Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Kondor Gábor

Szindbád és a részbenrendezett háremhölgyek

BSc Szakdolgozat

Témavezető:

Csiszár Villő

adjunktus

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Budapest, 2013

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Csiszár Villőnek, hogy felkeltette érdeklődésemet a téma iránt, hogy mindig bizalommal fordulhattam hozzá, és hogy áldozatos munkájával, észrevételeivel és tanácsaival segítette e dolgozat létrejöttét. Ugyancsak köszönöm Móri Tamásnak rendkívül hasznos útmutatásait, és hogy kérdéseim megválaszolásában mindig készségesen segített.

Szeretném megköszönni minden tanáromnak, hogy az elmúlt években hozzájárultak szakmai fejlődésemhez, továbbá barátaimnak és szaktársaimnak, akikre mindig számíthattam. Végül, de nem utolsó sorban hálával tartozom családomnak, akik mindig mellettem álltak és támogattak.

Budapest, 2013. május 30.

Kondor Gábor

Tartalomjegyzék

Bevezetés

"Kérjünk meg valakit, hogy vegyen annyi papírcetlit, amennyit csak szeretne, és mindegyik cetlire írjon egy-egy különböző pozitív számot. A számok nagyságrendje 1 egy kis hányadától egy *googol*-ig (10^{100} nagyságrend), vagy akár még ennél nagyobb számig is terjedhet. Ezeket a cetliket írással lefelé fordítják, és összekeverik egy asztalon. Egyesével felfordítjuk a cetliket. A cél az, hogy akkor álljunk meg, amikor ahhoz a számhoz érünk, amelyről úgy gondoljunk, hogy az a legnagyobb a sorozatban. Nem léphetünk vissza, hogy egy korábban felfordított cetlit válasszunk, és ha már az összes cetlit felfordítottuk, akkor természetesen az utolsót kell választanunk." – ebben a megfogalmazásban jelent meg a *googol* nevű játék Martin Gardner [12] *Mathematical Games* című rovatában a *Scientific American* 1960-as kiadásában. Ezzel népszerűsítette és elterjesztette ezt a problémát, melynek azóta számos eltérő megfogalmazása és változata született. A problémakör pontos eredetéről Ferguson [9] *Who solved the secretary problem?* című írása ad egy remek áttekintést, és ebben is megtalálható a *googol* probléma iménti megfogalmazása.

Ezen dolgozat fő célja a Szindbád-, valamint a titkárnő-problémaként elhíresült megfogalmazások néhány változatának mélyebb áttekintése, és emellett kitekintést adunk más variációkra és a témakör néhány alkalmazási lehetőségére is.

Az 1. fejezetben Garrod [13] PhD disszertációja alapján a lineáris rendezés esetével foglalkozunk. Megfogalmazzuk a Szindbád-problémát, majd egy stratégiával, amelyről később belátjuk, hogy optimális, megadjuk a sikeres választás aszimptotikus valószínűségét.

A 2. fejezetben az előzőleg említett irodalom 2. fejezete alapján megfogalmazzuk ikerpárokra a titkárnő-problémát, majd megadunk egy optimális stratégiát, mely esetén meghatározzuk a siker aszimptotikus valószínűségét. Ezután a fejezet hátralévő részében a probléma általánosításaként, a c-es ikrek esetével foglalkozunk, melyre szintén találunk egy optimális stratégiát.

A 3. fejezetben kissé eltávolodunk az eddigiektől, és ismeretlen részbenrendezéseket tekintünk. Elsőként Freij és Wästlund [11] cikke alapján azt az esetet vizsgáljuk, amikor semmit sem tudunk a részbenrendezett halmazról, és megmutatjuk, hogy van olyan stratégia, amellyel bármely részbenrendezés esetén legalább $\frac{1}{e}$ valószínűséggel tudunk kiválasztani egy maximális elemet. Ezután Garrod [13] munkásságának 3. fejezetét felhasználva olyan részbenrendezett halmazokkal foglalkozunk, melyeknek maximális elemeinek száma ismert. Megadunk egy olyan algoritmust, amely, ha csak a maximális elemek számát és a részbenrendezés méretét tudjuk, legalább $\frac{1}{e}$ valószínűséggel sikeres. Továbbá belátjuk, hogy bizonyos részbenrendezett halmazok esetén még ennél is jobb alsó korlátot tudunk adni a siker valószínűségére.

A 4. fejezetben az 1.1., a 2.1. és a 3.2. Szakaszban megadott algoritmusok eredményességét teszteljük. Az elsőt lineáris rendezések, a másodikat ikerpárok által alkotott részbenrendezett halmazok, utóbbit pedig megadott számú diszjunkt láncból álló részbenrendezés esetén futtatjuk, és a siker átlagos valószínűségét vizsgáljuk.

Az 5. fejezetben Garrod [13] PhD disszertációjának 1.3. Szakasza alapján megemlítjük a titkárnő-probléma néhány érdekes változatát, és az ezekhez kapcsolódó eredményeket.

Végül a 6. fejezetben Kumar, Lattanzi, Vassilvitskii és Vattani [20], valamint Babaioff, Immorlica, Kempe és Kleinberg [5] munkája nyomán kitérünk a problémakör alkalmazási lehetőségeire néhány való élet által ihletett feladat kapcsán.

1. fejezet

Lineáris rendezés

1.1. Szindbád és a háremhölgyek

A hazai szakirodalomban a Szindbád-problémaként ismert megfogalmazás a legelterjedtebb. Ennek vizsgálatához először megfogalmazzuk az alapproblémát.

1.1.1. Feladat. Szindbádnak 100 hölgyből kell választania egyet oly módon, hogy egyesével elmennek előtte (aki már elment, nem tér vissza), az első m hölgyet elengedi, majd a többiek közül kiválasztja az addigi legszebbet. Kérdés, hogy hogyan válasszuk meg m értékét, hogy maximalizáljuk a siker valószínűségét, és hogy mekkora valószínűséggel választja ki ilyen módon valóban a legszebb hölgyet.

1.1.2. Állítás. *Az előzőleg megfogalmazott feladatban n háremhölgy esetén $m = \frac{n}{e} + \mathcal{O}(1)$ választással lesz a siker valószínűsége maximális, és a siker aszimptotikus valószínűsége $\frac{1}{e}$.*

Bizonyítás. Legyen A : a legszebbet választja, B_k : a k. hölgyet választja, B_0 : egyiket sem választja. Mivel $B_0, B_{m+1}, \ldots, B_n$ teljes eseményrendszer, így

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_0) \cdot \mathbb{P}(B_0) + \sum_{k=m+1}^{n} \mathbb{P}(A|B_k) \cdot \mathbb{P}(B_k) = 0 + \sum_{k=m+1}^{n} \mathbb{P}(AB_k).$$

A hölgyek lehetséges sorrendjei: $|\Omega| = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n = n!$. Az olyan lehetőségek száma, amikor a k-adik helyen a legszebbet választottuk,

$$|AB_k| = 1 \cdot \binom{n-1}{k-1} \cdot m \cdot (k-2)! \cdot (n-k)! = \frac{(n-1)! \cdot m}{k-1},$$

mivel először 1-féleképpen kiválasztjuk a k-adik helyre a legszebbet, ezután a fennmaradó $(n-1)$ hölgy közül kiválasztom, hogy kik legyenek az első $(k-1)$ helyen. Közülük a legszebb az első m hely valamelyikét kell, hogy elfoglalja, a többi $(k-2)$

hölgy sorrendje viszont tetszőleges lehet. Végül az utolsó $(n-k)$ hölgy sorrendje szintén tetszés szerinti. Ekkor

$$\mathbb{P}(AB_k) = \frac{|AB_k|}{n!} = \frac{m}{(k-1)n},$$

így

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=m+1}^{n} \mathbb{P}(AB_k) = \frac{m}{n} \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k-1} = \frac{m}{n} \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Tudjuk, hogy m megfelelő választása esetén $\mathbb{P}(A)$ maximális, ezért m-re teljesülnek az alábbiak:

$$\frac{m}{n} \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{m-1}{n} \sum_{k=m-1}^{n-1} \frac{1}{k} \tag{1.1}$$

$$\frac{m}{n} \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{m+1}{n} \sum_{k=m+1}^{n-1} \frac{1}{k}. \tag{1.2}$$

Az (1.1)-es kifejezést tovább alakítva:

$$\begin{aligned} m \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k} &\geq (m-1)\left(\frac{1}{m-1} + \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k}\right) \\ \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k} &\geq 1, \end{aligned}$$

míg az (1.2)-es kifejezésből a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} m\left(\frac{1}{m} + \sum_{k=m+1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) &\geq (m+1) \sum_{k=m+1}^{n-1} \frac{1}{k} \\ 1 &\geq \sum_{k=m+1}^{n-1} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Ezekből adódik, hogy

$$\sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k} \geq 1 \geq \sum_{k=m+1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Itt a jobb oldali egyenlőtlenséget tovább alakítva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 1 \geq \sum_{k=m+1}^{n-1} \frac{1}{k} \geq \int_m^{n-1} \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \big[\ln|x+1|\big]_m^{n-1} &= \ln \frac{n}{m+1} \\ e &\geq \frac{n}{m+1} \\ \frac{n}{e} &\leq m+1 \\ \frac{1}{e} - \frac{1}{n} &\leq \frac{m}{n}, \end{aligned}$$

míg a bal oldali egyenlőtlenségből a következő adódik:

$$1 \leq \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \int_{m-1}^{n-1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \big[\ln|x|\big]_{m-1}^{n-1} = \ln\frac{n-1}{m-1}$$

$$e \leq \frac{n-1}{m-1}$$

$$m-1 \leq \frac{n-1}{e}$$

$$\frac{m}{n} \leq \frac{1}{e} + \frac{\frac{e-1}{e}}{n}.$$

Az eddigieket összegezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{e} - \frac{1}{n} \leq \frac{m}{n} \leq \frac{1}{e} + \frac{\frac{e-1}{e}}{n},$$

vagyis a megfelelő m-re, amely maximalizálja $\mathbb{P}(A)$-t, teljesül, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} = \frac{1}{e},$$

valamint a siker valószínűsége is ugyanehhez az értékhez konvergál, mivel

$$1 \leq \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \ln\frac{n-1}{m-1},$$

ahol a jobb oldali kifejezés határértéke

$$\lim_{n\to\infty} \ln\frac{n-1}{m-1} = \lim_{n\to\infty} \ln\frac{n-1}{\frac{n}{e}-1} = \lim_{n\to\infty} \ln\left(e\cdot\frac{n-1}{n-e}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\ln e + \ln\frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{e}{n}}\right) = \ln e + \ln 1 = 1.$$

Tehát

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{n}\sum_{k=m}^{n-1}\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{e}\cdot 1 = \frac{1}{e}.$$

□

Vagyis a korábban megfogalmazott 1.1.1. Feladatnál akkor a legnagyobb a siker valószínűsége, ha Szindbád a hölgyek közül az első $\left\lfloor \frac{100}{e} \right\rfloor = 36$-ot elengedi, és azután azt a háremhölgyet választja, aki az összes addigi közül a legszebb, a siker valószínűsége pedig $\frac{1}{e} \approx 36{,}79\%$.

1.2. Az optimális stratégia

Az előző szakaszban meghatároztuk a siker valószínűségét, ha az 1.1.1. Feladatban megfogalmazott, "elengedjük az első m hölgyet, majd a többiek közül az addigi legszebbet választjuk" módon járunk el. A következőekben igazoljuk, hogy ez a stratégia valóban optimális. Legyen $[n] = \{1,\ldots,n\}$. Az optimalitás vizsgálatában segítségünkre lesz az alábbi tétel, amelyet bizonyítás nélkül közlünk [7].

1.2.1. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{A}_n$ σ-algebrák egy sorozata, és legyen $W_1, \ldots, W_n$ valószínűségi változók egy sorozata, melyre teljesül, hogy W_t minden t esetén $\mathcal{A}_t$-mérhető. Legyen $\mathcal{C}_{(\mathcal{A}_t)}$ az $(\mathcal{A}_t)_{t\in[n]}$-hez tartozó megállási idők osztálya, és legyen*

$$v^* = \sup_{\tau \in \mathcal{C}_{(\mathcal{A}_t)}} \mathbb{E}(W_\tau).$$

Definiáljuk egymás után a $\gamma_n, \gamma_{n-1}, \ldots, \gamma_1$ valószínűségi változókat az alábbi módon:

$$\gamma_n = W_n,$$
$$\gamma_t = \max\Big\{W_t, \mathbb{E}\big(\gamma_{t+1}|\mathcal{A}_t\big)\Big\}, \quad t = n-1, \ldots, 1.$$

Legyen

$$\tau^* = \min\big\{t : W_t = \gamma_t\big\}.$$

Ekkor $\tau^* \in \mathcal{C}_{(\mathcal{A}_t)}$, és

$$\mathbb{E}(W_{\tau^*}) = \mathbb{E}(\gamma_1) = v^* \geq \mathbb{E}(W_\tau) \text{ minden } \tau \in \mathcal{C}_{(\mathcal{A}_t)} \text{ esetén.}$$

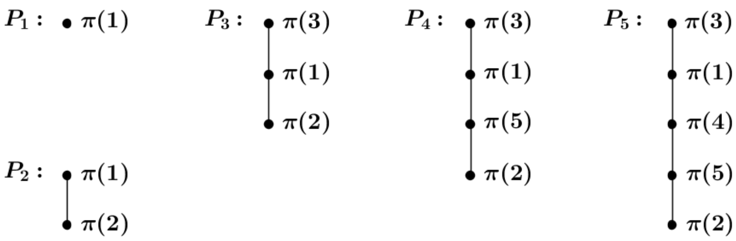
$\square$

A tétel következménye, hogy az a stratégia, amely az első olyan t-nél áll meg, amelyre $W_t = \gamma_t$, vagy ekvivalensen, W_t legalább akkora, mint a γ_{t+1} várható értéke $\mathcal{A}_t$ ismeretében, valóban megállási idő, és az optimális értéket érjük el vele.

Vezessünk be néhány új jelölést. Legyen $P = \{s_1, \ldots, s_n\}$ halmaz, ahol az s_i elemek a háremhölgyeket jelölik. Az s_1 jelöli a legszebbet, és minden $i < j$ esetén $s_i \succ s_j$, vagyis egy kisebb indexű elemnek megfelelő háremhölgy szebb, mint egy nagyobb indexű elemmel jelölt. Legyen $\Omega = S(P)$ a P elemeinek permutációinak halmaza, és legyen $\pi \in \Omega$ a P elemeinek egy véletlenszerű sorrendje, ahol $\pi(i)$ jelöli a sorbarendezés i-edik elemét, vagyis az i-edikként érkező háremhölgyet. Legyen $(P_t)_{t\in[n]}$ valószínűségi változók egy családja, ahol P_t jelöli a t időpontig látott háremhölgyek által indukált (részben)rendezést. Legyen $(\mathcal{F}_t)_{t\in[n]}$ σ-algebrák egy sorozata, ahol minden $\mathcal{F}_t$-t a $P_1, \ldots, P_t$ valószínűségi változók generálnak, vagyis

$$\mathcal{F}_t = \sigma(P_1, \ldots, P_t) = \sigma(P_t),$$

ahol a második egyenlőség azért igaz, mert P_t egy olyan számozott részbenrendezés, amely meghatározza a $P_1, \ldots, P_{t-1}$ értékeket is. Ez szemléletesen látszik az 1.1. ábrán is. Az $\mathcal{F}_t$ σ-algebrára azon információként is tekinthetünk, amit a t időpillanatban tudunk arról, hogy hol vagyunk éppen az Ω univerzumban. Mivel P_t csak véges sok



1.1. ábra. A $\pi = (s_2, s_5, s_1, s_3, s_4)$ sorrend esetén a P_t $(1 \le t \le 5)$ indukált részbenrendezések.

értéket vehet fel, ezért $\mathcal{F}_t$-nek egyszerű a struktúrája; elemei a P_t lehetséges értékeinek ősképei Ω-ban, és ezeknek az ősképeknek az uniói. Ezeket az ősképeket hívjuk $\mathcal{F}_t$ atomjainak. Definiáljuk valószínűségi változók $(Z_t)_{t\in[n]}$ családját a következőképpen:

$$Z_t = \mathbb{P}\big(\pi(t) = s_1 | \mathcal{F}_t\big),$$

vagyis Z_t annak a valószínűsége, hogy a t-edikként érkező háremhölgy az abszolút legjobb, annak ismeretében, amit eddig tudunk. Ekkor igaz a következő állítás.

1.2.2. Állítás.
(1) *A Z_t lehetséges nemnulla értéke $\frac{t}{n}$.*
(2) *A Z_t valószínűségi változók függetlenek.*

Bizonyítás.
(1) Tudjuk, hogy $Z_t = \mathbb{P}\big(\pi(t) = s_1|\mathcal{F}_t\big)$, így

$$Z_t(\omega) = \sum_{\substack{A\in\mathcal{F}_t \\ A \text{ atom}}} \frac{\mathbb{P}\big(\pi(t) = s_1, A\big)}{\mathbb{P}(A)} \cdot \chi_A(\omega).$$

Ha $A \in \mathcal{F}_t$, és A az $\mathcal{F}_t$ egy atomja, akkor

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{n}{t}\cdot 1\cdot (n-t)!}{n!} = \frac{\frac{n!}{t!\cdot(n-t)!}\cdot (n-t)!}{n!} = \frac{1}{t!},$$

mivel az első t háremhölgyet $\binom{n}{t}$-féleképpen választhatjuk ki, és a sorrendjüket egyértelműen megadja az A, míg a további $(n-t)$ háremhölgy sorrendje tetszőleges. Továbbá

$$\mathbb{P}\big(\pi(t) = s_1, A\big) = \\ = \begin{cases} \frac{1\cdot\binom{n-1}{t-1}\cdot 1\cdot(n-t)!}{n!} = \frac{1}{n\cdot(t-1)!} & \text{, ha } \pi(t) = \max\{\pi(1),\dots,\pi(t)\}\ , \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Az egyenlőség azért áll fenn, mert az összes lehetséges sorrend száma $n!$, valamint, ha $\pi(t)$ a legjobb az első t elem között, akkor a kedvező esetek számát úgy kapjuk, hogy a t-edik helyre egyértelműen kiválasztjuk a legszebb háremhölgyet, ezután a további $(n-1)$ közül kiválasztjuk, hogy melyik $(t-1)$ hölgy kerül az első $(t-1)$ helyre. Az ő sorrendjüket egyértelműen meghatározza az A, míg a többi $(n-t)$ háremhölgy sorrendje tetszőleges. Ha pedig $\pi(t)$ nem a legjobb az első t elem között, akkor a siker valószínűsége egyértelműen 0, mivel ha a t-edikként érkező hölgy nem a legszebb az első t hölgy között, akkor nem lehet abszolút legszebb sem. Így

$$\frac{\mathbb{P}\big(\pi(t)=s_1, A\big)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{n\cdot(t-1)!}}{\frac{1}{t!}} = \frac{t}{n}$$

amiből következik, hogy

$$Z_t(\omega) = \begin{cases} \frac{t}{n} & \text{, ha } \pi(t) = \max\{\pi(1), \ldots, \pi(t)\} \text{ ,} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(2) Felhasználva az előző eredményt, tudjuk, hogy Z_t értéke csak kétféle lehet, 0 vagy $\frac{t}{n}$. Minden $1 \le i \le n$ esetén legyen A_i az az esemény, miszerint $Z_i = \frac{i}{n}$. Először a páronkénti függetlenséget bizonyítjuk. Ekkor elegendő azt belátnunk, hogy az A_i-k függetlenek, ugyanis ha A_i és A_j $(i<j)$ független, akkor A_i és $\overline{A}_j$, $\overline{A}_i$ és A_j, valamint $\overline{A}_i$ és $\overline{A}_j$ is függetlenek. Egyszerűen adódik, hogy

$$\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(\text{az első } i \text{ háremhölgy között az } i\text{-edik a legszebb}) = \frac{1}{i}.$$

Továbbá

$$\mathbb{P}(A_iA_j) = \frac{1 \cdot \binom{j-1}{i} \cdot 1 \cdot (i-1)! \cdot (j-i-1)!}{j!} = \frac{1}{i \cdot j},$$

mivel egy olyan sorrendet, amelynél az első i háremhölgy közül az i-edik, az első j közül pedig a j-edik a legszebb, úgy tudunk megkonstruálni, hogy a j-edik helyre kiválasztjuk a legszebbet, majd a fennmaradó $(j-1)$ hölgy közül kiválasztjuk az első i helyre kerülőt, akik közül a legszebbnek kell az i-edik helyen lennie, ezután az első $(i-1)$ helyen, illetve az i-edik és j-edik háremhölgy közötti $(j-i-1)$ hölgy sorrendje tetszőleges. Így

$$\mathbb{P}(A_iA_j) = \frac{1}{i \cdot j} = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$

Hasonló módon láthatjuk be az $A_{k_1}, \ldots, A_{k_j}$, $(1 \le k_1 < \ldots < k_j \le n,\ j \ge 2)$ események függetlenségét. Ekkor hasonló gondolatmenet alapján, mint a páronkénti függetlenségnél,

$$\mathbb{P}(A_{k_1}\dots A_{k_j}) = \frac{\prod_{i=2}^{j}\binom{k_i-1}{k_{i-1}}\cdot\prod_{i=2}^{j}(k_i-k_{i-1}-1)!\cdot(k_1-1)!}{k_j!} =$$

$$= \frac{\prod_{i=2}^{j}\left(\frac{(k_i-1)!}{k_{i-1}!\cdot(k_i-k_{i-1}-1)!}\cdot(k_i-k_{i-1}-1)!\right)\cdot(k_1-1)!}{k_j!} =$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{j}(k_i-1)!}{\prod_{i=1}^{j}k_i!} = \prod_{i=1}^{j}\frac{1}{k_i} = \mathbb{P}(A_{k_1})\cdot\ldots\cdot\mathbb{P}(A_{k_j}).$$

□

Vezessük be a $\delta_n, \delta_{n-1}, \dots, \delta_1$ valószínűségi változókat a következőképpen:

$$\delta_n = Z_n,$$
$$\delta_t = \max\Big\{Z_t, \mathbb{E}\big(\delta_{t+1}|\mathcal{F}_t\big)\Big\}, \quad t = n-1, \dots, 1.$$

Ekkor az 1.2.1. Tétel felhasználásával, ha Z_t-nek megfeleltetjük a W_t valószínűségi változót, $\mathcal{F}_t$-nek az $\mathcal{A}_t$ σ-algebrát és δ_t-nek a γ_t valószínűségi változót, akkor adódik, hogy a megfogalmazott stratégia valóban optimális. Először vegyük észre, hogy mivel a Z_t valószínűségi változók függetlenek, ezért $Z_1, \dots, Z_t$ nem ad semmilyen információt $Z_{t+1}, \dots, Z_n$ értékéről, és így $\mathbb{E}\big(\delta_{t+1}|\mathcal{F}_t\big)$ az $\mathcal{F}_t$ összes atomján konstans, és egyenlő $\mathbb{E}(\delta_{t+1})$-vel. Ezután definiáljuk a

$$v : [n] \to \mathbb{R},\ v(t) = \mathbb{E}(\delta_t)$$

függvényt. Figyeljük meg, hogy az 1.2.1. Tétel következtében az a megállási idő, amely megáll az első olyan t-nél, amelyre $Z_t \geq \mathbb{E}\big(\delta_{t+1}|\mathcal{F}_t\big) = v(t+1)$ teljesül, optimális. Definíciója miatt

$$v(t) = \mathbb{E}\big(\max\{Z_t, v(t+1)\}\big) \geq v(t+1),$$

így $v(t)$ monoton csökkenő függvény, míg ezzel szemben $\frac{t}{n}$, a Z_t lehetséges nemnulla értéke, t-nek egy szigorúan monoton növekvő függvénye. Így létezik egy olyan m, melyre

$$\frac{t}{n} < v(t+1), \quad \text{ha } t \leq m, \text{ és}$$
$$\frac{t}{n} \geq v(t+1), \quad \text{ha } t > m,$$

tehát az "elengedjük az első m hölgyet, majd a többiek közül az addigi legszebbet választjuk" stratégia valóban optimális.

2. fejezet

Hogyan válasszuk a legjobb ikreket

2.1. Ikerpárok esete

Több, különböző módon megfogalmazott matematikai problémának is a részbenrendezett halmazon történő maximális elem kiválasztása áll a középpontjában. A további fejezetekben a feladatnak a "titkárnő-probléma"-ként ismert formáját, illetve ennek néhány változatát vizsgáljuk. Az alapprobléma így szól:

2.1.1. Feladat. Egy titkárnői állásra n jelentkezőt interjúvolunk meg egymás után. Minden egyes interjú után el kell döntenünk, hogy alkalmazzuk-e vagy sem az adott jelentkezőt. Ha alkalmazzuk, akkor a folyamat megáll, ha pedig elutasítjuk, akkor a következő jelentkezővel folytatjuk. A folyamat közben minden időpillanatban ismerjük a már meginterjúvolt jelentkezők sorrendjét. Mindegyikük összehasonlítható, azonban a képességeiket semmilyen más módon nem tudjuk mérni. A cél a legjobb jelentkező kiválasztása, bármely másik választás kudarcnak minősül.

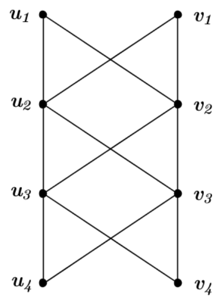
Ebben a szakaszban m egypetéjű ikerpár által alkotott részbenrendezett halmazt vizsgálunk, amelyre úgy is tekinthetünk, mintha a korábban megfogalmazott titkárnő-probléma esetén minden elem pontosan kétszer fordulna elő. Először expliciten definiáljuk az m ikerpárból álló részbenrendezett halmazt, a továbbiakban pedig erre hivatkozunk.

Tekintsünk egy halmazt, amely két láncból áll. Jelölje a két láncot $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ és $V = \{v_1, \dots, v_m\}$, ahol u_1 és v_1 a maximális elemek. Minden i-re $1 \leq i \leq m$ esetén teljesül, hogy u_i és v_i nem összehasonlíthatóak. Továbbá egy kisebb indexű elem jobb, mint egy nagyobb indexű elem, vagyis

$$u_i \prec v_j, \text{ ha } i > j, \quad \text{és} \quad v_j \prec u_i \text{ ha } i < j.$$

Az u_i és v_i elemekre az i-edik szinten lévő ikertestvérekként hivatkozunk. Ennek az $(U \cup V, \prec)$ részbenrendezett halmaznak a Hasse-diagramját $m = 4$ esetén a 2.1.

ábra szemlélteti. Tegyük fel, hogy az $U \cup V$ halmaz elemeit egymás után, egyenként

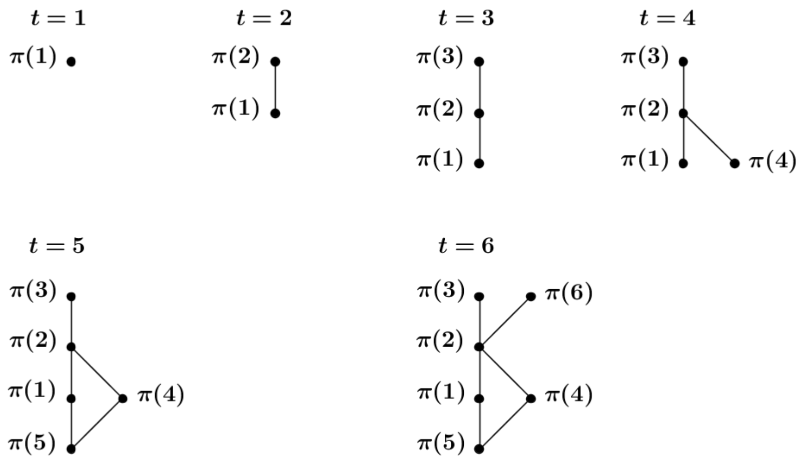


2.1. ábra. Az $(U \cup V, \prec)$ részbenrendezés $m = 4$ esetén.

vesszük figyelembe egy véletlenszerű π permutáció szerinti sorrenben, ahol az $U \cup V$ halmaz $(2m)!$ lehetséges permutációja közül mindegyik azonos valószínűséggel fordul elő. Minden t időre $1 \leq t \leq 2m$ esetén a $\{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(t)\}$ halmaz által indukált részbenrendezést tekintjük. Például tegyük fel, hogy adott a következő permutáció $m = 5$ esetén:

$$\pi = (u_3, v_2, u_1, v_3, u_5, v_1, u_4, v_5, v_4, u_2)$$

Ekkor a π által a $t = 6$ időpontig indukált részbenrendezéseket a 2.2. ábra szemlélteti.



2.2. ábra. A $\pi = (u_3, v_2, u_1, v_3, u_5, v_1, u_4, v_5, v_4, u_2)$ sorrend esetén a P_t $(1 \leq t \leq 6)$ indukált részbenrendezések.

A cél, hogy úgy válasszunk ki egy aktuálisan figyelembe vett elemet, hogy maximalizáljuk annak a valószínűségét, hogy ez az elem u_1 vagy v_1, vagyis a két maximális elem egyike. Tehát egy olyan τ megállási időt keresünk, amelyre $\mathbb{P}\big(\pi(\tau) \in \{u_1, v_1\}\big)$ maximális. A τ optimális megállási idő csakis π-től függ. A t időpillanatban a döntés kizárólag csak a t időpontig indukált részbenrendezésektől és az elemeik megjelenési sorrendjétől függ. Például, ha a megállási idő azt mondja, hogy a fenti 2.2. ábrában vett permutáció harmadik eleménél álljunk meg, akkor ezt a megállási időt használva $t = 3$ időpontban kell megállnunk $U \cup V$ bármely olyan permutációja esetén, ahol az első három elem indexeinek sorozata szigorú monoton csökken.

Az optimális megállási idő megadásához először definiáljuk rekurzívan a következő megállási időket:

$$\tau_i = \min\Big\{t > \tau_{i-1} : \pi(t) \in \max\{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(t)\},\ \text{és}$$
$$\{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(t-1)\} \text{ tartalmazza } \pi(t) \text{ ikertestvérét } \Big\}$$

azzal a feltétellel, hogy $\tau_0 = 0$, és hogyha valamely j-re a halmaz, amelynek a minimumát vesszük, üres, akkor $\tau_j = 2m$, ahol m jelöli azon különböző szintek számát, ahonnan az ikerpárok érkezhetnek. Legyen továbbá

$$k_m = \min\left\{k : \frac{2m}{k} + \sum_{j=k}^{m-1} \frac{1}{j} \leq 5\right\},$$

és legyen

$$\tau = \min\big\{\tau_i : \text{a } \pi(1), \ldots, \pi(\tau_i) \text{ elemek által elfoglalt szintek száma legalább } k_m\big\}.$$

Ekkor igaz a következő tétel.

2.1.2. Tétel. *A τ megállási idő optimális.*

Bizonyítás. Világos, hogy nincs értelme megállnunk, ha az éppen megfigyelt elem nem maximális az eddig az időpontig érkező elemek között. Továbbá, ha még nem láttuk az ikertestvérét, akkor megéri folytatnunk, mivel ha az adott elem az első szintről való, akkor amíg megérkezik az ikertestvére, további, alacsonyabb szintű elemeket láthatunk, így még biztosabbak lehetünk abban, hogy az adott elem tényleg az első szintről való; ha pedig az adott elem nem az első szintről való, akkor van némi esélyünk ezt kideríteni, ha az ikertestvére előtt érkezik egy magasabb szintű elem. Így, ha maximalizálni akarjuk a $\mathbb{P}\big(\pi(\tau) \in \{u_1, v_1\}\big)$ valószínűséget, akkor szükséges, hogy olyan τ megállási időket vizsgáljunk, melyek értéke megegyezik valamely τ_i értékkel.

A bizonyítás folytatása előtt az 1.2. Szakaszhoz hasonlóan megadunk néhány jelölést. Legyen Ω az $U \cup V$ elemeinek permutációinak halmaza. Legyen továbbá $[n] = \{1, \ldots, n\}$, és legyen $(P_t)_{t\in[n]}$ valószínűségi változók egy családja, ahol P_t jelöli a t időpontban látott részbenrendezést. Legyen $(\mathcal{F}_t)_{t\in[n]}$ σ-algebrák egy sorozata, ahol minden $\mathcal{F}_t$-t a $P_1, \ldots, P_t$ valószínűségi változók generálnak, vagyis

$$\mathcal{F}_t = \sigma(P_1, \ldots, P_t) = \sigma(P_t).$$

Definiáljuk valószínűségi változók $(Z_t)_{t\in[n]}$ családját a következőképpen:

$$Z_t = \mathbb{P}\big(\pi(t) \in \{u_1, v_1\} | \mathcal{F}_t\big).$$

Továbbá minden $t \in [n]$ esetén vezessük be az

$$L_t = \text{ a } \pi(t) \text{ elem szintje}$$

valószínűségi változókat, így

$$Z_t = \mathbb{P}\big(L_t = 1 | \mathcal{F}_t\big)$$

alakban is felírható, mivel az $L_t = 1$ eset pont annak felel meg, hogy a $\pi(t)$ elem az első szintről való, vagyis maximális.

A bizonyításhoz felhasználjuk a következő tételt [7].

2.1.3. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \dots$ σ-algebrák egy sorozata, és legyen $W_1, W_2, \dots$ valószínűségi változók egy sorozata, melyre teljesül, hogy W_t minden t esetén $\mathcal{A}_t$-mérhető. Legyen $\mathcal{C}_{(\mathcal{A}_t)}$ az $(\mathcal{A}_t)_{t\in\mathbb{N}}$-hez tartozó megállási idők osztálya. Minden $t \in \mathbb{N}$ esetén legyen*

$$A_t = \Big\{\mathbb{E}\big(W_{t+1} | \mathcal{A}_t\big) \le W_t\Big\},$$

és tegyük fel, hogy

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \text{ és } \bigcup_{t=1}^{\infty} A_t = \Omega. \tag{2.1}$$

Legyen

$$\tau^* = \min\Big\{t : W_t \ge \mathbb{E}\big(W_{t+1} | \mathcal{A}_t\big)\Big\}.$$

Tegyük fel, hogy $\mathbb{P}(\tau^* < \infty) = 1$ és $\mathbb{E}(W_{\tau^*})$ létezik, továbbá azt, hogy

$$\liminf_t \int_{\{\tau^* > t\}} W_t = 0.$$

Ekkor

$$\mathbb{E}(W_{\tau^*}) \ge \mathbb{E}(W_\tau) \quad \forall \tau \in \mathcal{C}_{(\mathcal{A}_t)}.$$

Ezt a tételt nem bizonyítjuk. □

Megjegyezzük, hogy ha (2.1) fennáll, akkor a $(W_t, \mathcal{A}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ folyamatot *monoton*nak hívjuk.

Vegyük észre, hogy ha $\tau_i = 2m$, akkor

$$\tau_{i+1} = \min\Big\{t > 2m : \pi(t) \in \max\{\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(t)\}, \text{ és } \{\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(t-1)\} \text{ tartalmazza } \pi(t) \text{ ikertestvérét } \Big\},$$

ahol $1 \leq t \leq 2m$ miatt a minimumot egy üres halmazon vesszük, így $\tau_{i+1} = 2m$. Ekkor a $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ feltétel triviálisan teljesül. Ugyanakkor, mivel Z_t korlátos valószínűségi változó, $\mathbb{E}(Z_\tau)$ biztosan létezik. Továbbá

$$\liminf_t \int_{\{\tau>t\}} Z_t \,\mathrm{d}P \leq \liminf_t \int_{\{\tau>t\}} 1 \,\mathrm{d}P = \liminf_t \mathbb{P}(\tau > t) = 0,$$

ahol az utolsó egyenlőségnél felhasználtuk, hogy τ véges. A fő célunk a továbbiakban, hogy belássuk, hogy a $(Z_{\tau_i}, \mathcal{F}_{\tau_i})_{i\in\mathbb{N}}$ folyamat monoton, így alkalmazhatjuk az előző tételt. Először megjegyezzük, hogy ha $\tau_i = 2m$, akkor $\mathbb{E}\big(Z_{\tau_{i+1}}|\mathcal{F}_{\tau_i}\big) = Z_{\tau_i}$, mivel τ_{i+1} ugyancsak egyenlő $2m$-mel. Így csak azokat az i-ket szükséges megvizsgálnunk, melyekre $\tau_i < 2m$. A szakasz hátralévő részében tegyük fel, hogy $\pi(\tau_i)$ egy maximális elem a $\{\pi(1), \dots, \pi(\tau_i)\}$ halmazban, amelynek már láttuk az ikertestvérét, és vannak olyan elemek, amelyeket még nem láttunk.

A folytatáshoz szükségünk van a siker valószínűségére a τ_1 megállási idő esetén. Amikor τ_1-et használjuk, megállunk az első olyan lehetőségnél, amikor meglátjuk egy már korábban szereplő elem ikertestvérét, aki maximális az adott időpillanatban. Jelöljük ezt a valószínűséget $P(m)$-mel. A siker valószínűségét a következő lemma fogalmazza meg:

2.1.4. Lemma. *A τ_1 megállási idő esetén*

$$P(m) = \frac{2m+1}{3m}$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy

$$\mathbb{P}\big(L_{\tau_1} = 1 | L_1 = 1\big) = 1,$$

mivel $\pi(\tau_1)$ csak akkor lehet maximális a τ_1 időben, ha a szintje legfeljebb L_1. Továbbá l szerinti indukcióval belátjuk, hogy

$$\mathbb{P}\big(L_{\tau_1} = 1 | L_1 = l\big) = \frac{2}{3} \quad \forall l \geq 2. \tag{2.2}$$

Ha $l = 2$, akkor az egyenlőség teljesül, mivel a 2. szintről való második ikertestvér és a két ikertestvér az 1. szintről véletlenszerű sorrendben jönnek, így akkor és csak akkor nyerhetünk, ha ezen három elem közül valamely 1. szintről valót látjuk meg először.

Tegyük fel, hogy valamely $l > 2$ esetén (2.2) teljesül, és lássuk be az egyenlőséget $(l+1)$-re. Legyen τ' az a legkorábbi időpont, amelyre a τ' időpontban érkező elem szintje legfeljebb $L_1 = l+1$. Elegendő ezzel az esettel foglalkoznunk, mivel azok az elemek, amelyeknek szintje L_1-nél nagyobb, nincsenek hatással a sikeres választásra. Ha $1 < L_{\tau'} < l+1$, akkor ugyanaz a helyzet áll fenn, mintha az első választott elem a $\pi(\tau')$ lett volna, és az indukciós feltevés következtében

$$\mathbb{P}\big(L_{\tau_1} = 1 | \{L_1 = l+1\} \cap \{1 < L_{\tau'} < l+1\}\big) = \frac{2}{3}.$$

Egyébként pedig akkor és csak akkor nyerhetünk, ha az 1. szinten lévő két ikertestvér valamelyikét hamarabb látjuk meg, mint a második ikertestvért az $(l+1)$-edik szintről. Mivel ők hárman véletlenszerű sorrendben jönnek, így

$$\mathbb{P}\big(L_{\tau_1} = 1 | \{L_1 = l+1\} \cap \{1 < L_{\tau'} < l+1\}^c\big) = \frac{2}{3}.$$

Tehát bármelyik esetben a siker valószínűsége $\frac{2}{3}$. Így adódik, hogy

$$\begin{aligned} P(m) = \mathbb{P}(L_{\tau_1} = 1) &= \sum_{l=1}^{m} \mathbb{P}\big(L_{\tau_1} = 1 | L_1 = l\big) \cdot \mathbb{P}(L_1 = l) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{l=1}^{m} \mathbb{P}\big(L_{\tau_1} = 1 | L_1 = l\big) = \frac{1}{m}\left(1 + \frac{2}{3}(m-1)\right) = \frac{2m+1}{3m}, \end{aligned}$$

amivel bizonyítottuk a lemmát. □

A következő kombinatorikai azonosság hasznos lesz a későbbiekben.

2.1.5. Lemma. *Minden* $1 \leq k \leq m-1$ *esetén*

$$\sum_{j=1}^{m-k} \frac{1}{j} \cdot \frac{\binom{m-j-1}{k-1}}{\binom{m}{k}} = \frac{k}{m} \sum_{j=k}^{m-1} \frac{1}{j}\ .$$

Bizonyítás. A bizonyítás során megmutatjuk, hogy mindkét oldal megegyezik a klasszikus titkárnő-probléma esetén a siker valószínűségével. Ekkor az elemek között lineáris rendezés van, és a következő stratégiát használjuk: "utasítsuk el az első k elemet, és utána fogadjuk el az első olyat, amelyik maximális az eddig megfigyeltek között". Legyen W az az esemény, hogy a legjobb jelentkezőt választjuk. Ekkor

- a bal oldal: Legyen $0 \leq j \leq m-k$ esetén B_j az az esemény, hogy az első k megfigyelt elem közül a legjobb a $(j+1)$-edik szintről való. Ez azt jelenti, hogy a többi $(k-1)$ megfigyelt elem számára $m-(j+1) = m-j-1$ szint marad. Vegyük észre, hogy $B_0, \ldots, B_{m-k}$ teljes eseményrendszer, mivel bármilyen $j \geq m-k+1$ esetén a többi $(k-1)$ elem számára legfeljebb $m-(m-k+2) = k-2$ szint maradna, ami pedig nem lehetséges. Ha tudjuk, hogy az első k megfigyelt elem közül a legjobb szintje $(j+1)$, akkor csak akkor nyerhetünk, ha a legjobb j szintről a maximális elemet látom meg elsőként, így $\mathbb{P}(W|B_j) = \frac{1}{j}$, mivel az elemek véletlenszerű sorrendben jönnek. Így felhasználva a teljes valószínűség tételét és azt, hogy $\mathbb{P}(W|B_0) = 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W) &= \sum_{j=1}^{m-k} \mathbb{P}(W|B_j)\mathbb{P}(B_j) = \\ &= \sum_{j=1}^{m-k} \frac{1}{j} \cdot \frac{\binom{m-j-1}{k-1}}{\binom{m}{k}}\end{aligned}$$

adódik, ahol $\mathbb{P}(B_j)$ kiszámolásánál az összes eset száma $\binom{m}{k}$, mivel az összes lehetséges m elem közül tetszőlegesen ennyiféleképpen tudok k-t kiválasztani, a kedvező esetek számánál pedig először 1-féleképpen kiválasztom a $(j+1)$ -edik szintű elemet, utána pedig a nála rosszabb $(m-j-1)$ szint közül kell kiválasztanom $(k-1)$ elemet.

- a jobb oldal: $0 \le j \le m-1$ esetén legyen D_j az az esemény, hogy a $(j+1)$-edikként megfigyelt elem maximális a láncban. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W) &\overset{(1)}{=} \sum_{j=0}^{m-1} \mathbb{P}(W|D_j)\mathbb{P}(D_j) = \\ &\overset{(2)}{=} \sum_{j=k}^{m-1} \mathbb{P}(W|D_j)\mathbb{P}(D_j) = \\ &\overset{(3)}{=} \sum_{j=k}^{m-1} \frac{k}{j} \cdot \frac{1}{m},\end{aligned}$$

ahol (1)-nél azt használtuk fel, hogy $D_0, \ldots, D_{m-1}$ teljes eseményrendszer, (2)-nél azt, hogy ha a maximális elem az első k között van, akkor biztosan nem nyerünk, azaz $\mathbb{P}(W|D_j) = 0$, a (3)-mas átalakításnál pedig azt, hogy annak a valószínűsége, hogy egy $(j+1)$-edikként megfigyelt elem maximális, azonosan $\frac{1}{m}$ bármely j esetén, továbbá $\mathbb{P}(W|D_j) = \frac{k}{j}$, mivel az első j megfigyelt elem közül a maximális azonos valószínűséggel fordulhat elő bármely pozícióban, így annak a valószínűsége, hogy az első k között van, pontosan $\frac{k}{j}$. Ezzel bizonyítottuk a lemmát. □

Továbbá szükségünk van a következő állításra is:

2.1.6. Állítás.

$$\sum_{j=1}^{n-k+1} \binom{n-j}{k-1} = \binom{n}{k}.$$

Bizonyítás. Legyen $1 \le k \le n$. Ekkor

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \left[\binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k-1}\right] + \binom{n-1}{k-1} =$$
$$= \left[\binom{k}{k} + \binom{k}{k-1}\right] + \binom{k+1}{k-1} + \ldots + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-1}{k-1} =$$
$$= \binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \ldots + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-1}{k-1} = \sum_{j=1}^{n-k+1} \binom{n-j}{k-1},$$

ahol felhasználtuk az $\binom{m}{r} = \binom{m-1}{r} + \binom{m-1}{r-1}$ azonosságot. □

Jelölje $N_k(i)$ azt az eseményt, hogy a τ_i időpontban a $\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(\tau_i)$ elemek által elfoglalt szintek száma k. Megjegyezzük, hogy $N_k(i) \in \mathcal{F}_{\tau_i}$. A következő két lemma segítségünkre lesz a monotonitás vizsgálatában.

2.1.7. Lemma. *Minden $\omega \in N_k(i)$ esetén*

$$Z_{\tau_i}(\omega) = \frac{k}{m}.$$

Bizonyítás. A különböző szintekről való elemek azonos valószínűséggel jelenhetnek meg bármely pocízióban a véletlen sorrendben. Ha $\omega \in N_k(i)$, akkor az utolsó megfigyelt elem az eddigi egyik legjobb, valamint láttuk az ikertestvérét, és az utolsó elemmel bezárólag k szintet figyeltünk meg. Az ilyen esetek száma

$$\sum_{l=0}^{k-1} \binom{m}{k} \cdot 1 \cdot \binom{k-1}{l} \cdot \binom{2}{1} \cdot (k+l)! = \binom{m}{k} \cdot 2 \cdot \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k-1}{l} \cdot (k+l)!,$$

mivel $\binom{m}{k}$-féleképpen választhatom ki, hogy az összesen m szint közül melyekről láttam elemeket, ezután 1-féleképpen kiválasztom a közülük maximális szintről mindkét elemet, majd a többi $(k-1)$ szint közül kiválasztom azt az l-et, amelyről mindkét elemet láttam. Az összes lehetséges sorrend meghatározásához pedig eldöntöm, hogy a kiválasztott elemekből a legjobb 2 közül melyik kerüljön a τ_i-edik helyre, a többi $(k+l)$ elem sorrendje pedig tetszőleges lehet.

Azoknak az eseteknek a száma, ahol $\omega \in N_k(i)$, és a τ_i-edik elem az abszolút legjobb

$$\sum_{l=0}^{k-1} 1 \cdot \binom{m-1}{k-1} \cdot 1 \cdot \binom{k-1}{l} \cdot \binom{2}{1} \cdot (k+l)! = \binom{m-1}{k-1} \cdot 2 \cdot \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k-1}{l} \cdot (k+l)!,$$

ahol hasonlóan számolhatjuk össze az eseteket, mint az összes esetszám meghatározásánál, azzal az eltéréssel, hogy 1-féleképpen kiválasztom az m lehetséges szint közül a legjobbat, és a fennmaradó $(m-1)$ szint közül kell kiválasztanom a további $(k-1)$ szintet. Így adódik, hogy ha $\omega \in N_k(i)$, akkor

$$Z_{\tau_i}(\omega) = \frac{\big|N_k(i) \cap \big\{\pi(\tau_i) \in \{u_1, v_1\}\big\}\big|}{|N_k(i)|} =$$
$$= \frac{\binom{m-1}{k-1} \cdot 2 \cdot \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k-1}{l} \cdot (k+l)!}{\binom{m}{k} \cdot 2 \cdot \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k-1}{l} \cdot (k+l)!} = \frac{(m-1)! \cdot k!}{m! \cdot (k-1)!} = \frac{k}{m}.$$

□

2.1.8. Lemma. *Minden $\omega \in N_k(i)$ esetén*

$$\mathbb{E}\big(Z_{\tau_{i+1}} | \mathcal{F}_{\tau_i}\big)(\omega) = \frac{2}{3} + \frac{k}{3m}\left(\sum_{j=k}^{m-1} \frac{1}{j} - 2\right).$$

Bizonyítás. A bizonyítás során felhasználjuk, hogy minden $A \in \mathcal{F}_{\tau_i}$ esetén

$$\int_A \mathbb{E}\big(Z_{\tau_{i+1}} | \mathcal{F}_{\tau_i}\big) = \int_A Z_{\tau_{i+1}},$$

valamint, mivel $\mathcal{F}_{\tau_i}$ véges, és így a $\mathbb{E}\big(Z_{\tau_{i+1}} | \mathcal{F}_{\tau_i}\big)$ valószínűségi változó konstans $\mathcal{F}_{\tau_i}$ minden atomján, így

$$\mathbb{E}\big(Z_{\tau_{i+1}} | \mathcal{F}_{\tau_i}\big)(\omega) = \frac{\int_A Z_{\tau_{i+1}}}{\mathbb{P}(A)},$$

ahol az A az $\mathcal{F}_{\tau_i}$-nek azon atomja, amely az ω-t tartalmazza. Továbbá felhasználjuk, hogy definíció szerint egy S esemény feltételes valószínűsége az $\mathcal{F}_{\tau_i}$ σ-algebrára nézve

$$\mathbb{P}\ (S | \mathcal{F}_{\tau_i}) = \mathbb{E}\big(\mathbb{1}(S) | \mathcal{F}_{\tau_i}\big).$$

Legyen

$$E = \int_A \mathbb{E}\big(Z_{\tau_{i+1}} | \mathcal{F}_{\tau_i}\big),$$

ahol az A az $\mathcal{F}_{\tau_i}$-nek azon atomja, amely az ω-t tartalmazza. Ekkor elegendő azt megmutatni, hogy

$$E = \left(\frac{2}{3} + \frac{k}{3m}\left(\sum_{j=k}^{m-1} \frac{1}{j} - 2\right)\right)\mathbb{P}(A).$$

Tudjuk, hogy $\omega \in N_k(i)$, vagyis az első τ_i megfigyelt elem által elfoglalt szintek száma k, így $1 \le L_{\tau_i} \le m-k+1$, ahol a felső korlátot akkor kapjuk, ha az első τ_i

elem a legrosszabb k szintről való. Ekkor

$$
\begin{aligned}
E &= \int_A Z_{\tau_{i+1}} = \int_A \mathbb{P}\big(L_{\tau_{i+1}} = 1 | \mathcal{F}_{\tau_i}\big) = \int_A \mathbb{E}\big(\mathbb{1}(L_{\tau_{i+1}} = 1) | \mathcal{F}_{\tau_i}\big) = \\
&= \int_A \mathbb{1}(L_{\tau_{i+1}} = 1) = \mathbb{P}\big(\{L_{\tau_{i+1}} = 1\} \cap A\big) = \\
&= \sum_{j=1}^{m-k} \mathbb{P}\big(\{L_{\tau_{i+1}} = 1\} \cap \{L_{\tau_i} = j+1\} \cap A\big) = \\
&= \sum_{j=1}^{m-k} \mathbb{P}\big(L_{\tau_{i+1}} = 1 | \{L_{\tau_i} = j+1\} \cap A\big) \cdot \mathbb{P}\big(L_{\tau_i} = j+1 | A\big) \cdot \mathbb{P}(A) \ ,
\end{aligned}
$$

ahol felhasználtuk, hogy $j = 0$ esetén $\mathbb{P}\big(\{L_{\tau_{i+1}} = 1\} \cap \{L_{\tau_i} = j+1\} \cap A\big) = 0$, mert az nem fordulhat elő, hogy a τ_i-edik és a τ_{i+1}-edik elem szintje is 1. Mivel annak a valószínűsége, hogy a τ_{i+1} időpontban a legjobb szintről kapunk egy elemet nem függ a szinteknek a τ_i időig kialakuló mintájától, a szorzat első tagja egyenlő a siker valószínűségével, amikor j ikerpár közül szeretnénk az egyik legjobb ikertestvért kiválasztani a τ_1 megállási idő szerint, ami pontosan

$$
P(j) = \frac{2j+1}{3j}.
$$

Továbbá

$$
\mathbb{P}\big(L_{\tau_i} = j+1 | A\big) = \frac{\binom{m-j-1}{k-1}}{\binom{m}{k}},
$$

mivel A csak egy bizonyos mintát ad meg, ahogyan a választott k szintről rendezzük az elemeket, ezért a kedvező esetek meghatározásánál 1-féleképpen kiválasztjuk a $(j+1)$-edik szintet, utána a tőle alacsonyabb $(m-j-1)$ szintről kell kiválasztanom $(k-1)$-et, az összes eset számát pedig az adja meg, ahogyan m szint közül k-t tetszőlegesen kiválaszthatok. Ezek következményeképpen adódik, hogy

$$
\begin{aligned}
E &= \sum_{j=1}^{m-k} \left(\frac{2j+1}{3j} \cdot \frac{\binom{m-j-1}{k-1}}{\binom{m}{k}} \cdot \mathbb{P}(A) \right) = \\
&= \left(\sum_{j=1}^{m-k} \frac{2}{3} \frac{\binom{m-j-1}{k-1}}{\binom{m}{k}} + \sum_{j=1}^{m-k} \frac{1}{3j} \frac{\binom{m-j-1}{k-1}}{\binom{m}{k}} \right) \mathbb{P}(A),
\end{aligned}
$$

és a 2.1.5. Lemma, valamint a 2.1.6. Állítás felhasználásával

$$
\begin{aligned}
E &= \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\binom{m-1}{k}}{\binom{m}{k}} + \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{m-k} \frac{1}{j} \frac{\binom{m-j-1}{k-1}}{\binom{m}{k}} \right) \mathbb{P}(A) = \\
&= \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{m-k}{m} + \frac{1}{3} \cdot \frac{k}{m} \sum_{j=k}^{m-1} \frac{1}{j} \right) \mathbb{P}(A) = \\
&= \left(\frac{2}{3} + \frac{k}{3m} \left(\sum_{j=k}^{m-1} \frac{1}{j} - 2 \right) \right) \mathbb{P}(A).
\end{aligned}
$$

Így teljes a lemma bizonyítása. $\square$

Legyen $A_i = \Big\{\mathbb{E}\big(Z_{\tau_{i+1}}|\mathcal{F}_{\tau_i}\big) \leq Z_{\tau_i}\Big\}$ az az esemény, amely szerint a τ_i időben kínálkozó kifizetés legalább akkora, mint a τ_{i+1} időben kínálkozó kifizetés feltételes várható értéke.

2.1.9. Lemma. *Minden $\omega \in N_k(i)$ esetén $\omega \in A_i$ akkor és csak akkor, ha*

$$\frac{2m}{k} + \sum_{j=k}^{m-1} \frac{1}{j} \leq 5.$$

Bizonyítás. Legyen $\omega \in N_k(i)$. Ekkor a 2.1.7. Lemma és a 2.1.8. Lemma következtében $\omega \in A_i$ akkor és csak akkor, ha

$$\frac{2}{3} + \frac{k}{3m}\left(\sum_{j=k}^{m-1} \frac{1}{j} - 2\right) = \mathbb{E}\big(Z_{\tau_{i+1}}|\mathcal{F}_{\tau_i}\big)(\omega) \leq Z_{\tau_i}(\omega) = \frac{k}{m} \ .$$

Ebből $\frac{3m}{k}$-val való szorzás után adódik, hogy

$$\frac{2m}{k} + 1 \cdot \sum_{j=k}^{m-1} \frac{1}{j} - 2 \leq 3$$

$$\frac{2m}{k} + \sum_{j=k}^{m-1} \frac{1}{j} \leq 5 \ .$$

$\square$

Most már be tudjuk fejezni a bizonyítást. Elegendő azt megmutatnunk, hogy a $(Z_{\tau_i}, \mathcal{F}_{\tau_i})_{i\in\mathbb{N}}$ folyamat monoton, vagyis azt, hogy $A_i \subset A_{i+1}$ minden i esetén. Ekkor ugyanis a 2.1.3. Tétel értelmében a τ megállási idő optimális.

Legyen $\omega \in A_i$, és a τ_i időben már megfigyelt szintek száma legyen k, így $\omega \in N_k(i)$. Ekkor a 2.1.9. Lemma következtében fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{2m}{k} + \sum_{j=k}^{m-1} \frac{1}{j} \leq 5.$$

A τ_{i+1} időpillanatban legalább annyi szintet láttunk, mint a τ_i időpillanatban, és mivel k növekedésével az egyenlőtlenség bal oldala csak csökkenhet, így $\omega \in A_{i+1}$. Ebből következik, hogy $A_i \subset A_{i+1}$ teljesül, és mivel $\tau_i = 2m$ esetén $\mathbb{E}\big(Z_{\tau_{i+1}}|\mathcal{F}_{\tau_i}\big) = Z_{\tau_i}$, ezért biztosan van olyan A_i esemény, amely bekövetkezik, tehát $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{\tau_i} = \Omega$ valóban fennáll, így a tétel bizonyítása teljes. $\square$

Most, hogy bebizonyítottuk, hogy τ optimális megállási idő, felmerül a kérdés, hogy ezt használva mennyi a siker valószínűsége. Ezt fogalmazza meg a következő tétel.

2.1.10. Tétel. *Ha az optimális τ megállási időt használjuk, akkor a siker valószínűsége*

$$\mathbb{P}(L_\tau = 1) = \frac{1}{3m}\left[2m + k_m - \left(k_m - \sum_{s=0}^{k_m-1}\prod_{r=1}^{s}\frac{2(m-k_m+r)}{2(m-k_m+r)+1}\right)\left(3 - \sum_{j=k_m}^{m-1}\frac{1}{j}\right)\right].$$

Bizonyítás. A $\pi \in S(\Omega)$ permutáció esetén legyen

$$\tau_\pi = \min\Big\{t: \text{ a } \pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(t) \text{ elemek pontosan } k_m \text{ szintet foglalnak el}\Big\}.$$

Legyen továbbá

$$M_1 = \Big\{\text{a } \langle \pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(\tau_\pi)\rangle \text{ részbenrendezésnek pontosan egy maximális eleme van}\Big\}$$

és

$$M_2 = \Big\{\text{a } \langle \pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(\tau_\pi)\rangle \text{ részbenrendezésnek pontosan két maximális eleme van}\Big\}.$$

A bizonyításhoz felhasználjuk a 2.1.6. Állítást, amelyből $n = m-1$ és $k = k_m - 1$ választással

$$\sum_{j=1}^{m-k_m+1}\binom{m-j-1}{k_m-2} = \binom{m-1}{k_m-1}, \tag{2.3}$$

míg $n = m-1$ és $k = k_m$ választással

$$\sum_{j=1}^{m-k_m}\binom{m-j-1}{k_m-1} = \binom{m-1}{k_m} \tag{2.4}$$

adódik. Továbbá szükségünk van a következő kombinatorikai azonosságra is.

2.1.11. Állítás.

$$\sum_{j=1}^{m-k_m+1} j\binom{m-j-1}{k_m-2} = \binom{m}{k_m}.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n-s} j\binom{n-j}{s} = \\
&= 1\cdot\binom{n-1}{s} + 2\cdot\binom{n-2}{s} + \ldots + (n-s-1)\cdot\binom{s+1}{s} + (n-s)\cdot\binom{s}{s} = \\
&\qquad = \binom{s}{s} + \binom{s+1}{s} + \ldots + \binom{n-2}{s} + \binom{n-1}{s} + \\
&\qquad + \binom{s}{s} + \binom{s+1}{s} + \ldots + \binom{n-2}{s} + \\
&\qquad + \ldots + \\
&\qquad + \binom{s}{s} + \binom{s+1}{s} + \\
&\qquad + \binom{s}{s} = \\
&= \sum_{j=1}^{n-s}\binom{n-j}{s} + \sum_{j=1}^{n-s-1}\binom{n-1-j}{s} + \ldots + \sum_{j=1}^{2}\binom{s+2-j}{s} + \binom{s+1}{s+1} = \\
&\quad = \binom{n}{s+1} + \binom{n-1}{s+1} + \ldots + \binom{s+2}{s+1} + \binom{s+1}{s+1} = \\
&\quad = \sum_{j=1}^{n-s+1}\binom{n+1-j}{s+1} = \binom{n+1}{s+2},
\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk a 2.1.6. Állítást, miszerint $\sum_{j=1}^{n-k+1}\binom{n-j}{k-1} = \binom{n}{k}$. Ekkor $n = m-1$ és $s = k_m - 2$ választással pont a bizonyítandó képlet adódik. □

A bizonyítást a következő lemma belátásával folytatjuk:

2.1.12. Lemma.

$$\mathbb{P}(M_1) = \frac{1}{k_m}\sum_{s=0}^{k_m-1}\prod_{r=1}^{s}\frac{2(m-k_m+r)}{2(m-k_m+r)+1}.$$

Bizonyítás. Ezen lemma bizonyítása során a szinteket olyan sorrendben számozzuk, ahogy észleltük őket $(1, 2, \ldots, k_m)$, nem pedig a részbenrendezésbeli pozíciójuk alapján. Néhány elem ugyanarról a szintről érkezik, mint valamely korábbi elem, úgyhogy egy vagy két elemet figyelünk meg ezen k_m szint mindegyikéről.

Legyen $\tau_\pi(j)$ az a legkisebb t, amelyre a $\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(t)$ elemek pontosan j szintet foglalnak el. Speciálisan $\tau_\pi = \tau_\pi(k_m)$. Legyen továbbá $i \leq j$ esetén $B_i(j)$ az az esemény, hogy a $\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi\big(\tau_\pi(j)\big)$ elemek közül pontosan egy való az i-edikként megfigyelt szintről, vagyis az, hogy az első pillanatban, amikor már pontosan j szintet észleltünk, pontosan egy elemet láttunk az i-edik szintről. Megjegyezzük, hogy $\mathbb{P}\big(B_i(i)\big) = 1$ minden i-re, mivel az első pillanatban, amikor már i

szintet észleltünk, i-edik szintű elemből még biztosan csak egyet láttunk. Továbbá vegyük észre, hogy $B_i(i) \supset B_i(i+1) \supset \ldots \supset B_i(k_m)$, mivel bármely $\omega \in B_i(j+1)$-re teljesül, hogy a $\tau_\pi(j+1)$ időpillanatban az i-edik észlelt szintről még csak egy elemet láttunk, és ez biztosan teljesül a $\tau_\pi(j)$ időben is, tehát $B_i(j) \supset B_i(j+1)$ minden j-re. Így

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(B_i(k_m)\big) = \\
&= \mathbb{P}\big(B_i(i) \cap B_i(i+1) \cap \ldots \cap B_i(k_m-1) \cap B_i(k_m)\big) = \\
&= \mathbb{P}\big(B_i(k_m) | B_i(i) \cap \ldots \cap B_i(k_m-1)\big) \cdot \mathbb{P}\big(B_i(i) \cap B_i(i+1) \cap \ldots \cap B_i(k_m-1)\big) = \\
&= \mathbb{P}\big(B_i(k_m) | B_i(k_m-1)\big) \cdot \mathbb{P}\big(B_i(i) \cap B_i(i+1) \cap \ldots \cap B_i(k_m-1)\big) = \ldots = \\
&= \mathbb{P}\big(B_i(i)\big) \cdot \mathbb{P}\big(B_i(i+1) | B_i(i)\big) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\big(B_i(k_m) | B_i(k_m-1)\big).
\end{aligned}
$$

A $\mathbb{P}\big(B_i(j+1)|B_i(j)\big)$ valószínűséget könnyedén meghatározhatjuk. Tegyük fel, hogy a $\tau_\pi(j)$ időpontnál vagyunk, j szintről figyeltünk már meg elemeket, és közülük pontosan egyet az i-edikként észlelt szintről láttunk. Ekkor $2(m-j)$ elem van olyan szinteken, amelyeket még nem észleltünk, és a $B_i(j+1)$-hez azt követeljük meg, hogy ezek közül valamelyiket hamarabb lássuk, mint a második elemet az i-edikként észlelt szintről. Ez a $((2(m-j)+1)$ elem véletlenszerű sorrendben jön, így a szimmetria miatt

$$
\mathbb{P}\big(B_i(j+1)|B_i(j)\big) = \frac{2(m-j)}{2(m-j)+1}.
$$

Így

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(B_i(k_m)\big) &= \mathbb{P}\big(B_i(i)\big) \cdot \mathbb{P}\big(B_i(i+1)|B_i(i)\big) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\big(B_i(k_m)|B_i(k_m-1)\big) = \\
&= 1 \cdot \prod_{j=i}^{k_m-1} \frac{2(m-j)}{2(m-j)+1} \\
&= \prod_{r=1}^{k_m-i} \frac{2(m-k_m+r)}{2(m-k_m+r)+1}.
\end{aligned}
$$

Legyen $1 \leq j \leq k_m$ esetén C_i^j az az esemény, hogy az i-edikként észlelt szint a j-edik legjobb az első k_m megfigyelt szint között. Ekkor $C_i^j \cap B_i(k_m)$ a $B_i(k_m)$ egy részhalmaza, és $\mathbb{P}\big(C_i^j \cap B_i(k_m)\big) = \frac{1}{k_m} \cdot \mathbb{P}\big(B_i(k_m)\big)$, mivel bármely $C_i^j \cap B_i(k_m)$-beli esetnek egyértelműen megfeleltethető egy $C_i^k \cap B_i(k_m)$-beli $(j \neq k)$ eset úgy, hogy a megfigyelt k_m szint közül a j-edik és k-adik legjobbak elemeinek indexeit felcseréljük. Erre mutat egy példát $i=4$ és $k_m=6$ esetén a következő:

$$
\begin{aligned}
&u_5\ v_7\ u_5\ u_8\ \underline{u_3}\ v_{10}\ u_{10}\ \underline{u_9} \qquad && \in C_4^1 \cap B_4(6) \\
&u_5\ v_7\ u_5\ u_8\ \underline{u_9}\ v_{10}\ u_{10}\ \underline{u_3} \qquad && \in C_4^5 \cap B_4(6)
\end{aligned}
$$

A megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű, így $\left|C_i^1 \cap B_i(k_m)\right| = \left|C_i^2 \cap B_i(k_m)\right| = \ldots = \left|C_i^{k_m} \cap B_i(k_m)\right|$. Mivel k_m ilyen partíció van, ezért valóban $\mathbb{P}\big(C_i^j \cap B_i(k_m)\big) = \frac{1}{k_m} \cdot \mathbb{P}\big(B_i(k_m)\big)$.

Legyen D_i az az esemény, amikor $B_i(k_m)$ és C_i^1 egyszerre fennáll, vagyis, hogy a τ_π időpontig pontosan egy elemet láttunk az i-edikként észlelt szintről, és ez az eddig megfigyelt legjobb elem. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D_i) &= \mathbb{P}\big(B_i(k_m) \cap C_i^1\big) = \\ &= \frac{1}{k_m} \cdot \mathbb{P}\big(B_i(k_m)\big) = \\ &= \frac{1}{k_m} \prod_{r=1}^{k_m - i} \frac{2(m-k_m+r)}{2(m-k_m+r)+1}.\end{aligned}$$

Végül vegyük észre, hogy M_1 a D_i események diszjunkt uniója, így

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_1) &= \mathbb{P}(D_1) + \mathbb{P}(D_2) + \cdots + \mathbb{P}(D_{k_m}) = \\ &= \sum_{i=1}^{k_m} \frac{1}{k_m} \prod_{r=1}^{k_m - i} \frac{2(m-k_m+r)}{2(m-k_m+r)+1} = \\ &= \frac{1}{k_m} \sum_{s=0}^{k_m-1} \prod_{r=1}^{s} \frac{2(m-k_m+r)}{2(m-k_m+r)+1},\end{aligned}$$

így bizonyítottuk a lemmát. □

Minden $2 \leq j \leq m - k_m + 2$ esetén M_1^j legyen M_1-nek az a részesete, ahol $\langle \pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(\tau_\pi) \rangle$ egy második legjobb eleme a j-edik szintről való. Ezek az alesetek megadják az M_1 egy partícióját, mivel a τ_π időig előforduló szintek közül a második legjobb legalább a 2. és legfeljebb az $(m - k_m + 2)$-edik szint. Előbbi akkor fordulhat elő, ha a τ_π-ig észlelt szintek valamelyike az abszolút legjobb, utóbbi pedig akkor, ha az első τ_π megfigyelt elem által elfoglalt szintek az összes közül az utolsó k_m szint. Ekkor

$$\mathbb{P}(M_1^j | M_1) = \frac{1 \cdot \binom{m-j}{k_m-2} \cdot (j-1)}{\binom{m}{k_m}},$$

mivel a kedvező esetek és az összes eset számolásánál is, ha tudjuk, hogy melyik k_m szintről választunk elemeket, akkor arra kell figyelnünk, hogy a kiválasztott elemek halmazában csak egy maximális elem legyen, és hogy a $\pi(\tau_\pi)$-nek választott elemnek az ikertestvérét ne válasszuk, és mivel ez a rész mindkét esetszámolásnál azonos, ezért egyszerűsíthetünk vele. Az egyetlen különbség tehát csak a szintek kiválasztásában van, amelyre az összes eset meghatározásánál nincs kikötés, míg a kedvező eseteknél először 1-féleképpen kiválasztjuk a j-edik szintet, ezután a nála jobb $(j-1)$

szintről kiválasztjuk a legjobb megfigyelt szintet, a további $(k_m - 2)$ szintet pedig tetszőlegesen választhatjuk a j-nél rosszabb, $(m-j)$ szintről. Így

$$\mathbb{P}(M_1^j) = \mathbb{P}(M_1^j | M_1)\ \mathbb{P}(M_1) = \frac{\binom{m-j}{k_m-2}(j-1)}{\binom{m}{k_m}} \mathbb{P}(M_1).$$

Hasonlóan, ha minden $1 \leq j \leq m - k_m + 1$ esetén M_2^j-t úgy definiáljuk, mint az M_2-nek az a részesete, ahol a $\langle \pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(\tau_\pi) \rangle$ halmaz maximális elemei a j-edik szintről valóak, akkor ezek a részesetek megadják az M_2 egy partícióját, és

$$\mathbb{P}(M_2^j) = \mathbb{P}(M_2^j | M_2)\ \mathbb{P}(M_2) = \frac{\binom{m-j}{k_m-1}}{\binom{m}{k_m}} (1 - \mathbb{P}(M_1)).$$

Ha M_2^j adott, akkor a siker valószínűsége a τ megállási idő esetén, amely azt mondja, hogy álljunk meg a következő τ_i-nél, pontosan $\frac{2(j-1)+1}{3(j-1)}$, vagyis egyenlő a siker valószínűségével a τ_1 megállási idő használatával azon a részbenrendezett halmazon, amely a j-edik szint feletti $(j-1)$ ikerpárból áll. Hasonlóan, ha M_1^j adott, akkor a τ megállási idővel a siker valószínűsége $\frac{2(j-1)+1}{3(j-1)}$, vagyis egyenlő a siker valószínűségével, ha a τ_1 megállási időt használjuk azon a részbenrendezésen, amely az eddig észlelt második legjobb, j szintű elemtől jobb $(j-1)$ ikerpárból áll, és ahol az eddig megkapott maximális elemre úgy tekintünk, mint az első véletlenszerű elemre, amit megfigyeltünk a redukált részbenrendezett halmazban. A következő kifejezésben a második szummában a $j=1$ esetén adódó tag eltűnik, mivel M_2^1 esetén nincs esélyünk arra, hogy egy maximális elemnél álljunk meg. Ekkor

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(L_\tau = 1) = &\sum_{j=2}^{m-k_m+2} \mathbb{P}\big(L_{\pi(\tau)} = 1 | M_1^j\big)\mathbb{P}(M_1^j) + \sum_{j=1}^{m-k_m+1} \mathbb{P}\big(L_{\pi(\tau)} = 1 | M_2^j\big)\mathbb{P}(M_2^j) = \\
= &\sum_{j=2}^{m-k_m+2} \frac{2(j-1)+1}{3(j-1)} \cdot \frac{\binom{m-j}{k_m-2}(j-1)}{\binom{m}{k_m}} \mathbb{P}(M_1) + \\
&+ \sum_{j=2}^{m-k_m+1} \frac{2(j-1)+1}{3(j-1)} \cdot \frac{\binom{m-j}{k_m-1}}{\binom{m}{k_m}} \big(1 - \mathbb{P}(M_1)\big),
\end{aligned}$$

ahol mindkét szummát átindexelve adódik, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(L_\tau = 1) &= \mathbb{P}(M_1) \sum_{j=1}^{m-k_m+1} \frac{2j+1}{3} \cdot \frac{\binom{m-j-1}{k_m-2}}{\binom{m}{k_m}} + \big(1 - \mathbb{P}(M_1)\big) \sum_{j=1}^{m-k_m} \frac{2j+1}{3j} \cdot \frac{\binom{m-j-1}{k_m-1}}{\binom{m}{k_m}} = \\
&= \mathbb{P}(M_1) \frac{\sum_{j=1}^{m-k_m+1} \frac{2j}{3}\binom{m-j-1}{k_m-2} + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{m-k_m+1} \binom{m-j-1}{k_m-2}}{\binom{m}{k_m}} + \\
&\quad + \big(1 - \mathbb{P}(M_1)\big) \frac{\sum_{j=1}^{m-k_m} \frac{2}{3}\binom{m-j-1}{k_m-1} + \sum_{j=1}^{m-k_m} \frac{1}{3j}\binom{m-j-1}{k_m-1}}{\binom{m}{k_m}}.
\end{aligned}$$

Ebből a (2.3)-mas és a (2.4)-es kombinatorikai azonosság, valamint a 2.1.11. Állítás és a 2.1.5. Lemma felhasználásával adódik, hogy

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(L_\tau = 1) = \\
&\quad = \mathbb{P}(M_1)\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\binom{m-1}{k_m-1}}{\binom{m}{k_m}}\right) + \big(1-\mathbb{P}(M_1)\big)\frac{\frac{2}{3}\binom{m-1}{k_m} + \frac{1}{3}\binom{m-1}{k_m-1}\sum_{j=k_m}^{m-1}\frac{1}{j}}{\binom{m}{k_m}} = \\
&\quad = \mathbb{P}(M_1)\left(\frac{2}{3} + \frac{k_m}{3m}\right) + \big(1-\mathbb{P}(M_1)\big)\left(\frac{2(m-k_m)}{3m} + \frac{k_m}{3m}\sum_{j=k_m}^{m-1}\frac{1}{j}\right) = \\
&= \frac{2m+k_m}{3m} - (1-\mathbb{P}(M_1))\frac{2m+k_m}{3m} - \big(1-\mathbb{P}(M_1)\big)\left(\frac{2k_m-2m}{3m} - \frac{k_m}{3m}\sum_{j=k_m}^{m-1}\frac{1}{j}\right) = \\
&\quad = \frac{2m+k_m}{3m} - \big(1-\mathbb{P}(M_1)\big)\left(\frac{k_m}{m} - \frac{k_m}{3m}\sum_{j=k_m}^{m-1}\frac{1}{j}\right) = \\
&\quad = \frac{1}{3m}\left[2m + k_m - \big(k_m - k_m\cdot\mathbb{P}(M_1)\big)\left(3 - \sum_{j=k_m}^{m-1}\frac{1}{j}\right)\right],
\end{aligned}
$$

ahol $\mathbb{P}(M_1)$ helyére behelyettesítve a 2.1.12. Lemmában szereplő formulát, a kívánt kifejezést kapjuk. □

2.1.13. Megjegyzés. A k_m definíciójának következtében könnyedén megmutathatjuk, hogy bármely m esetén

$$k_m \leq \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil,$$

ugyanis, ha $k \geq \frac{m}{2}$, akkor

$$\frac{2m}{k} + \sum_{j=k}^{m-1}\frac{1}{j} \leq \frac{2m}{k} + (m-k)\frac{1}{k} \leq \frac{2m}{\frac{m}{2}} + \frac{m-\frac{m}{2}}{\frac{m}{2}} = 5$$

mindig teljesül. Így k_m értékét elegendő az $\lceil \frac{m}{2} \rceil$-nél kisebb vagy egyenlő egészek között keresni.

Nézzünk egy példát az eddigi eredményekre. Legyen $m = 7$. Ekkor $k_m = k_7 = 4$, mivel $k = 4$-re

$$\frac{2\cdot 7}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{247}{60} \leq 5,$$

és $k = 3$-ra már a fordított irányú egyenlőtlenség teljesül, azaz

$$\frac{2\cdot 7}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{337}{60} > 5.$$

A siker valószínűsége pedig

$$\mathbb{P}(L_\tau = 1) = \frac{1}{21}\left[18 - \left(4 - \left(1 + \frac{8}{9} + \frac{80}{99} + \frac{960}{1287}\right)\right)\left(3 - \frac{37}{60}\right)\right] =$$
$$= \frac{3001}{3780} \approx 0{,}7939.$$

A következő tételek kimondják a k_m küszöbszám aszimptotikus viselkedését, és a siker valószínűségének határértékét, amint $m \to \infty$. Mivel itt az m változik, így az m ikerpárból álló részbenrendezéshez tartozó megállási időt jelöljük $\tau^{(m)}$-mel. Továbbá jelölje x_0 a $2x + \ln x = 5$ egyenlet megoldását, így $x_0 \approx 2{,}12347$.

2.1.14. Tétel. *A k_m küszöbszámra mindem $m \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, hogy*

$$\frac{m}{x_0} < k_m < \frac{m}{x_0} + 2,$$

továbbá ennek következtében

$$\lim_{m\to\infty} \frac{k_m}{m} = \frac{1}{x_0} \approx 0{,}4709.$$

Bizonyítás. A definíciója alapján k_m-re teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$5 \geq \frac{2m}{k_m} + \sum_{j=k_m}^{m-1} \frac{1}{j} > \frac{2m}{k_m} + \int_{k_m}^{m} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 2\frac{m}{k_m} + \ln\left(\frac{m}{k_m}\right).$$

Mivel $2x_0 + \ln x_0 = 5$, és a $2x + \ln x$ szigorúan monoton növekvő függvény, ezért

$$\frac{m}{k_m} < x_0 \;\Rightarrow\; \frac{m}{x_0} < k_m.$$

Másrészről $(k_m - 1)$-re nem teljesül a feltétel, így a következő adódik:

$$5 < \frac{2m}{k_m - 1} + \sum_{j=k_m-1}^{m-1} \frac{1}{j} < \frac{2m}{k_m - 1} + \ln\left(\frac{m-1}{k_m - 2}\right) < \frac{2m}{k_m - 2} + \ln\left(\frac{m}{k_m - 2}\right),$$

és ennélfogva

$$\frac{m}{k_m - 2} > x_0 \;\Rightarrow\; k_m < \frac{m}{x_0} + 2.$$

A határérték pedig a Rendőr-elv következtében adódik, mivel

$$\frac{1}{x_0} < \frac{k_m}{m} < \frac{1}{x_0} + \frac{2}{m},$$

ahol $\lim_{m\to\infty} \frac{2}{m} = 0$ miatt következik, hogy

$$\lim_{m\to\infty} \frac{k_m}{m} = \frac{1}{x_0}.$$

□

A siker aszimptotikus valószínűségét a következő tétel fogalmazza meg, amelyet itt nem bizonyítunk [13].

2.1.15. Tétel. *Amikor a $\tau^{(m)}$ optimális megállási időt használjuk, akkor a siker valószínűségére teljesül, hogy*

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(L_{\tau^{(m)}} = 1) = \frac{1}{x_0} + \frac{4(x_0-1)^2}{3x_0}\left(\left(\frac{x_0}{x_0-1}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right) \approx 0{,}7680.$$

□

Tehát azt kaptuk, hogy a titkárnő-probléma könnyebb az ikerpárok esetén, mint a lineáris rendezésre megfogalmazott, eredeti változat, ahol a siker valószínűsége nagy m-ek esetén is $\frac{1}{e} \approx 0.3679$. Ez elsőre meglepőnek tűnhet, mert azt gondolhatnánk, hogy mivel kevesebb összehasonlítás lehetséges, ezért kevesebb információnk is van. Azonban a helyzet az, hogy ha összehasonlítunk két jelentkezőt, akkor itt három lehetséges kimenetel van kettő helyett, ami több információval szolgál. Továbbá, ha úgy tekintünk az ikerpárokra, hogy minden jelentkező esetén két lehetőségünk van, akkor intuitíven is gondolhatjuk, hogy ez a változat könnyebb, amit igazoltunk is.

2.2. A c-es ikrek

Ebben a szakaszban az előzőben megfogalmazott, m ikerpár által alkotott részbenrendezést általánosítjuk. Tekintsünk egy halmazt, amely c láncból áll. Jelölje a láncokat $1 \leq i \leq c$ esetén $U_i = \{u_i^1, \ldots, u_i^m\}$, ahol u_i^1 a maximális elem. Ekkor a részbenrendezett halmaz előáll úgy, mint $U_1 \cup \ldots \cup U_c$, ahol egy rögzített j esetén az u_i^j-k, vagyis az azonos szinten lévő elemek nem összehasonlíthatóak, és minden i_1, j_1, i_2, j_2 esetén

$$u_{i_1}^{j_1} \prec u_{i_2}^{j_2} \quad \text{akkor és csak akkor, ha} \quad j_1 > j_2.$$

Legyen

$$\tau_i^{(c)} = \min\Big\{t > \tau_{i-1}^{(c)} : \pi(t) \in \max\big\{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(t)\big\}, \text{ és}$$
$$\big\{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(t-1)\big\} \text{ tartalmazza } \pi(t) \text{ összes ikertestvérét } \Big\},$$

azzal a feltétellel, hogy $\tau_0^{(c)} = 0$, és hogyha a halmaz, amelynek a minimumát vesszük, üres, akkor a minimum cm-mel egyenlő.

A $\tau_1^{(c)}$ az a megállási idő, amely az első olyan elemnél áll meg, amelyik maximális az összes megfigyelt elem között, és amelynek már az összes ikertestvérét láttuk. Így a 2.1.4. Lemma a következőképpen általánosítható:

2.2.1. Lemma. *A $\tau_1^{(c)}$ megállási idővel a siker valószínűsége*

$$P_c(m) = \prod_{i=2}^{m}\left(1 - \frac{1}{\binom{ci}{c}}\right).$$

Bizonyítás. Minden $2 \leq i \leq m$ esetén legyen N_i az az esemény, miszerint az elem, amelyet választunk, nem az i-edik szintről való. Ekkor

$$\begin{aligned} P_c(m) &= \mathbb{P}(N_2 \cap \ldots \cap N_m) = \\ &= \mathbb{P}(N_m)\mathbb{P}(N_{m-1}|N_m)\ldots\mathbb{P}(N_2|N_3 \cap \ldots \cap N_m). \end{aligned}$$

Az $N_{i+1} \cap \ldots \cap N_m$ feltételre nézve akkor és csak akkor lesz a kiválasztott elem az i-edik szint valamely eleme, hogyha az ezen a szinten lévő c elem mindegyike korábban érkezik, mint a nála jobb $(i-1)$ szinten lévő $c(i-1)$ elem. Így a rossz esetek száma 1, az összes eset száma pedig $\binom{ci}{c}$, mivel az elemek véletlenszerű sorrendben jönnek, és így ci elem közül az első c ennyiféleképpen alakulhat. Ennélfogva

$$\mathbb{P}(N_i|N_{i+1} \cap \ldots \cap N_m) = 1 - \frac{1}{\binom{ci}{c}},$$

és ebből már következik a lemma kimondásánál megfogalmazott egyenlőség. □

Az előző szakaszhoz hasonlóan megadhatunk egy optimális megállási időt is. Legyen

$$k_m^{(c)} = \min\left\{k : \sum_{j=1}^{m-k}\left[\frac{\binom{m-j-1}{k-1}}{\binom{m-1}{k-1}}\prod_{i=2}^{j}\left(1-\frac{1}{\binom{ci}{c}}\right)\right] \leq 1\right\},$$

és legyen

$$\tau^{(c)} = \min\Big\{\tau_i^{(c)} : \text{a } \pi(1), \pi(2), \ldots, \pi\big(\tau_i^{(c)}\big) \text{ elemek által} \\ \text{elfoglalt szintek száma legalább } k_m^{(c)}\Big\}.$$

2.2.2. Tétel. *A $\tau^{(c)}$ megállási idő optimális az m-szintű c-es ikrekre megfogalmazott titkárnő-probléma esetén.*

A bizonyítás a monoton esetre vonatkozó 2.1.3. Tétel felhasználásával történik, és lényegében hasonló a 2.1.2. Tétel bizonyításához, így arra nem térünk ki. □

Habár a siker valószínűségére lehet zárt képletet adni, ez gyakorlati szempontból eléggé használhatatlan. Ennek meghatározása nagyjából ugyanolyan lépésekből áll, mint ahogyan az előző szakaszban eljártunk. Mint korábban, legyen most is

$$L_t = \text{ a } \pi(t) \text{ elem szintje.}$$

Továbbá annak jelölésére, hogy egy m elemű alaphalmazból hányféleképpen választhatunk ki c megkülönböztethető, $r_1, \ldots, r_c$ méretű halmazt, használjuk a multinomiális együttható jelölést:

$$\binom{m}{r_1, \ldots, r_c, m - r_1 - \ldots - r_c} = \frac{m!}{r_1! \cdot \ldots \cdot r_c! \cdot (m - r_1 - \ldots - r_c)!}.$$

2.2.3. Tétel. *A $\tau^{(c)}$ megállási idővel a siker valószínűsége*

$$\mathbb{P}(L_{\tau^{(c)}} = 1) =$$
$$= \sum_{i=1}^{c-1} \left[\left(\sum_{\substack{r_1+\ldots+r_c=k_m^{(c)} \\ r_1, r_i \geq 1}} \frac{\binom{m}{r_1,\ldots,r_c,m-k_m^{(c)}} \binom{c}{1}^{r_1} \cdots \binom{c}{c}^{r_c}}{\binom{cm}{r_1+2r_2+\ldots+cr_c}} \cdot \frac{r_1}{r_1+2r_2+\ldots+cr_c} \cdot \frac{r_i}{k_m^{(c)}} \right) \right.$$
$$\left. \left(\frac{k_m^{(c)}}{m} + \sum_{j=2}^{m-k_m^{(c)}+1} \frac{\binom{m-j}{k_m^{(c)}-1}}{\binom{m}{k_m^{(c)}}} \left(1 - \frac{1}{\binom{cj-i}{c-i}}\right) \prod_{k=2}^{j-1} \left(1 - \frac{1}{\binom{ck}{c}}\right) \right) \right] +$$
$$+ \left(\sum_{\substack{r_1+\ldots+r_c=k_m^{(c)} \\ r_1, r_c \geq 1}} \frac{\binom{m}{r_1,\ldots,r_c,m-k_m^{(c)}} \binom{c}{1}^{r_1} \cdots \binom{c}{c}^{r_c}}{\binom{cm}{r_1+2r_2+\ldots+cr_c}} \cdot \frac{r_1}{r_1+2r_2+\ldots+cr_c} \cdot \frac{r_c}{k_m^{(c)}} \right)$$
$$\left(\sum_{j=2}^{m-k_m^{(c)}+1} \frac{\binom{m-j}{k_m^{(c)}}}{\binom{m}{k_m^{(c)}}} \prod_{k=2}^{j-1} \left(1 - \frac{1}{\binom{ck}{c}}\right) \right).$$

Bizonyítás. Szükségünk van azon esemény valószínűségének meghatározására, miszerint az első pillanatban, amikor $k_m^{(c)}$ szintet láttunk, pontosan i elemet figyeltünk meg a legjobb szintről. Legyen ez az esemény M_i.

2.2.4. Lemma. *Legyen $1 \leq i \leq c$ egész. Ekkor*

$$\mathbb{P}(M_i) = \sum_{\substack{r_1+\ldots+r_c=k_m^{(c)} \\ r_1, r_i \geq 1}} \frac{\binom{m}{r_1,\ldots,r_c,m-k_m^{(c)}} \binom{c}{1}^{r_1} \cdots \binom{c}{c}^{r_c}}{\binom{cm}{r_1+2r_2+\ldots+cr_c}} \cdot \frac{r_1}{r_1+2r_2+\ldots+cr_c} \cdot \frac{r_i}{k_m^{(c)}}$$

Bizonyítás. $r_1 + \cdots + r_c = k_m^{(c)}$ esetén $A_{r_1,\ldots,r_c}$ legyen az az esemény, miszerint amikor $r_1 + 2r_2 + \cdots + cr_c$ elemet láttunk már, akkor azon szintek száma, amelyekről pontosan j elemet láttunk, egyenlő r_j-vel minden $1 \leq j \leq c$ esetén. Ekkor az $A_{r_1,\ldots,r_c}$ valószínűségének meghatározásánál az összes eset száma $\binom{cm}{r_1+2r_2+\cdots+cr_c}$, mivel az összesen cm elem közül $r_1 + 2r_2 + \cdots + cr_c$-t kell kiválasztanunk. A kedvező esetek meghatározásánál először az m szint közül $\binom{m}{r_1,\ldots,r_c,m-k_m^{(c)}}$-féleképpen kiválasztom azt a $k_m^{(c)}$ szintet, amelyről megfigyelek elemeket, ezután pedig minden j-re azon r_j szint közül, amelyekről j elemet láttam, $\binom{c}{j}$-féleképpen kiválasztom azon elemeket, amiket észlelek. Így

$$\mathbb{P}(A_{r_1,\ldots,r_c}) = \frac{\binom{m}{r_1,\ldots,r_c,m-k_m^{(c)}} \binom{c}{1}^{r_1} \cdots \binom{c}{c}^{r_c}}{\binom{cm}{r_1+2r_2+\ldots+cr_c}}.$$

Legyen $B_{r_1,\ldots,r_c}$ az az esemény, hogy az első pillanatban, amikor $k_m^{(c)}$ szintet figyeltünk meg, akkor azon szintek száma, amelyekről pontosan j elemet láttunk, r_j-vel egyenlő minden $1 \leq j \leq c$ esetén. Ekkor $B_{r_1,\ldots,r_c}$ csak akkor nem-üres esemény, ha

$r_1 \geq 1$, és ebben az esetben $B_{r_1,\ldots,r_c}$ akkor és csak akkor következik be, ha $A_{r_1,\ldots,r_c}$ is bekövetkezik, és az utolsó megfigyelt elem az egyedüli elemek egyike, vagyis egy olyan elem, amelynek szintjéről ő az egyetlen elem, amit észleltünk. Szimmetria miatt az egyedüli elemek azonos valószínűséggel fordulhatnak elő az első $r_1 + 2r_2 + \cdots + cr_c$ elem bármelyikeként, és ezért

$$\mathbb{P}\big(B_{r_1,\ldots,r_c}|A_{r_1,\ldots,r_c}\big) = \frac{r_1}{r_1 + 2r_2 + \ldots + cr_c}.$$

Végül $C_{r_1,\ldots,r_c}$ legyen az az esemény, miszerint $B_{r_1,\ldots,r_c}$ fennáll, és pontosan i elemet láttunk a legjobb szintről. A legjobb szint azonos valószínűséggel lehet az $r_1 + \ldots + r_c = k_m^{(c)}$ kiválasztott szint bármelyike, így

$$\mathbb{P}\big(C_{r_1,\ldots,r_c}|B_{r_1,\ldots,r_c}\big) = \frac{r_i}{k_m^{(c)}}.$$

Ahhoz, hogy M_i bekövetkezzen, legalább egy olyan szintnek kell lennie, amelyről pontosan egy elemet láttunk (az utoljára megfigyelt), és legalább egy olyan szintnek kell lennie, amelyről pontosan i elemet figyeltünk meg (a legjobb szint). Ezekkel a kikötésekkel, ha M_i bekövetkezik, akkor $C_{r_1,\ldots,r_c}$ is bekövetkezik valamilyen $r_1, \ldots, r_c$ konstansokkal, melyekre $r_1 + \ldots + r_c = k_m^{(c)}$, továbbá $C_{r_1,\ldots,r_c}$-k diszjunktak, és mindegyikük M_i-ben van. Ennélfogva

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_i) &= \sum_{\substack{r_1+\ldots+r_c=k_m^{(c)} \\ r_1, r_i \geq 1}} \mathbb{P}(C_{r_1,\ldots,r_c}) = \\ &= \sum_{\substack{r_1+\ldots+r_c=k_m^{(c)} \\ r_1, r_i \geq 1}} \frac{\binom{m}{r_1,\ldots,r_c,m-k_m^{(c)}}\binom{c}{1}^{r_1}\cdots\binom{c}{c}^{r_c}}{\binom{cm}{r_1+2r_2+\ldots+cr_c}} \cdot \frac{r_1}{r_1+2r_2+\ldots+cr_c} \cdot \frac{r_i}{k_m^{(c)}},\end{aligned}$$

amit bizonyítani akartunk. $\square$

Legyen M_i^j az az esemény, miszerint az első pillanatban, amikor már $k_m^{(c)}$ szintet láttunk, akkor i elemet figyeltünk meg az eddigi legjobb szintről, és ez a szint a j-edik szint. Ekkor a siker valószínűségét az M_i^j feltételre nézve bármely i és j esetén a következő lemma adja meg, melynek bizonyítása könnyedén adódik a 2.2.1. Lemma módosításával, így arra itt nem térünk ki.

2.2.5. Lemma.
(1) $1 \leq i \leq c-1$ *és* $j = 1$ *esetén*

$$\mathbb{P}\big(L_{\tau^{(c)}} = 1|M_i^1\big) = 1.$$

(2) $1 \leq i \leq c-1$ *és* $2 \leq j \leq m - k_m^{(c)} + 1$ *esetén*

$$\mathbb{P}\big(L_{\tau^{(c)}} = 1|M_i^j\big) = \left(1 - \frac{1}{\binom{cj-i}{c-i}}\right)\prod_{k=2}^{j-1}\left(1 - \frac{1}{\binom{ck}{c}}\right).$$

(3) *$i = c$ és $j = 1$ esetén*

$$\mathbb{P}\big(L_{\tau^{(c)}} = 1 | M_c^1\big) = 0.$$

(4) *$i = c$ és $2 \le j \le m - k_m^{(c)} + 1$ esetén*

$$\mathbb{P}\big(L_{\tau^{(c)}} = 1 | M_c^j\big) = \prod_{k=2}^{j-1} \left(1 - \frac{1}{\binom{ck}{c}}\right).$$

□

Ugyanolyan átalakítás következtében, mint a 2.1.15. Tétel bizonyításánál, adódik, hogy

$$\mathbb{P}(M_i^j) = \frac{\binom{m-j}{k_m^{(c)}-1}}{\binom{m}{k_m^{(c)}}} \mathbb{P}(M_i) =$$

$$= \frac{\binom{m-j}{k_m^{(c)}-1}}{\binom{m}{k_m^{(c)}}} \sum_{\substack{r_1+\ldots+r_c=k_m^{(c)} \\ r_1, r_i \ge 1}} \frac{\binom{m}{r_1,\ldots,r_c,m-k_m^{(c)}} \binom{c}{1}^{r_1} \cdots \binom{c}{c}^{r_c}}{\binom{cm}{r_1+2r_2+\ldots+cr_c}} \cdot \frac{r_1}{r_1 + 2r_2 + \ldots + cr_c} \cdot \frac{r_i}{k_m^{(c)}}.$$

Az $\left\{M_i^j : 1 \le i \le c, 1 \le j \le m - k_m^{(c)} + 1\right\}$ események az eseménytér egy partícióját adják, így

$$\mathbb{P}(L_{\tau^{(c)}} = 1) = \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{m-k_m^{(c)}+1} \mathbb{P}\big(L_{\tau^{(c)}} = 1 | M_i^j\big) \mathbb{P}(M_i^j),$$

amelybe a 2.2.5. Lemma alapján behelyettesítve teljes a tétel bizonyítása. □

A következőekben a $k_m^{(c)}$ értékre adunk meg felső és alsó korlátot. Ehhez segítségünkre lesz a következő lemma.

2.2.6. Lemma. *Minden $c \ge 2$ egész és minden pozitív egész k és m, $k \le m$ esetén*

$$\left(1 - \frac{c+1}{2^c(c-1)}\right)\left(\frac{m}{k} - 1\right) < \sum_{j=1}^{m-k} \left[\frac{\binom{m-j-1}{k-1}}{\binom{m-1}{k-1}} \prod_{i=2}^{j} \left(1 - \frac{1}{\binom{ci}{c}}\right)\right] \le \frac{m}{k} - 1.$$

Bizonyítás. A felső korlát igazolásához először vegyük észre, hogy a produktum értéke legfeljebb 1. Felhasználva a korábban már bizonyított

$$\sum_{j=1}^{m-k} \binom{m-j-1}{k-1} = \binom{m-1}{k}$$

kombinatorikai azonosságot, adódik, hogy

$$\sum_{j=1}^{m-k} \frac{\binom{m-j-1}{k-1}}{\binom{m-1}{k-1}} = \frac{\binom{m-1}{k}}{\binom{m-1}{k-1}} = \frac{m-k}{k} = \frac{m}{k} - 1,$$

így megkaptuk a felső korlátot.
Az alsó korláthoz először vegyük észre, hogy

$$\binom{ci}{c} = \frac{ci}{c} \cdot \frac{ci-1}{c-1} \cdot \ldots \cdot \frac{ci-c+1}{1} \geq i^c,$$

mivel minden $0 \leq j \leq c-1$ esetén

$$\frac{ci-j}{c-j} = \frac{ci-ji+(i-1)j}{c-j} = i + \frac{(i-1)j}{c-j} \geq i.$$

Továbbá felhasználjuk a következő állítást:

2.2.7. Állítás. *Egy rögzített $c \geq 2$ egészre minden $j \geq 2$ egész esetén*

$$\prod_{i=2}^{j}(1-i^{-c}) \geq 1 - \sum_{i=2}^{j} i^{-c}.$$

Bizonyítás. Teljes indukcióval bizonyítunk.
$j = 2$ esetén

$$\prod_{i=2}^{2}(1-i^{-c}) = 1 - \frac{1}{2^c} = 1 - \sum_{i=2}^{2} i^{-c}.$$

$j = 3$ esetén

$$\prod_{i=2}^{3}(1-i^{-c}) = \left(1-\frac{1}{2^c}\right)\left(1-\frac{1}{3^c}\right) = 1 - \frac{1}{2^c} - \frac{1}{3^c} + \frac{1}{6^c} > 1 - \frac{1}{2^c} - \frac{1}{3^c} = 1 - \sum_{i=2}^{3} i^{-c}.$$

Tegyük fel, hogy j-re igaz:

$$\prod_{i=2}^{j}(1-i^{-c}) \geq 1 - \sum_{i=2}^{j} i^{-c},$$

és belátjuk $j+1$-re:

$$\prod_{i=2}^{j+1}(1-i^{-c}) = \big(1-(j+1)^{-c}\big)\prod_{i=2}^{j}(1-i^{-c}) = \prod_{i=2}^{j}(1-i^{-c}) - (j+1)^{-c}\prod_{i=2}^{j}(1-i^{-c}) \overset{(*)}{>}$$

$$> 1 - \sum_{i=2}^{j} i^{-c} - (j+1)^{-c} = 1 - \sum_{i=2}^{j+1} i^{-c},$$

ahol $(*)$-nál felhasználtuk az indukciós feltételt, valamint azt, hogy $\prod_{i=2}^{j}(1-i^{-c}) < 1$, így beláttuk az állítást. $\square$

Ennélfogva

$$\prod_{i=2}^{j}\left(1-\frac{1}{\binom{ci}{i}}\right) \geq \prod_{i=2}^{j}\left(1-i^{-c}\right) \geq$$

$$\geq 1-\sum_{i=2}^{j} i^{-c} > 1-\sum_{i=2}^{\infty} i^{-c} >$$

$$> 1-\frac{1}{2^c}-\int_2^{\infty} x^{-c}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 1-\frac{1}{2^c}-\lim_{d\to\infty}\left[\frac{x^{-c+1}}{-c+1}\right]_2^d = 1-\frac{1}{2^c}-\frac{1}{(c-1)2^{c-1}} =$$

$$= 1-\frac{c+1}{2^c(c-1)}.$$

Mivel ez a korlát nem függ j-től, ezért kiemelhető a szummából, amit ezután ugyanúgy alakíthatunk, mint korábban, és ebből már következik az alsó korlát. $\square$

2.2.8. Tétel. *Minden $c \geq 2$ és $m \geq 1$ egészek esetén*

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{c+1}{2(2^{c+1}(c-1)-c-1)}\right)m < k_m^{(c)} \leq \left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil.$$

Ebből következik, hogy minden $m \geq 1$ esetén

$$\lim_{c\to\infty} k_m^{(c)} = \left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil.$$

Bizonyítás. Ha

$$k \leq \left(\frac{1}{2}-\frac{c+1}{2(2^{c+1}(c-1)-c-1)}\right)m = \frac{1-\frac{c+1}{2^c(c-1)}}{2-\frac{c+1}{2^c(c-1)}}m$$

teljesülne, akkor a 2.2.6. Lemma következtében

$$\sum_{j=1}^{m-k}\left[\frac{\binom{m-j-1}{k-1}}{\binom{m-1}{k-1}}\prod_{i=2}^{j}\left(1-\frac{1}{\binom{ci}{c}}\right)\right] > \left(1-\frac{c+1}{2^c(c-1)}\right)\left(\frac{m}{k}-1\right) \geq$$

$$\geq \left(1-\frac{c+1}{2^c(c-1)}\right)\left(\frac{2-\frac{c+1}{2^c(c-1)}}{1-\frac{c+1}{2^c(c-1)}}-1\right) = 1$$

adódna, azonban ilyen k értéket nem vehet fel a $k_m^{(c)}$, így igazoltuk az alsó korlátot. Ha

$$k \geq \frac{m}{2},$$

akkor a 2.2.6. Lemma következtében

$$\sum_{j=1}^{m-k}\left[\frac{\binom{m-j-1}{k-1}}{\binom{m-1}{k-1}}\prod_{i=2}^{j}\left(1-\frac{1}{\binom{ci}{c}}\right)\right] \leq \frac{m}{k}-1 \leq \frac{m}{\frac{m}{2}}-1 = 1,$$

így következik a felső korlát is. $\square$

2.2.9. Megjegyzés. A siker valószínűségére megadhatunk egy alsó korlátot. Vegyük észre, hogy a 2.2.6. Lemma bizonyítása során a 2.2.1. Lemmában a $\tau_1^{(c)}$ megállási idő esetén meghatározott siker valószínűségére adunk egy alsó becslést, így

$$P_c(m) \geq 1 - \frac{c+1}{2^c(c-1)}.$$

3. fejezet

Titkárnő-probléma ismeretlen részbenrendezésen

3.1. Ha semmit sem tudunk a részbenrendezésről

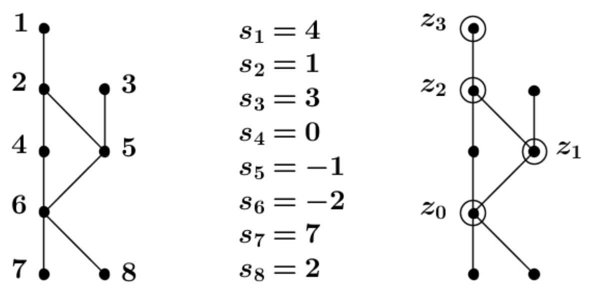
A következőekben a titkárnő-probléma egy folytonos idejű változatát vizsgáljuk. A feladatot a következőképpen fogalmazhatjuk meg.

3.1.1. Feladat. Tegyük fel, hogy egy véges, nemüres részbenrendezett halmaz elemei a $[0, 1]$ intervallumon véletlenszerűen jelennek meg, azaz egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint. Bármely pillanatban látjuk az addig az ideig feltűnő elemek által indukált részbenrendezést, és a feladatunk, hogy a folyamat megvalósulása közben egy maximális elemet válasszunk ki.

Tehát a cél egy olyan stratégia megadása, amellyel bármely P véges, nemüres részbenrendezett halmaz esetén a siker valószínűsége legalább $c > 0$. Nyilvánvalóan egy ilyen, a folytonos idejű változatra megfogalmazott stratégia alkalmazható a diszkrét idejű változatnál is, mivel tudva, hogy P elemeinek száma n, mi magunk is generálhatunk n véletlenszerű időt, melyeket megjelenésük szerint sorban hozzárendelhetünk az elemekhez.

Először bevezetjük az alábbi definíciót, majd megfogalmazzuk a stratégiát:

3.1.2. Definíció. *Tegyük fel, hogy egy véges, nemüres P részbenrendezett halmaz elemeit különböző, valós súlyokkal megjelöljük. Legyen z_0 a legkisebb súlyú elem P-ben. Amíg z_i nem maximális, z_{i+1} legyen a z_i-től nagyobb elemek közül a minimális súlyú. Az így keletkező lánc végső elemét nevezzük P mohó maximumának.*



3.1. ábra. Egy példa a mohó maximumra. A részbenrendezés esetén a j elemekhez tartozó súlyok értéke s_j. Ekkor a kialakuló mohó láncot a bekarikázott z_i elemek alkotják, és ebben az esetben a mohó maximum a z_3.

3.1.3. Stratégia. A $[0, 1]$ intervallumról véletlenszerűen súlyokat rendelünk az elemekhez, amint megjelennek. Miután mindent visszautasítottunk az $1/e$ időig, az első olyan x elemet fogadjuk el, amely mohó maximuma annak a P_x részbenrendezésnek, amelyet az x érkezéséig megjelenő elemek (x-et is beleértve) indukálnak.

A siker valószínűségét ezzel a stratégiával a következő tétel mondja ki.

3.1.4. Tétel. *Ezzel a stratégiával legalább $\frac{1}{e}$ valószínűséggel választunk ki egy maximális elemet bármely részbenrendezett halmaz esetén.*

Bizonyítás.

A bizonyítás egyszerűsítése érdekében nevezzünk egy x elemet *jelölt*nek, ha az a P_x mohó maximuma.

Ahhoz, hogy kiválasszunk egy x-et, három dolognak kell teljesülnie:

(1) az x egy $t > \frac{1}{e}$ időben érkezik,

(2) az x jelölt,

(3) az $\frac{1}{e}$ és t időpontok között nincs jelölt elem.

A továbbiakban úgy tekintünk P-re, mint egy n-elemű, rögzített részbenrendezett halmazra.

3.1.5. Lemma. *Legyenek $a_1, \ldots, a_n$ a P megjelenési sorrend szerinti elemei. Legyen A_k az az esemény, miszerint a_k jelölt. Ekkor $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{k}$, és $A_1, \ldots, A_n$ független események.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy ismerjük P-t, és a végül az elemeihez rendelt súlyokat. Tegyük fel továbbá, hogy ismerjük az $a_{k+1}, \ldots, a_n$ elemeket, így azt is, hogy közülük melyek jelöltek. Ezután tekintsük az $\{a_1, \ldots, a_k\}$ által indukált részbenredezés mohó maximumát. Annak a valószínűsége, hogy ez az utolsóként érkező, és így az a_k-ként címkézett elem, világos, hogy $\frac{1}{k}$. Ez azt mutatja, hogy $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{k}$.

A függetlenség bizonyításához be kell látnunk, hogy

$$\mathbb{P}(A_{i_1})\ldots\mathbb{P}(A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}\ldots A_{i_k}) \quad \forall\, 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n, k \ge 2.$$

Először vizsgáljuk a $k = 2$ esetet:

$$\mathbb{P}(A_{i_1}A_{i_2}) = \frac{1 \cdot \binom{i_2-1}{i_1} \cdot 1 \cdot (i_1-1)! \cdot (i_2-i_1-1)!}{i_2!},$$

mivel, ha rögzítettnek tekintjük az $a_{i_2+1}, \ldots, a_n$ elemeket, akkor az összes eset száma $i_2!$. A kedvező esetek száma pedig a számlálóval egyezik meg, mivel az i_2-edik helyre kell kerülnie az $\{a_1, \cdots, a_{i_2}\}$ által indukált részbenredezés mohó maximumának, ezután a fennmaradó (i_2-1) elem közül kiválasztjuk azokat az elemeket, amelyek az első i_1 helyet foglalják el. Az általuk indukált részbenrendezés mohó maximumának egyértelműen az a_{i_1}-nek kell lennie, a többi elem sorrendje pedig tetszőleges lehet, valamint a további $(i_2 - i_1 - 1)$ elem sorrendje szintén tetszés szerinti. Tehát

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_{i_1}A_{i_2}) &= \frac{\binom{i_2-1}{i_1} \cdot (i_1-1)! \cdot (i_2-i_1-1)!}{i_2!} = \\
&= \frac{\frac{(i_2-1)!}{(i_1)!\cdot(i_2-i_1-1)!} \cdot (i_1-1)! \cdot (i_2-i_1-1)!}{i_2!} = \\
&= \frac{1}{i_1 \cdot i_2} = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}).
\end{aligned}$$

Hasonló gondolatmenet alapján láthatjuk be az egyenlőséget tetszőleges $k \ge 2$ esetén:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_{i_1}\ldots A_{i_k}) &= \frac{\prod_{j=2}^{k}\binom{i_j-1}{i_{j-1}} \cdot \prod_{j=2}^{k}(i_j-i_{j-1}-1)! \cdot (i_1-1)!}{i_k!} = \\
&= \frac{\prod_{j=2}^{k}\left(\frac{(i_j-1)!}{(i_{j-1})!\cdot(i_j-i_{j-1}-1)!} \cdot (i_j-i_{j-1}-1)!\right) \cdot (i_1-1)!}{i_k!} = \\
&= \frac{\prod_{j=1}^{k}(i_j-1)!}{\prod_{j=1}^{k} i_j!} = \prod_{j=1}^{k}\frac{1}{i_j} = \mathbb{P}(A_{i_1})\ldots\mathbb{P}(A_{i_k})
\end{aligned}$$

□

3.1.6. Lemma. *Legyen $0 \le t \le 1$. Tekintsük a t idő előtt érkező elemek halmazát, és tegyük fel, hogy ez a halmaz nemüres. Ekkor a t idő előtti utolsó jelölt elem érkezési ideje véletlenszerű a $[0, t]$ intervallumon.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy k elem érkezik a t idő előtt. A 3.1.5. Lemmából következik, hogy az $A_1, \ldots, A_k$ indikátorainak együttes eloszlása ugyanaz, függetlenül az $\{a_1, \ldots, a_k\}$ által indukált részbenrendezés struktúrájától. Következésképpen elegendő az állítást csupán a k elem feletti lineáris rendezésre belátni. Könnyen látható, hogy ezen speciális rendezés esetén az utolsó jelölt elem az egyedüli maximális elem, amelynek érkezési ideje véletlenszerű a $[0,t]$ intervallumon. $\square$

Tegyük fel, hogy P rögzített, és hogy a P elemeihez rendelt súlyokat egymástól függetlenül és véletlenszerűen választjuk a $[0,1]$ intervallumból. Ekkor vezessük be a következő jelöléseket:
$\mu(x) := \mathbb{P}(\ x \text{ a } P \text{ mohó maximuma}\ )$
$\mu_t(x) := \mathbb{P}(\ x \text{ a } P \text{ mohó maximuma} \mid x \text{ súlya legfeljebb } t\ ), 0 \leq t \leq 1$

3.1.7. Lemma. *Tegyük fel, hogy x maximális P-ben. Ekkor feltéve, hogy x a t időpillanatban érkezik,*

$$\mathbb{P}(\ x \text{ jelölt}\ ) = \mu_t(x).$$

Bizonyítás. A bizonyítás során $\mu_t(x)$-ből indulunk ki. Rendeljünk súlyokat P elemeihez, és tegyük fel, hogy x súlya legfeljebb t. Mivel a t-nél nagyobb (és egyúttal az x súlyánál is nagyobb) súlyú elemek nem befolyásolják, hogy a mohó lánc végső eleme x lesz-e, vagy sem, ezért $\mu_t(x)$ egyenlő annak a valószínűségével, hogy x mohó maximum egy olyan részbenrendezésben, amelyet úgy kapunk meg, hogy először x kivételével minden elemet egymástól függetlenül $1-t$ valószínűséggel eldobunk, és a bennmaradóak súlyát véletlenszerűen a $[0,t]$ intervallumról választjuk.
Két észrevétellel teljes lesz a bizonyítás. Először is, ha minden súlyt a $[0,t]$ intervallumból választunk, akkor akár a $[0,1]$ intervallumból is választhatjuk őket. Másodszor pedig, az, hogy x-en kívül minden elemet egymástól függetlenül $1-t$ valószínűséggel eldobunk, pontosan az, ahogyan P_x-et is megkapjuk azzal a feltétellel, hogy x érkezési ideje t. Így megkaptuk a $\mathbb{P}(\ x \text{ jelölt}\ )$ valószínűséget. $\square$

3.1.8. Lemma. *Feltéve, hogy x a t időpillanatban érkezik*

$$\mathbb{P}(\ x \text{ jelölt}\ ) \geq \mu(x).$$

Bizonyítás. A 3.1.7. Lemma következtében elegendő azt észrevenni, hogy egy elem súlyának csökkentése csakis növelheti a valószínűségét, hogy egy mohó lánc végső eleme legyen. Így $\mu_t(x) \geq \mu(x)$, amiből pedig következik a bizonyítandó állítás. $\square$

Ahhoz, hogy befejezzük a tétel bizonyítását, csak egy egyszerű számolás van hátra. Legyen x maximális P-ben, és tegyük fel, hogy x érkezési ideje $t > \frac{1}{e}$. A célunk, hogy t és $\mu(x)$ függvényében megbecsüljük x elfogadásának valószínűségét.

A 3.1.8. Lemma következtében annak a valószínűsége, hogy x jelölt, legalább $\mu(x)$. Tekintsük P_x-et. Két eset lehetséges, mégpedig, hogy $P_x - \{x\}$ üres, ami azt jelenti, hogy x volt az első jelölt elem, vagy pedig nemüres, és ebben az esetben az utolsó jelölt elem érkezési ideje véletlenszerű a $[0,t]$ intervallumon. Mindkét esetben annak a valószínűsége, hogy az $1/e$ és t időpontok között nem volt jelölt elem, legalább $1/et$. Így a teljes valószínűsége annak, hogy x-et elfogadtuk, legalább

$$\mu(x)\cdot\int_{1/e}^{1}\frac{1}{et}\,\mathrm{d}t=\mu(x)\cdot\frac{1}{e}\cdot\int_{1/e}^{1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\mu(x)\cdot\frac{1}{e}\cdot\left(\ln 1-\ln\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\cdot\mu(x)$$

Mivel $\sum_{x\in\max(P)}\mu(x)=1$, ezért ezt összegezve P minden maximális elemére, azt kapjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy közülük valamelyiket fogadjuk el, legalább $1/e$. $\square$

3.2. A maximális elemek száma ismert

Ebben a szakaszban olyan részbenrendezett halmazokkal foglalkozunk, melyekről tudjuk, hogy a maximális elemeik száma k. Tekintsünk a $P=\{x_1,\dots,x_n\}$ halmaz esetén egy $(P,\prec)$ részbenrendezést. Jelölje $\max_\prec(P)$ ennek maximális elemeit, tehát

$$\max{}_\prec(P)=\{x\in P:\nexists y,\ \text{melyre } x\prec y\}.$$

Megjegyezzük, hogy a $\prec$ jelölést az alsó indexben elhagyjuk, ha az egyértelmű a kontextusból. Legyen $\Omega=S_n\times[0,1]$, ahol S_n jelöli a permutációcsoportot $[n]=\{1,\dots,n\}$-en. Továbbá legyen $\mathbb{P}=\mu\times\lambda$, ahol μ az a valószínűségi mérték, melyre

$$\mu(\{\rho\})=\frac{1}{n!}$$

minden $\rho\in S_n$ esetén, valamint λ a Lebesgue-mérték. Más szóval véletlenszerűen választunk egy $(\rho,\delta)\in\Omega$ párt, mely esetén a ρ-koordináta meghatározza azt a sorrendet, amely szerint P elemei megjelennek, a δ-koordináta segítségével pedig bevezetünk egy, a sorrendtől független véletlenszerű tényezőt, amely meghatározza, hogy hány jelentkezőt utasítunk el a folyamat elején. Jelölje $P^{[n]}$ a P permutációinak halmazát, és definiáljunk egy $\pi:\Omega\to P^{[n]}$ valószínűségi változót a következőképpen:

$$\pi(\rho,\delta)(i)=x_{\rho(i)}.$$

Így $\pi(t)$ jelöli a részbenrendezés t-edikként észlelt elemét. A korábbi fejezetekhez hasonlóan legyen $(P_t)_{t\in[n]}$ valószínűségi változók egy családja, ahol P_t reprezentálja a t időpontban látott részbenrendezést. Jelöljön p egy valós számot, melyre $0<p<1$ teljesül. Az optimális választás vizsgálatához a következő algoritmust használjuk:

3.2.1. Algoritmus. Legyen adott egy n elemű részbenrendezett halmaz, melynek k maximális eleme van, és legyen $X(p)\sim\mathrm{Bin}(n,p)$. Utasítsuk el az első $X(p)$ elemet, és fogadjuk el az első olyan későbbi elemet, mely esetén teljesül, hogy az addig látott elemek (beleértve a legutoljára észlelt elemet is) által indukált részbenrendezésben legfeljebb k maximális elem van, és a legutoljára észlelt elem egyike ezeknek.

Ezen algoritmus alapján megadhatjuk a következőekben definiált, $\tau_k(p)$ megállási időt. Vezessük be az $X(p) : \Omega \to \{0, \ldots, n\}$ valószínűségi változót:

$$X(p)(\rho, \delta) = \min \left\{ x \geq 0 : \sum_{i=0}^{x} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \geq \delta \right\}.$$

Így

$$\mathbb{P}(X(p) = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x},$$

és $X(p) = X(p)(\rho, \delta)$ független ρ-tól. Ekkor definiáljuk a $\tau_k(p)$ megállási időt a következőképpen:

$$\tau_k(p) = \begin{cases} \min \big\{ t > X(p) : |\max(P_t)| \leq k, \text{és } \pi(t) \in \max(P_t) \big\}, & \text{ha ez létezik} \\ n & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Végezetül jelölje az

$$S(p) = \{\pi(t) : t \leq X(p)\}$$

valószínűségi változó azon $X(p)$ elem halmazát, amelyet a folyamat elején gondolkodás nélkül elutasítunk.

Fontos az $S(p)$ következő, egyszerű tulajdonsága, amely azt jelenti, hogy úgy is tekinthetünk az algoritmusra, hogy P minden elemét egymástól és a π véletlenszerű sorrendtől függetlenül p valószínűséggel elutasítjuk.

3.2.2. Lemma. *Az $\{x \in S(p)\}_{x \in P}$ események függetlenek, és $\mathbb{P}\big(x \in S(p)\big) = p$ minden $x \in P$ esetén.*

Bizonyítás. A π és $X(p)$ valószínűségi változókat a kívánt eloszlásoknak megfelelően megadhatjuk a következőképpen. Válasszuk be a P minden elemét egymástól függetlenül p valószínűséggel $S(p)$-be. Legyen π az a sorrend, melyet úgy kapunk, hogy az $S(p)$ elemeinek véletlenszerű sorrendjét a $P \backslash S(p)$ halmaz elemeinek véletlenszerű sorrendje követi. Ekkor π a P halmaz elemeinek egy véletlenszerű sorrendjét adja. Ugyanis tekintsük az elemeknek egy π^* rögzített sorrendjét, és legyen A az az esemény, miszerint π^* kialakul. Továbbá legyen $0 \leq i \leq n$ esetén B_i az az esemény, hogy i elemet választok $S(p)$-be. Ekkor $B_0, B_1, \ldots, B_n$ teljes eseményrendszer. Egyszerűen adódik, hogy

$$\mathbb{P}(B_i) = \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}.$$

Ugyanakkor

$$\mathbb{P}(A|B_i) = \frac{1}{\binom{n}{i} \cdot i! \cdot (n-i)!} = \frac{1}{n!},$$

ugyanis az összes eset számát úgy kapjuk, hogy az összesen n elem közül i-t kiválasztok az első i helyre, majd veszem a lehetséges sorrendeket, amely a kiválasztott i elem esetén $i!$, míg a nem választott $(n-i)$ elem esetén $(n-i)!$. A kedvező esetek száma pedig 1, mivel a π^* sorrend akkor és csak akkor alakulhat ki, ha a kiválasztott i elem a π^* első i eleme, és a kiválasztott i elem sorrendje π^* első i elemének sorrendje, míg a nem választott $(n-i)$ elem sorrendje π^* utolsó $(n-i)$ elemének sorrendje szerint alakul. Így

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n!} \cdot \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} =$$
$$= \frac{1}{n!} \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} = \frac{1}{n!} \cdot 1 = \frac{1}{n!}.$$

A konstrukció miatt $X(p) = |S(p)|$ egy π-től független, binomiális eloszlású valószínűségi változó. Az $\{x \in S(p)\}_{x \in P}$ események csak π-től és $X(p)$-től függenek, és ugyancsak a konstrukció miatt a lemma kimondásánál megfogalmazott állítások fennállnak. □

Ezen lemma megkönnyíti a siker valószínűségére adandó formula megfogalmazását, a következő azonosság pedig ennek egyszerűsítésében lesz segítségünkre.

3.2.3. Lemma. *Minden $k \geq 1$ egészre*

$$\sum_{s=0}^{\infty} \binom{k+s-1}{k-1} (1-p)^s = \frac{1}{p^k}.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van egy érménk, amit ha feldobunk, p valószínűséggel kapunk fejet, valamint $(1-p)$ valószínűséggel kapunk írást, és tegyük fel, hogy az érmét végtelen sokszor dobjuk fel. Ekkor 1 valószínűséggel látunk legalább k fejet, és a k-adik fej a $(k+s)$-edik dobás eredménye valamely $s \geq 0$ esetén. Ebben az esetben tudjuk, hogy az első $(k+s-1)$ dobás közül $(k-1)$ lett fej, a többi s pedig írás, így összegezve a valószínűsségeket, miszerint a k-adik fej a $(k+s)$-edik dobás eredménye,

$$\sum_{s=0}^{\infty} \binom{k+s-1}{k-1} p^k (1-p)^s = 1$$

adódik, amiből következik a lemma. □

Tudjuk, hogy $0 < p < 1$ valós szám esetén a 3.2.1. Algoritmus a $\pi\big(\tau_k(p)\big)$-edik elemet választja. Ekkor a siker valószínűségére ad alsó becslést a következő tétel.

3.2.4. Tétel. *Legyen $(P, \prec)$ egy k diszjunkt láncból álló részbenrendezés. Ekkor*

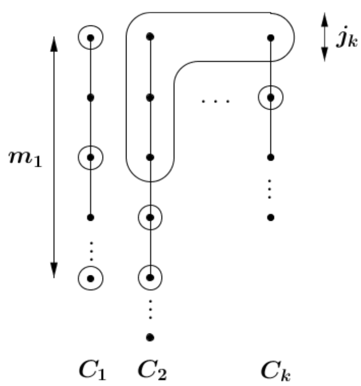
$$\mathbb{P}\Big(\pi\big(\tau_k(p)\big) \in \max(P)\Big) > \begin{cases} p\ln\left(\dfrac{1}{p}\right), & \text{ha } k = 1, \\ \dfrac{k}{k-1}p(1-p^{k-1}), & \text{ha } k > 1. \end{cases}$$

Bizonyítás. Először megjegyezzük, hogy $S(p) = P$ esetén a $\pi\big(\tau_k(p)\big) = \pi(n) \in \max(P)$ esemény valószínűsége $\frac{k}{n}p^n$. Ez 0-hoz tart, ha $n \to \infty$, a tételben szereplő korlátokat pedig úgy kapjuk, hogy csak azokat az eseteket vizsgáljuk, amikor $X(p) < n$, és így $\pi\big(\tau_k(p)\big) \notin S(p)$.

Jelölje a k láncot $C_1, \ldots, C_k$, a hosszukat pedig $m_1, \ldots, m_k$. Legyen $A_{j_1,\ldots,j_k}$ az az esemény, miszerint bármely $1 \le i \le k$ esetén C_i-nek j_i olyan eleme van, amely jobb a C_i-beli $S(p)$-ben lévő legjobb elemnél (3.2. ábra), vagyis

$$A_{j_1,\ldots,j_k} = \bigcap_{i=1}^{k} \left\{ \left| \left\{ x \in C_i \backslash S(p) : \nexists y \in C_i \cap S(p), \text{ melyre } x \prec y \right\} \right| = j_i \right\}.$$

Ez $j_i < m_i$ esetén azt jelenti, hogy a felső j_i elem nincs benne $S(p)$-ben, de a (j_i+1)-edik már benne van, valamint $j_i = m_i$ esetén azt jelenti, hogy $S(p)$-ben nincsenek elemek az i-edik láncból. Vegyük észre, hogy ha $A_{j_1,\ldots,j_k}$ bekövetkezik, akkor $\pi\big(\tau_k(p)\big)$ a láncaik tetején lévő, nem $S(p)$-beli $j_1 + \ldots + j_k$ elem közül az első észlelt elem lesz.



3.2. ábra. Egy példa k diszjunkt láncra az $S(p)$ elemeinek bekarikázásával. Ez az $A_{0,3,\ldots,1}$ esetet illusztrálja. A nagy zárt görbe jelöli azon $j_1 + \cdots + j_k$ darab elemet, amelyek kiválasztásra kerülhetnek.

Az $\left\{A_{j_1,\ldots,j_k} : 0 \le j_1 \le m_1, \ldots, 0 \le j_k \le m_k\right\}$ események a teljes eseménytér egy partícióját adják, így a $\mathbb{P}\Big(\pi\big(\tau_k(p)\big) \in \max(P)\Big)$ valószínűséget $Q_k(p)$-vel jelölve az eddigiek alapján adódik, hogy

$$Q_k(p) = \sum_{0\le j_1\le m_1,\ldots,0\le j_k\le m_k} \mathbb{P}\Big(\pi\big(\tau_k(p)\big) \in \max(P)\Big| A_{j_1,\ldots,j_k}\Big)\mathbb{P}(A_{j_1,\ldots,j_k}) >$$

$$> \sum_{\substack{0\le j_1\le m_1,\ldots,0\le j_k\le m_k\\ (j_1,\ldots,j_k)\neq(0,\ldots,0)}} \frac{|\{i : j_i > 0\}|}{j_1 + \ldots + j_k}(1-p)^{j_1+\ldots+j_k} p^{|\{i:j_i<m_i\}|}. \tag{3.1}$$

A bizonyítás folytatása előtt belátjuk a következő állítást.

3.2.5. Állítás. *Legyen $k \ge 1$ egész szám, legyen minden $1 \le i \le k$ esetén m_i pozitív egész, és legyen minden $1 \le i \le k$ esetén j_i egész, melyre teljesül, hogy $0 \le j_i \le m_i$. Továbbá legyen $\mathcal{H} = \{i : j_i = m_i\}$. Ekkor*

$$\sum_{l_i\ge m_i,\ i\in\mathcal{H}} (1-p)^{\sum_{i\in\mathcal{H}}(l_i-m_i)} = (1 + (1-p) + (1-p)^2 + \ldots)^{|\mathcal{H}|}.$$

Bizonyítás. Legyen $s = |\mathcal{H}|$, és legyenek $i_1, \ldots, i_s$ rögzített értékek, melyekre $1 \le r \le s$ esetén $j_{i_r} = m_{i_r}$. Ekkor az azonosság bal oldalát átalakíthatjuk a következőképpen:

$$\sum_{l_i\ge m_i,\ i\in\mathcal{H}} (1-p)^{\sum_{i\in\mathcal{H}}(l_i-m_i)} = \sum_{l_i\ge 0,\ i\in\mathcal{H}} (1-p)^{\sum_{i\in\mathcal{H}} l_i} =$$

$$= \sum_{l_{i_1}\ge 0,\ldots,l_{i_s}\ge 0} (1-p)^{l_{i_1}}(1-p)^{l_{i_2}}\ldots(1-p)^{l_{i_s}} =$$

$$= \sum_{l_{i_1}\ge 0,\ldots,l_{i_{s-1}}\ge 0} \quad \sum_{l_{i_s}\ge 0}(1-p)^{l_{i_1}}\ldots(1-p)^{l_{i_{s-1}}}(1-p)^{l_{i_s}} =$$

$$= \sum_{l_{i_1}\ge 0,\ldots,l_{i_{s-1}}\ge 0} (1-p)^{l_{i_1}}\ldots(1-p)^{l_{i_{s-1}}} \sum_{l_{i_s}\ge 0}(1-p)^{l_{i_s}} =$$

$$= \sum_{l_{i_1}\ge 0,\ldots,l_{i_{s-1}}\ge 0} (1-p)^{l_{i_1}}\ldots(1-p)^{l_{i_{s-1}}}(1 + (1-p) + (1-p)^2 + \ldots) = \ldots =$$

$$= (1 + (1-p) + (1-p)^2 + \ldots)^s.$$

□

A további átalakításokhoz szükségünk van a következő állításra.

3.2.6. Állítás. *Legyen $k \ge 1$ egész szám, és legyen minden $1 \le i \le k$ esetén m_i pozitív egész. Ekkor*

$$\sum_{\substack{0\le j_1\le m_1,\ldots,0\le j_k\le m_k\\ (j_1,\ldots,j_k)\neq(0,\ldots,0)}} \frac{|\{i : j_i > 0\}|}{j_1 + \ldots + j_k}(1-p)^{j_1+\ldots+j_k}\times$$

$$\times \Big(1 + (1-p) + (1-p)^2 + \ldots\Big)^{|\{i:j_i=m_i\}|} =$$

$$= \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_k\ge 0\\ (j_1\ldots,j_k)\neq(0,\ldots,0)}} \frac{|\{i : j_i > 0\}|}{\min\{j_1, m_1\} + \ldots + \min\{j_k, m_k\}}(1-p)^{j_1+\ldots+j_k}.$$

Bizonyítás. A bizonyítás során azt látjuk be, hogy a felső szumma minden egyes tagja megfelel az alsó szumma egy részösszegének. Legyen $j_1, \ldots, j_k$ rögzített, és legyen $\mathcal{H} = \{i : j_i = m_i\}$. Legyen továbbá minden $i \notin \mathcal{H}$, $1 \leq i \leq k$ esetén $l_i = j_i$ rögzített. Ekkor felhasználva az előző állítást, és azt, hogy $i \notin \mathcal{H}$ esetén $j_i = \min\{j_i, m_i\} = \min\{l_i, m_i\}$, valamint azt, hogy $i \notin \mathcal{H}$ esetén, ha $l_i \geq m_i$, akkor $j_i = m_i = \min\{l_i, m_i\}$, következik, hogy

$$\frac{|\{i : j_i > 0\}|}{j_1 + \ldots + j_k}(1-p)^{j_1+\ldots+j_k}(1 + (1-p) + (1-p)^2 + \ldots)^{|\{i:j_i=m_i\}|} =$$
$$= \frac{|\{i : j_i > 0\}|}{j_1 + \ldots + j_k}(1-p)^{j_1+\ldots+j_k} \sum_{l_i \geq m_i,\ i \in \mathcal{H}} (1-p)^{\sum_{i\in\mathcal{H}}(l_i - m_i)} =$$
$$= \sum_{l_i \geq m_i,\ i \in \mathcal{H}} \frac{|\{i : j_i > 0\}|}{j_1 + \ldots + j_k}(1-p)^{j_1+\ldots+j_k}(1-p)^{\sum_{i\in\mathcal{H}}(l_i - m_i)} =$$

$$= \sum_{\substack{l_i \geq m_i \\ i \in \mathcal{H}}} \frac{|\{i : l_i > 0\}|}{\sum_{i\notin\mathcal{H}} \min\{l_i, m_i\} + \sum_{i\in\mathcal{H}} \min\{l_i, m_i\}}(1-p)^{\sum_{i\notin\mathcal{H}} l_i + \sum_{i\in\mathcal{H}} m_i + \sum_{i\in\mathcal{H}}(l_i - m_i)} =$$
$$= \sum_{l_i \geq m_i,\ i \in \mathcal{H}} \frac{|\{i : l_i > 0\}|}{\min\{l_1, m_1\} + \ldots + \min\{l_k, m_k\}}(1-p)^{l_1+\ldots+l_k},$$

ebből pedig következik az állítás. □

Felhasználva a 3.2.6. Állítást, valamint azt, hogy $1 + (1-p) + (1-p)^2 + \ldots = \frac{1}{p}$, a következő adódik:

$$Q_k(p) > \sum_{\substack{0\leq j_1\leq m_1,\ldots,0\leq j_k\leq m_k \\ (j_1,\ldots,j_k)\neq(0,\ldots,0)}} \frac{|\{i : j_i > 0\}|}{j_1 + \ldots + j_k}(1-p)^{j_1+\ldots+j_k} p^k \times$$
$$\times (1 + (1-p) + (1-p)^2 + \ldots)^{|\{i:j_i=m_i\}|} =$$

$$= \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_k\geq 0 \\ (j_1\ldots,j_k)\neq(0,\ldots,0)}} \frac{|\{i : j_i > 0\}|}{\min\{j_1, m_1\} + \ldots + \min\{j_k, m_k\}}(1-p)^{j_1+\ldots+j_k} p^k >$$
$$> \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_k\geq 0 \\ (j_1\ldots,j_k)\neq(0,\ldots,0)}} \frac{|\{i : j_i > 0\}|}{j_1 + \ldots + j_k}(1-p)^{j_1+\ldots+j_k} p^k,$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség azért igaz, mert minden $1 \leq i \leq k$ esetén $\min\{j_i, m_i\} \leq j_i$, és a nevező növelésével a tört értéke csökken, valamint a szummában biztosan van olyan tag, amelynél valamely j_i-re $\min\{j_i, m_i\} < j_i$ teljesül.

Az utolsó kifejezést átírva úgy, hogy $r = \big|\{i : j_i > 0\}\big|$ és $s = j_1 + \ldots + j_k$ felett szummázunk, a következőt kapjuk:

$$Q_k(p) > \sum_{r=1}^{k} \sum_{s=r}^{\infty} \Big|\Big\{(j_1, \ldots, j_k) : \big|\{i : j_i > 0\}\big| = r \text{ és } j_1 + \ldots + j_k = s\Big\}\Big| \cdot \frac{r}{s}(1-p)^s p^k.$$

Ahhoz, hogy egyszerűbb alakra hozzuk a

$$\left|\left\{(j_1,\dots,j_k) : \left|\{i : j_i > 0\}\right| = r \text{ és } j_1+\ldots+j_k = s\right\}\right|$$

kifejezést, először vegyük észre, hogy $\binom{k}{r}$-féleképpen választhatjuk ki az i indexeket, melyekre $j_i > 0$, és ezután $\binom{s-1}{r-1}$-féleképpen írhatjuk fel az s-et r pozitív egész szám összegeként. Így

$$Q_k(p) > \sum_{r=1}^{k}\sum_{s=r}^{\infty}\binom{k}{r}\binom{s-1}{r-1}\frac{r}{s}(1-p)^s p^k = kp^k\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=r}^{\infty}\binom{k-1}{r-1}\binom{s-1}{r-1}\frac{1}{s}(1-p)^s.$$

A szummák felcserélésével, és annak felhasználásával, hogy $\binom{k-1}{r-1} = \binom{k-1}{k-1-(r-1)} = \binom{k-1}{k-r}$ az adódik, hogy

$$Q_k(p) > kp^k\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s}(1-p)^s\sum_{r=1}^{\min\{k,s\}}\binom{s-1}{r-1}\binom{k-1}{k-r}.$$

A második szumma egyszerűbb alakra hozásához felhasználjuk a Vandermonde-azonosságot, miszerint $m,n,r\in\mathbb{N}$ esetén

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k},$$

amiből $m = s-1$, $n = k-1$ és $r = k-1$ választással az alábbi következik:

$$\binom{s-1+k-1}{k-1} = \sum_{r=0}^{k-1}\binom{s-1}{r}\binom{k-1}{k-1-r} = \sum_{r=1}^{k}\binom{s-1}{r-1}\binom{k-1}{k-r},$$

így

$$\sum_{r=1}^{k}\binom{s-1}{r-1}\binom{k-1}{k-r} = \sum_{r=1}^{\min\{k,s\}}\binom{s-1}{r-1}\binom{k-1}{k-r} = \binom{k+s-2}{k-1}.$$

Ebből következik, hogy

$$Q_k(p) > kp^k\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s}(1-p)^s\binom{k+s-2}{k-1}.$$

Vezessük be a

$$V_k(p) = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s}(1-p)^s\binom{k+s-2}{k-1}$$

jelölést, és tekintsük $V_k(p)$ deriváltját:

$$\frac{\mathrm{d}V_k(p)}{\mathrm{d}p} = -\sum_{s=1}^{\infty}(1-p)^{s-1}\binom{k+s-2}{k-1}.$$

Felhasználva a 3.2.3. Lemmát

$$\frac{\mathrm{d}V_k(p)}{\mathrm{d}p} = -\frac{1}{p^k}$$

adódik, amiből integrálással

$$V_k(p) = \begin{cases} -\ln p + c_1, & \text{ha } k = 1, \\ \dfrac{1}{(k-1)p^{k-1}} + c_k, & \text{ha } k > 1 \end{cases}$$

következik, ahol a c_k értékek konstansok. Mivel a fenti kifejezések a $(0,1]$ intervallumon p-ben folytonosak, így létezik a határértékük, amint $p \to 1$, és így meg tudjuk határozni a c_k értékeket. Ugyanis $k = 1$ esetén

$$\lim_{p\to 1} V_1(p) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s}(1-1)^s \binom{k+s-2}{k-1} = 0 = \lim_{p\to 1}(-\ln p + c_1) = -\ln 1 + c_1,$$

továbbá $k > 1$ esetén

$$\lim_{p\to 1} V_k(p) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s}(1-1)^s \binom{k+s-2}{k-1} = 0 = \lim_{p\to 1}\left(\frac{1}{(k-1)p^{k-1}} + c_k\right) = \frac{1}{k-1} + c_k,$$

amiből $c_1 = 0$ és $c_k = -\frac{1}{k-1}$ következik. Így

$$V_k(p) = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{1}{p}\right), & \text{ha } k = 1, \\ \dfrac{1}{(k-1)}\left(\dfrac{1}{p^{k-1}} - 1\right), & \text{ha } k > 1 \end{cases}$$

adódik. Visszahelyettesítve a kapott kifejezéseket azt kapjuk, hogy

$$Q_k(p) > \begin{cases} p\ln\left(\dfrac{1}{p}\right), & \text{ha } k = 1, \\ \dfrac{k}{(k-1)}p\left(1 - p^{k-1}\right), & \text{ha } k > 1, \end{cases}$$

amivel bebizonyítottuk a tételt. □

Mondjuk azt, hogy egy részbenrendezett halmaz szélessége k, ha legnagyobb antiláncának mérete k. Ahhoz, hogy kiterjesszük a fenti eredményt olyan részbenrendezésekre, melyek szélessége megegyezik maximális elemeinek számával, felhasználjuk a Dilworth-tételt [8], melyet bizonyítás nélkül közlünk:

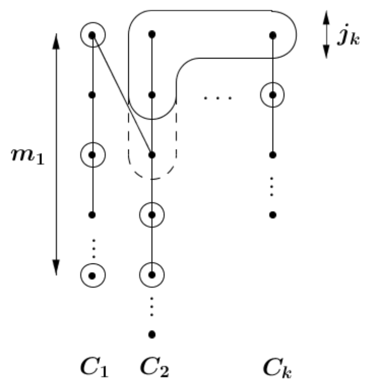
3.2.7. Tétel. *Egy k szélességű részbenrendezett halmaz lefedhető k lánccal.* □

A következő tételben megmutatjuk, hogy a titkárnő-probléma olyan részbenrendezett halmaz esetén, ahol a maximális elemek száma egyenlő a szélességgel nem nehezebb, mint egy olyan részbenrendezés esetén, amely diszjunkt láncokból áll.

3.2.8. Tétel. *Legyen $(P, \prec)$ egy n elemű részbenrendezés. Tegyük fel, hogy $(P, \prec)$ maximális elemeinek száma k, és hogy egyik antiláncának mérete sem nagyobb k-nál. Ekkor*

$$\mathbb{P}\Big(\pi\big(\tau_k(p)\big) \in \max(P)\Big) > \begin{cases} p\ln\left(\dfrac{1}{p}\right), & \text{ha } k = 1, \\ \dfrac{k}{(k-1)}p\left(1 - p^{k-1}\right), & \text{ha } k > 1. \end{cases}$$

Bizonyítás. A Dilworth-tétel következtében P-re tekinthetünk k láncként, melyek között van valamennyi összehasonlítás. Világos, hogy a $\max(P)$-beli k elem áll a k lánc tetején. A bizonyítás innentől kezdve a 3.2.4. Tétel bizonyításához hasonlóan folytatódik azzal az eltéréssel, hogy a (3.1) kifejezésben a szumma minden egyes tagjánál a nevező legfeljebb $j_1 + \cdots + j_k$ (3.3. ábra), a (3.1) kifejezés ugyanakkor továbbra is alsó korlát. A bizonyítás további része ugyanúgy zajlik, mint a 3.2.4. Tétel bizonyítása, így valóban igaz a tétel. □



3.3. ábra. Egy példa k diszjunkt láncra egy extra összehasonlítás esetén, és az $S(p)$ elemeinek bekarikázásával. A nagy zárt görbe jelöli azon elemeket, amelyek kiválasztásra kerülhetnek. A pontozott részen belüli elemet is választhatnánk, ha nem lenne az extra összehasonlítás.

A következőekben meghatározzuk azokat az értékeket, amelyek maximalizálják a 3.2.8. Tételben szereplő függvényeket. Elsőként az $f(p) := p\ln\left(\frac{1}{p}\right)$ függvény maximumát keressük:

$$f'(p) = \left(p\ln\left(\frac{1}{p}\right)\right)' = 1 \cdot \ln\left(\frac{1}{p}\right) + p \cdot \frac{1}{\frac{1}{p}} \cdot (-1) \cdot p^{-2} = \ln\left(\frac{1}{p}\right) - 1$$

$$f''(p) = \left(\ln\left(\frac{1}{p}\right) - 1\right)' = \frac{1}{\frac{1}{p}} \cdot (-1) \cdot p^{-2} - 0 = -\frac{1}{p}.$$

Ott lehet maximum, ahol az első derivált 0, vagyis $f'(p) = 0$, így

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1}{p}\right) - 1 &= 0\\ \ln\left(\frac{1}{p}\right) &= \ln e\\ \frac{1}{p} &= e\\ p &= \frac{1}{e} = e^{-1},\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy az ln függvény szigorú monoton növekvő. Mivel $f''(e^{-1}) = -e^{-1} < 0$, így $p = \frac{1}{e}$ valóban maximum. Hasonlóan járunk el, amikor a $g(p) := \frac{k}{k-1}p(1-p^{k-1})$ függvény maximumát keressük:

$$\begin{aligned}g'(p) &= \frac{k}{k-1}\left(p - p^k\right)' = \frac{k}{k-1}\left(1 - kp^{k-1}\right)\\ g''(p) &= \frac{k}{k-1}\left(1 - kp^{k-1}\right)' = \frac{k}{k-1}\left(0 - k(k-1)p^{k-2}\right) = -k^2p^{k-2}.\end{aligned}$$

Azt a p értéket keressük, amelyre $g'(p) = 0$, vagyis

$$\begin{aligned}\frac{k}{k-1}\left(1 - kp^{k-1}\right) &= 0\\ 1 - kp^{k-1} &= 0\\ 1 &= kp^{k-1}\\ p &= \sqrt[k-1]{\frac{1}{k}} = k^{-\frac{1}{k-1}}.\end{aligned}$$

Mivel $g''(k^{-\frac{1}{k-1}}) = -k^2\left(k^{-\frac{1}{k-1}}\right)^{k-2} = -k^{\frac{2k-2-k+2}{k-1}} = -k^{\frac{k}{k-1}} < 0$, így $p = \sqrt[k-1]{\frac{1}{k}}$ valóban maximum. Tehát az értékek, amelyek maximalizálják a 3.2.8. Tételben szereplő függvényeket:

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{1}{e}, & \text{ha } k = 1,\\ \sqrt[k-1]{\dfrac{1}{k}}, & \text{ha } k > 1.\end{cases}$$

Vegyük észre, hogy $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\ln e = \frac{1}{e}$, továbbá $g\left(k^{-\frac{1}{k-1}}\right) = \frac{k}{k-1}\,k^{-\frac{1}{k-1}}\left(1 - k^{-1}\right) = \frac{k}{k-1}\,k^{-\frac{1}{k-1}}\,\frac{k-1}{k} = k^{-\frac{1}{k-1}}$. Így a következőt kapjuk:

3.2.9. Következmény. Legyen $(P, \prec)$ egy n elemű részbenrendezés. Tegyük fel, hogy $(P, \prec)$ maximális elemeinek száma k, és hogy egyik antiláncának mérete sem nagyobb k-nál. Ekkor

$$\mathbb{P}\Big(\pi\big(\tau_k(p_k)\big) \in \max(P)\Big) > p_k.$$

$\square$

Belátható, hogy a 3.2.9. Következményben megfogalmazott alsó korlát a lehető legjobb, azonban ennek részletes bizonyítására itt nem térünk ki, csupán a fő gondolatokat említjük meg. A 3.2.4. bizonyítása azt mutatja, hogy a $\tau_k(p_k)$ megállási idővel a siker valószínűsége k diszjunkt lánc esetén felülről tart a meghatározott alsó korláthoz, amint a láncok hossza növekszik. Így elegendően hosszú láncokra a siker valószínűsége egy optimális megállási idő esetén tetszőlegesen közel lesz a 3.2.9. Következményben szereplő alsó korláthoz, így $\tau_k(p_k)$ aszimptotikusan optimális. Továbbá, mivel a k diszjunkt láncból álló részbenrendezésre teljesülnek a 3.2.9. Következmény feltételei, a megadott alsó korlátok a lehető legjobbak.

A következő tételt bizonyítás nélkül közöljük [13].

3.2.10. Tétel. *Legyen $(P, \prec)$ egy n elemű részbenrendezés. Tegyük fel, hogy $(P, \prec)$ maximális elemeinek száma k. Ekkor*

$$\mathbb{P}\Big(\pi\big(\tau_k(p)\big) \in \max(P)\Big) > kp^k \ln\left(\frac{1}{p}\right).$$

□

Ezen tétel következményeképpen könnyedén megkaphatjuk az előző szakaszban szereplő 3.1.4. Tétel eredményét. Belátható, hogy a $kp^k \ln\left(\frac{1}{p}\right)$ függvény a $p_k = e^{-\frac{1}{k}}$ helyen veszi fel maximumát, és értéke $\frac{1}{e}$, így adódik a következő.

3.2.11. Következmény. Legyen $(P, \prec)$ egy n elemű részbenrendezés, melynek maximális elemeinek száma k. Ekkor

$$\mathbb{P}\Big(\pi\big(\tau_k(p_k)\big) \in \max(P)\Big) > \frac{1}{e}.$$

□

Tudjuk, hogy a klasszikus titkárnő-probléma esetén az $\frac{1}{e}$ alsó korlát a lehető legjobb, így ez a lehető legjobb alsó korlát azon részbenrendezések esetén, melyekre a 3.2.11. Következmény feltételei teljesülnek.

4. fejezet

Algoritmusok implementálása MATLAB-ban

A következőekben néhány korábban megfogalmazott algoritmust tesztelünk. Elsőként az 1.1. Szakaszban a Szindbád-problémánál a lineáris rendezés esetében vizsgált stratégiát tekintjük, mely során n elem esetén $\lfloor \frac{n}{e} \rfloor$-t elengedünk, és a következő olyat választjuk, amely az összes addigi között a legjobb. A linearrend.m fájlban megírt program ezen algoritmus eredményességét teszteli megadott futásszám és elemszám esetén. Így a paraméterek:

- input: **k**: futtatások száma, **n**: elemek száma.

- output: **valsz**: a siker átlagos valószínűsége.

A program továbbá kirajzolja a futása során kapott eredményeket, így némileg szemléltetve az algoritmus aszimptotikus viselkedését (4.1. ábra). Megfigyelhetjük, hogy a siker átlagos valószínűsége elég közel áll az 1.1. Szakaszban kiszámított 0,3679 értékhez (4.1. táblázat).

	100	200	300	400	500
valsz	0,3798	0,3684	0,3808	0,3636	0,3804

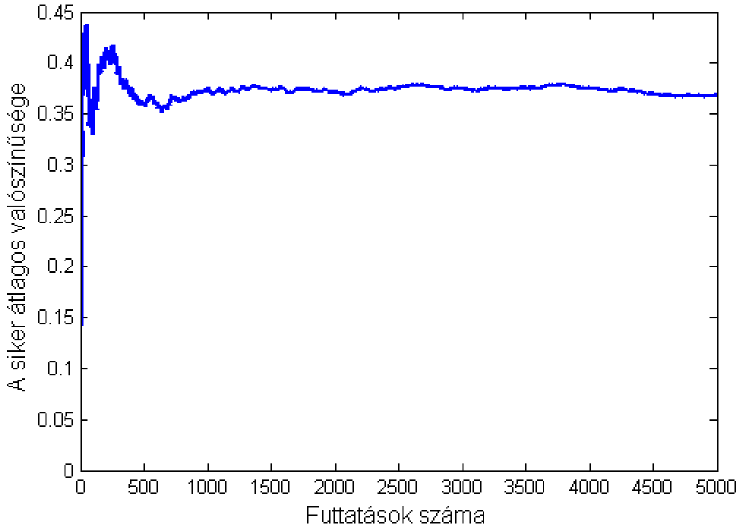
4.1. táblázat. A linearrend.m program eredményei 5000 futtatás és eltérő elemszámok mellett.

Az mikrekrend.m fájl programja a 2.1. Szakaszban tárgyalt, m ikerpár által alkotott részbenrendezés esetére alkalmazott stratégiát teszteli. Paraméterei a következőek:

- input: **l**: futtatások száma, **n**: elemek száma,

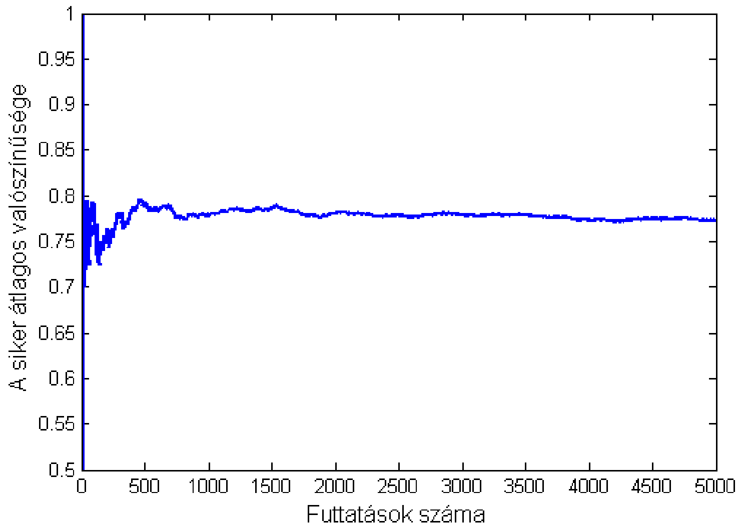
- output: **valsz**: a siker átlagos valószínűsége.

Az előző programhoz hasonlóan ez is ábrázolja a futás közben kapott eredménye-



4.1. ábra. A linearrend.m program eredménye 5000 futtatás és 200 elem esetén. A siker átlagos valószínűsége 0,3684.

ket (4.2. ábra), és észrevehető, hogy a siker átlagos valószínűsége a 2.1. Szakaszban meghatározott, 0,7680 érték körül mozog (4.2. táblázat).



4.2. ábra. Az mikrekrend.m program eredménye 5000 futtatás és 100 ikerpár esetén. A siker átlagos valószínűsége 0,7726.

	50	100	150	200	250
valsz	0,7700	0,7726	0,7746	0,7570	0,7688

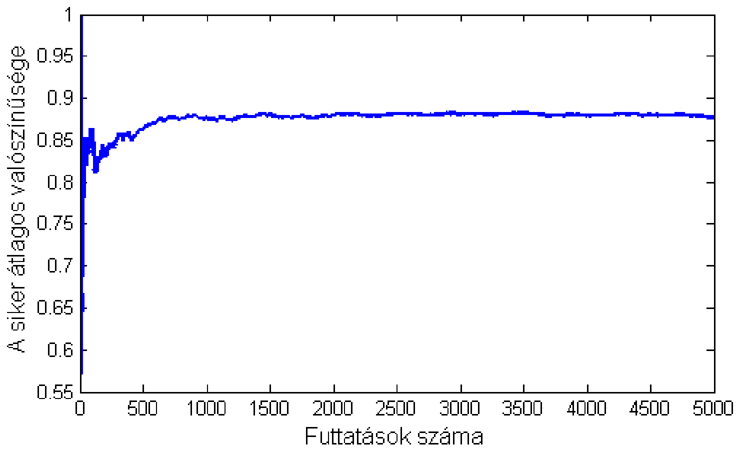
4.2. táblázat. Az mikrekrend.m program eredményei 5000 futtatás és eltérő ikerpár-számok mellett.

Az utolsó, itt vizsgált algoritmus a kdiszjunktrend.m programban található, amely a 3.2. Szakaszban megfogalmazott kiválasztási algoritmust valósítja meg k diszjunkt lánc által alkotott részbenrendezés esetén. Ennek a paraméterei az alábbiak:

- input: **f**: futtatások száma, **n**: elemek száma, **k**: diszjunkt láncok száma,

- output: **valsz**: a siker átlagos valószínűsége, **pk**: p_k értéke, **EBin_np**: a küszöbszám várható értéke, **xpatl**: a küszöbszámok átlaga.

Mint az előző két program esetében is, a siker valószínűségét a futtatások függvényében itt is grafikon ábrázolja, amelyen ugyancsak észrevehető az aszimptotikus viselkedés (4.3. ábra). Megfigyelhető, hogy amíg a siker átlagos valószínűsége p_k értéke, addig a küszöbszámok átlaga (nem meglepően) az n és p_k paraméterű Binomiális eloszlás várható értéke körül mozog (4.3. táblázat).



4.3. ábra. A kdiszjunktrend.m program eredménye 5000 futtatás, 200 elem és 25 diszjunkt lánc esetén. A siker átlagos valószínűsége 0,8768, a p_k értéke 0,8745, a küszöbszám várható értéke 174,9, a küszöbszámok átlaga pedig 174,91.

	1	5	25	50	100
valsz	0,3704	0,6644	0,8768	0,9254	0,9574
pk	0,36788	0,6687	0,8745	0,9233	0,9546
EBin_np	73,58	133,75	174,90	184,65	190,91
xpatl	73,40	133,68	174,91	184,70	190,87

4.3. táblázat. A kdiszjunktrend.m program eredményei 5000 futtatás, 200 elem és eltérő számú diszjunkt láncok esetén.

5. fejezet

Változatok

1960 óta a titkárnő-problémaként elhíresült feladatnak számos változatát vizsgálták. Freeman [10] 1983-ban írt egy átfogó összefoglalást ezen területről, amely megmutatja, hogy már addigra is számottevő különböző verziót vettek szemügyre, és természetesen azóta több, új variáció is megjelent. A következőekben mindössze néhány változatot, és az ezekhez kapcsolódó fő eredményeket említjük meg.

Gilbert és Mosteller [14] azt a problémát tekintette, amikor az interjúztató r jelöltet is választhat, és akkor nyer, ha a választottak közül az egyik a legjobb. Megmutatták, hogy egy optimális stratégia az, hogy egy bizonyos $t(n,r)$ függvény esetén várjunk, amíg már $t(n,r)$ jelentkezőt láttunk, ezután válasszuk azt, aki az addig látott legjobb, majd az optimális stratégiával játsszunk tovább a megmaradt jelentkezők és választások száma szerint. Iteratívan meghatározták az $u_r = \lim_{n\to\infty} \frac{t(n,r)}{n}$ határértékeket, így u_r első pár értéke e^{-1}, $e^{-\frac{3}{2}}$, $e^{-\frac{47}{24}}$, és megmutatták, hogy amint $n \to \infty$, a siker valószínűsége a $\sum_{i=1}^{r} u_i$ összeghez tart.

Stadje [25] egy olyan variációt vetett fel, amelyben a jelentkezőket $k > 1$ különböző kritérium alapján külön-külön is sorba lehetne rendezni, és az interjúztató feladata, hogy egy olyan jelöltet válasszon, aki legalább az egyik szerint a legjobb. Gnedin [15] megoldotta a problémát abban az esetben, amikor ezek a sorbarendezések véletlenszerűek és egymástól függetlenek. Bebizonyította, hogy egy optimális stratégia az, hogy várjunk, amíg már bizonyos számú jelöltet láttunk, és ezután válasszuk azt a következő jelöltet, aki legalább egy kritérium szerint legjobb az összes addigi között. Belátta azt is, hogy mind a küszöbszám, mind a siker valószínűsége $\sqrt[k-1]{\frac{1}{k}}$. Tulajdonképpen erre a feladatra úgy is tekinthetünk, mint a 3.2. Szakaszban k diszjunkt láncra megfogalmazott titkárnő-probléma egy változata.

Presman and Sonin [23] azt a verziót vizsgálta, amelyben a jelentkezők száma ismeretlen, csupán annyit tudunk, hogy valamilyen N valószínűségi változó szerint alakul, melynek eloszlása ismert, és a cél a legjobb jelentkező választása. Megadtak egy explicit optimális stratégiát egy általános eloszlásra, és megmutatták, hogy ha a jelentkezők száma véletlenszerűen kerül ki az $\{1, \ldots, n\}$ halmazból, akkor egy optimális stratégia hasonló a klasszikus titkárnő-problémáéhoz, azonban a küszöbszám aszimptotikusan $\frac{n}{e^2}$, és a siker valószínűsége $\frac{2}{e^2} \approx 0{,}2707$-hez tart, amint $n \to \infty$.

"Teljes információs" esetként ismert az a változat, amikor a jelentkezők képességeit valamilyen ismert eloszlású valószínűségi változók reprezentálják, és a cél a választott jelentkező várható képességének maximalizálása. Moser [22] vizsgálta az $U[0,1]$ egyenletes eloszlás esetét, míg Guttman [17] talált egy optimális stratégiát egy általános eloszlásra, továbbá megadott egy explicit optimális stratégiát az $N(0,1)$ normális eloszlás esetén. Általános optimális stratégiája az, hogy akkor fogadjunk el egy jelentkezőt, ha legalább m jelentkező marad még utána, és a képessége legalább E_m valamilyen $(E_m)_{m\in\mathbb{N}}$-re. $U(0,1)$ esetén E_m első néhány értéke 0,5, 0,625, 0,6953, 0,7417 és 0,775, valamint $N(0,1)$ esetén 0, 0,3992, 0,6298, 0,7904 és 0,9127. Ekkor a várható képesség az első küszöbszám, vagyis E_1.

Ahelyett, hogy a legjobb jelentkező kiválasztásához ragaszkodnánk, tekinthetjük a következő feladatot is. A jelentkezőkhöz különböző rangokat rendelünk 1-től n-ig, 1-est a legjobbhoz, n-et a legrosszabbhoz, és a cél a várható rang minimalizálása. Ezt a verziót Chow, Moriguti, Robbins és Samuels [6] oldotta meg. Talán meglepő, de az optimális várható érték, amint $n \to \infty$, nem az n valamely többszörösével arányos, hanem egy konstanshoz tart, ez nevezetesen

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j+2}{j}\right)^{\frac{1}{j+1}} \approx 3{,}8695.$$

Megmutatták, hogy egy optimális stratégia, hogy azt a jelöltet fogadjuk el, aki az eddig látott legjobb k között van, ha már legalább i_k jelöltet láttunk valamilyen i_k küszöbszámra. Azt is belátták, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{i_k}{n} = \prod_{j=k}^{\infty} \left(\frac{j}{j+2}\right)^{\frac{1}{j+1}}.$$

Ez azt jelenti, hogy nagy n esetén, ha már közelítőleg a jelentkezők 26%-át láttuk, akkor fogadjuk el azt a következő jelentkezőt, aki az eddig látott legjobb, 45% után fogadjuk el azt, aki az eddig látott legjobb két jelentkező között van, 56% után azt, aki a legjobb 3 egyike, 65% után pedig már azt, aki benne van a legjobb 4-ben, és így tovább.

Kissé eltávolodva az eredeti megfogalmazástól, Kubicki és Morayne [19] a problémát egy irányított úton vizsgálta, amelynél a választó minden időpillanatban ismeri az addig látott csúcsok által indukált irányított gráfot, és a cél a terminális csúcs választása, amelyből nem megy ki él. Ez hasonló az eredeti feladathoz, azonban itt minden jelentkezőt csak a sorrend szerint közvetlenül alatta vagy felette álló jelentkezővel tudunk összehasonlítani. Megmutatták, hogy egy optimális stratégia az, hogy várjunk addig az első t időpontig, amikor a gráfnak már $n-t+1$ összefüggő komponense van, és válasszuk a t-edik csúcsot függetlenül attól, hogy a saját komponensének terminális csúcsa-e vagy sem. Megjegyezzük, hogy ez az első olyan verzió, amelynél a választó biztos tudja, ha már látta a keresett csúcsot, ugyanis ha egy t időpillanatban a gráfnak $n-t+1$ összefüggő komponense van, akkor a hátralévő $n-t$ csúcsnak az ezeket a komponenseket összekapcsolóaknak kell lenniük, így egyik sem lehet terminális csúcs. Ekkor a siker p_n valószínűségére a következő teljesül:

$$\lim_{n\to\infty} p_n\sqrt{n} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0{,}8862.$$

Morayne-nek [21] köszönhető az irányított utas feladat azon változata, amelyben egy n mélységű teljes bináris fát tekintünk, és a cél a gyökércsúcs kiválasztása. Belátta, hogy egy optimális stratégia az, hogy akkor válasszunk egy elemet, ha az maximális az addig látottak között, és teljesül, hogy az általuk alkotott részbenrendezés vagy lineáris, és hossza legalább $\frac{n}{2}$, vagy pedig nem-lineáris. Továbbá azt is megmutatta, hogy amint $n \to \infty$, a siker valószínűsége 1-hez tart.

6. fejezet

Alkalmazások

A titkárnő-probléma különböző változatait alkalmazzák online aukciós (*online auction*) problémáknál is. Ezen esetekben az elemek, mint például lehetséges alkalmazottak vagy vásárlók egymás után, folyamatosan érkeznek. Miután észleltük egy adott elem értékét, anélkül, hogy tudnánk a jövőbeli elemekből származó értékeket, megmásíthatatlanul el kell döntenünk, hogy megtartjuk-e az adott elemet, mint egy megoldás részét, vagy elutasítjuk azt. A titkárnő-problémához kapcsolódó modellek abban különböznek a hagyományos online algoritmusoktól, hogy itt az elemek sorrendje véletlenszerű. Ezt alkalmazzák például olyan mechanizmusok megalkotásánál, amelyek maximalizálják a legjobb k elem [1, 2, 18] vagy az elfogadott elemek halmazának valamely függvényét, mint pl. az online szubmoduláris függvény maximalizálása [16, 27], egy matroid legnagyobb súlyú, független halmazának megtalálása [3, 24], stb. esetében.

Az algoritmusok hatékonyságának jellemzésére használjuk az α-kompetitív (α-*comptetitive*) fogalmat.

6.0.12. Definíció. *Legyen $\mathcal{U}$ az összes elem (pl. az ajánlattevők) által alkotott alaphalmaz, és legyen a részhalmazok egy halmaza $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$ (ezek felelnek meg pl. azoknak az ajánlattevőknek, akiknek az árajánlatai egyidejűleg elfogadhatóak). Minden $x \in \mathcal{U}$ elemnek van egy v_x nemnegatív értéke (ezek jelölik pl. az árajánlatokat), és mivel a következőekben egy algoritmus által nyert kifizetés megegyezik az algoritmus által választott S halmaz elemeinek értékeinek összegével, legyen $v(S) = \sum_{x \in S} v_x$. Ekkor ha S^* az a halmaz, amelyre $v(S^*) = \max\{v(S) : S \in \mathcal{I}\}$, akkor azt mondjuk, hogy egy algoritmus α-kompetitív, ha $\mathbb{E}[v(S)] \geq \frac{1}{\alpha} v(S^*)$ bármely lehetséges v értékelési függvény esetén. Ekkor α-t nevezzük az algoritmus kompetitivitási hányadosának.*

A továbbiakban néhány, a való élet által ihletett feladatot tekintünk.

Tegyük fel, hogy el akarunk adni egy árucikket, mondjuk a kocsinkat a következő eljárás szerint. Az érdeklődők egymás után, egyenként eljönnek a garázsunkba, értékelik az autót, és tesznek egy árajánlatot (*bid*). Mindegyikük csak egyetlen árajánlatot tehet, és miután kaptunk egy ajánlatot, azonnal el kell döntenünk, hogy elfogadjuk-e vagy nem. A kérdés az, hogy mi a legjobb stratégia annak eldöntésére, hogy mely árajánlatot fogadjuk el, és melyeket utasítsunk el. Ennek vizsgálatához formálisan a következő problémát fogalmazzuk meg. Adott n szám egy véletlenszerű sorozata, és a feladatunk a sorozat egy elemének választására egy olyan online algoritmus megadása, amely maximalizálja a választott elem várható értékét. Ezt hívjuk "egy árucikkes aukciónak" (*single-item auction*), melyre alkalmazhatjuk a klasszikus titkárnő-problémánál megfogalmazott algoritmust, amely e-kompetitív.

Számos aukciós forgatókönyv magában foglalja több árucikk eladási lehetőségét. Amikor például az eladónak egy helyett k azonos árucikke is van, a titkárnő-probléma következő kiterjesztéséhez jutunk: adjunk meg egy online algoritmust, amely n véletlenszerű sorrendben megjelenő nemnegatív érték közül kiválaszt k-t a várható összeg maximalizálása mellett. Ezt a problémát nevezzük "k-választásos titkárnő-problémának" (*k-choice secretary problem*). Babaioff, Immorlica, Kempe és Kleinberg [4] által ismert, hogy van olyan algoritmus, amely k bármely értéke esetén e-kompetitív, habár ez az érték közel sem optimális, amint $k \to \infty$. Továbbá Kleinberg [18] megmutatta, hogy az optimális kompetitivitási hányados felülről $1+\frac{C}{\sqrt{k}}$-val, míg alulról $1+\frac{c}{\sqrt{k}}$-val becsülhető valamely $c < C$ konstansokra.

Tegyük fel, hogy mi üzemeltetjük a Super Bowl hivatalos honlapját, és van egy hirdetési felületünk. Tudjuk, hogy a Super Bowl napján valahányszor megnyitják az oldalt (mondjuk 50 milliószor), és így a hirdetési megjelenítéseket szeretnénk eladni reklámozóknak. Minden reklámozó egymás után, véletlenszerűen, valamekkora megjelenítési igénnyel érkezik, valamint megmondja az árat, amelyet ezért hajlandó fizetni. El kell döntenünk, hogy ezt teljesítjük-e vagy nem, azonban szem előtt kell tartanunk, hogy a különböző reklámozóknak ígért megjelenítések összege nem lehet több, mint 50 millió. Ezt a változatot nevezzük "hátizsák titkárnő-problémának" (*knapsack secretary problem*). Babaioff, Immorlica, Kempe és Kleinberg [4] megadott egy algoritmust, amely $(10e)$-kompetitív, azonban az optimális kompetitivitási hányados még nem ismert.

Több természetes online aukciós feladat is a "matroid titkárnő-probléma" (*matroid secretary problem*) témakörbe esik, amely esetében az $\mathcal{U}$ alaphalmaz, és az $\mathcal{I}$ megengedett részhalmazok matroid struktúrát alkotnak. Egy példa erre, amikor mozilátogatók jegyeket akarnak venni több egyszerre vetített filmre is. Ezt a problémát a következőképpen fogalmazhatjuk meg formálisan. Adott n vevő v_x értékekkel és adott m lehetséges film, melyet egy páros gráfként ábrázolhatunk, ahol az élek jelölik, hogy melyik vevőt mely filmek érdeklik. A feladat, hogy az egyes vetítések férőhelyeinek ismeretében találjunk a vevőknek egy olyan maximális értékű részhalmazát, amely esetén mindegyikük egyidőben nézhet meg egy őt érdeklő filmet. A keletkező matroidot transzverzális matroidnak (*transversal matroid*) nevezzük, amelyben a vevők minden párosítható halmaza független. Egy másik példa, amikor utazók repülőjáratokra akarnak helyet foglalni több, egyidőben lehetséges útvonal esetén. Ezt formálisan így fogalmazhatjuk meg: mindegyik utas v_x értékkel utazna egy kezdőpontból egy végpontba, és minden élnek van egy ismert kapacitása. A cél, hogy a kapacitási feltételek figyelembevételével az utasoknak egy maximális értékű halmazát utaztassuk egyszerre. Ha minden kezdőpont egyforma, akkor a keletkező matroid struktúrát gammoidnak nevezzük. Megjegyezzük, hogy a k-választásos titkárnő-probléma az "uniform matroid" esete, amelyben a független halmazok pontosan a legfeljebb k számosságú halmazok. Sajnos a matroid titkárnő-problémák esetén még nem ismert semmilyen konstans kompetitivitási hányados, az eddigi legjobb eredmény egy $O(\log k)$-kompetitív algoritmus, ahol a k a matroid rangja, vagyis a legnagyobb megengedett halmaz mérete. Ez az algoritmus Babaioff, Immorlica és Kleinberg [3] nevéhez fűződik.

Függelék

Ebben a függelékben találhatóak azon programok forráskódjai, amelyekkel a 4. fejezetben dolgoztunk. Az egyes MATLAB parancsok jelentése megtalálható Stoyan Gisbert *Matlab* [26] c. könyvében.

linearrend.m

```
function valsz=linearrend(k,n)
% lineáris rendezésre vonatkozó algoritmus tesztelése
%
% k - futtatások száma
% n - elemek száma

fut=0;
siker=0;
p=zeros(1,k);
kk=zeros(1,k);

% k-szor futtatjuk az algoritmust
for i=1:k
   r=randperm(n); % megadunk egy véletlenszerű rendezést
   tresh=floor(n/exp(1)); % meghatározzuk a küszöbszámot
   tmin=min(r(1:tresh)); % a küszöbön belüli legjobb elem

   % a definiált algoritmus szerint választunk egy elemet
   val=0;
   t=tresh+1;
   while t<=n
       if (r(t)<tmin)&&(t<n)
           val=r(t);
           t=n+1;
       elseif t==n
```

```
            val=r(t);
            t=n+1;
        else
            t=t+1;
        end
    end

    % ha a választott elem az abszolút legjobb, akkor a sikeres
    % választások számát növelem 1-gyel
    if val==1
        siker=siker+1;
    end

    fut=fut+1;
    kk(i)=i;

    % az eddigi sikeres választások átlagos valószínűsége
    p(i)=siker/fut;
end

% eredmények ábrázolása
valsz=p(k);
plot(kk,p,'LineWidth',2);
title({'A siker átlagos valószínűsége';
    ['lineáris rendezés és ',num2str(n),' elem esetén '];
    [num2str(k),' futtatásból: ',num2str(valsz),'.']},'FontSize', 12);
xlabel('Futtatások száma','FontSize', 12);
ylabel('A siker átlagos valószínűsége','FontSize', 12);
```

mikrekrend.m

```
function valsz=mikrekrend(l,m)
% m ikerpár által alkotott részbenrendezésre vonatkozó algoritmus
% tesztelése
%
% l - futtatások száma
% m - ikerpárok száma
```

```
fut=0;
siker=0;
p=zeros(1,l);
kk=zeros(1,l);

% meghatározzuk km értékét
k=ceil(m/2);
while k>0
    szum=2*m/(k-1);
    for j=(k-1):(m-1)
        szum=szum+1/j;
    end
    if szum<=5
        k=k-1;
    else
        km=k;
        k=0;
    end
end

r=[1:m 1:m];
% l-szer futtatjuk az algoritmust
for i=1:l
    % megadunk egy véletlenszerű rendezést
    ind=randperm(2*m);
    r=r(ind);

    % a definiált algoritmus szerint választunk egy elemet
    t=km+1;
    while t<=(2*m)
       szintek=length(unique(r(1:t)));
       kormin=min(r(1:(t-1)));
       if (r(t)==min(r(1:t)))&&(r(t)==kormin)&&(szintek>=km)&&(t<=2*m)
           val=r(t);
           t=2*m+1;
       elseif t==(2*m)
           val=r(t);
```

```
            t=2*m+1;
        else
            t=t+1;
        end
    end

    % ha a választott elem az abszolút legjobb, akkor a sikeres
    % választások számát növelem 1-gyel
    if val==1
        siker=siker+1;
    end

    fut=fut+1;
    kk(i)=i;

    % az eddigi sikeres választások átlagos valószínűsége
    p(i)=siker/fut;
end

% eredmények ábrázolása
valsz=p(l);
plot(kk,p,'LineWidth',2);
title({'A siker átlagos valószínűsége ';
    [num2str(m),' ikerpár esetén '];
    [num2str(l),' futtatásból: ',num2str(valsz),'.']},'FontSize', 12);
xlabel('Futtatások száma','FontSize', 12);
ylabel('A siker átlagos valószínűsége','FontSize', 12);
```

kdiszjunktrend.m

```
function [valsz,pk,EBin_npk,xpatl]=kdiszjunktrend(f,n,k)
% k diszjunkt lánc által alkotott részbenrendezésre vonatkozó algoritmus
% tesztelése
%
% f - futtatások száma
% n - elemek száma
% k - diszjunkt láncok száma
```

```
siker=0;
fut=0;
p=zeros(1,f);
kk=zeros(1,f);
xp=zeros(1,f);

% f-szer futtatjuk az algoritmust
for j=1:f

    % véletlenszerűen megkonstruálunk k diszjunkt láncot
    A=zeros(n,2);
    height=zeros(1,k); % a láncok magassága
    for i=1:n
        s=randi(k);
        A(i,1)=s;
        A(i,2)=height(s)+1;
        height(s)=height(s)+1;
    end

    % meghatározzuk pk értékét
    switch k
        case 1
            pk=1/exp(1);
        otherwise
            pk=k^(-1/(k-1));
    end

    xp(j)=binornd(n,pk); % a küszöbszám értéke
    r=randperm(n); % véletlen sorrend létrehozása

    % a definiált algoritmus szerint választunk egy elemet
    korlegj=zeros(1,k);
    t=1;
    while t<=n
        if korlegj(A(r(t),1))==0;
            korlegj(A(r(t),1))=A(r(t),2);
        elseif (korlegj(A(r(t),1))~=0)&&(korlegj(A(r(t),1))>A(r(t),2))
```

```
            korlegj(A(r(t),1))=A(r(t),2);
        end
        if (t<=n)&&(t>xp(j))&&(A(r(t),2)==korlegj(A(r(t),1)))l
            val=A(r(t),2);
            t=n+1;
        elseif (t==n)
            val=A(r(t),2);
            t=n+1;
        else
            t=t+1;
        end
    end

    % ha a választott elem az abszolút legjobb, akkor a sikeres
    % választások számát növelem 1-gyel
    if val==1
        siker=siker+1;
    end

    fut=fut+1;
    kk(j)=j;

    % az eddigi sikeres választások átlagos valószínűsége
    p(j)=siker/fut;
end

% a küszöbszámok átlaga
xpszum=0;
for j=1:f
    xpszum=xpszum+xp(j);
end
xpatl=xpszum/f; % a küszöbszámok átlaga
EBin_npk=n*pk; % a küszöbszám várható értéke

% eredmények ábrázolása
valsz=p(f);
plot(kk,p,'LineWidth',2);
```

```
title({'A siker átlagos valószínűsége ';
    [num2str(n),' elem és ',num2str(k),' diszjunkt lánc esetén '];
    [num2str(f),' futtatásból: ',num2str(valsz),'.'];
    ['A siker aszimptotikus valószínűsége ',num2str(pk),'.']
    ['A küszöbszám várható értéke: ',num2str(EBin_npk),'.'];
    ['A küszöbszámok átlaga: ',num2str(xpatl),'.']},'FontSize', 12);
xlabel('Futtatások száma','FontSize', 12);
ylabel('A siker átlagos valószínűsége','FontSize', 12);
```

Irodalomjegyzék

[1] M. Ajtai, N. Megiddo, and O. Waarts, *Improved algorithms and analysis for secretary problems and generalizations*, SIAM J. Discrete Math. 14(1) (2001), 1–27.

[2] M. Babaioff, M. Dinitz, A. Gupta, N. Immorlica, and K. Talwar, *Secretary problems: Weights and discounts*, In: Proc. 20th SODA (2009), 1245–1254.

[3] M. Babaioff, N. Immorlica, and R. Kleinberg, *Matroids, secretary problems, and online mechanisms*, In: Proc. 18th SODA (2007), 434–443.

[4] M. Babaioff, N. Immorlica, D. Kempe, and R. Kleinberg, *A knapsack secretary problem with applications*, In: Proc. 10th APPROX (2007), 16–28.

[5] M. Babaioff, N. Immorlica, D. Kempe, and R. Kleinberg, *Online auctions and generalized secretary problems*, SIGecom Exchanges 7(2) (2008).

[6] Y. S. Chow, S. Moriguti, H. Robbins, and S. M. Samuels, *Optimal selection based on relative rank (the "secretary problem")*, Israel J. Math. 2(2) (1964), 81–90.

[7] Y. S. Chow, H. Robbins, and D. Siegmund, *Great Expectations: The theory of optimal stopping*, Dover, 1991.

[8] R. P. Dilworth, *A decomposition theorem for partially ordered sets*, Ann. Math. 51(1) (1950), 161–166.

[9] T. Ferguson, *Who solved the secretary problem?*, Statist. Sci. 4(3) (1989), 282–296.

[10] P. R. Freeman, *The secretary problem and its extensions: a review*, Int. Stat. Rev. 51(2) (1983), 189–206.

[11] R. Freij, and J Wästlund, *Partially ordered secretaries*, Elect. Comm. in Probab. 15 (2010), 504–507.

[12] M. Gardner, *Mathematical games*, Sci. Amer. 202(2) (1960), 152.

[13] B. Garrod, *Problems of optimal choice on posets and generalizations of acyclic colourings*, PhD Thesis, University of Cambridge, 2011.

[14] J. P. Gilbert, and F. Mosteller, *Recognizing the maximum of a sequence*, J. Amer. Statist. Assoc. 61(313) (1966), 35–73.

[15] A. V. Gnedin, *A multicriteria problem of optimal stopping of a selection process*, Autom. Remote Control 42 (1981), 981–986.

[16] A. Gupta, A. Roth, G. Schoenebeck, and K. Talwar, *Constrained non-monotone submodular maximization: Offline and secretary algorithms*, In: Proc. 6th WINE (2010), 246–257.

[17] I. Guttman, *On a problem of L. Moser*, Canad. Math. Bull. 3 (1960), 35–39.

[18] R. Kleinberg, *A multiple-choice secretary problem with applications to online auctions*, In: Proc. 16th SODA (2005), 630–631.

[19] G. Kubicki, and M. Morayne, *Graph-theoretic generalization of the secretary problem: the directed path case*, SIAM J. Discrete Math. 19(3) (2005), 622–632.

[20] R. Kumar, S. Lattanzi, S. Vassilvitskii, and A. Vattani, *Hiring a secretary from a poset*, In: Proceedings of ACM Conference on Electronic Commerce (2011), 39–48.

[21] M. Morayne, *Partial-order analogue of the secretary problem: the binary tree case*, Discrete Math. 184(1-3) (1998), 165–181.

[22] L. Moser, *On a problem of Cayley*, Scripta Mathematica 22(5) (1956), 289–292.

[23] E. L. Presman, and I. M. Sonin, *The best choice problem for a random number of objects*, Theory Probab. Appl. 17(4) (1973), 657–668.

[24] J. A. Soto, *Matroid secretary problem in the random assignment model*, In: Proc. 22nd SODA (2011), 1275–1284.

[25] W. Stadje, *Efficient stopping of a random series of partially ordered points*, In: G. Fandel et al. (eds.), Multiple criteria decision making theory and applications, Springer-Verlag, Berlin, 1980, 430–447.

[26] G. Stoyan, *Matlab*, Typotex, Budapest, 2005.

[27] M. Zadimoghaddam, M. H. Bateni, and M. T. Hajiaghayi, *Submodular secretary problem and extensions*, In: Proc. 6th WINE (2010), 39–52.