletrendszerként:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} &= \omega \equiv f(\theta,\omega)\\ \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}x} &= -\sin\theta \equiv g(\theta,\omega).\end{aligned} \tag{1.3}$$

Azonnal látható, hogy $f(\theta,\omega), g(\theta,\omega) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, és a

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial\theta} & \frac{\partial g}{\partial\theta} \\ \frac{\partial f}{\partial\omega} & \frac{\partial g}{\partial\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\cos\theta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix korlátos $\mathbb{R}^2$-en. Ekkor a közönséges differenciálegyenletek elméletének egy itt bizonyítás nélkül közölt tétele alapján a következő igaz:

1.1.1. Tétel. *a differenciálegyenlethez tartozó autonóm rendszernek létezik $\theta = \theta(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ megoldása, melyre teljesül, hogy $\theta(a) = A$ és $\theta'(a) = B$, ahol a, A, B tetszőleges valós számok. Továbbá az is teljesül, hogy a megoldás egyértelmű minden, a-t tartalmazó intervallumon.*

Látszik (1.2)-ből, hogy a tétel által posztulált $\theta(x)$ megoldás végtelen sokszor folytonosan differenciálható.

1.2. Az energiaintegrál

Ha az (1.1) egyenletet végigszorozzuk $ml^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$-vel, kapjuk, hogy

$$ml^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + mgl\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0,$$

ami nem más, mint

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}m\left(l\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 + mgl(1-\cos\theta)\right] = 0.$$

Tehát

$$\frac{1}{2}m\left(l\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 + mgl(1-\cos\theta) = E, \tag{1.4}$$

ahol E konstans. A fönti egyenlet bal oldalának első tagja az inga fejének mozgási energiája, míg a második tag a helyzeti vagy potenciális energia, az A egyensúlyi helyzettől számítva. Az energia, mely a fej felemeléséhez szükséges a legalacsonyabb ponttól ($\theta = 0$) a legmagasabbig ($\theta = \pi$) $2mgl$ (az, hogy ezt valóban lehetséges-e elérni, az függ a legalacsonyabb pontban lévő sebességtől). Tehát E-re felírható a következő egyenlet:

$$E = k^2(2mgl), \quad k \geq 0. \tag{1.5}$$

Tetszőleges k értékhez választhatók úgy a kezdeti feltételek, hogy a fönti egyenlet teljesüljön. Feltételezzük, hogy $0 < k < 1$, azaz, hogy az inga oszcilláló mozgást végez. Legyen $v = v_0$, illetve $\theta = \theta_0$, ha $t = 0$. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2}v_0^2 - v^2 = gl(1 - \cos\theta),$$

amit ha átrendezünk, és használjuk az $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ azonosságot, úgy írható, hogy

$$v^2 = v_0^2 - 4gl\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Bevezetve a $v = l\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, h^2 = \frac{g}{l}$ jelöléseket, a fönti egyenlet úgy írható, hogy

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 4h^2\left(\frac{v_0^2}{4gl} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right). \tag{1.6}$$

Az (1.4), (1.5), (1.6) egyenleteket egybevetve azt kaptuk, hogy $k^2 = \frac{v_0^2}{4gl}$. Feltevésünk volt, hogy $0 < k < 1$, tehát $v_0^2 < 4gl$, így az inga nem éri el a $\theta = \pi$ pontot, tehát a mozgás oszcilláló. Ez adja a gondolatot, hogy írjuk k-t a következőképpen: $k = \frac{v_0}{2\sqrt{gl}} = \frac{\sin\alpha}{2}$, ahol $0 < \alpha < \pi$, és vezessük be ismét a normalizált időváltozót, $x = (g/l)^{\frac{1}{2}}$-t, hogy kapjuk az alábbi egyenletet:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\right)^2 = 4\left(k^2 - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) = 4\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right). \tag{1.7}$$

Világos, hogy azok a megoldások, melyek kielégítik az (1.2) differenciálegyenletet, azok az (1.7) egyenletnek is megoldásai lesznek, viszont felmerül a kérdés, hogy mi a helyzet fordított esetben? Könnyen látható, hogy $\phi \equiv \pm\alpha + 2\pi n$ megoldása (1.7)-nek, de (1.2)-nek nem. Tekintsük a kétszer folytonosan differenciálható megoldásait (1.7)-nek. Ha az (1.7) egyenlethez vezető gondolatmenetet megfordítjuk, azt kapjuk, hogy

$$(\theta'' + \sin\theta)\cdot\theta' = 0,$$

így tehát

$$\theta'' + \sin\theta = 0,$$

kivéve esetleg a következő, Γ-val jelölt halmazon:

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R} | \theta'(x) = 0\}.$$

(1.7)-ből következik, hogy $\theta'(x) = 0$ csak akkor, ha

$$\theta(x) = \pm\alpha + 2\pi n, \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Két esettel kell foglalkoznunk:

1. eset: Γ tartalmaz belső pontot;

2. eset: Γ nem tartalmaz belső pontot.

1.2.1. Tétel. *Az 1. esetben* $\Gamma = \mathbb{R}$*, és ekkor* $\theta = \pm\alpha + 2\pi n$*. A 2. esetben* $\theta'' + \sin\theta = 0$ *teljesül minden* x*-re.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az 1. eset teljesül, és tegyük fel indirekt módon, hogy $\Gamma \neq \mathbb{R}$. A feltevés szerint létezik olyan $[a, b]$ intervallum ($-\infty < a < b < +\infty$), melyen $\theta' = 0$, és egy c pont, melyben $\theta'(c) \neq 0$. Ekkor $c < a$, vagy $c > b$ teljesül. Tegyük fel, hogy $c > b$, és legyen $d = \sup\{x \in \mathbb{R} | b \leq x, \theta'(s) = 0, a \leq s \leq x\}$. Ekkor $d \leq c$, és $\theta'(d) = 0$ θ folytonossága miatt. Ebből következik, hogy $d < c$ és $\theta'(x) = 0$, ha $a \leq x \leq d$. Továbbá $\epsilon > 0$-hoz létezik $x \in [d, d + \epsilon]$, melyre $\theta'(x) \neq 0$. Ezért létezik $\{x_n\}$ sorozat, melyre $x_n \to d$ és $\theta'(x_n) \neq 0$ minden n-re. Ekkor $\theta''(x_n) = -\sin\theta(x_n)$, és θ'' folytonossága miatt

$$\theta''(d) = \lim_{n\to\infty} \theta''(x_n) = -\lim_{n\to\infty} \sin\theta(x_n) = -\sin\theta(d) = -\sin(\pm\alpha) \neq 0.$$

De abból, hogy $\theta'(x) = 0$, ha $a \leq x \leq d$, következik, hogy $\theta''(x) = 0$, ha $a < x < d$, θ'' folytonosságából pedig az következik, hogy $\theta''(d) = 0$, ez pedig ellentmondás.

A $c < a$ eset teljesen hasonló: visszavezethető a $c > b$ esetre az $x \to -x$ helyettesítéssel, amely (1.2)-t és (1.7)-et is változatlanul hagyja. A 2. esetben meg kell mutatnunk, hogy ha $a \in \Gamma$, akkor $\theta''(a) + \sin\theta(a) = 0$. Mivel a határpontja Γ-nak, ezért létezik olyan $\{x_n\} \subset \mathbb{R} - \Gamma$, hogy $x_n \to a$. Mivel θ, θ'' folytonos, ezért $\theta''(a) + \sin\theta(a) = \lim_{n\to\infty}(\theta''(x_n) + \sin\theta(x_n)) = 0$. Ebből következik, hogy az (1.7) azon $\theta \in \mathcal{C}^2$ megoldásai, melyek nem megoldásai (1.2)-nek, azok a $\theta = \alpha \pm 2\pi n$ alakú megoldások. □

1.2.1. Állítás. *Legyen* θ *olyan megoldása az új differenciálegyenletnek, hogy* $-\pi \leq \theta(a) \leq \pi$ *teljesül valamely* a*-ra. Ekkor* $-\alpha \leq \theta(x) \leq \alpha$ *minden* $-\infty < x < +\infty$ *esetén.*

Bizonyítás. Az x változóra nézve az energiaegyenlet a következőképpen néz ki:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\right)^2 + (1 - \cos\theta) = \frac{E}{mgl} = 2k^2 = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}. \tag{1.8}$$

Legyen $\theta(a) = A$. Ekkor $2\sin^2(A/2) = 1 - \cos A \leq 2\sin^2(\alpha/2)$ és $-\pi \leq A \leq \pi$ együtt azt eredményezi, hogy $-\alpha \leq A \leq \alpha$.

Tegyük fel, hogy $\theta(b) > \alpha$ valamely b-re. A Lagrange-féle középértéktétel szerint létezik c, hogy $a < c < b$, és $\alpha < \theta(c) < \pi$. De ekkor (1.7)-ből az következik, hogy $\theta'(c)^2 < 0$, ami ellentmondás. Vagyis $\theta(x) \leq \alpha$ minden x-re. Ugyanígy teljesül az is, hogy $\theta(x) \geq -\alpha$ minden x-re. □

Ez az állítás lehetővé teszi, hogy a továbbiakban (az általánosság megszorítása nélkül) feltehessük, hogy az egyenlet minden θ megoldására $-\alpha \leq \theta(x) \leq \alpha$ teljesül.

1.3. Euler- és Jacobi-féle normálalak

Ebben a szakaszban új változók bevezetésével módosítjuk a differenciálegyenletünk (1.7) alakját. Elsőként egy Eulertől származó átalakítás következik. Legyen

$$\phi = \arcsin\left(k^{-1}\sin\frac{\theta}{2}\right). \tag{1.9}$$

Ekkor a $\theta \mapsto \phi$ leképezés homeomorfizmus $-[\alpha, \alpha]$-ról $[-\pi/2, \pi/2]$-re, illetve $\mathcal{C}^\infty$-diffeomorfizmus $(-\alpha, \alpha)$-ról $(-\pi/2, \pi/2)$-re. Deriváljuk $\sin(\theta/2) = k \sin \phi$-t x szerint:

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = k \cos \phi \cdot \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x},$$

amiből következik, hogy

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \frac{4k^2 \cos^2 \phi}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \frac{4k^2(1 - \sin^2 \phi)}{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}} \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)^2.$$

Tehát (1.7) így módosul:

$$\frac{4k^2(1 - \sin^2 \phi)}{1 - k^2 \sin^2 \phi} \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)^2 = 4k^2(1 - \sin^2 \phi),$$

ami nem más, mint

$$\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)^2 = 1 - k^2 \sin^2 \phi, \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}\right). \tag{1.10}$$

Ezt nevezzük Euler-féle normálalaknak.

Jacobi-tól származik a következő helyettesítés:

$$y = \sin \phi = k^{-1} \sin \frac{\theta}{2}. \tag{1.11}$$

Ekkor a növekvő $\theta \mapsto y$ függvény $\mathcal{C}^\infty$ diffeomorfizmus $[-\alpha, \alpha]$-ról $[-1, 1]$-re. Deriválva x szerint kapjuk, hogy

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{k^{-1}}{2} \cos \frac{\theta}{2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x},$$

ezért

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \frac{k^{-2}}{4} \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \cdot 4 \cdot \left(k^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) = \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \left(1 - k^{-2} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right).$$

Ezzel a helyettesítéssel (1.7) tehát a következő alakot ölti:

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = (1 - y^2)(1 - k^2 y^2), \quad -1 \leq y \leq 1, \tag{1.12}$$

ami nem más, mint a Jacobi-féle normálalak.

1.4. Az Euler-féle normálegyenlet klasszikus megoldása

Jelölje $\theta_0 = \theta_0(x|k)$ a (1.2) azon megoldását, melyre $\theta_0(0) = 0$, és $\theta_0'(0) = 2k, 0 < k < 1$ (a jelölés ak-tól és x-től való együttes függést fejezi ki). Ekkor (1.5) szerint kapjuk, hogy $E/(mgl) = \frac{1}{2}(2k)^2 + 0 = 2k^2$, így θ_0 kielégíti (1.7)-et ugyanazzal a k-val. Így a $t = 0$ időpillanatban az inga feje a legalacsonyabb helyzetben van, az óramutató járásával ellentétesen mozog, mégpedig akkora sebességgel, mely elég ahhoz, hogy $\theta = \alpha$ teljesüljön, mikor $t = T/4$, ahol T az inga periódusidejét jelzi. Következzen ennek a levezetése: Az Euler-féle helyettesítés

$$\phi = \arcsin\left(k^{-1} \sin \frac{\theta_0}{2}\right)$$

$\phi = 0$-t és $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = 1$-et eredményez, mikor $x = 0$. Megkíséreljük ezen kezdőfeltételek mellett (1.7) megoldását. $x = 0$ egy környezetében (1.10)-ből pozitív négyzetgyököt vonva kapjuk, hogy

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}, \tag{1.13}$$

észrevéve, hogy ez pozitív, feltéve hogy x elég kicsi. Következik (feltéve, hogy ϕ elég kicsi), hogy

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\phi} = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}. \tag{1.14}$$

(1.14) megoldása a megadott kezdőfeltételek mellett

$$x = \int_0^{\phi} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}, \tag{1.15}$$

feltéve, hogy ϕ (és ezáltal x) elég kicsi ahhoz, hogy (1.13) és (1.14) teljesüljön. Fizikai megfontolások alapján sejthető, hogy az (1.15) egyenlet igaz a $-K \leq x \leq K$ intervallumon, ahol

$$K = K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}, \tag{1.16}$$

és K a negyedperiódus (az x szerinti idő, mely ahhoz szükséges, hogy az inga $\phi = 0$-tól $\phi = \pi/2$-ig lengjen ki). Fontos észrevenni, hogy az integrál az időt fejezi ki a szög függvényében, de mi fordítva szeretnénk, a szöget akarjuk megkapni az idő függvényében. Gauss és Abel egymástól függetlenül jutottak ahhoz a gondolathoz, hogy invertálják a (1.15) integrált, pontosan abból a célból, amit mi is el szeretnénk érni. Ez a gondolat egyébként analóg az

$$x = \int_0^{\phi} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - u^2}}$$

integrál invertálásával, mely művelet valójában nem más, mint az $x = \arcsin \phi$ függvényből, a megszokottól ellentétes módon eljutni a $\phi = \sin x$ függvényhez.

Az (1.15) integrált elsőrendű elliptikus integrálnak nevezzük, az (1.16) integrál elnevezése pedig teljes elsőrendű integrál. A k szám a modulus, míg a $k' = \sqrt{1 - k^2}$ a kiegészítő modulus. A bevezetőben levezetett ívhosszt kifejező integrál pontos megnevezése (történeti okokból) másodrendű elliptikus integrál lett. Ezeken az integrálokon kívül létezik még egy, a harmadrendű elliptikus integrál, ez a következőképp néz ki:

$$\int_0^{\phi} \frac{\mathrm{d}\phi}{(1 + n \sin^2 \phi)(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2}}. \tag{1.17}$$

Ezek az integrálok azért is fontosak, mert nagyon sokféle, harmad- és negyedfokú polinomok gyökeit tartalmazó integrál vezethető vissza ezen három alaptípus valamelyikére.

1.5. Az inga egyenletének megoldása

Tekintsük az (1.15) egyenletet:

$$x = x(\psi) = \int_0^{\psi} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}, \tag{1.18}$$

melyben $-\infty < \psi < \infty$, ha $0 \le k < 1$, és $-\pi/2 < \psi < \pi/2$, ha $k = 1$. Könnyen látható, hogy x páratlan, növekvő függvénye ψ-nek a következő, pozitív értékű deriválttal:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\psi} = (1-k^2\sin^2\psi)^{-1/2}.$$

Ez alapján invertálhatjuk (1.15)-öt, hogy megkapjuk ψ-t x páratlan, növekvő függvényeként (melyet szokás jelölni $\psi = \mathrm{am}(x)$-el $(-\infty < x < \infty)$). Ennek (pozitív értékű) deriváltja

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} = (1-k^2\sin^2\psi)^{1/2}.$$

Ahogy korábban is írtuk, legyen

$$K = K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}, \quad (0 \le k < 1).$$

Legyen $y = \sin\psi$. Ekkor

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos\psi \cdot \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x},$$

és $y = 0$ és $y' = 1$, ha $x = 0$. Továbbá,

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \cos^2\psi \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)^2 = (1-\sin^2\psi)(1-k^2\sin^2\psi) = (1-y^2)(1-k^2y^2).$$

Az világos, hogy $\psi = \psi(x) \in \mathcal{C}^2(-\infty,\infty)$, és nem konstans, vagyis a tételeinkből következik, hogy

$$y = \sin\phi = k^{-1}\sin\frac{\theta_0}{2}, \quad q < k < 1,$$

$\phi = \arcsin(\sin\psi)$, tehát

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{dx} = \frac{\cos\psi}{\sqrt{1-\sin^2\psi}}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos\psi}{|\cos\psi|}\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}. \tag{1.19}$$

Ebből látszik, hogy $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}$-nek ugrása van $x = \pm K$-ban (azaz $\phi = \pm\pi/2$-ben), de ebből az következik, hogy

$$\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)^2 = 1 - k^2\sin^2\phi$$

akkor is érvényben marad, mikor $\phi = \pm\pi/2$. A $-K \le x \le K$ intervallumon ψ értéke $-\pi/2$-től $\pi/2$-ig nő, tehát $y = \sin\psi$ értéke -1-től 1-ig nő, és $\phi_0 = 2\arcsin(ky)$ értéke pedig $-\alpha$-tól α-ig nő. Továbbá, $\frac{\mathrm{d}\theta_0}{\mathrm{d}x} > 0$ a nyílt $(-K, K)$ intervallumon. A $K \le x \le 3K$ intervallumon ψ értéke $\pi/2$-től $3\pi/2$-ig növekszik, tehát $y = \sin\psi$ értéke 1-től -1-ig csökken, ϕ_0 értéke α-tól $-\alpha$-ig csökken, a nyílt $(-K, K)$ intervallumon pedig $\frac{\mathrm{d}\theta_0}{\mathrm{d}x} < 0$. Vagyis azt kaptuk, hogy a $-K < x < 3K$ intervallumon θ_0 minden $A \in [-\pi/2, \pi/2]$ értéket kétszer vesz fel, ellentétes előjelű $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}$ deriválttal. Ezek az információk elégségesek ahhoz, hogy teljes egészében visszakapjuk a (1.2) egyenletet $0 < k < 1$-re.

1.5.1. Tétel. *Legyen* $\theta = \theta(x)$ (1.2) *tetszőleges megoldása* $0 < k < 1$*-re. Ekkor létezik* $n \in \mathbb{Z}$ *és* $a \in \mathbb{R}$*, melyekre* $\theta(x) = \theta_0(x + a) + 2\pi n, (-\infty < x < \infty)$.

Bizonyítás. Legyen $\theta(0) = A$, $\theta'(0) = B$. Ekkor $2k^2 = B^2/2 + (1 - \cos A)$ (1.15) alapján. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $-\pi \leq A \leq \pi$, tehát a 1.2.1 szerint $-\alpha \leq A \leq \alpha$. Az előbbi észrevételek alapján tudjuk, hogy létezik $a \in [-K, 3K]$, mellyel $\theta_0(a) = A$, és $B' = \theta_0'(a)$ előjele pedig tetszőleges. Ekkor $2k^2 = B'^2/2 + (1 - \cos A)$, tehát $B'^2 = B^2$, így választhatjuk azt, hogy $B' = B$. Viszont ekkor $\theta(x)$ és $\theta_0(x + a)$ is megoldása az (1.2) egyenletnek ugyanazzal a kezdőfeltétellel $x = 0$-ban, vagyis az 1.1.1 Állítás és az 1.2.1 Tétel együtt ebből azt eredményezi, hogy $\theta(x) = \theta_0(x + a), \quad (-\infty < x < \infty)$. □

1.5.2. Megjegyzés. Ha $k = 0$, az az a triviális eset, mikor az inga mindvégig a legalacsonyabb ponton marad. Ha $k > 1$, akkor elég energia van a rendszerben ahhoz, hogy az inga túllendüljön a legmagasabb ponton, vagyis forogni fog. Ha $k = 1$, akkor az inga eléri a legmegasabb pontot, de csak "végtelen" idő alatt.

1.6. Jacobi-féle elliptikus függvények

Az előző szakaszban az inga mozgásának vizsgálata során felbukkant az $x \to \sin\psi$ függvény, természetes ötletként merül fel, hogy érdemes lehet vizsgálni az $x \to \cos\psi$ függvényt is. Szerepelt továbbá az $x \to \sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}$ függvény is. Ezekre vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(x) &= \operatorname{sn}(x, k) = \sin\psi, \\ \operatorname{cn}(x) &= \operatorname{cn}(x, k) = \cos\psi, \\ \operatorname{dn}(x) &= \operatorname{dn}(x, k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi} \quad = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x}, \end{aligned} \tag{1.20}$$

ahol $0 \leq k \leq 1$, és ψ a korábban definiált függvény minden $-\infty < x < \infty$ értékre. Ha $0 < k < 1$, az (1.20)-ban definiált függvények lesznek az (elemi) Jacobi-féle elliptikus függvények. A $k = 0$ és $k = 1$ határesetekben visszakapjuk a trigonometrikus, illetve a hiperbolikus függvényeket:
Ha $k = 0$, akkor $x = \psi$, tehát

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(x, 0) &= \sin x, \\ \operatorname{cn}(x, 0) &= \cos x, \\ \operatorname{dn}(x, 0) &= 1, K(0) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Ha $k = 1$ és $-\pi/2 < \psi < \pi/2$, azt kapjuk, hogy

$$x = \int_0^\psi \sec\psi d\psi = \ln(\sec\psi + \tan\psi),$$

tehát

$$\exp x = \sec\psi + \tan\psi = \frac{1 + \sin\psi}{\cos\psi}.$$

Ezt négyzetre emelve kapjuk, hogy

$$\exp(2x) = \frac{(1+\sin\psi)^2}{1-\sin^2\psi} = \frac{1+\sin\psi}{1-\sin\psi}.$$

Ha kifejezzük ebből az egyenletből $\sin\psi$-t, kapjuk, hogy $\sin\psi = \tanh x$, végül, mivel $\cos\psi = \sqrt{1-\sin^2\psi}$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\operatorname{sn}(x,1) &= \tanh x,\\ \operatorname{cn}(x,1) &= \operatorname{sech} x,\\ \operatorname{dn}(x,1) &= \operatorname{sech} x,\\ K(1) &= \infty.\end{aligned} \tag{1.22}$$

Az $\operatorname{sn}(x), \operatorname{cn}(x), \operatorname{dn}(x)$ függvények többféleké módon is kiterjeszthetők, az egyik lehetséges út a következő: a függvények fenti definícióját először kiterjesztjük a képzetes tengelyre, a második lépésben addíciós képleteket találunk hozzájuk, ezután ezen formulák segítségével a függvényeket kiterjesztjük a komplex számsíkra, végül pedig belátható, hogy ezek a függvények pólusoktól eltekintve analitikusak a véges komplex síkon. Ezt az eljárást nem részletezzük, viszont összefoglaljuk a legjellemzőbb tulajdonságait ezeknek a függvényeknek; ehhez néhány segédformulát is bevezetünk. $0<k<1$ modulus esetén legyen $\psi = 2\arctan t$. Legyen

$$Q(t,k) = 1 + 2(1-2k^2)t^2 + t^4 = [t^2 + (1-2k^2)]^2 + 4k^2(1-k^2),$$

ennek segítségével

$$K = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{Q(t,k)^{1/2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\psi}{(1-k^2\sin^2\psi)^{1/2}}.$$

Korábban definiáltuk a kiegészítő modulust, $k' = (1-k^2)^{1/2}$-t. Ennek segítségével felírható:

$$K' = K(k') = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{Q(t,k')^{1/2}}.$$

Legyen u, v valós, ekkor:

$$\begin{aligned}\Delta = \Delta(u,v) &= 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v,\\ S(u,v) &= [(\operatorname{sn}(u))(\operatorname{cn}(v))(\operatorname{dn}(v)) + (\operatorname{sn}(v))(\operatorname{cn}(u))(\operatorname{dn}(u))]/\Delta,\\ C(u,v) &= [(\operatorname{cn}(u))(\operatorname{cn}(v)) - (\operatorname{sn}(u))(\operatorname{sn}(v))(\operatorname{dn}(u))(\operatorname{dn}(v))]/\Delta,\\ D(u,v) &= [(\operatorname{dn}(u))(\operatorname{dn}(v)) - k^2(\operatorname{sn}(u))(\operatorname{sn}(v))(\operatorname{cn}(u))(\operatorname{cn}(v))]/\Delta.\end{aligned}$$

A kiterjesztés a komplex síkra ezen formulák segítségével történhet:

$$\begin{aligned}\operatorname{sn}(x+\mathrm{i}y) &= S(x,\mathrm{i}y),\\ \operatorname{cn}(x+\mathrm{i}y) &= C(x,\mathrm{i}y),\\ \operatorname{dn}(x+\mathrm{i}y) &= D(x,\mathrm{i}y).\end{aligned}$$

Itt x, y valós, $y \neq (2n+1)K'$.

Addíciós képletek:

$$\mathrm{sn}(u,v) = S(u,v),$$

$$\mathrm{cn}(u,v) = C(u,v),$$

$$\mathrm{dn}(u,v) = D(u,v),$$

ahol u, v komplex számok.

Differenciálási szabályok:

$$\mathrm{sn}'(z) = \mathrm{cn}(z)\,\mathrm{dn}(z),$$

$$\mathrm{cn}'(z) = -\,\mathrm{sn}(z)\,\mathrm{dn}(z),$$

$$\mathrm{dn}'(z) = -k^2\,\mathrm{sn}(z)\,\mathrm{dn}(z).$$

Periódusok:

$$\mathrm{sn} : 4K, 2\mathrm{i}K'; \mathrm{cn} : 4K, 2K + 2\mathrm{i}K', 4\mathrm{i}K'; \mathrm{dn} : 2K, 4\mathrm{i}K'.$$

Pólusok és reziduumok:

$\mathrm{sn}, \mathrm{cn}, \mathrm{dn}$ analitikusak mindenütt, kivéve $u \equiv \mathrm{i}K' \mod (2K, 2\mathrm{i}K')$-ban, ahol egyszerű pólusaik vannak, reziduumaik itt rendre $k^{-1}, -\mathrm{i}k^{-1}, -\mathrm{i}$.

Zérushelyek $\mathrm{mod}(2K, 2\mathrm{i}K')$:

$$\mathrm{sn} : u \equiv 0; \quad \mathrm{cn} : u \equiv K; \quad \mathrm{dn} : u \equiv K + \mathrm{i}K'.$$

2. fejezet

Az elliptikus függvények általános elmélete

2.1. Meromorf függvény lehetséges periódusai

Legyen $f(z)$ az egész komplex síkon meromorf függvény. Azt mondjuk, hogy ω periódusa $f(z)$-nek, ha $f(z+\omega) = f(z)$ teljesül minden $z \in \mathbb{C}$-re. Nyilvánvaló, hogy bármely $f(z)$ függvénynek periódusa $\omega = 0$, ha pedig $f(z)$ konstans függvény, akkor bármely $\omega \in \mathbb{C}$ szám periódus lesz. A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy mi az algebrai szerkezete a periódusok $\Omega = \Omega(f)$ halmazának. Világos, hogy ha ω_1, $\omega_2 \in \Omega$, akkor $n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \in \Omega$ minden $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ számra, azaz Ω modulus $\mathbb{Z}$ fölött (másképpen: rács).
Eltekintünk a triviális $\Omega(f) = \{0\}$, illetve $\Omega(f) = \mathbb{C}$ esetektől, és bebizonyítjuk, hogy a periódusok halmaza egyébként mindig egy rácsot határoz meg. Ehhez felhasználunk néhány lemmát.

2.1.1. Lemma. *Jelölje Ω az $f(z)$ függvény periódusainak halmazát. Ekkor*

$$\inf\{|\omega| : \omega \in \Omega, \omega \neq 0\} > 0.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az egyenlőtlenség nem szigorú. Ekkor létezik nemnegatív periódusok $\{\omega_n\}$ sorozata, melyre $\omega_n \to 0$. $f(z)$ egy z_0 reguláris pontjában $f(z_0+\omega_n) = f(z_0)$ teljesül minden $n \geq N$-re elég nagy $N \in \mathbb{N}$ esetén, tehát a $g(z) = f(z) - f(z_0)$ függvény végtelen sok helyen vesz fel 0-t: $z_0 + \omega_n \to z_0$, azaz z_0 torlódási pontja a zérushelyeknek. Ebből következően az $f(z)$ függvény azonos a konstans $f(z_0)$ függvénnyel, tehát $\Omega = \mathbb{C}$, de ezt az esetet kizártuk, tehát ellentmondásra jutottunk. □

2.1.2. Lemma. *Jelölje Ω az $f(z)$ függvény periódusainak halmazát. Ekkor Ω diszkrét, azaz nincs torlódási pontja a véges síkon.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy mégis létezik egy $\omega_0 \in \Omega$ torlódási pont a véges síkon. Ekkor található olyan $\{\omega_n\}$, különböző periódusokból álló sorozat, melyre $\omega_n \to 0$ teljesül.

Mivel $f(z+\omega_0) = \lim_{n\to\infty} f(z+\omega_n) = f(z)$, ω_0 is periódusa $f(z)$-nek, tehát az $\omega_0 - \omega_n$ pontok is periódusok lesznek ($n \in \mathbb{N}$). De ekkor $0 \neq \omega_0 - \omega_n \to 0-$, ami ellentmond az előző lemmának. $\square$

Tekintsünk egy tetszőleges diszkrét, $\Omega \neq 0$ rácsot. Ω nem 0 elemeinek halmaza alulról korlátos, tehát van olyan $\omega_1 \in \Omega$ elem, melynek abszolút értéke minimális.
Az $n\omega_1 (n \in \mathbb{Z})$ elemek az l: arg z = arg ω_1 egyenesre esnek, és l semelyik más pontja nem eleme Ω-nak: ha ugyanis $\omega \in \Omega$ l-nek egy $n_0\omega_1$ és $(n_0+1)\omega_1$ közé eső pontja, akkor $\omega - n\omega_1 \in \Omega$, továbbá $|\omega - n\omega_1| < |\omega_1|$, ami ellentmond ω_1 választásának.
Tegyük fel most, hogy létezik olyan $\omega \in \Omega$ pont, mely nincs rajta az egyenesen. Ezek között a pontok között létezik legalább egy, melynek abszolút értéke minimális, jelöljünk egy ilyen pontot ω_2-vel.

2.1.3. Lemma. *Minden $\omega \in \Omega$ pont egyértelműen felírható a következő alakban:*

$$\omega = n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \quad (n_1, n_2 \in \mathbb{Z}).$$

Bizonyítás. Mivel ω_2/ω_1 nem valós, (ω_1, ω_2) bázis $\mathbb{C}$-ben (azt $\mathbb{R}$ feletti vektortérnek tekintve). Azaz

$$\omega = \Omega_1\omega_1 + \Omega_2\omega_2 \quad (\Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{R}).$$

Válasszuk $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ számokat úgy, hogy $|\Omega_j - m_j| \leq \frac{1}{2}$ teljesüljön ($j = 1, 2$), és legyen

$$\omega' = \omega - m_1\omega_1 - m_2\omega_2 = (\Omega_1 - m_1)\omega_1 + (\Omega_2 - m_2)\omega_2.$$

Ekkor $\omega' \in \Omega$, és

$$|\omega'| = |(\Omega_1 - m_1)\omega_1 + (\Omega_2 - m_2)\omega_2| \leq |\Omega_1 - m_1||\omega_1| + |\Omega_2 - m_2||\omega_2| \leq \frac{1}{2}|\omega_1| + \frac{1}{2}|\omega_2| \leq |\omega_2|,$$

ahol az első egyenlőtlenség szigorú, mivel ω_2/ω_1 nem valós. Abból, ahogyan ω_2-t választottuk, következik, hogy $\omega' = n\omega_1 (n \in \mathbb{Z})$, tehát ω valóban felírható a kívánt alakban. Ha létezne egy másik ilyen alakú felírás, akkor $0 = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$ teljesülne valamely $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$-re, úgy, hogy legalább az egyikük nem 0, pl. tegyük fel, hogy $a_2 \neq 0$. Ekkor azonban $\omega_2 = -(a_1/a_2)\omega_1 \in l$ is igaz lenne, ami ellentmondás. $\square$

Meghatároztuk az összes szóba jövő diszkrét modulust, eredményünket tételben foglaljuk össze:

2.1.4. Tétel. *Háromféle diszkrét modulust alkothatnak $f(z)$ periódusai:*
1, $\Omega = \{0\}$;
2, $\Omega = \{n\omega : n \in \mathbb{Z}, \omega \neq 0\}$;
3, $\Omega = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, \omega_1, \omega_2 \neq 0, \Im(\omega_2/\omega_1) \neq 0\}$.

Természetesen nekünk a 3. eset érdekes, ezzel fogunk részletesebben foglalkozni - ezek az elliptikus függvények.
Ennek a tételnek egy következménye, melyet érdemes kihangsúlyozni:

2.1.5. Következmény (Jacobi, 1835). *Ha egy meromorf függvénynek* 3 *független periódusa létezik, akkor az konstans.*

2.2. Elemi tételek elliptikus függvényekről

Legyen Ω rács, melyet (ω_1, ω_2) feszít ki, $f(z)$ ehhez a rácshoz tartozó elliptikus függvény. A $z_1 \equiv z_2 \pmod{\Omega}$ kongruencián azt értjük, hogy $z_1 - z_2 \in \Omega$. Tekintsük azt a Q parallelogrammát, melynek csúcsai (pozitív irányítás szerint) $a, a + \omega_1, a + \omega_1 + \omega_2, a + \omega_2$. Q minden $\pmod{\Omega}$ maradékosztályból pontosan egy elemet tartalmaz. Ez azt jelenti, hogy $f(z)$ meromorf függvény a $\pmod{\Omega}$ maradékosztályok halmazán, ami topológiailag Q szemközti oldalainak összeragasztásával keletkező tórusz. Tehát elliptikus függvényt egyértelműen meghatároznak a Q-ban felvett értékei. Választhatjuk úgy a-t, hogy $f(z)$-nek egyetlen pólusa se essen ∂Q-ra, Q határára: a továbbiakban mindig így fogunk tenni.

2.2.1. Tétel (Liouville tételének eredeti megfogalmazása)**.** *Ha egy $f(z)$ elliptikus függvény egészfüggvény, akkor konstans.*

Bizonyítás. Mivel $f(z)$ mindenütt folytonos, ezért korlátos Q lezártján (mely kompakt halmaz), ebből következően a véges síkon is. A (modern értelemben vett) Liouville-tétel alapján tehát konstans. □

Mivel $f(z)$ pólusainak nincsen torlódási pontja, Q csak véges sokat tartalmazhat.Az $f(z)$ függvény pólusain inkongruens pólusok egy teljes halmazát értjük, multiplicitásokat a megszokott módon számolva.

2.2.2. Tétel (Tórusz reziduum tétele)**.** *Egy $f(z)$ elliptikus függvény reziduumainak összege (egy rácsparallelogrammára megszorítva)* 0.

Bizonyítás. a-t válasszuk úgy, hogy ∂Q-ra ne essen pólus. Q oldalai:

$$I_1 : a \to a + \omega_1, I_2 : a \to a + \omega_2, I_3 : a + \omega_2 \to a + \omega_1 + \omega_2, I_4 : a + \omega_1 \to a + \omega_1 + \omega_2.$$

A közönséges reziduum-tételt alkalmazzuk Q-ra, ebből kapjuk, hogy a reziduumok összege a következő:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial Q} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \left(\int\limits_{I_1} + \int\limits_{I_4} - \int\limits_{I_3} - \int\limits_{I_2} f(z)\,\mathrm{d}z \right).$$

Mivel $f(z)$ periodikus ω_1 és ω_2 szerint:

$$\int\limits_{I_{3,4}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{I_{1,2}} f(z + \omega_{2,1})\,\mathrm{d}z = \int\limits_{I_{1,2}} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

azaz a szemközti oldalakon vett integrálok kiejtik egymást, így az egész integrál is eltűnik. □

2.2.3. Megjegyzés. Ebből a tételből rögtön következik, hogy nem létezik olyan elliptikus függvény, melynek egyetlen, egyszeres pólusa van.

2.2.4. Tétel. *Az $f(z)$ nemkonstans elliptikus függvénynek ugyanannyi pólusa van, mint zérushelye.*

Bizonyítás. Az $f(z)/f'(z)$ függvény is elliptikus függvény, melynek reziduum összege $f(z)$ zérushelyeinek és pólusainak multiplicitással vett számának különbsége. Az előző tételt alkalmazva kapjuk az állítást. □

Legyen c egy konstans: ekkor $f(z) - c$ pólusai megegyeznek $f(z)$ pólusaival. $f(z) - c$-re alkalmazva a fenti tételt, kapjuk, hogy nemkonstans elliptikus függvény minden véges vagy végtelen értéket multiplicitással számolva (mod Ω) ugyanannyiszor vesz fel. Ezt az értéket fogjuk a függvény rendjének nevezni. A tórusz reziduum tételéből azt is tudjuk, hogy ez az érték legalább 2.

2.2.5. Tétel. *Legyen $f(z)$ elliptikus függvény, jelölje $a_1, ...a_n$ a zérushelyeit, $b_1, ..., b_n$ a pólusait (multiplicitásokkal számolva). Ekkor*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i \quad (mod\ \Omega)$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy Q határára sem pólus, sem zérushely nem esik, továbbá tegyük fel, hogy a pólusok és zérushelyek reprezentánsait Q belsejéből választjuk. Tekintsük a következő integrált, melynek értéke az argumentum elv szerint:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q} z \frac{f(z)}{f'(z)} \,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Számítsuk ki másképpen is az integrált:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q} z \frac{f(z)}{f'(z)} \,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{I_1} + \int_{I_4} - \int_{I_3} - \int_{I_2} z \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}z \right),$$

ahol (felhasználva a periodikusságot):

$$\int_{I_{3,4}} z \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}z = \int_{I_{1,2}} (z + \omega_{2,1}) \frac{f'(z + \omega_{2,1})}{f(z + \omega_{2,1})} \,\mathrm{d}z = \int_{I_{1,2}} z \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}z + \omega_{2,1} \int_{I_{1,2}} \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}z.$$

Az integrál a következő alakúra egyszerűsödött:

$$\omega_1 \frac{1}{2\pi i} \int_{I_2} \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}z - \omega_2 \frac{1}{2\pi i} \int_{I_1} \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}z.$$

Azonban

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{I_{1,2}} \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}z$$

nem más, mint az $f(z)$ által leírt zárt görbe körülfordulási száma a középpontja körül, amint z a-tól $a + \omega_1$ig ($a + \omega_2$-ig) mozog, amiről tudjuk, hogy egész szám. Tehát a tétel állításában szereplő szumma valóban $n_1\omega_1 + n_2\omega_2$ alakú. □

Mivel a zérushelyeknek itt sincs kitüntetett szerepe (a fenti érvelés elmondható az eltolt $f(z) - c$ függvényre is), ezért általánosabban úgy is megfogalmazható a tétel, hogy nemkonstans elliptikus függvény c-helyeinek (mod Ω) vett, multiplicitásokkal számolt összege c-től független.

2.3. Weierstrass-féle $\wp(z)$ függvény

Legyen Ω rács, melyet az ω_1, ω_2 bázis generál. Ebben a szakaszban egy speciális elliptikus függvényt fogunk konstruálni, melynek egyetlen, másodrendű pólusa van 0 (mod Ω)-ban -ez a Weierstrass-féle $\wp(z)$ függvény-, és megvizsgáljuk a tulajdonságait.

A $\wp(z)$ függvény konstrukciója

Természetesen adódó gondolat, hogy próbálkozzunk a $\sum_{\omega\in\Omega} \frac{1}{(z-\omega)^2}$ előállítással, mivel ez a sor azonnal láthatóan kétszeresen periodikus, azonban nem lesz konvergens. Ezen a probléma azonban áthidalható: szükségünk van ehhez egy lemmára.

2.3.1. Lemma. *Legyen Ω rács. Ekkor a*

$$\sum_{\omega\in\Omega\setminus 0} |\omega|^{-\sigma}$$

sor konvergens $\sigma > 2$ esetén.

Bizonyítás. $N \geq 1$ egész esetén legyen

$$s_N = \sum_{\substack{\omega\in\Omega\setminus 0 \\ |\omega|\leq N}} |\omega|^{-\sigma}.$$

A lemma bizonyításához elég megmutatnunk azt, hogy az $\{s_N\}$ részletösszeg-sorozat felülről korlátos. $n \geq 0$ egész esetén jelöljük k_n-el azon $\omega \in \Omega$ elemeket, melyekre teljesül, hogy $n < |\omega| \leq n+1$. Ha $|Q|$-val jelöljük a rácsparallelogramma területét, akkor egy R sugarú, origó középpontú kör legfeljebb $\frac{R^2\pi}{|Q|}$ darab rácsparallelogrammába metsz bele, így a körbe eső rácspontok száma kisebb, mint $4\frac{R^2\pi}{|Q|}$. $R = n+1$, illetve $R = n$ értékekre kapjuk, hogy

$$k_N \leq 4\frac{(n+1)^2\pi}{|Q|} - 4\frac{n^2\pi}{|Q|} = \frac{4\pi[(n+1)^2 - n^2]}{|Q|} = \frac{4\pi(2n+1)}{|Q|} = O(n).$$

Bcsüljük s_N-t a következőképpen:

$$s_N \leq \frac{k_0}{r} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{k_N}{n^\sigma},$$

ahol $r = \inf\{|\omega| \mid \omega \in \Omega \setminus 0\}$. Mivel k_N nagyságrendje $O(n)$, és $\sigma > 2$, a részletösszeg-sorozat valóban konvergens. □

Tekintsük most a következő előállítást:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Omega\setminus 0} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

Jelölje B $\mathbb{C}$ egy kompakt részhalmazát, mely nem tartalmaz rácspontot. Válasszuk úgy $r > 0$-t, hogy minden $z \in B$-re $|z| \leq r$ teljesül, illetve legyen $\Omega_0 \subset \Omega$ véges halmaz olyan, hogy $|\omega| \geq 2r$ minden $\omega \in \Omega \setminus \Omega_0$. Ezekkel a feltételekkel teljesül, hogy

$$\left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \left| \frac{z(2\omega - z)}{\omega^2(z-\omega)^2} \right| \leq \left| \frac{z\omega}{\omega^2(z-\omega)^2} \right| + \left| \frac{z(\omega - z)}{\omega^2(z-\omega)^2} \right| < \frac{6R}{|\omega|^3},$$

ahol felhasználtuk, hogy a fordított háromszögegyenlőtlenségből következően $|z-\omega| > |\omega|/2$. Tehát a lemma alapján a $\wp(z)$-t definiáló sor abszolút és egyenletesen konvergens B-n, vagyis $\wp(z)$ meromorf függvény. Az egyenletes konvergencia miatt tagonként deriválhatjuk a $\wp(z)$-t definiáló sort:

$$\wp'(z) = -2\sum_{\omega\in\Omega} \frac{1}{(z-\omega)^3}.$$

Könnyen látható, hogy $\wp'(z+\lambda) = \wp'(z)$ minden $\lambda \in \Omega$ esetén, mert a helyettesítéssel a sor egy átrendezettjét kapjuk. Tehát $\wp'(z)$ elliptikus függvény Ω rácson. Ebből következően tudjuk, hogy létezik olyan c_ω konstans, mellyel minden $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$\wp(z+\omega) = \wp(z) + c_\omega$$

teljesül. Tekintsük az egyik bázisvektorát a rácsnak, mondjuk ω_1-et. Nyilván $-(\omega_1)/2 \notin \Omega$, így nem pólusa $\wp(z)$-nek. Azonban $\wp(z)$ páros, tehát ha a fenti egyenletbe $z = -\omega/2$-t helyettesítünk, azt kapjuk, hogy $c_\omega = 0$, vagyis kiderült, hogy $\wp(z)$ is elliptikus függvény. Ezt a függvényt nevezzük (az Ω rácshoz tartozó) Weierstrass-féle elliptikus függvénynek. A definiáló sorból leolvasható, hogy a kívánalmaknak megfelelően a függvénynek másodrendű pólusa van 0-ban, és ez az egyetlen pólusa (mod Ω).

A $\wp(z)$ függvény differenciálegyenlete

Ebben a szakaszban kétféleképpen levezetjük azt a differenciálegyenletet, melyet kielégít a $\wp(z)$ függvény.

2.3.2. Tétel (A $\wp(z)$ függvény differenciálegyenlete $\wp'(z)$ zérushelyeinek segítségével)**.** *Legyen (ω_1, ω_2) bázisa Ω-nak, és tegyük fel, hogy*

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0.$$

Ekkor

$$\wp'^2(z) = 4\left(\wp(z) - \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\right)\left(\wp(z) - \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right)\right)\left(\wp(z) - \wp\left(\frac{\omega_3}{2}\right)\right).$$

Az $e_k = \wp(\omega_k/2)$, $(k = 1,2,3)$ értékek páronként különbözőek, és

$$\wp'^2(z) = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_3)(\wp(z) - e_3).$$

$\wp'(z)$ zérushelyei az $\frac{\omega_k}{2}$ számok (mod Ω).

Bizonyítás. A $\wp'(z)$ függvénynek az origót tartalmazó parallelogrammában egyetlen, háromszoros pólusa van $z = 0$-ban. Tehát tudjuk a 2.2.4 Tétel alapján, hogy minden értéket, speciálisan a 0-t is, (multiplicitással számolva) háromszor vesz fel (mod Ω). A periodicitás miatt $\wp'(z+\omega_k) = \wp'(z)$ $(k = 1,2,3)$, így ha $z = -\omega_k/2$-t helyettesítünk, kapjuk, hogy $\wp'(\omega_k) = \wp'(-\omega_k) = -\wp'(\omega_k) = 0$, mivel $\wp'(z)$ páratlan függvény. Azaz 3 zérushely van (mod Ω), mégpedig: $\omega_1/2, \omega_2/2, \omega_3/2$. Legyen $\wp(\omega_k/2) = e_k (k = 1,2,3)$. Tekintsük az $f_k(z) = \wp(z) - e_k$ függvényeket. $f_k(z)$-nek $z = 0$-ban kétszeres pólusa van, így megint a 2.2.4 Tételből kapjuk, hogy Q-ban két zérushelye van. Azonban $\omega_k/2$ kétszeres zérushely, mivel $f_k'(z) = \wp'(z)$ eltűnik e pontban. Vagyis kaptuk, hogy $f_k(z)$-nek $\omega_k/2$ az egyetlen (kétszeres) zérushelye (mod Ω). Azaz e_1, e_2, e_3 különbözőek, mivel ha például $e_1 = e_2$ teljesülne, abból az következne, hogy $\wp(z)-e_1$-nek zérushelye volna ω_2-ben, de $\omega_1/2 \not\equiv \omega_2/2$ (mod Ω), ami ellentmondás. Tehát $\wp'^2(z)$-nek és $(\wp(z)-e_1)(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_3)$-nek ugyanazok a gyökei, mindkettőnek hatodrendű pólusa van az origóban, ezért a

$$\frac{\wp'^2(z)}{(\wp(z)-e_1)(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_3)}$$

elliptikus függvény mindenütt reguláris, azaz konstans. $z \to 0$ esetén

$$\wp(z) \approx \frac{1}{z^2}, \wp'(z) \approx -\frac{2}{z^3},$$

azaz a konstans értéke 4, ezzel a bizonyítás kész. □

2.3.3. Tétel ($\wp(z)$ differenciálegyenlete Laurent-sorokkal)**.**

Legyen

$$\sigma_n := \sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ \omega\neq 0}} \frac{1}{\omega_n}, \quad n \geq 3.$$

Mivel

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} = \frac{1}{\omega^2(1-\frac{z}{\omega})^2} = \frac{1}{\omega^2} + 2\frac{z}{\omega^3} + 3\frac{z}{\omega^4} + \ldots, \quad (|z| < |\omega|),$$

a következő egyenleteket kapjuk:

$$\wp(z) = z^{-2} + 3\sigma_4 z^2 + 5\sigma_6 z^4 + \ldots$$

$$\wp^3(z) = z^{-6} + 9\sigma_4 z^{-2} + 15\sigma_6 + \ldots$$

$$\wp'(z) = -2z^{-3} + 6\sigma_4 z + 20\sigma_6 z^3 + \ldots$$

$$\wp'^2(z) = 4z^{-6} - 24\sigma_4 z^{-2} - 80\sigma_6 + \ldots$$

Az utolsó egyenletből a másik három egyenlet segítségével ki tudjuk ejteni a konstans tagot, illetve a negatív kitevőjű tagokat:

$$\wp'^2(z) - 4\wp^3(z) + 60\sigma_2\wp(z) + 140\sigma_3 = 0 + \ldots$$

Tehát előállítottunk az egyenletekkel egy olyan elliptikus függvényt, mely mindenütt reguláris, tehát konstans, mégpedig 0. A $g_2 = 60\sigma_2$, $g_3 = 140\sigma_3$ jelöléseket alkalmazva az egyenletet a következő alakban írhatjuk:

$$\wp'(z)^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3.$$

Ha z helyébe az előző tételben szereplő ω_k $(k = 1, 2, 3)$ értékeket helyettesítjük, a bal oldalon 0-t kapunk, azaz egyenletünk nem más, mint

$$\wp'^2(z) = 4(\wp(z)-e_1)(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_3)$$

gyöktényezős alakú kifejezés kibontva.

A $\wp(z)$ függvény addíciós képlete

A $\wp(z)$ függvénynek is létezik addíciós képlete, mely a

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2)$$

képlettel analóg módon, a $\wp(z)$ függvénnyel, és annak a deriváltjával a z_1, z_2 helyeken fejezi ki $\wp(z_1+z_2)$-t, függetlenül z_1, z_2-től. Ennek a képletnek a levezetését tartalmazza ez a szakasz. Legyen $x := \wp(z), y := \wp'(z)$, és legyenek $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$ (később meghatározandó) értékek. Tekintsük az $y + ax + b$ elliptikus függvényt. Ennek egyetlen, háromszoros pólusa van az origóban (mod Ω), azaz a zérushelyek összege a 2.2.5 Tétel alapján 0 (mod Ω). Válasszuk úgy a-t, illetve b-t, hogy $y + ax + b$ eltűnjön z_1-ben és z_2-ben. Ekkor $-(z_1 + z_2)$-ben is el fog tűnni. Ismerjük azonban a differenciálegyenletet is, tehát ha megoldjuk a

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

$$y + ax + b = 0$$

egyenletrendszert, megkapjuk x és y értékét a $-(z_1 + z_2)$ pontban. Mivel az egyik egyenlet lineáris, a másik harmadfokú, ezért három (x, y) megoldásra számíthatunk (a másik kettő x és y értéke z_1-ben és z_2-ben). Ezen két érték ismeretében a harmadik meghatározása már egyszerű, mivel felhaszálhatjuk azt az (ismert) tényt, hogy 1 főegyütthatójú harmadfokú egyenlet gyökeinek összege egyenlő a négyzetes tag együtthatójának ellentettjével. A gondolatmenet ismertetése után következzen a tényleges levezetés:

$$\wp'(z_1) + a\wp(z_1) + b = 0$$

$$\wp'(z_2) + a\wp(z_2) + b = 0$$

rendszerből kapjuk, hogy

$$a = -\frac{\wp'(z_1) - \wp'(z_2)}{\wp(z_1) - \wp(z_2)}.$$

(ki fog derülni, hogy b-re nem is kell majd megoldanunk). Ezután az

$$(ax + b)^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

egyenletből, $\wp(z)$ párosságát is felhasználva kapjuk, hogy

$$\wp(z_1) + \wp(z_2) + \wp(z_1 + z_2) = \frac{a^2}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z_1) - \wp'(z_2)}{\wp(z_1) - \wp(z_2)}\right)^2.$$

Ezt átírva kapjuk az addíciós képletet:

$$\wp(z_1 + z_2) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z_1) - \wp'(z_2)}{\wp(z_1) - \wp(z_2)}\right)^2 - \wp(z_1) - \wp(z_2).$$

2.3.4. Következmény.

$$\wp(2z) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\right)^2 - 2\wp(z).$$

Bizonyítás.
$$\lim_{z\to w}\wp(z+w)=\frac{1}{4}\lim_{z\to w}\left(\frac{\wp'(z)-\wp'(w)}{\wp(z)-\wp(w)}\right)^2-\wp(z)-\lim_{z\to w}\wp(w).$$
Ebből az egyenletből kapjuk, hogy amennyiben $2z$ nem periódus:
$$\wp(2z)=\frac{1}{4}\lim_{h\to 0}\left(\frac{\wp'(z)-\wp'(z+h)}{\wp(z)-\wp(z+h)}\right)^2-2\wp(z)=\frac{1}{4}\lim_{h\to 0}\left(\frac{-h\wp''(z)+O(h^2)}{-h\wp(z)+O(h^2)}\right)^2-2\wp(z),$$
ahol alkalmaztuk a Taylor-formulát $\wp(z+h)$, $\wp'(z+h)$-ra, ebből pedig következik, hogy
$$\wp(2z)=\frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(z)}{\wp(z)}\right)^2-2\wp(z),$$
amennyiben $2z$ nem periódus. □

A $\wp(z)$ függvény integrálegyenlete

Tekintsük a
$$z=\int_u^\infty(4t^3-g_2t-g_3)^{-1/2}\mathrm{d}t$$
egyenletet, mely kifejezi z-t u-val. Az integrálás bármely olyan görbe mentén történhet, mely nem halad át $4t^3-g_2t-g_3$ valamely zérushelyén. Differenciálás után kapjuk, hogy
$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right)^2=4u^3-g_2u-g_3,$$
tehát a $\wp(z)$ függvény differenciálegyenlete alapján tudjuk, hogy
$$u=\wp(z+\alpha),$$
ahol α valamilyen konstans. Ha u-val végtelenbe tartunk, z 0-hoz tart, mivel az integrál konvergens. Azaz α $\wp(z)$ pólusa, tehát $u=\wp(z)$, tehát ekvivalens az integrálegyenlettel. Ezért úgy is fogalmazhatunk, hogy
$$\wp^{-1}(u)=\int_u^\infty(4t^3-g_2t-g_3)^{-1/2}\mathrm{d}t.$$

2.4. Általános elliptikus függvények

Speciális algebrai előállítás

Legyen Ω rögzített rács, és tekintsük azon elliptikus függvényeket, melynek periódusait ez a rács határozza meg. Legyen $f(z)$ páros elliptikus függvény, jelöljük az origótól különböző zérushelyeket, illetve pólusokat $(\alpha_1,-\alpha_1)$,...,$(\alpha_r,-\alpha_r)$-el. Ezek párban fordulnak elő, mivel feltételeztük, hogy $f(z)$ páros, azaz $f(z)=f(-z)$. Minden $(\alpha_k,-\alpha_k)$ párhoz $(k=1,\dots,r)$ rendelünk egy m_k egész számot a következőképpen: ha α_k zérushely, és nem félperiódus, akkor m_k a zérushely multiplicitása. Ha α_k zérushely és félperiódus, akkor $2m_k$ a zérushely multiplicitása. Hasonlóan, ha α_k pólus, és nem félperiódus, akkor m_k negatív, és $-m_k$ a pólus multiplicitása, ha pedig α_k pólus és félperiódus, akkor $-2m_k$ a pólus multiplicitása. Hallgatólagosan feltételeztük, hogy m_k egész, illetve azt, hogy ha α_k félperiódus, akkor a multiplicitás páros. Az, hogy ez valóban így van, a következőképp indokolható: tekintsük a

$$\phi(z) = f(z + \frac{\omega_k}{2})$$

függvényt. Ez a függvény páros, ami könnyen látható, ha felhasználjuk $f(z)$ párosságát és periodicitását:

$$\phi(-z) = f(-z + \frac{\omega_k}{2}) = f(z - \frac{\omega_k}{2}) = f(z + \frac{\omega_k}{2}) = \phi(z).$$

Mivel egy páros függvény Laurent-sorában csak páros kitevőjű tagok szerepelnek, ezért $\phi(z)$-nak a $z = 0$ helyen páros multiplicitású zérushelye vagy pólusa van, tehát $f(z)$-nek is az ω_k helyen. Célunk annak a bizonyítása, hogy a Ω rácson periodikus elliptikus függvények előállíthatók $\wp(z)$ és$\wp'(z)$ komplex együtthatós racionális függvényeként, azaz be akarjuk látni, hogy ezek a függvények generálják az elliptikus függvények testét. Egészen pontosan a következő tételt igazoljuk:

2.4.1. Tétel. *Legyen Ω rögzített rács, és legyen $\wp(z)$ és $\wp'(z)$ a rácshoz tartozó Weierstrass-féggvény, illetve annak a deriváltja. Ekkor*

1, minden Ω rácshoz tartozó páros elliptikus függvény $\wp(z)$ racionális függvénye;

2, minden Ω rácshoz tartozó elliptikus függvény $\wp(z)$ és $\wp'(z)$ racionális függvénye.

Bizonyítás. Legyen $f(z)$ Ω-hoz tartozó páros elliptikus függvény. Tekintsük a fönt definiált α_k, m_k számok felhasználásával konstruált függvényt:

$$F(z) = \prod_{k=1}^{n} (\wp(z) - \wp(\alpha_k))^{m_k}.$$

$F(z)$-nek és $f(z)$-nek ugyanazok a gyökei és pólusai, és ezek rendjei is egyenlőek, leszámítva az origóban esetlegesen előforduló gyököket vagy pólusokat. Viszont mivel mind $f(z)$, mind $F(z)$ gyökeinek száma megegyezik pólusainak a számával, az origóban is egyezniük kell, vagyis azt kapjuk, hogy $f(z) = kF(z)$. Következik tehát, hogy minden Ω-hoz tartozó páros elliptikus függvény $\wp(z)$ racionális függvénye. A tétel második részének bizonyításához abból indulunk ki, hogy $\wp'(z)$ páratlan függvény, így ha $g(z)$ páratlan elliptikus függvény, akkor $\frac{g(z)}{\wp'(z)}$ páros elliptikus függvény, azaz az első részből következően előáll $\wp(z)$ racionális függvényeként. Legyen $h(z)$ tetszőleges Ω-hoz tartozó elliptikus függvény. Ekkor

$$h(z) = \frac{1}{2}(h(z) + h(-z)) + \frac{1}{2}(h(z) - h(-z)) = f(z) + g(z),$$

ahol $f(z)$ páros, $g(z)$ pedig páratlan függvény. Az előzőek szerint tehát

$$h(z) = P(\wp(z)) + \wp'(z)Q(\wp(z)),$$

ahol $P(w), Q(w)$ racionális függvények. □

Eredményünk úgy is megfogalmazható, hogy egy rögzített Ω rácshoz tartozó elliptikus függvények teste előáll $\mathbb{C}$ $\wp(z)$, $\wp'(z)$ transzcendens elemekkel való bővítéseként, azaz a következő függvénytestet alkotják:

$$\mathbb{C}(\wp(z), \wp'(z)).$$

Bizonyítás nélkül kimondunk egy tételt, az érdeklődő olvasó a bizonyítást megtalálhatja a [2] jegyzetben.

2.4.2. Tétel (Általános algebrai előállítás). *Legyen $f(z)$ nemkonstans elliptikus függvény, a rendje n.*

1, az elliptikus függvények teste $f(z)$ racionális függvényei testének, $\mathbb{C}(f)$-nek n-edrendű bővítése.

2, Akkor és csak akkor lesz ez a $g(z)$ elemmel való egyszerű bővítés, ha legalább egy $z \in \overline{\mathbb{C}}$ $f(z)$ általi n ősképén $g(z)$ csupa különböző értéket vesz fel; ekkor ez véges sok kivételtől eltekintve minden z-re is fennáll.

Kapcsolat a Jacobi- és Weierstrass-féle elliptikus függvények között

Numerikus számításokban gyakran kényelmes a Weierstrass-féle elliptikus függvényt Jacobi-féle elliptikus függvényekkel kifejezni. A következő összefüggések a legfontosabbak:

$$\wp(z) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2 w} = e_2 + (e_1 - e_3)\frac{\operatorname{dn}^2 w}{\operatorname{sn}^2 w} = e_1 + (e_1 - e_3)\frac{\operatorname{cn}^2 w}{\operatorname{sn}^2 w},$$

ahol e_{1-3} a korábban meghatározott gyökök, és a Jacobi-féle elliptikus függvények k modulusa a következő:

$$k \equiv \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}},$$

argumentumuk, w pedig

$$w \equiv z\sqrt{e_1 - e_3}.$$

2.5. A Weierstrass-féle zeta- és szigma-függvény

Ebben a szakaszban röviden szót ejtünk két, a $\wp(z)$-függvénnyel kapcsolatos speciális függvényről, melyek egy kis szerepet kapnak az alkalmazásokban. Az első a $\zeta(z)$ függvény, melyet a következőképp definiálunk:

$$\zeta'(z) = -\wp(z),$$

azzal a feltétellel, hogy $\lim_{z\to 0}\left(\zeta(z) - \frac{1}{z}\right) = 0$. Mivel $\wp(z) - \frac{1}{z^2}$ egyenletesen kovergens minden tartományon, mely nem tartalmazza Ω 0 ponthalmaz egy kis környezetét, ezért integrálhatunk tagonként:

$$\zeta(z) - \frac{1}{z} = -\int_0^z \left(\wp(z) - \frac{1}{z^2}\right) \mathrm{d}z = -\int_0^z \left(\sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ \omega\neq 0}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)\right) \mathrm{d}z,$$

vagyis a számítást elvégezve:

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ \omega\neq 0}} \left(\frac{1}{(z-\omega)} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right).$$

A $\zeta(z)$ függvény analitikus a komplex számsíkon a Ω rácspontok kivételével, amely pontokban egyszeres pólusa van. A $\zeta(z)$ páratlan függvény, ami könnyen látható: $-\zeta(-z)$-t a fönti sor segítségével

felírva annak egy átrendezettjét kapjuk, amiből rögtön következik, hogy $\zeta(-z) = -\zeta(z)$.
A másik függvény a Weierstrass-féle $\sigma(z)$ függvény, melynek a definíciója

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\log \sigma(z)) = \zeta(z),$$

feltéve, hogy $\lim_{z\to 0} \frac{\sigma(z)}{z} = 1$. Mivel a $\zeta(z)$-t meghatározó sorozat (a pólusok kis környezetétől eltekintve) egyenletesen konvergens, a sorozatot tagonként integrálva, majd mindkét oldal exponenciálisát véve kapjuk, hogy

$$\sigma(z) = z \prod_{\substack{\omega\in\Omega \\ \omega\neq 0}} \left[\left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}\right)\right].$$

Könnyen látható, hogy minden korlátos tartományon konvergens a $\sigma(z)$-t előállító fenti szorzat, és a $\zeta(z)$ függvényre vonatkozó érvelést megismételve az is nyilvánvaló, hogy a függvény páratlan. Számtalan összefüggés létezik ezen függvények és a $\wp(z)$ függvény között, ezek között a következőt használjuk fel a gömbi inga mozgásegyenletének vizsgálatakor:

$$\zeta(u+v) + \zeta(u-v) - 2\zeta(u) = \frac{\wp'(u)}{\wp(u) - \wp(v)}.$$

Ez, és rengeteg további formula levezetéssel együtt megtalálható a [1] könyvben.

3. fejezet

Alkalmazások

Ebben a fejezetben az elliptikus függvények két alkalmazását mutatjuk be: kiszámítjuk az ellipszoid felszínét a Jacobi-féle elliptikus függvények segítségével, illetve vizsgáljuk a gömbi inga mozgásegyenletét, amelynek tárgyalásához a Weierstrass-féle elliptikus függvény lesz szükséges.

3.1. Az ellipszoid felszíne

Tekintsük a

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{3.1}$$

egyenlettel felírt ellipszoidot, amelyben a, b, c nem mind egyenlőek, továbbá feltesszük, hogy $a > b > c$. Jelölje p az ellipszoid középpontjából az (x, y, z) pont érintősíkjába húzott merőleges szakaszt, és jelölje $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ az (x, y, z) pontbeli normálvektor iránykoszinuszait. Ekkor kapjuk, hogy

$$\frac{1}{p^2}=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}, \tag{3.2}$$

valamint

$$\cos\alpha=\frac{px}{a^2}, \cos\beta=\frac{py}{b^2}, \cos\gamma=\frac{pz}{c^2}, \tag{3.3}$$

amiből adódik, hogy speciálisan

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{c^4x^2}{a^4z^2}+\frac{c^4y^2}{b^4z^2}\right)}}. \tag{3.4}$$

Ebből következik, hogy azon pontok, melyekhez tartozó normálvektorok konstans γ szöget zárnak be a z-tengellyel, egy kúpra illeszkednek, melynek egyenlete

$$\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)\cos^2\gamma=\frac{z^2}{c^4}. \tag{3.5}$$

(3.1)-ből és (3.2)-ből kifejezve z^2-et kapjuk az alábbi egyenletet:

$$\left(\frac{\cos^2\gamma}{a^2}+\frac{\sin^2\gamma}{c^2}\right)\frac{x^2}{a^2}+\left(\frac{\cos^2\gamma}{b^2}+\frac{\sin^2\gamma}{c^2}\right)\frac{y^2}{b^2}=\frac{\sin^2\gamma}{c^2}, \tag{3.6}$$

ami egy ellipszis alapú henger egyenlete. Vegyük ennek a hengernek, és az ellipszoidnak a metszetét $z > 0$-kra. Ha A-val jelöljük a henger keresztmetszetének területét, és S-sel az ellipszoidfelszín azon részének területét, melyet a metszés során kaptunk, akkor felírható, hogy

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}A \cdot \sec\gamma. \tag{3.7}$$

(3.6)-ből kapjuk, hogy A területe

$$A = \frac{\pi a^2 b^2 \sin^2\gamma}{\sqrt{(c^2\cos^2\gamma + a^2\sin^2\gamma)}\sqrt{(c^2\cos^2\gamma + b^2\sin^2\gamma)}} = \frac{\pi ab\sin^2\gamma}{\sqrt{(1-e_1^2\cos^2\gamma)}\sqrt{(1-e_2^2\cos^2\gamma)}}, \tag{3.8}$$

ahol

$$e_1^2 = \frac{a^2-c^2}{a^2}, e_2^2 = \frac{b^2-c^2}{b^2}, \tag{3.9}$$

továbbá az $a^2 > b^2 > c^2$ feltételből következik, hogy $e_1^2 > e_2^2$. Legyen most

$$t = e_1\cos\gamma, k^2 = \frac{e_2^2}{e_1^2}, \tag{3.10}$$

amely segítségével (3.8) úgy írható, hogy

$$A = \frac{\pi ab(e_1^2 - t^2)}{e_1^2\sqrt{(1-t^2)}\sqrt{(1-k^2t^2)}},$$

ami hasonlít egy elliptikus integrálra. Ezek után legyen

$$t = \mathrm{sn}(u,k), e_1 = \mathrm{sn}(\theta,k),$$

amely segítségével azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sec\gamma &= \frac{\mathrm{sn}(\theta,k)}{\mathrm{sn}(u,k)} = \frac{\mathrm{sn}(\theta)}{\mathrm{sn}(u)}, \\ A &= \frac{\pi ab}{\mathrm{sn}^2\theta}\frac{\mathrm{sn}^2\theta - \mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{cn}(u)\,\mathrm{dn}(u)}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

(3.11)-et u szerint deriválva kapjuk, hogy

$$\frac{\mathrm{sn}(\theta)}{\pi ab}\mathrm{d}A\sec\gamma = -\left(\frac{\mathrm{dn}^2\theta}{\mathrm{dn}^2 u} + \frac{\mathrm{cn}^2\theta}{\mathrm{cn}^2 u}\right)\mathrm{d}u. \tag{3.12}$$

Amint γ 0-tól $\pi/2$-ig változik, t e_1-től 0-ig, u pedig θ-tól 0-ig változik. Ha S az ellipszoid egész felszínét jelöli, akkor (3.7)-ből és (3.12)-ből együttesen az következik, hogy

$$\frac{S\,\mathrm{sn}(\theta)}{2\pi ab} = \int_0^\theta \left(\frac{\mathrm{dn}^2\theta}{\mathrm{dn}^2 u} + \frac{\mathrm{cn}^2\theta}{\mathrm{cn}^2 u}\right)\mathrm{d}u. \tag{3.13}$$

Feladatunk tehát az, hogy a fönti integrált kiszámítsuk. Differenciálással ellenőrizhető, hogy egyrészt

$$\int \mathrm{dn}^2 u\mathrm{d}u = k'^2 u + \frac{\mathrm{dn}(u)\,\mathrm{sn}(u)}{\mathrm{cn}(u)} - k'^2\int\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{cn}^2 u}, \tag{3.14}$$

másrészt pedig

$$\int \mathrm{dn}^2 u du = k^2 \frac{\mathrm{sn}(u)\,\mathrm{cn}(u)}{\mathrm{dn}(u)} + k'^2 \int \frac{du}{\mathrm{dn}^2 u}. \tag{3.15}$$

(3.14)-ből következik, hogy

$$\int_0^\theta \frac{du}{\mathrm{cn}^2 u} = \frac{1}{k'^2}[k'^2\theta + \frac{\mathrm{dn}(\theta)\,\mathrm{sn}(\theta)}{\mathrm{cn}\,\theta} - E(\theta)], \tag{3.16}$$

(3.15)-ből pedig az, hogy

$$\int_0^\theta \frac{du}{\mathrm{dn}^2 u} = \frac{1}{k'^2}E(\theta) - \frac{k^2}{k'^2}\frac{\mathrm{sn}(\theta)\,\mathrm{cn}(\theta)}{\mathrm{dn}(\theta)}, \tag{3.17}$$

ahol $E(\theta)$ a következő másodrendű elliptikus integrállal egyenlő:

$$E(\theta) = \int_0^\theta \mathrm{dn}^2 u du.$$

Ha (3.16)-ból és (3.17)-ből behelyettesítünk (3.13) jobb oldalává, azt kapjuk, hogy

$$\frac{S\,\mathrm{sn}(\theta)}{2\pi ab} = \mathrm{dn}^2\theta\left(\frac{1}{k'^2}E(\theta) - \frac{k^2}{k'^2}\frac{\mathrm{sn}(\theta)\,\mathrm{cn}(\theta)}{\mathrm{dn}(\theta)}\right) + \mathrm{cn}^2\theta\left(\theta + \frac{1}{k'^2}\frac{\mathrm{sn}(\theta)\,\mathrm{dn}(\theta)}{\mathrm{cn}(\theta)} - \frac{1}{k'^2}E(\theta)\right). \tag{3.18}$$

Felhasználva azt a tényt, hogy $\mathrm{dn}^2\theta - \mathrm{cn}^2\theta = k'^2\,\mathrm{sn}^2\theta$, a fönti egyenlet jobb oldala átírható úgy, hogy

$$\begin{aligned} &\mathrm{sn}^2 E(\theta) - \frac{k^2}{k'^2}\mathrm{sn}(\theta)\,\mathrm{cn}(\theta)\,\mathrm{dn}(\theta) + \theta\,\mathrm{cn}^2\theta + \frac{1}{k'^2}\mathrm{sn}(\theta)\,\mathrm{cn}(\theta)\,\mathrm{dn}(\theta) \\ &\qquad = \mathrm{sn}^2\theta E(\theta) + \mathrm{sn}(\theta)\,\mathrm{cn}(\theta)\,\mathrm{dn}(\theta) + \theta\,\mathrm{cn}^2\theta. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Ha visszahelyettesítünk ebbe az egyenletbe (3.9)-ből és (3.10)-bő, azt kapjuk végül, hogy

$$\frac{S\,\mathrm{sn}(\theta)}{2\pi ab} = \frac{a^2-c^2}{a^2}E(\theta) + \frac{\sqrt{(a^2-c^2)}c^2}{a^2 b} + \frac{c^2}{a^2}\theta, \tag{3.20}$$

ami átrendezés és egyszerűsítés után a következő alakot ölti:

$$S = 2\pi c^2 + \frac{2\pi b}{\sqrt{(a^2-c^2)}}[(a^2-c^2)E(\theta) + c^2\theta]. \tag{3.21}$$

3.2. A gömbi inga

A gömbi inga általánosítása az első fejezetben részletesen tárgyalt ingának: az inga feje, P ebben a modellben már egy gömbön, nem egy körön mozog. Feltesszük, hogy tömege m, és a gömb középpontjához, mint origóhoz illesztett hengerkoordinátákat (r, θ, z) jelöli. AOA' jelöli a gömb függőleges átmérőjét (A felel meg a déli sarknak), PN a fej helyzetétől az átmérőhöz húzott merőlegest, ezzel $NP = r$, illetve $ON = z$. Ha a jelöli a gömb sugarát, akkor az egyenlete

$$r^2 + z^2 = a^2. \tag{3.22}$$

Egy t időpillanatban a részecske sebességének komponensei $(\dot{r}, r\dot{\theta}, \dot{z})$, és a következő erők hatnak rá:

1, a fej súlya, mg, mely a z-tengellyel párhuzamosan hat;

2, a gömb középpontján át ható reakció (a kötél feszültsége).

A t_0 kezdeti időpillanatban z_0 jelöli z kezdeti értékét, ésv_0 jelöli a kezdeti sebességet. A z-tengelyre vonatkozó forgatónyomatékok összege 0, a perdületmegmaradás törvénye szerint a z-tengelyre vonatkozó perdület megmarad, így valamely h konstanssal teljesül, hogy

$$r^2\dot{\theta} = h. \tag{3.23}$$

Az energia megmarad, mivel az inga fejére nem hat disszipatív erő, így az energiaegyenletből kapjuk, hogy

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 = v_0^2 + 2g(z_0 - z) = 2g(l - z), \tag{3.24}$$

ahol

$$l = \frac{v_0^2 + 2gz_0}{2g}.$$

(3.22)-ből következik, hogy

$$r\dot{r} + z\dot{z} = 0,$$

ezzel, és (3.23)-vel (3.24) úgy írható, hogy

$$\dot{z}^2\left(\frac{a^2}{a^2 - z^2}\right) + \frac{h^2}{(a^2 - z^2)} = 2g(l - z),$$

amiből

$$\dot{z}^2 = \frac{1}{a^2}[2g(l - z)(a^2 - z^2) - h^2] = \frac{\theta(z)}{a^2}, \tag{3.25}$$

ahol

$$\theta(z) = 2g(l - z)(a^2 - z^2) - h^2. \tag{3.26}$$

(3.25)-ből következik, hogy a $z_0 = z(t_0)$ pontban $\theta(z_0) > 0$, mivel $\dot{z}$ valós, amikor $t = t_0$. Tekintsük a (3.26)-beli $\theta(z)$ harmadfokú kifejezést. Könnyen látható, hogy $z \to \infty$, $z \in \mathbb{R}$ esetén pozitív,

$\theta(a)$ negatív, $\theta(z_0)$ pozitív, $\theta(-a)$ pedig negatív. Ebből következik, hogy a $\theta(z) = 0$ harmadfokú egyenletnek három gyöke van, legyenek ezek z_1, z_2, z_3, és tegyük fel, hogy

$$-a < z_1 < z_0 < z_2 < a < z_3 < \infty. \tag{3.27}$$

A z_3 gyök nincs a gömb felszínén, így a fej a $z = z_1$, illetve $z = z_2$ síkok között mozog. Legyen most $z = aw$, és $al' = l$, ezzel (3.25) a következő alakú lesz:

$$a^2\dot{w}^2 = 2ga(l' - w)(1 - w^2) - \frac{h^2}{a^2}. \tag{3.28}$$

Ha még egy változócserét hajtunk végre: $t = cx$-et, akkor az egyenletünk új alakja

$$\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \frac{c^2}{a}2g(l' - w)(1 - w^2) - \frac{c^2h^2}{a^4} = 4(l' - w)(1 - w^2) - h'^2 \tag{3.29}$$

lesz, ahol $gc^2 = 2a$, illetve $h' = \frac{ch}{a^2} = (\frac{2a}{g})^{1/2}\frac{h}{a^2} = (\frac{2}{ag})^{1/2}\frac{h}{a}$. Célunk úgy átalakítani (3.29)-at, hogy egyértelműen látszódjon a hasonlósága a Weierstrass-féle $\wp$-függvényhez. Ehhez legyen $w = \eta + n$, ahol $n = l'/3$, és legyen

$$g_2 = \frac{4}{3}(l'^2 + 3), \quad g_3 = h'^2 + \frac{8}{27}l'^3 - \frac{8}{3}l', \tag{3.30}$$

hogy kapjuk a következőt:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}\right)^2 = 4\eta^3 - g_2\eta - g_3. \tag{3.31}$$

Legyen $\eta = \wp(u)$. Tehát

$$\left(\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}u}\right)^2 = 4\eta^3 - g_2\eta - g_3,$$

illetve

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}u} = \wp'(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

Következik, hogy

$$\wp'(u)^2\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2 = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3,$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \pm 1,$$

ahol $u = \pm(x + \alpha)$, α konstans. Mivel $\wp(u)$ páros függvény, választhatjuk a pozitív előjelet, így $u = x + \alpha$. Ebből következik, hogy

$$\eta = \wp(u) = \wp(x + \alpha). \tag{3.32}$$

Jelölje e_1, e_2, e_3 $4\eta^3 - g_2\eta - g_2$ gyökeit (melyek valósak), és tegyük fel, hogy

$$e_1 = \frac{z_3}{a} - \frac{l'}{3}, e_2 = \frac{z_1}{a} - \frac{l'}{3}, e_3 = \frac{z_2}{a} - \frac{l'}{3},$$

ahol a z_i-k az (3.27)-ban megadott gyökök. Tekintsük a következő integrálokat:

$$\omega_1 = \int_{e_1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\eta}{\sqrt{4\eta^3 - g_2\eta - g_3}},$$

ahol az integrált a valós tengely mentén vettük, és

$$\omega_2 = \int_{e_2}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\eta}{\sqrt{4\eta^3 - g_2\eta - g_3}},$$

ahol a képzetes tengely mentén integráltunk, így ω_1 valós, ω_2 képzetes. Amint z csökken z_2-től z_1-ig, η csökken e_3-tól e_2-ig, és valós. Következik, hogy $\alpha = \omega_2$, $2\omega_1, 2\omega_2$ periódusai $\wp(u)$-nak, és ω_1 jelenti a z_2-től z_1 eléréséig szükséges időt. Ezekből azt kaptuk, hogy

$$z = aw = a\wp\left(\sqrt{\frac{g}{2a}}t + \omega_2\right) + \frac{l}{3} = a\wp\left(\sqrt{\frac{g}{2a}}t + \omega_2\right) + \frac{1}{6g}(v_0^2 + 2gz_0). \tag{3.33}$$

A θ függvényre kapjuk, hogy

$$\dot{\theta} = \frac{h}{a^2 - z^2} = \frac{h}{2a}\left(\frac{1}{a-z} + \frac{1}{a+z}\right) = \frac{h}{2a^2}\left(\frac{1}{a-w} + \frac{1}{a+w}\right),$$

így tehát

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u} = \frac{ch}{2a^2}\left(\frac{1}{\wp(u) - \wp(\alpha)} - \frac{1}{\wp(u) - \wp(\beta)}\right), \tag{3.34}$$

ahol

$$w = \wp(u) + \frac{l'}{3}, \quad -\wp(\alpha) = 1 + \frac{l'}{3}, \quad \wp(\beta) = 1 - \frac{l'}{3}. \tag{3.35}$$

Felhasználva (3.29)-at, azt kapjuk most, hogy

$$\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \wp'^2(u) = 4(l' - w)(1 - w^2) - h'^2 = -h'^2, \tag{3.36}$$

ha $w = \pm 1$ vagy $w = l'$. Ezért

$$\wp'^2(\alpha) = \wp'^2(\beta) = -h'^2,$$

tehát

$$\wp'(\alpha) = \wp'(\beta) = \mathrm{i}h'.$$

(3.34) alapján következik, hogy

$$\begin{aligned} 2\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u} &= \frac{h}{h'}\sqrt{\frac{2a}{g}}\frac{1}{a^2}\left(\frac{\wp'(\alpha)}{\wp(u) - \wp(\alpha)} - \frac{\wp'(\beta)}{\wp(u) - \wp(\beta)}\right) \\ &= \zeta(u+\beta) - \zeta(u-\beta) - 2\zeta(\beta) - \zeta(u+\alpha) + \zeta(u-\alpha) + 2\zeta(\alpha), \end{aligned}$$

ahol ζ jelöli a Weierstrass-féle zéta függvényt. Az utolsó egyenletet integrálva azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} = -E^2\frac{\sigma(u+\beta)\sigma(u-\alpha)}{\sigma(u+\alpha)\sigma(u-\beta)}\exp 2(\zeta(\alpha) - \zeta(\beta))u,$$

ahol E^2 a kezdeti feltételek által meghatározott integrálási konstans. Végül (3.22)-ből, a gömb egyenletéből azt kapjuk, hogy

$$r^2 = a^2 - z^2 = -a^2[(\wp(u) - \wp(\alpha))(\wp(u) - \wp(\beta))]. \tag{3.37}$$

Irodalomjegyzék

[1] J. V. Armitage - W. F. Eberlein: *Elliptic Functions*, London Mathematical Society Student Texts 67, Cambridge University Press, 2006.

[2] Halász Gábor: *Speciális függvények*

[3] E. T. Whittaker - G. N. Watson: *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, 1927.

[4] Laczkovich Miklós - T. Sós Vera: *Analízis I-II.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2006, 2007.

[5] Ph. Cassou-Nogues - M. J. Taylor: *Elliptic Functions and Rings of Integers*, Birkhäuser Boston, 1987.

[6] Yum-Tong-Siu: *Elliptic Functions*, 2009. Elérhető a következő honlapon: `http://www.math.harvard.edu/~siu/math113/notes_on_elliptic_functions.pdf`

[7] G. A. Korn, T. M. Korn: *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers.* New York, McGraw-Hill, 1961.