

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

---

Kovács Ákos

# Algebrai módszerek a kombinatorikában

BSc Szakdolgozat

Témavezető:

Csikvári Péter

Számítógéptudományi Tanszék



Budapest, 2013

# Tartalomjegyzék

Bevezetés	3
<b>1. Lineáris algebrai előismeretek</b>	<b>4</b>
1.1. A minimálpolinom . . . . .	4
1.2. A Rayleigh-hányados . . . . .	5
1.3. A Courant-Fisher-tétel . . . . .	6
1.4. Interlacing tétel . . . . .	7
<b>2. Gráfok spektruma</b>	<b>9</b>
2.1. Gráfok mátrixai . . . . .	9
2.2. A mátrixok alapvető tulajdonságai . . . . .	11
2.3. A gráf spektruma . . . . .	11
2.4. Körséták és a spektrum . . . . .	13
2.5. Az átmérő . . . . .	16
2.6. A feszítőfák száma . . . . .	17
2.7. Páros gráfok és az összefüggőség . . . . .	20
2.8. Reguláris gráfok . . . . .	24
2.9. Erősen reguláris gráfok . . . . .	27
2.10. A Hoffman-Singleton-tétel . . . . .	31
2.11. Becslések a sajátértékekre . . . . .	33
2.12. A kromatikus szám . . . . .	36
<b>3. Vegyes témák</b>	<b>37</b>
3.1. Korlátozások variációk . . . . .	37
3.2. Páratlan távolságok . . . . .	38
3.3. A Graham-Pollak-tétel . . . . .	39

TARTALOMJEGYZÉK	3
3.4. $K_{10}$ fedése Petersen-gráfokkal . . . . .	40
3.5. Általánosított Fisher-egyenlőtlenség . . . . .	40
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>42</b>

# Bevezetés

A dolgozat rövid betekintést nyújt a kombinatorikai problémákban felhasznált lineáris algebrai módszerekbe. A központi téma a gráfok spektrálmélete, ami a gráfokhoz rendelhető különböző mátrixok sajátértékeinek és a gráf tulajdonságainak kapcsolatát vizsgálja. A terület születése nagyjából az 1950-es évekre tehető. Amellett, hogy a gráfelmélet egy új megközelítése könyvtárnyi elmélettel gazdagodott azóta általa, praktikus alkalmazásokra is találtak az új gondolatok. Például a legnépszerűbb webes kereső rangsorolási algoritmus a gráfok sajátértékeivel dolgozik.

A dolgozat egy általános felsőoktatási szintű lineáris algebrai műveltségre épít, az ezen túlmutató eredményeket az első fejezetben foglaljuk össze. Mivel a gráfelméleti alkalmazások kapcsán szimmetrikus mátrixok merülnek fel, így ezekkel foglalkozunk itt. Helyet kapott a fejezetben a legkisebb és legnagyobb sajátérték jellemzése a Rayleigh-hányados extrémumaiként, illetve az ennek következményeként levezethető Courant-Fisher-tétel. Később ezeket az eredményeket gráfok sajátértékeinek becslésére használjuk fel.

A második fejezetben tárgyaljuk, azon mátrixokat, amelyek vizsgálata különösen hasznosnak bizonyult a spektrál gráfelméletben. Látunk majd példát rá, mikor két nemizomorf gráf spektruma megegyezik, de mint ki fog derülni van, amikor a spektrum teljesen karakterizálja a gráfot. Kimondottan szépek az arról szóló tételek, amik lehetővé teszik, hogy egy gráfjellemezőt kiolvassunk egyértelműen a spektrumból, de legalább annyira érdekes annak vizsgálata, hogy egyes esetekben konkrétan mi az, ami ezt ellehetetleníti.

A harmadik fejezetben valamelyest elszakadunk a spektrálmélettől, és a lineáris algebra egyéb kombinatorikai alkalmazásaira is kitekintünk.

# 1. fejezet

## Lineáris algebrai előismeretek

### 1.1. A minimálpolinom

**1.1.1. Tétel.** *Legyenek  $A$  valós szimmetrikus mátrix különböző sajátértékei  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ! (Ismeretes, hogy szimmetrikus mátrix sajátértékei valósak.) Ekkor  $A$  minimálpolinomja  $m(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)$ .*

**Bizonyítás.** Ha  $\lambda_i$  sajátérték, akkor tekintsünk egy hozzá tartozó nemnulla  $v$  sajátvektort!

$$0 = m(A)v = m(\lambda_i)v \Rightarrow m(\lambda_i) = 0$$

Tehát az összes sajátérték gyöke  $m$ -nek, ezért  $\prod_{i=1}^k (x - \lambda_i) \mid m(x)$ .

A fordított irányú oszthatósághoz megmutatjuk, hogy  $\prod_{i=1}^k (A - \lambda_i I) = 0$ . Felhasználjuk, hogy létezik sajátvektorokból álló (ortonormált)  $v_1, v_2, \dots, v_n$  bázis. Legyen  $v$  tetszőleges, és bontsuk fel a sajátbázis szerint:  $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ !

$$\begin{aligned} \left( \prod_{i=1}^k (A - \lambda_i I) \right) v &= \left( \prod_{i=1}^k (A - \lambda_i I) \right) \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j = \sum_{j=1}^n \underbrace{\prod_{i=1}^k (A - \lambda_i I) \alpha_j v_j}_{=0} = 0 \\ &= \left( \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k (A - \lambda_i I) \right) \underbrace{(A - \lambda_j I) \alpha_j v_j}_{=0} \end{aligned}$$

□

## 1.2. A Rayleigh-hányados

Egy szimmetrikus (Hermitikus) mátrix **Rayleigh-hányadosát** az  $x \neq 0$  vektoron az alábbi módon definiáljuk:

$$R(x) = \frac{x^\top Ax}{x^\top x}$$

**1.2.1. Tétel. (Rayleigh-Ritz)** *Legyen  $A$  valós szimmetrikus  $n \times n$ -es mátrix, melynek sajátértékei  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ ! Ekkor*

$$\min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} R(x) = \lambda_1$$

és

$$\max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} R(x) = \lambda_n.$$

*A fenti minimum és maximum pontosan a  $\lambda_1$ -hez illetve  $\lambda_n$ -hez tartozó sajátvektorokon vétetik fel.*

**Bizonyítás.** Ismeretes, hogy  $A$ -nak létezik ortonormált sajátbázisa, legyen ez  $s_1, s_2, \dots, s_n$ ! Ekkor tetszőleges  $x$  vektor  $x = Q^\top y = (s_1 | s_2 | \dots | s_n) y$  alakba írható, ahol  $Q$  épp a sajátbázisra való áttérés ortogonális mátrixa, tehát  $Q^\top A Q = D$  diagonális. Így

$$R(x) = \frac{x^\top Ax}{x^\top x} = \frac{(Q^\top y)^\top A (Q^\top y)}{(Q^\top y)^\top (Q^\top y)} = \frac{y^\top D y}{y^\top y} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{y_i^2}{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

Ezért

$$R(x) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_1 \frac{y_i^2}{\sum_{i=1}^n y_i^2} = \lambda_1$$

Amennyiben a  $x$  sajátvektor  $\lambda_1$ -hez, akkor  $R(x) = \frac{x^\top (\lambda_1 x)}{x^\top x} = \lambda_1$ . Ha viszont  $x$  nem sajátvektor  $\lambda_1$ -hez, akkor van olyan  $y_k \neq 0$  komponense  $A$  sajátbázisa szerinti oszlopvektorában, amely  $k$ -ra  $\lambda_k > \lambda_1$ . Ezek szerint  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{y_i^2}{\sum_{i=1}^n y_i^2}$  tagonként nagyobb egyenlő  $\sum_{i=1}^n \lambda_1 \frac{y_i^2}{\sum_{i=1}^n y_i^2}$ -nél, és legalább egy tagban szigorú egyenlőtlenség áll. Emiatt a végösszegben is szigorú egyenlőtlenségnek kell állnia.

A maximum és  $\lambda_n$  viszonya hasonló érvelés eredményeként adódik.  $\square$

A bizonyítás gondolatmenetéből kiolvasható az is, hogy

$$\min_{\substack{0 \neq x \in \mathbb{R}^n \\ x \perp s_1, s_2, \dots, s_{k-1}}} R(x) = \lambda_k$$

illetve

$$\max_{\substack{0 \neq x \in \mathbb{R}^n \\ x \perp s_{k+1}, s_{k+2}, \dots, s_n}} R(x) = \lambda_k,$$

hisz  $x \perp s_j$  épp azt jelenti, hogy  $y_j = 0$ .

### 1.3. A Courant-Fisher-tétel

A tételt „minimax”- illetve „maximin”-elvként is szokták emlegetni.

**1.3.1. Tétel. (Courant-Fisher)** *Legyen  $A$  valós szimmetrikus mátrix  $n \times n$ -es mátrix, melynek sajátértékei  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ ! Jelölje  $V_k$  az összes  $k$ -dimenziós altér részhalmazát  $\mathbb{R}^n$ -ben. Ekkor*

$$\lambda_k = \max_{S \in V_{n-k+1}} \min_{\substack{x \in S \\ x \neq 0}} R(x) = \min_{S \in V_k} \max_{\substack{x \in S \\ x \neq 0}} R(x)$$

**Bizonyítás.** Legyen  $k$  rögzített, és rögzítsünk hozzá egy  $S \in V_{n-k+1}$ -t, és jelölje  $S$ -nek a  $Q$ -nál vett képét  $Q(S)$ , ahol  $Q$  ugyanaz, amint azt az 1.2.1 tétel bizonyításában bevezetettük. Ahogy azt láttuk, a Rayleigh-hányados korlátos, ezért fölírhatjuk a következőt (a továbbiakban mindig hozzáértjük a feltételhez, hogy  $x$  illetve  $y$  nem nulla):

$$\begin{aligned} \inf_{x \in S} R(x) &= \inf_{y \in Q(S)} \frac{(Q^\top y)^\top A (Q^\top y)}{(Q^\top y)^\top (Q^\top y)} = \\ &= \inf_{y \in Q(S)} \frac{y^\top D y}{y^\top y} \leq \\ &\leq \inf_{\substack{y \in Q(S) \\ y_{k+1} = \dots = y_n = 0}} \frac{y^\top D y}{y^\top y} = \\ &= \inf_{\substack{y \in Q(S) \\ y_{k+1} = \dots = y_n = 0}} \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{y_i^2}{\sum_{i=1}^n y_i^2} \\ &= \inf_{\substack{y \in Q(S) \\ y_{k+1} = \dots = y_n = 0}} \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{y_i^2}{\sum_{i=1}^n y_i^2} \leq \\ &\leq \lambda_k \end{aligned}$$

Indoklásra szorul a fenti harmadik sor egyenlőtlensége. Bele kell gondolnunk, hogy  $Q(S)$ -ben valóban van olyan nemnulla vektor, amire  $y_1 = \dots = y_{k-1} = 0$ . Tekintsük

a tér egy  $b_1, b_2, \dots, b_n$  ortonormált bázisát, ahol  $b_1, \dots, b_k$  épp  $Q(S)$ -et feszítik! Ekkor a fenti két feltétel

$$\begin{aligned} y^\top b_i &= 0 & \forall i \geq n - k + 2 & & \text{(ez jelenti, hogy } y \in Q(S)) \\ y^\top e_i &= 0 & \forall i \geq k + 1 & & \text{ahol } e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots, 0)^\top \\ & & & & \text{(ez a második feltétel)} \end{aligned}$$

Ez egy  $n - (n - k + 2) + n - (k + 1) = n - 1$  egyenletből álló homogén lineáris rendszer  $y$ -ra, így mindig van nemtriviális megoldása.

Mivel  $S$  tetszőleges  $n - k + 1$ -dimenziós altér volt, ezért

$$\sup_{S \in V_{n-k+1}} \inf_{x \in S} R(x) \leq \lambda_k.$$

$R(s_k) = \lambda_k$  miatt tudjuk, hogy van olyan  $n - k + 1$ -dimenziós altér benne  $x$  vektorral, amin az infimumok szuprémuma felvételik, így sup-ot max-ra, inf-et min-re cserélhetjük.

A másik egyenlőség bizonyítása ugyanígy megy.  $\square$

## 1.4. Interlacing tétel

**1.4.1. Tétel.** *Legyen  $A$   $n \times n$ -es szimmetrikus mátrix  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  sajátértékekkel,  $B$  pedig az az  $(n-1) \times (n-1)$ -es mátrix, amit  $A$ -ból az  $i$ -dik sor és oszlop törlésével nyerünk. Amennyiben  $B$  sajátértékeit  $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_{n-1}$  jelöli, akkor*

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n.$$

**Bizonyítás.** Figyeljük meg, hogy

$$\begin{aligned} & \frac{(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)A(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)^\top}{(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)^\top} = \\ & = \frac{(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)B(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)^\top}{(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)^\top}! \end{aligned}$$



Legyen  $k \in \{2, \dots, n\}$  tetszőleges! A „maximin” tétel kétszeri alkalmazásával

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= \max_{S: \dim(S)=n-k+1} \min_{x \in S} \frac{x^\top Ax}{x^\top x} \geq \\
&\geq \max_{\substack{S: \dim(S)=n-k+1 \\ S \subseteq \{e_i\}^\perp}} \min_{x \in S} \frac{x^\top Ax}{x^\top x} = \\
&= \max_{\substack{S: \dim(S)=n-k+1 \\ S \subseteq \{e_i\}^\perp}} \min_{x \in S} \frac{(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) B (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)^\top}{(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)^\top} = \\
&= \max_{\substack{T: T \leq \mathbb{R}^{n-1} \\ \dim(T)=(n-1)-(k-1)+1}} \min_{y \in T} \frac{y^\top B y}{y^\top y} = \mu_{k-1}.
\end{aligned}$$

A másik irányhoz legyen  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ ! A fentihez teljesen hasonlóan most a „minimax”-elvet használva:

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= \min_{S: \dim(S)=k} \max_{x \in S} \frac{x^\top Ax}{x^\top x} \leq \\
&\leq \min_{\substack{S: \dim(S)=k \\ S \subseteq \{e_i\}^\perp}} \max_{x \in S} \frac{x^\top Ax}{x^\top x} = \\
&= \min_{\substack{T: T \leq \mathbb{R}^{n-1} \\ \dim(T)=k}} \max_{y \in T} \frac{y^\top B y}{y^\top y} = \mu_k.
\end{aligned}$$

□

**1.4.2. Megjegyzés.** E fejezet anyaga szinte módosítás nélkül elmondható valós szimmetrikus helyett komplex Hermitikus mátrixokra, de ekkor természetesen minden transzponálás helyett adjungálást (komplex konjugálás és transzponálás) kell írunk.

## 2. fejezet

# Gráfok spektruma

### 2.1. Gráfok mátrixai

Ebben a fejezetben néhány a gráfokhoz rendelt speciális mátrixtípust fogunk vizsgálni. Természetesen elvileg az ilyen mátrixoknak csak képzeletünk szab határt, viszont a gyakorlati alkalmazások szempontjából az itt bemutatásra kerülő mátrixok bizonyultak leginkább hasznosnak.

Legyen adott egy  $G$  egyszerű, irányítatlan gráf  $n$  ponton! Minden esetben először megcímkezzük a csúcsokat 1-től  $n$ -ig természetes számokkal. (A továbbiakban a rövidebb fogalmazás kedvéért e számot azonosítjuk a megfelelő csúccsal, és így például az „ $i$  számnak megfelelő csúcs” helyett egyszerűen az „ $i$  csúcs”-ről beszélünk.) Tekintsük azt az  $A$  mátrixot, amelyre  $A_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i \text{ szomszédos } j\text{-vel} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$ . Ezt nevezzük  $G$  szomszédossági mátrixának vagy idegen szóval **adjacenciamátrixának**. Vegyük észre, hogy  $A$  szimmetrikus.

E fogalom könnyen általánosítható multigráfokra (így nevezzük a többszörös éleket is megengedő gráfokat) és digráfokra (ez az irányított gráfok rövid elnevezése). Ekkor a  $A_{i,j}$  az  $i$ -ből  $j$ -be irányuló élek száma.  $A$  átlójának bejegyzései a hurokéleknek felelnek meg.

Visszatérve az irányítatlan esetre, jelölje  $d_i$  az  $i$  csúcs fokát, és nevezzük  $D$ -nek azt a diagonális mátrixot, melyben a főátló  $i$ -dik pozíciójában  $d_i$  áll. Ekkor  $L := D - A$ -t  $G$  **Laplace-mátrixának**,  $Q := D + A$ -t pedig  $G$  **előjelmentes Laplace-mátrixának** nevezzük.

Végül definiáljuk az úgynevezett **incidenciamátrixot** vagy más néven illeszkedési

mátrixot. Ehhez a csúcsok mellett az éleket is számozással látjuk el 1-től  $m$ -ig. Az  $M$  mátrix  $n \times m$ -es lesz, sorai a csúcsoknak, míg oszlopai az éleknek felelnek meg.

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i \text{ csúcs végponja a } j \text{ élnek} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}. \text{ Figyeljük meg, hogy minden oszlop pontosan}$$

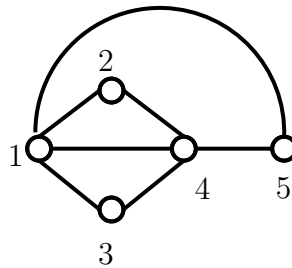
két darab egyest tartalmaz.

Ez a fogalom is kiterjeszthető irányított gráfokra: ott  $-1$  írunk az élek végpontjaira, azaz  $N_{i,j} = \begin{cases} -1 & \text{ha az } i \text{ csúcs a végponja a } j \text{ élnek} \\ 1 & \text{ha az } i \text{ csúcs a kezdőpontja a } j \text{ élnek. Az így értelmezett } \mathbf{irányított} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

**incidenciamátrixot** a továbbiakban  $N$  betűvel jelöljük.

Fontos szem előtt tartani, hogy ezek a mátrixok általában függenek attól, hogy milyen sorrendben számozzuk meg a pontokat illetve az éleket. Mivel vizsgálódásaink tárgya mégiscsak maga a gráf, és nem pedig a konkrét mátrixos reprezentációja, ezért a későbbiekben figyelmünket olyan tulajdonságokra koncentráljuk, amelyek invariánsak a különböző lehetséges reprezentációkra nézve.

Példaként lássuk, hogy festenek a fenti mátrixok a 2.1 ábrán látható gráf esetén!



2.1. ábra.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L = D - A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad Q = D + A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 2.2. A mátrixok alapvető tulajdonságai

Könnyű ellenőrizni, hogy fennáll a  $Q = MM^T$  azonosság. Ennek ismeretében azt is megállapíthatjuk, hogy  $Q$  pozitív szemidefinit, hiszen tetszőleges  $x$  vektorra  $x^T Q x = x^T M M^T x = (M^T x)^T M^T x = \|M^T x\|^2 \geq 0$  (ahol  $\|\cdot\|$  alatt a szokásos belső szorzat, azaz a koordinátánkénti szorzatösszeg által indukált normát értjük). Hasonlóan megkaphatjuk az (előjeles) Laplace-mátrixot: irányítsuk meg tetszőlegesen a gráf éleit! Így fölírhatjuk az  $N$  irányított incidenciamátrixot. Ezek után  $L$  az  $L = N N^T$  képlettel kapható meg. Itt persze bele kell gondolni, hogy valóban mindegy, milyen irányítást választottunk, az eredmény ugyanaz lesz. Világos, hogy  $L$  ugyancsak pozitív szemidefinit.

Míg  $Q$  akár (szigorúan) pozitív definit is lehet (ez akkor van, ha  $M$  teljes rangú), ugyanez  $L$ -ről nem mondható el. Ugyanis észrevehetjük, hogy  $L$  oszlopait összeadva épp a nullvektort kapjuk, ami azt jelenti, hogy  $L$  szinguláris, vagyis van nulla sajátértéke.

## 2.3. A gráf spektruma

Egy gráf spektrumának vagy hagyományos spektrumának az ő adjacenciamátrixának spektrumát nevezzük. Ezzel kapcsolatban fölmerül egy kérdés: mi van, ha esetleg más sorrendben számozzuk be a csúcsokat, és így más adjacenciamátrixot kapunk? Nos, a válasz megnyugtató: az új mátrix spektruma megegyezik a régiével, így az iménti definíció tényleg egy gráfjellemzőt, és nem pedig egy mátrixjellemzőt ad. Valóban,

az új  $A'$  mátrix az eredeti  $A$  mátrixból a sorok és velük megegyező indexű oszlopok szimultán cseréivel kapható. Ez mátrixnyelven úgy írható le, hogy  $A' = P^\top AP$ , ahol  $P$  egy alkalmas permutációmátrix (az olyan  $0 - 1$  mátrixokat nevezzük így, melyeknek minden sorában és oszlopában pontosan egy darab egyes van). Azt is könnyű meggondolni, hogy  $P^\top = P^{-1}$ . Eszerint  $A'$  és  $A$  hasonló mátrixok, így a karakterisztikus polinomjuk, és emiatt a spektrumuk is megegyezik. (Ezt könnyen ellenőrizhetjük is:  $A'$  karakterisztikus polinomja  $\chi_{A'}(x) = \det(xI - A') = \det(xI - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(xI - A)P) = \det P^{-1} \det(xI - A) \det P = \det(xI - A) = \chi_A(x)$ .) A hasonlóság következményeként azonnal adódik, hogy a két minimálpolinom is ugyanaz.

A fenti gondolatmenet megismételhető az  $L$  és  $Q$  mátrixokra is, így beszélhetünk a gráf **Laplace-spektrumáról** illetve az **előjelmentes Laplace-spektrumáról**. Korábban már megállapítottuk, hogy a Laplace- és előjelmentes Laplace-spektrum nemnegatív valós számokból áll (ez algebrából ismeretes, de könnyen meg is gondolható, hogy e tény ekvivalens a mátrix pozitív szemidefinit voltával), továbbá láttuk, hogy a Laplace-spektrum biztosan tartalmazza a nullát.

Mivel az itt tárgyalt mátrixok mind valós szimmetrikusak, minden sajátértékük valós. Ám a szimmetriának nem ez az egyetlen következménye, ami hasznunkra lehet. Ismeretes, hogy egy szimmetrikus mátrix diagonalizálható, mi több, a diagonális alakhoz tartozó sajátbázis ortonormált. Ennek segítségével könnyen belátható, hogy a minimálpolinom éppen a különböző gyökökhöz tartozó elsőfokú gyöktényezők szorzata. A diagonalizálhatóságnak köszönhetően a sajátértékek algebrai és geometriai multiplicitása megegyezik, így a továbbiakban röviden csak multiplicitást mondunk.

Példaként lássuk a fenti fogalmakat a 2.1 gráfra!

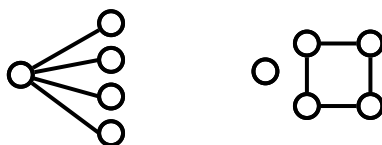
---

Karakterisztikus polinom:	$\chi_G(x) = x^5 - 7x^3 - 6x^2$
Spektrum:	$-2, -1, 0, 0, 3$
Minimálpolinom:	$m(x) = (x + 2)(x + 1)x(x - 3) = x^4 - 7x^2 - 6x$
Laplace-spektrum:	$0, 2, 2, 5, 5$
Előjelmentes Laplace-spektrum:	$\approx 0.6277, 2, 2, 3, \approx 6.3722$

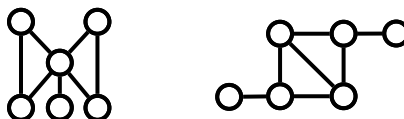
---

**2.3.1. Megjegyzés.** Fölmerülhet bennünk a kérdés, hogy a különböző spektrumokból milyen gráftulajdonságokra tudunk következtetni, netán meghatározza-e a spektrum izomorfia erejéig a gráfot. Az előbbi kérdésre adandó válasszal könyvek tölthetők meg, mi is ennek boncolgatásával foglalkozunk a továbbiakban. Az második kérdést viszont gyorsan elintézhethetjük: válasz az utóbbira nemleges. A megegyező spektrumú nemizomorf gráfokat **kospektrálisnak** nevezzük. A 2.2 a legkisebb kospektrális gráfpárt mutatja

(mindkettő karakterisztikus polinomja  $\chi(x) = x^5 - 4x^3$ ), míg a 2.3 ábrán legkisebb összefüggő ilyen példa látható (karakterisztikus polinomjuk  $\chi(x) = x^6 - 7x^4 - 4x^3 + 7x^2 + 4x - 1$ ). Az első példa azt is mutatja, hogy önmagában a spektrum nem hordoz elegendő információt annak eldöntésére, hogy egy gráf összefüggő.



2.2. ábra.



2.3. ábra.

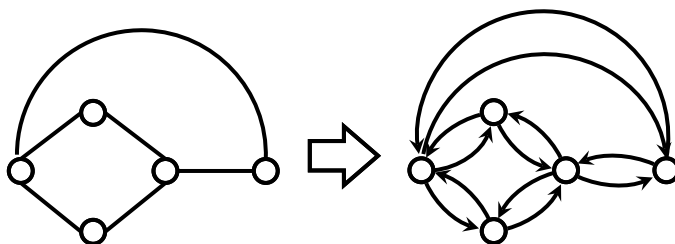
## 2.4. Körséták és a spektrum

**2.4.1. Tétel.** *Legyen  $D$  digráf,  $A$  az ő adjacenciamátrixa,  $k > 0$  egész! Ekkor  $(A^k)_{i,j}$  (azaz  $A^k$  mátrix  $(i, j)$ -dik eleme) éppen az  $i$ -ből  $j$ -be vezető pontosan  $k$  él hosszúságú séták száma.*

**Bizonyítás.** Teljes indukciót alkalmazunk  $k$ -ra nézve. A  $k = 1$  esetre definíció szerint igaz, hiszen az egyhosszú séták épp az élek. Most tegyük fel, hogy  $k - 1$ -re igaz!  $(A^k)_{i,j} = (A^{k-1})_{i,*}(A)_{*,j}$ , azaz  $A^k$   $(i, j)$ -dik eleme  $A^{k-1}$   $i$ -dik sorának és  $A$   $j$ -dik oszlopának skaláris szorzata. E skaláris szorzat nemnulla tagjai megfelelnek azon  $l$  csúcsoknak, melyekből vezet él  $j$ -be, és értékeik az indukciós feltevés szerint az  $i$ -ből  $l$ -be vezető séták száma.  $\square$

A fenti tételt átfogalmazhatjuk irányítatlan gráfokra is. Egy adott  $G$  irányítatlan gráfból állítsuk elő azt a  $D$  digráfot ugyanazon a csúcshalmazon, melyben pontosan azon csúcsok között megy oda és vissza él, amelyek  $G$ -ben össze vannak kötve (példaként lásd a 2.4 ábrát). Ekkor  $G$  és  $D$  adjacenciamátrixa megegyezik, és  $A$  hatványai a 2.4.1 tételnek megfelelően  $G$  sétáit számlálják meg.

A 2.4.1 tétel egyszerű, ámde szellemes következménye az alábbi megfigyelés:



2.4. ábra.

**2.4.2. Megfigyelés.** Egy  $D$  digráf pontosan akkor **DAG** (**D**irected **A**cyclic **G**raph, azaz irányított értelemben körmentes digráf), ha (irányított) adjacenciamátrixa nilpotens.

**Bizonyítás.** Ha  $D$  DAG, akkor benne a séta és út fogalma egybeesik. Az utak hosszának létezik egy  $k$  felső korlátja, azaz nem létezik  $k + 1$ -hosszú út. A 2.4.1 tétel miatt  $A^{k+1}$  minden eleme nulla.

Ha viszont  $D$ -ben létezik egy  $k$ -hosszú irányított kör valamely  $i$  csúcson át valamilyen  $k$ -ra, akkor  $(A^{kj})_{i,i} > 0$  minden  $j$  természetes számra.  $\square$

**2.4.3. Megjegyzés.** A 2.4.1 tétel általánosítható. Legyen most  $A$  tetszőleges mátrix! Gondoljunk úgy  $(A)_{i,j}$ -re, mint az  $i$ -ből a  $j$  csúcsba vezető él súlyára, továbbá értelmezzük egy séta súlyát az élein levő súlyok szorzataként! Ezzel a szóhasználattal  $(A^k)_{i,j}$  éppen az  $i$ -ből  $j$ -be vezető összes  $k$ -hosszú séta súlyának összege. Ez az általánosabb állítás teljesen ugyanúgy igazolható, amint azt a 2.4.1 tétel esetében tettük. Vegyük észre, hogy a súlyokra nem tettünk nemnegativitási feltételt!

A 2.4.2 megfigyelést is átfogalmazhatjuk: egy  $A$  nemnegatív mátrix pontosan akkor nilpotens, ha a neki a fenti értelemben megfelelő digráf aciklikus. Speciálisan ha egy nemnegatív mátrix főátlója tartalmaz nemnulla elemet, akkor az illető mátrix biztosan nem nilpotens.

Külön kiemeljük az alábbi megfigyelést, aminek igazsága a fentiek alapján könnyen meggondolható:

**2.4.4. Megfigyelés.** Legyen  $G$   $n$  csúcsú egyszerű irányítatlan gráf,  $M$  pedig olyan szimmetrikus nemnegatív  $n \times n$ -es mátrix, amelyre  $(M)_{i,j} > 0$  pontosan akkor, ha  $(i, j) \in E(G)$  vagy  $i = j$ . Ekkor  $(M^k)_{i,j} > 0$  pontosan abban az esetben áll fenn, ha létezik  $i$ -ből  $j$ -be pontosan  $k$ -hosszú séta.

Egy pillanatra korlátozzuk vizsgálódásainkat irányítatlan  $G$  gráfra! Az  $A^k$  mátrix főátlójából a körséták számát olvashatjuk ki. Speciálisan ha  $k = 2$ , akkor a  $A^2$  főátlójának  $i$ -dik eleme az  $i$ -ből induló és  $i$ -ben végződő körsétákat, azaz éppen az  $i$ -re illeszkedő éleket számlálja le.  $A^3$  főátlójának bejegyzései pedig ugyanilyen alapon a háromszögek (három hosszú körök) számáról beszélnek. Vigyázzunk, itt egy háromszöget mindkét irányban külön-külön megszámlolunk! Ha  $A^2$  főátlóját összegezzük (matematikai jelöléssel egy  $\text{trace } A^2$ ), azzal minden élet kétszer számoltunk (mindkét végpontjánál egyszer),  $A^3$  nyoma pedig az összes háromszög számának hatszorosa (egy háromszöget mindhárom csúcsából indulva mindkét irányban figyelembe veszünk). Megállapításainkat kimondjuk tétel formájában is.

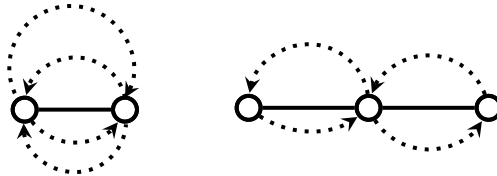
**2.4.5. Tétel.** *Legyen  $G$  irányítatlan gráf,  $A$  az ő adjacenciamátrixa! Ekkor  $\frac{1}{2} \text{trace } A^2$  a  $G$  éleinek száma,  $\frac{1}{6} \text{trace } A^3$  a háromszögek száma.*

Észrevehetjük, hogy  $\text{trace } A^k$  kifejezhető pusztán a spektrumból is: ha a spektrum  $\sigma(A) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , akkor  $\text{trace } A^k = \text{trace}(S^{-1}A^kS) = \text{trace}(S^{-1}AS)^k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$ , ahol  $S^{-1}AS$   $A$  diagonális alakja.

Ha tovább növeljük  $k$  értékét négyre, akkor sajnos azt találjuk, hogy a négyhosszú körök számát már nem határozza meg a spektrum. Viszont ha ismerjük még a fokszámsorozatot négyzetösszegét is, akkor ki tudjuk számítani ezen értéket is.

**2.4.6. Tétel.** *Legyen  $G$  egyszerű, irányítatlan gráf,  $A$  az ő adjacenciamátrixa, és jelöljük  $\deg(i)$ -vel az  $i$  csúcs fokát! Ekkor  $\frac{1}{8}(\text{trace } A^4 + \text{trace } A^2 - 2 \sum_{i=1}^n \deg(i)^2)$  a négyszögek száma.*

**Bizonyítás.** A négyhosszú körsétákat  $\text{trace } A^4$  számlálja le, ebből kell levonni azoknak a



2.5. ábra. Négyhosszú körséták, amik nem körök

számát, melyek nem körök. E két eset a 2.5 ábrán látható. Tehát levonandó egyfelől az élek száma (ezeket a  $\text{trace } A^4$  képlet kétszer veszi figyelembe, mindkét végpontjából tekintve egyszer-egyszer), másfelől a kettő hosszú utak száma. Az utóbbiak száma  $\sum_{i=1}^n \binom{\deg(i)}{2}$ ,



ezeket négyszer kell levonni. Így összességében minden négyszöget nyolcszor számoltunk, tehát a keresett érték:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{8} \left( \text{trace } A^4 - 2|E(G)| - 4 \sum_{i=1}^n \binom{\deg(i)}{2} \right) = \\
& = \frac{1}{8} \left( \text{trace } A^4 - 2|E(G)| - 2 \sum_{i=1}^n \deg(i)(\deg(i) - 1) \right) = \\
& = \frac{1}{8} \left( \text{trace } A^4 - 2|E(G)| - 2 \sum_{i=1}^n \deg(i)^2 + 2 \underbrace{\sum_{i=1}^n \deg(i)}_{4|E(G)|} \right) = \\
& = \frac{1}{8} \left( \text{trace } A^4 + 2|E(G)| - 2 \sum_{i=1}^n \deg(i)^2 \right) = \\
& = \frac{1}{8} \left( \text{trace } A^4 + \text{trace } A^2 - 2 \sum_{i=1}^n \deg(i)^2 \right)
\end{aligned}$$

Felhasználtuk, hogy a binomiális együttható értéke a  $\deg(i) < 2$  esetén definíció szerint nulla, és az értékét kiszámító szorzatalak ugyanezzel a tulajdonsággal rendelkeznek.  $\square$

Az iménti formula megfelelője felírható irányított gráfra is. A 2.4.6 bizonyításával tökéletesen megegyező gondolatmenet meggyőzhet minket róla, hogy ha  $D$  irányított gráf incidenciamátrixa  $A$ , akkor  $D$  négyhosszú köreinek száma

$$\frac{1}{4} \left( \text{trace } A^4 + \text{trace } A^2 - 2 \sum_{i=1}^n (A^2)_{i,i}^2 \right).$$

## 2.5. Az átmérő

Egy összefüggő gráf **átmérőjén** a pontpárjai között realizálódó maximális távolságot értjük. Így például egy  $n$ -pontú teljes gráfnak ( $K_n$ ) 1 (hisz bármely két pontja szomszédos), a 2.1 ábrán látható gráfnak pedig 2 az átmérője. Most felső korlátot adunk a gráf átmérőjére a különböző spektrumok segítségével.

**2.5.1. Tétel.** *Legyen  $G$  összefüggő irányítatlan gráf átmérője  $d$ ! Ekkor*

1.  $G$  (hagyományos) spektruma legalább  $d + 1$  (különböző) számból áll

2.  $G$  Laplace-spektruma szintén legalább  $d + 1$ -elemű

3.  $G$  előjelmentes Laplace-spektruma is legalább  $d + 1$ -elemű.

**Bizonyítás.** Belátjuk, hogy amennyiben  $M$  olyan szimmetrikus nemnegatív  $n \times n$ -es mátrix, amelyre  $(M)_{i,j} > 0$  pontosan akkor, ha  $(i, j) \in E(G)$ , abban az esetben  $M$ -nek legalább  $d + 1$  sajátértéke van.

Tegyük fel, hogy  $M$  különböző sajátértékei  $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_{d+1}$ , és tegyük fel indirekt, hogy  $G$  átmérője nagyobb, mint  $d$ , azaz léteznek  $u$  és  $v$  pontok, melyek távolsága  $d + 1$ ! Ekkor az 1.1 tétel értelmében  $M$  minimálpolinomja  $p(x) = \prod_{i=1}^{d+1} (x - \lambda_i)$ , aminek foka ezek szerint  $d + 1$ . Mivel  $u$  és  $v$  távolsága  $d + 1$ , ezért a 2.4.4 tétel miatt  $(M^l)_{u,v} = 0$  minden  $l < d + 1$  esetén, viszont  $M^{d+1} \neq 0$ , ezért  $(p(M))_{u,v} \neq 0$ , ami ellentmondás.

Ha most  $M$  helyébe  $A$ -t írunk, az első állítást kapjuk, míg  $M = Q$  a harmadik állítást adja. Az  $M = nI - L$  helyettesítésből azt kapjuk, hogy az  $nI - L$  mátrixnak legalább  $d + 1$  sajátértéke van. Viszont  $nI - L$  sajátértékei kölcsönösen egyértelműen megfelelnek  $L$  sajátértékeinek, hiszen ha valamely nemnulla  $v$  vektorra  $(nI - L)v = \lambda v$ , akkor ezt átrendezve  $(n - \lambda)v = Lv$ . Tehát ha  $\lambda$  sajátértéke  $nI - L$ -nek, akkor  $n - \lambda$  sajátértéke  $L$ -nek, és ugyanez persze fordítva is elmondható.  $\square$

**2.5.2. Megjegyzés.** A fenti tétel megfelelőjét elmondhatjuk össze nem függő gráfokra is. Ekkor ha a különböző sajátértékek számát  $d + 1$  jelöli, akkor az egyes komponensek átmérője legfeljebb  $d$ . Mindez nyilvánvaló, ha észrevesszük, hogy a spektrum a komponensek spektrumainak uniója.

## 2.6. A feszítőfák száma

Ebben a részben megmutatjuk, hogy a Laplace-spektrum meghatározza a gráf feszítőfáinak számát. Bevezetünk néhány jelölést: egy  $M$   $n \times n$ -es mátrixra jelölje  $M_{(-i,-j)}$  azt az  $(n-1) \times (n-1)$ -es mátrixot, amelyet  $M$ -ből az  $i$ -dik sor és a  $j$ -dik oszlop elhagyásával kapunk.  $M$   $(i, j)$ -kofaktorának  $\text{cofact}(M, i, j) = (-1)^{i+j} \det M_{(-i,-j)}$  -t nevezzük.

**2.6.1. Tétel.** *Legyen  $G$  irányítatlan multigráf  $n \geq 2$  ponton, melynek Laplace-mátrixa  $L$ , és jelölje  $N(G)$   $G$  feszítőfáinak számát! Ekkor*

1.  $N(G) = \text{cofact}(L, i, j)$  tetszőleges  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ -re

2.  $N(G) = \frac{1}{n} \prod_{i=2}^n \mu_i$ , ahol  $0 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \leq \dots \leq \mu_n$  a Laplace-sajátértékek.

**Bizonyítás.** A bizonyítást több lépésben végezzük.

1. Először belátjuk, hogy  $\text{cofact}(L, i, i) = \text{cofact}(L, i, j)$  tetszőleges  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ -re. Jelölje  $B$  azt a mátrixot, amit  $L_{(-i, -i)}$ -ből kapunk oly módon, hogy a  $j$ -dik oszlopot  $|i - j|$  darab szomszédos oszlop cserével a  $i$ -dik pozícióba mozgatjuk. Ekkor  $\det B = (-1)^{i-j} \det L_{(-i, -i)}$ . Számítsuk ki  $\text{cofact}(L, i, i) - \text{cofact}(L, i, j) = (-1)^{i-j} \det L_{(-i, -i)} - \det L_{(-i, -j)} = (-1)^{i-j} (-1)^{i-j} \det B - \det L_{(-i, -j)}$  értékét. Mivel a  $B$  és az  $L_{(-i, -j)}$  mátrixok csak egy oszlopban (az  $i$ -dikben) térnek el, a determináns linearitása miatt a két tagot összevonhatjuk:

$$\begin{aligned} & \text{cofact}(L, i, i) - \text{cofact}(L, i, j) = \\ & \det \begin{pmatrix} (L)_{1,1} & (L)_{1,2} & \dots & (L)_{1,i} + (L)_{1,j} & \dots & (L)_{1,j-1} & (L)_{1,j+1} & \dots \\ (L)_{2,1} & (L)_{2,2} & \dots & (L)_{2,i} + (L)_{2,j} & \dots & (L)_{2,j-1} & (L)_{2,j+1} & \dots \\ \vdots & & & & & & & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A fenti determináns sorösszegei az  $L$  mátrix sorösszegeivel megegyeznek, az utóbbiakról viszont tudjuk, hogy mind nullák. Így  $\text{cofact}(L, i, i) = \text{cofact}(L, i, j)$ .

2. Legyen  $x \in V(G)$  tetszőleges rögzített csúcs! Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy  $x$  az egyes indexű csúcs, tehát neki az első sor és oszlop felel meg  $L$ -ben. Megmutatjuk, hogy  $N(G) = \text{cofact}(L, x, x)$ . Teljes indukciót alkalmazunk az élszámra vonatkozóan.

- (a) Ha  $\deg(x) = 0$ , azaz  $x$  izolált pont, akkor nem létezik feszítőfa függetlenül attól, hogy egyébként hány élű a gráf. Ekkor  $\text{cofact}(L, x, x) = 0 = N(G)$ , hisz  $L_{(-x, -x)}$  szinguláris, hiszen  $L_{(-x, x)}$  épp  $G \setminus x$  Laplace-mátrixa.
- (b) Most tegyük fel, hogy  $\deg(x) > 0$ , azaz létezik  $x$ -nek egy  $y$  szomszédja, továbbá tegyük fel, hogy minden  $0 \leq k < E(G)$ -élű  $G'$  gráfra igaz, hogy  $N(G') = \text{cofact}(L', x', x')$ , ahol  $x' \in V(G')$  tetszőleges! (Az egyszerűség kedvéért legyen  $y$  a kettes indexű csúcs!) Az indukciós lépés az alábbi megfigyelésen nyugszik:  $N(G) = N(G \setminus xy) + N(G/xy)$ . Valóban, hisz  $N(G \setminus xy)$  az  $xy$  élet nem használó,  $N(G/xy)$  pedig az  $xy$  élet használó feszítőfák száma. Az indukciós feltevés szerint

$$\begin{aligned}
N(G/xy) &= \text{cofact}(L_{G/xy}, (xy), (xy)) = \\
&= \det \begin{pmatrix} \deg(x) + \deg(y) - 2 & (L)_{1,3} + (L)_{2,3} & (L)_{1,4} + (L)_{2,4} & \dots \\ (L)_{3,1} + (L)_{3,2} & (L)_{3,3} & (L)_{3,4} & \dots \\ (L)_{4,1} + (L)_{4,2} & (L)_{4,3} & (L)_{4,4} & \dots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \stackrel{(-1,-1)}{=} \\
&= \det \underbrace{\begin{pmatrix} (L)_{3,3} & (L)_{3,4} & \dots \\ (L)_{4,3} & (L)_{4,4} & \dots \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}}_{=:C}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N(G \setminus xy) &= \text{cofact}(L_{G \setminus xy}, x, x) = \\
&= \det \begin{pmatrix} \deg(x) - 1 & (L)_{1,2} + 1 & (L)_{1,3} & \dots \\ (L)_{2,1} + 1 & \deg(y) - 1 & (L)_{2,3} & \dots \\ (L)_{3,1} & (L)_{3,2} & (L)_{3,3} & \dots \\ (L)_{4,1} & (L)_{4,2} & (L)_{4,3} & \dots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \stackrel{(-1,-1)}{=} \\
&= \det \begin{pmatrix} \deg(y) - 1 & (L)_{2,3} & (L)_{2,4} & \dots \\ (L)_{3,1} & (L)_{3,3} & (L)_{3,4} & \dots \\ (L)_{4,1} & (L)_{4,3} & (L)_{4,4} & \dots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} = \\
&= \det \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & (L)_{2,3} & (L)_{2,4} & \dots \\ 0 & (L)_{3,3} & (L)_{3,4} & \dots \\ 0 & (L)_{4,3} & (L)_{4,4} & \dots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}}_{=: -C} + \det \underbrace{\begin{pmatrix} \deg(y) & (L)_{2,3} & (L)_{2,4} & \dots \\ (L)_{3,1} & (L)_{3,3} & (L)_{3,4} & \dots \\ (L)_{4,1} & (L)_{4,3} & (L)_{4,4} & \dots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}}_{=: D}
\end{aligned}$$

Ezek szerint  $N(G) = N(G \setminus xy) + N(G/xy) = D$ . Viszont

$$\text{cofact}(L, x, x) = \det \begin{pmatrix} \deg(y) & (L)_{2,3} & (L)_{2,4} & \cdots \\ (L)_{3,1} & (L)_{3,3} & (L)_{3,4} & \cdots \\ (L)_{4,1} & (L)_{4,3} & (L)_{4,4} & \cdots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} = D.$$

Ezzel beláttuk, hogy  $N(G) = \text{cofact}(L, x, x)$

3. Most megmutatjuk a második állítás helyességét.  $L$  karakterisztikus polinomja  $p(t) = \det(tI - L) = \prod_{i=1}^n (t - \mu_i) = t \prod_{i=2}^n (t - \mu_i)$ . Ebben  $t$  együtthatója a jobb oldal szerint  $(-1)^{n-1} \prod_{i=2}^n \mu_i$ , a bal oldalból számítva pedig

$$\sum_{i=1}^n \det(-L)_{(-i,-i)} = \sum_{i=1}^n (-1)^{n-1} \underbrace{\det L_{(-i,-i)}}_{=N(G)} = (-1)^{n-1} n N(G).$$

Tehát  $N(G) = \frac{1}{n} \prod_{i=2}^n \mu_i$ .

Ezzel a tételt igazoltuk. □

## 2.7. Páros gráfok és az összefüggőség

Egy gráfot **párosnak** neveziünk, ha csúcshalmaza két csoportba partícionálható úgy, hogy csak a két csoport között fut él. E részben irányítatlan gráfokat vizsgálunk.

**2.7.1. Tétel.** *Egy  $G$  gráf pontosan akkor páros, ha spektruma szimmetrikus a nullára.*

**Bizonyítás.** Az „csak akkor” irányhoz figyeljük meg, hogy  $G$  adjacenciamátrixa  $A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\top & 0 \end{pmatrix}$  alakú (feltéve, hogy a csúcsokat a két pontosztály szerint vettük sorra).

Ezért ha  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  sajátvektor  $\lambda$  sajátértékhez (ahol  $v$  az  $A$  előbbi partíciójával

konformábilis módon van partícionálva), akkor  $w = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix}$  sajátvektor  $-\lambda$ -hoz, hisz

$Aw = \begin{pmatrix} B(-v_2) \\ B^\top v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\lambda)v_1 \\ (-\lambda)(-v_2) \end{pmatrix}$ . Az előbbiekből az is látszik, hogy  $\lambda$  és  $-\lambda$  sajátaltère ugyanynyi dimenziós, tehát a két sajátérték multiplicitása megegyezik.

A másik irányhoz tegyük fel, hogy a spektrum szimmetrikus a nullára! Ekkor  $\text{trace } A^{2k+1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{2k+1} = 0$ , hiszen a sajátértékek  $2k + 1$ -dik hatványai (a nullák kivételével) ellentett párokba állíthatók. A 2.4.1 tétel értelmében  $A^{2k+1}$  főátlójának  $i$ -dik eleme az  $i$  csúcson átmenő  $2k + 1$ -hosszú körséták száma. Lévén egy ilyen darabszám nemnegatív, összegük csak úgy lehet nulla, ha mindegyikük nulla. Ezzel beláttuk, hogy  $G$ -ben nincs páratlan hosszú körséta, és így persze speciálisan páratlan hosszú kör sem. Ezzel a tételt beláttuk, hisz ismeretes, hogy egy gráf pontosan akkor páros, ha nincs benne páratlan hosszú kör.  $\square$

Amennyiben tudjuk, hogy a gráf összefüggő, gyengíthetünk az iménti tétel feltételén.

**2.7.2. Tétel.** *Egy összefüggő  $G$  gráf pontosan akkor páros, ha legkisebb és legnagyobb sajátértéke egymás ellentettje, azaz  $\lambda_{\min} = -\lambda_{\max}$ .*

**Bizonyítás.** Ha  $\lambda_{\max} = \lambda_{\min} = 0$ , akkor kész vagyunk, hisz ekkor nincs éle a gráfnak. Tegyük fel ezért, hogy  $\lambda_{\max} > 0$ ! Az előző tételben láttuk, hogy páros gráf esetén a spektrum szimmetrikus, így  $\lambda_{\min} = -\lambda_{\max}$ .

A másik irányhoz tegyük fel, hogy  $G$  összefüggő, és  $\lambda_{\min} = -\lambda_{\max}$ ! Az 1.2.1 tétel szerint  $\lambda_{\min} = \min_{x \neq 0} \frac{x^\top A x}{x^\top x} = \min_{\|x\|=1} x^\top A x$ . Vegyünk egy ilyen  $x$ -et, amin a minimum felvételük, és jelöljük  $v$ -vel a  $v = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)^\top$  vektort! Mivel

$$x^\top A x = \sum_{i=1}^n \left( x_i \sum_{j:ij \in E(G)} x_j \right) = \sum_{ij:ij \in E(G)} x_i x_j,$$

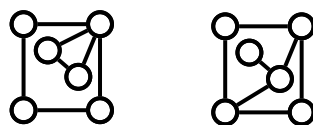
ezért

$$\begin{aligned} \lambda_{\max} = |-\lambda_{\min}| &= |\lambda_{\min}| = |x^\top A x| = \left| \sum_{ij:ij \in E(G)} x_i x_j \right| \leq \\ &\leq \sum_{ij:ij \in E(G)} |x_i| |x_j| = v^\top A v \stackrel{1.2.1 \text{ tétel}}{\leq} \lambda_{\max} \end{aligned}$$

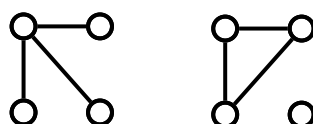
Ezért mindenhol egyenlőségnek kell állnia. Mivel  $\|v\| = 1$  és  $v^\top A v = \lambda_{\max}$ , ezért az 1.2.1 tétel miatt  $v$  sajátvektor  $\lambda_{\max}$ -hoz. A másik dolog, amit észre kell vennünk, hogy  $|\sum_{ij:ij \in E(G)} x_i x_j| = \sum_{ij:ij \in E(G)} |x_i| |x_j|$  pontosan akkor teljesül egyenlőéggel, ha vagy minden  $ij$  élre  $x_i x_j = |x_i| |x_j|$  vagy minden élre  $x_i x_j = -|x_i| |x_j|$ . A első eset nem állhat fenn, hisz akkor  $v$  sajátvektor lenne  $\lambda_{\min} = \lambda_{\max}$ -hoz. Így, ha a két pontosztálynak  $x$  pozitív illetve negatív komponenseinek megfelelő csúcsokat választjuk, akkor minden él a két pontosztály között fut.

Állítjuk, hogy  $x$ -nek nincs nulla komponense, tehát az imént a csúcshalmazt helyesen partíciónáltuk. Ehhez vizsgáljuk meg, mit is jelent az adjacenciamátrix sajátvektorának lenni! Az  $Aw = \lambda w$  egyenlet a  $j$ -dik komponensre épp azt mondja, hogy  $\lambda v_j = \sum_{k:kj \in E(G)} w_k$ , tehát  $w$  pontosan akkor sajátvektor  $\lambda$ -hoz, ha minden  $i$  csúcsra  $\lambda w_i$  épp az  $i$  szomszédaira írt számok összege. Tegyük fel indirekt, hogy valamely  $i$ -re  $x_i = 0 = |x_i|$ ! Ekkor mivel  $v = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$  sajátvektor  $\lambda_{max}$ -hoz, ezért  $|x_i| = 0$  csak úgy lehet, ha minden  $i$  minden  $j$  szomszédjára  $|x_j|$  szintén nulla. A szomszédok szomszédaira ugyanezt elmondhatjuk, végül a gráf összefüggősége miatt azt kapjuk, hogy  $|x_1| = |x_2| = \dots = |x_n| = 0$ , ami ellentmondásban van  $\|v\| = 1$ -gyel.  $\square$

Ezek szerint a (hagyományos) spektrum egyértelműen meghatározza a gráf páros voltát. A Laplace- és előjelmentes Laplace-spektrumról viszont ugyanez nem mondható el (a 2.6 ábra egy Laplace-kospektrális párt mutat, melyek közül csak a jobb oldali páros, a 2.7 képen az előjelmentes Laplace-spektrummal kapcsolatos ellenpédát látunk). Ám ha az előbbi kettő mindegyikét egyszerre ismerjük, akkor már egyértelműen el tudjuk dönteni, páros gráffal állunk-e szemben. A következőkben belátjuk, hogy ez pontosan akkor áll fenn, ha a Laplace- és előjelmentes Laplace-spektrum megegyezik.



2.6. ábra.



2.7. ábra.

**2.7.3. Megfigyelés.** *Egy gráf karakterisztikus polinomja az összefüggő komponensek karakterisztikus polinomjainak szorzata. Így a spektrum a komponensek spektrumainak uniója, ami a multiplicitások összegződésével értendő. Ugyanez igaz a Laplace- és előjelmentes Laplace-spektrumra.*

**2.7.4. Tétel.** *A nulla sajátérték multiplicitása a Laplace-spektrumban éppen az összefüggő komponensek száma.*

**Bizonyítás.** Megmutatjuk, hogy egy összefüggő  $G$  gráf Laplace-spektrumában a nulla egyszeres sajátérték. A fenti megfigyelés miatt ebből már következik a tétel állítása.

Amint a 2.2-ben láttuk,  $L = NN^\top$ , ahol  $N$  a  $G$  egy tetszőleges megirányításának incidenciamátrixa. Ezért  $L$  és  $N^\top$  magtere megegyezik (világos, hogy  $\ker NN^\top \supseteq \ker N^\top$ , a másik irányú tartalmazást pedig a következőképp láthatjuk:  $NN^\top v = 0 \Rightarrow v^\top NN^\top v = 0 = \|N^\top v\|^2 \Rightarrow N^\top v = 0$ ). Tehát ha  $Lv = 0$  valamilyen  $v$  vektorra, akkor  $N^\top v = 0$ . Ez utóbbi mátrixszorzat azt fejezi ki, hogy  $v_i = v_j$  a gráf minden  $ij$  élére. Mivel  $G$  összefüggő, ezért  $v_i$  minden  $i$ -re ugyanaz a konstans érték, tehát az  $Lv = 0$ -t teljesítő vektorok altere egydimenziós.  $\square$

**2.7.5. Megjegyzés.** A bizonyításban érvelhettünk volna a 2.6.1 tétel felhasználásával is. Az  $N(G) = \frac{1}{n} \prod_{i=2}^n \mu_i$  szorzat pontosan akkor nemnulla, ha van feszítőfája a gráfnak. Márpedig feszítőfája épp az összefüggő gráfoknak van.

**2.7.6. Tétel.** *A nulla sajátérték multiplicitása az előjelmentes Laplace-spektrumban éppen a gráf páros komponenseinek száma.*

**Bizonyítás.** Az előjelmentes Laplace-mátrix  $Q = MM^\top$ . Az előző bizonyításban látottak mintájára  $Qv = 0$  pontosan akkor, ha  $M^\top v = 0$ , ami azt jelenti, hogy  $v_i = -v_j$  a gráf minden  $ij$  élére. Ezek szerint, ha egy  $i$  csúcson előírjuk  $v_i$  értékét valami  $c$  konstansra, az az előző bizonyításhoz hasonló gondolatmenettel látható módon meghatározza  $v_j$  értékét minden olyan  $j$ -re, ami  $i$ -vel egy komponensben van. Amennyiben a komponens páros, akkor  $c$  tetszőleges lehet, és így az egyik csúcsosztály pontjait  $c$ -vel, míg a másikat  $-c$ -vel címkézzük. Ha viszont a szóbanforgó komponens nem páros, azaz tartalmaz páratlan kört, akkor mivel e kör mentén a csúcsok felváltva kapnak  $c$  illetve  $-c$  címkét, így körbeérve azt találjuk az első csúcson, hogy címkéje  $c = -c$ . Tehát  $v$  azon komponensei nullák lesznek, melyek nem páros komponensbeli csúcsnak felelnek meg.

Kaptuk tehát, hogy  $Lv = 0$  esetén  $v = (c_1, \dots, c_1, c_2, \dots, c_k, 0, 0, \dots)$  alakú (hallgatólagosan feltételezve, hogy a csúcsokat a komponensek szerint soroltuk fel), ahol  $k$  a komponensek száma,  $c_1, \dots, c_k$  tetszőleges. Az ilyen vektorok altere  $k$ -dimenziós, így a nulla sajátérték multiplicitása  $k$ .  $\square$

**2.7.7. Tétel.** *Egy  $G$  gráf pontosan akkor páros, ha Laplace- és előjelmentes Laplace-spektruma megegyezik.*



**Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy  $G$  páros gráf! Ekkor a 2.7.1 bizonyításának jelöléseivel  $L = \begin{pmatrix} D_1 & B \\ B^\top & D_2 \end{pmatrix}$ ,  $Q = \begin{pmatrix} D_1 & -B \\ -B^\top & D_2 \end{pmatrix}$ , ahol  $D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}$  a 2.1 részben bevezetett diagonálmátrix a foksámokkal. Legyen

$$\Lambda = \left( \begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & & & & \vdots & & & \end{array} \right),$$

ahol is  $\Lambda$  particionálása  $L$  és  $Q$  iménti particionálásának felel meg. Világos, hogy  $\Lambda^{-1} = \Lambda$ , és  $L = \Lambda^{-1}Q\Lambda$ .  $L$  és  $Q$  hasonlók, így spektrumuk megegyezik.

A fordított irány a 2.7.4 és a 2.7.6 tételek egyszerű következménye, hiszen e kettő együtt azt mondja, hogy a páros komponensek száma megegyezik a komponensek számával.  $\square$

## 2.8. Reguláris gráfok

Egy gráfot  $r$ -**regulárisnak** nevezünk, ha minden csúcsának foka  $r$ . Amennyiben csak „reguláris” gráfot mondunk, azt úgy értjük, hogy létezik  $r$ , amire ő  $r$ -reguláris. Egy  $r$ -reguláris gráfnak mindig sajátértéke  $r$ , melyhez sajátvektor a  $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^\top$ , és ha a gráf összefüggő, akkor lényegében nincs is más sajátvektor.

**2.8.1. Megfigyelés.** *Egy  $r$ -reguláris gráf  $r$  sajátértékének multiplicitása az összefüggő komponensek száma.*

**Bizonyítás.** Mivel  $A = rI - L$ , ezért  $Av = rv \Leftrightarrow rv - Lv = rv \Leftrightarrow Lv = 0$ , így  $A$ -nak az  $r$ -hez tartozó sajátaltère ugyanannyi dimenziós, mint  $L$  magtere. Ez utóbbi viszont a 2.7.4 tétel értelmében a komponensek száma.

Egy másik érvelést is mutatunk, amivel ugyanerre az eredményre eljuthatunk. Az  $Av = rv$  egyenlet a  $j$ -dik komponensre épp azt mondja, hogy  $rv_j = \sum_{k:kj \in E(G)} v_k$ . Tegyük fel, hogy  $Av = rv$ , és tekintsük azt az  $i$ -t, amire  $v_i$  maximális. Az előbbi megállapítás

szerint  $v_i$  a szomszédos  $v_j$  értékek átlaga, viszont  $v_i$  maximális volta miatt ez csak úgy lehetséges, ha  $v_j = v_i$   $i$  minden  $j$  szomszédjára. Ugyanezt elmondhatjuk a szomszédokra, majd a szomszédok szomszédaira, és így tovább. Ezek szerint mind a  $k$  darab komponens pontjai ugyanazt a számot kapják a sajátvektor szerint, és az is könnyen látható, hogy tetszőleges  $k$  darab valós szám ilyen módon sajátvektort definiál  $r$ -hez.  $\square$

Ennek segítségével megmutathatjuk azon kevés példa egyikét, amikor a spektrum teljesen karakterizálja a gráfot. Látni fogjuk, hogy a  $K_n$ -nel jelölt  $n$  pontú teljes gráfra ez igaz. Ehhez először határozzuk meg a teljes gráf spektrumát. Erre több módszert is mutatunk.

1. Az  $Av = \lambda v$  egyenlet sorait összeadva  $(n-1) \sum_{i=1}^n v_i = \lambda \sum_{i=1}^n v_i$ , amiből vagy  $\sum_{i=1}^n v_i = 0$ , és ekkor az első egyenletből  $\sum_{i=1}^n v_i - v_1 = -v_1 = \lambda v_1 \Rightarrow \lambda = -1$ , vagy  $\lambda = n-1$ . Tudjuk, hogy  $\text{trace } A = 0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ , ami csak úgy lehetséges, hogy  $\lambda_1 = -1$   $n-1$ -szeres,  $\lambda_2 = n-1$  egyszeres sajátérték.

2. A 2.4.1 tétel szerint  $A^2 = \begin{pmatrix} n-1 & n-2 & n-2 & n-2 & \dots \\ n-2 & n-1 & n-2 & n-2 & \dots \\ n-2 & n-2 & n-1 & n-2 & \dots \\ \vdots & & & \ddots & \end{pmatrix}$ . Ezek szerint  $A$  minimálpolinomja  $m_A(x) = x^2 - (n-2)x - (n-1)$ , ennek gyökei  $n-1$  és  $-1$ , és az 1.1 szerint ezek épp a spektrum elemei. A multiplicitásokat a fentivel megegyező módon állapíthatjuk meg.

Kaptuk tehát, hogy  $K_n$  spektruma  $(-1)^{n-1}, (n-1)^1$  (a rövidség kedvéért a multiplicitást kitevőként szokás írni). Belátjuk, hogy csak a teljes gráf az, aminek a spektruma így néz ki. Ha egy  $G$  gráfnak pontosan két különböző sajátértéke van, akkor a 2.5.1 után tett megjegyzés szerint a gráf komponensei teljes gráfok, hisz csak ezek rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy bármely két pont távolsága egy. Viszont felhasználva, hogy a spektrum a komponensek spektrumainak uniója, azt is megállapíthatjuk, hogy  $G$  összefüggő.

A reguláris gráfokkal kapcsolatban szokás az eddig látott polinomokon kívül egy másikat, az úgynevezett **Hoffmann-polinomot** vizsgálni. A Hoffman-polinom az a legkisebb fokú  $h(x)$  polinom, amire  $h(A) = J$ , ahol  $J$ -vel a csupa 1 mátrixot jelöljük. Belátjuk, hogy a gráfnak ilyen polinomja pontosan akkor létezik, ha az összefüggő és reguláris, és ekkor  $h$  egyértelmű, tehát a fogalom jóldefiniált.

**2.8.2. Tétel.** *Legyen  $G$  egyszerű irányítatlan gráf  $n$  ponton,  $A$  az ő adjacenciamátrixa!*

*Pontosan akkor létezik olyan  $h$  polinom, amire  $h(A) = J$ , ha  $G$  összefüggő és reguláris.*

*A hagyományos  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  jelölési konvenciótól eltérve legyen most  $\lambda_1 = r$ , és  $\lambda_2 < \dots < \lambda_m$  a többi sajátérték, a különbözőeket csak egyszer felsorolva! A legkisebb fokú  $h$ , amire  $h(A) = J$  egyértelmű, mégpedig a következő képlet állítja elő:*

$$h(x) = n \prod_{i=2}^m \frac{x - \lambda_i}{r - \lambda_i}$$

**Bizonyítás.** Először tegyük fel, hogy  $G$   $r$ -reguláris és összefüggő! Legyen  $v$  tetszőleges vektor, amely  $\|v\| = 1$ , és bontsuk fel őt  $A$  ortonormált sajátbázisának megfelelő komponensekre:  $v = \alpha_1 \mathbf{1} + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ . Amint azt láttuk a 2.8.1 megfigyelésben, az  $r$ -hez tartozó sajátaltér egydimenziós, a  $v_1 = \mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$  feszíti, és mint tudjuk, a többi sajátaltér pedig ortogonális rá. Ismeretes, hogy ilyenkor  $\alpha_1 = \langle v, \frac{\mathbf{1}}{\|\mathbf{1}\|^2} \rangle = \langle v, \frac{\mathbf{1}}{n} \rangle$  módon számítható ki. Számítással ellenőrizhető, hogy a bizonyítandó képlettel megadott  $h$ -ra valóban  $h(A) = J$ :

$$\begin{aligned} h(A)v &= h(A) \sum_{i=1}^n v_i = \left( n \prod_{i=2}^m \frac{A - \lambda_i I}{r - \lambda_i} \right) \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \\ &= n \sum_{i=1}^n \left( \left( \prod_{i=2}^m \frac{(A - \lambda_i I)}{r - \lambda_i} \right) \alpha_i v_i \right) = \\ &= n \left( \prod_{i=2}^m \frac{(A - \lambda_i I)}{r - \lambda_i} \right) \alpha_1 v_1 = \end{aligned}$$

felhasználva, hogy  $A$

polinomjai kommutálnak,

és  $\forall i \neq 1$ -re

$v_i \in \ker(A - \lambda_i I)$

$$\begin{aligned} &= n \frac{1}{n} \langle v, \mathbf{1} \rangle \left( \prod_{i=2}^m \frac{(A - \lambda_i I)}{r - \lambda_i} \right) \mathbf{1} = \\ &= \langle v, \mathbf{1} \rangle \left( \prod_{i=2}^{m-1} \frac{(A - \lambda_i I)}{r - \lambda_i} \right) \underbrace{\frac{1}{r - \lambda_m} (A - \lambda_m I) \mathbf{1}}_{=r\mathbf{1} - \lambda_m \mathbf{1}} = \\ &= \dots = \langle v, \mathbf{1} \rangle \mathbf{1} \end{aligned}$$

Ha most  $v$  helyébe  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\top$ -t írunk, akkor azt kapjuk, hogy  $h(A)$   $i$ -dik oszlopa  $\mathbf{1}$ , tehát  $h(A) = J$ .

Ha  $g$ -vel jelöljük az ezek szerint létező legkisebb fokú polinomot, melyre  $g(A) = J$ , akkor  $g$  foka legfeljebb  $h$  foka, azaz  $m$ . Az egyértelműséghez azt fogjuk megállapítani, hogy amennyiben  $g$  olyan polinom, hogy  $g(A) = J$ , akkor  $g$  értéke  $m + 1$  különböző helyen meghatározott, ezért a fokszámfeltétel miatt egyértelmű, azaz egyenlő  $h$ -val. Ha  $Av = \lambda_i v$ , akkor  $g(A)v = g(\lambda_i)v$ , tehát  $A$  minden  $\lambda_i$  sajátértékére  $g(\lambda_i)$  sajátértéke  $g(A)$ -nak ugyanazzal a sajátalattérrel. Ezért  $g(A)\mathbf{1} = J\mathbf{1} = n\mathbf{1} = g(r)\mathbf{1}$ . Viszont az összes többi sajátérték nulla, hisz  $J$  rangja egy. Kaptuk, hogy  $g(r) = n, g(\lambda_2) = 0, g(\lambda_3) = 0, \dots, g(\lambda_m) = 0$ , és az  $m + 1$  feltétel egyértelműen meghatározza  $g$ -t, ami ezek szerint egyenlő a fenti interpolációs képlettel megadott  $h$ -val.

A tétel másik irányához tegyük fel, hogy létezik olyan  $h$  polinom, hogy  $h(A) = J$ ! Vegyük észre, hogy mivel  $J$  az  $A$ -nak polinomja, ezért  $A$  és  $J$  kommutálnak, amiből világosan látszik, hogy minden sorösszeg ugyanynyi, tehát  $G$  reguláris.

Tegyük fel indirekt, hogy létezik a fenti  $h$ , ám  $G$  nem összefüggő, azaz léteznek  $i$  és  $j$  pontok, amik között nem létezik semmilyen hosszú séta! Ez a 2.4.1 tétel utáni megfigyelésünk alapján azt jelenti, hogy  $(A^k)_{i,j} = 0$  minden  $k$ -ra, viszont ezen  $k$ -dik hatványok semmilyen lineáris kombinációja nem adhatja  $J$ -t.  $\square$

## 2.9. Erősen reguláris gráfok

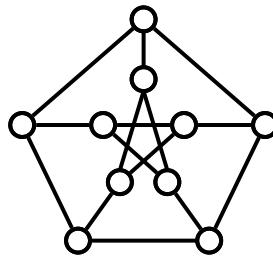
Egy  $G$  gráfot **erősen regulárisnak** nevezzük  $(n, r, \lambda, \mu)$  paraméterekkel, ha

- $n$  csúcsa van
- minden csúcs foka  $r$
- bármely két szomszédos csúcsnak  $\lambda$  darab közös szomszédja van
- bármely két nem szomszédos csúcsnak  $\mu$  darab közös szomszédja van.

Megköveteljük, hogy legyen a gráfban szomszédos és nem szomszédos csúcspár is, hogy a paraméterek jóldefiniáltak legyenek. Ha egy erősen reguláris gráf nem összefüggő, akkor esetleges izolált pontoktól eltekintve azonos méretű teljes gráfok diszjunkt példányainak uniója. Ezt könnyű meggondolni. Az össze nem függőség miatt van két olyan pont, amik különböző komponensben vannak, ezért se nem szomszédosak, se közös szomszédjuk nincs,

emiatt  $\mu = 0$  lehet csak. Éppen  $\mu = 0$  miatt nem fordulhat elő, hogy egy komponensen belül két pont nem szomszédos amennyiben a komponens legalább 3 pontú (kétpontú komponens pedig a  $K_2$ ). Tehát egy  $k$  méretű komponens bármely két (szomszédos) pontjának  $k - 2$  közös szomszédja van. Az erős regularitás miatt ez minden szomszédos pontpárra igaz, így a többi komponens is kénytelen  $K_k$  lenni. Tehát az össze nem függő erősen reguláris gráfok nem túl izgalmasak, így vizsgálódásainkat a továbbiakban összefüggő gráfokra korlátozzuk.

Lássunk néhány példát erősen reguláris gráfokra!



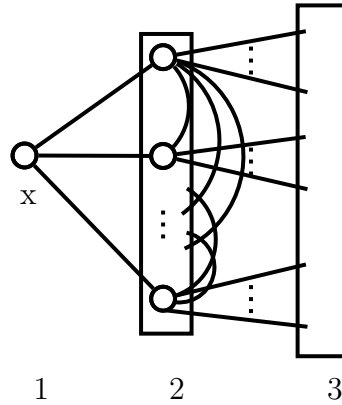
2.8. ábra.

- A négyszög  $(4,2,0,2)$  paraméterekkel
- Az ötszög  $(5,2,0,1)$  paraméterekkel
- A **Petersen-gráf** (2.8 ábra) erősen reguláris  $(10,3,0,1)$  paraméterekkel
- A  $K_n$  teljes gráf  $L(K_n)$  élgráfja  $\left(\binom{n}{2}, 2n - 4, n - 2, 4\right)$  paraméterekkel
- A  $K_{r,r}$  teljes páros gráf  $(2r, r, 0, r)$  paraméterekkel
- A  $K_{r,r}$  teljes páros gráf  $L(K_{r,r})$  élgráfja  $(r^2, 2r - 2, r - 2, 2)$  paraméterekkel
- $K_k$   $m$  darab diszjunkt példányának uniója (ez nem összefüggő)
- Az iménti komplementere, azaz a teljes  $m$ -osztatú gráf  $k$  méretű pontosztályokkal

Belátható, hogy a paraméterek nem függetlenek.

**2.9.1. Tétel.** *Legyen  $G$  erősen reguláris gráf  $(n, r, \lambda, \mu)$  paraméterekkel! Ekkor*

$$r(r - \lambda - 1) = \mu(n - r - 1)$$



2.9. ábra.

**Bizonyítás.** Válasszunk egy  $x$  csúcsot! Három szintre bontjuk a gráfot: az első szint  $\{x\}$ , a második  $x$  szomszédai, a harmadik az  $x$ -től 2 távolságban levők (lásd 2.9 ábra). A második szinten  $r$  darab pont van, ezek mindegyikének  $\lambda$  közös szomszédja van  $x$ -szel, és ezek a közös szomszédok ugyancsak a második szinten vannak. Így minden második szintű csúcsnak  $r - \lambda - 1$  foka marad szabadon, ezért a harmadik szintre belépő élek száma  $r(r - \lambda - 1)$ . Másrészt tudjuk, hogy a harmadik szinten  $n - r - 1$  pont van, és ezek mindegyike  $\mu$  darab második szintbelihez csatlakozik, így a harmadik szintből kilépő élek száma  $\mu(n - r - 1)$ .  $\square$

Az utolsó két példa láttán az a sejtésünk támadhat, hogy erősen reguláris gráf komplementere is erősen reguláris. Ezt fogjuk most belátni.

**2.9.2. Lemma.** *Egy egyszerű  $G$  gráf pontosan akkor erősen reguláris az  $(n, r, \lambda, \mu)$  paraméterekkel, ha  $A$  adjacenciamátrixára fennáll*

$$A\lambda + (J - I - A)\mu + Ir = A^2$$

**Bizonyítás.** A 2.4.1 tétel értelmében az  $(n, r, \lambda, \mu)$  paraméterekkel való erős regularitás

éppen azt jelenti, hogy  $(A^2)_{i,j} = \begin{cases} r & \text{ha } i = j \\ \lambda & \text{ha } i \text{ szomszédos } j\text{-vel} \\ \mu & \text{ha } i \text{ nem szomszédos } j\text{-vel} \end{cases}$ . Ebből már az állítás

triviálisan következik.  $\square$

**2.9.3. Tétel.** *Ha  $G$  egyszerű gráf erősen reguláris  $(n, r, \lambda, \mu)$  paraméterekkel, akkor komplementere is erősen reguláris, méghozzá  $(n, n - r - 1, n - 2r + \mu - 2, n - 2r + \lambda)$  paraméterekkel.*

**Bizonyítás.** Tudjuk, hogy  $G$  adjacenciamátrixára igaz az iménti lemma formulája. Belátjuk, hogy  $\overline{G}$ -nek az  $\overline{A} = J - I - A$  adjacenciamátrixa is teljesíti az egyenlőséget az új paraméterekkel.

$$\begin{aligned} \overline{A}(n - 2r + \mu - 2) + \underbrace{(J - I - \overline{A})}_{=A}(n - 2r + \lambda) + (n - r - 1)I &= \\ &= nJ - 2rJ + \lambda + \underbrace{(J - I - A)\mu + rI}_{=A^2} - 2J + I + 2A = \textcircled{*} \end{aligned}$$

$$\overline{A}^2 = (J - I - A)^2 = \underbrace{J^2}_{=nJ} + A^2 - 2\underbrace{AJ}_{=rJ} - 2J + I + 2A = \textcircled{*}$$

□

A 2.9.2 lemma formuláját átrendezve  $J\mu = A^2 + (\mu - \lambda)A + (\mu - r)I$ , tehát itt van előttünk a Hoffman-polinom. A  $g(x) = x^2 + (\mu - \lambda)x + (\mu - r) = \mu h(x)$  polinom gyökei épp a Hoffman-polinom gyökei, tehát az  $r$ -től különböző sajátértékek. Gondoljunk bele, hogy indokolt a többes szám használata, mert az átmérőkorlátot adó 2.5.1 tétel szerint  $g$ -nek valóban két különböző gyöke van. Nevezzük őket  $\lambda_1$ -nek és  $\lambda_2$ -nek, multiplicitásukat  $m_1, m_2$ -nek! Fölhasználva, hogy  $A$  nyoma, azaz a három sajátérték multiplicitásokkal számolt összege nulla, valamint azt, hogy a  $m_1 + m_2 + 1 = n$  az alábbi lineáris egyenletrendszer kapjuk  $m_1, m_2$ -re:

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= n - 1 \\ m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 &= -r \end{aligned}$$

Mivel a  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  különböző, ez mindig egyértelműen megoldható. Ezzel általános módszert kaptunk, amivel minden erősen reguláris gráf spektrumát meg tudjuk határozni a paraméterek ismeretében.

Láttuk, hogy erősen reguláris gráfnak három sajátértéke van. Ez az állítás meg is fordítható a következő értelemben.

**2.9.4. Megfigyelés.** *Amennyiben egy  $r$ -reguláris, összefüggő  $G$  gráfnak pontosan három sajátértéke van, akkor  $G$  erősen reguláris.*

**Bizonyítás.** Legyen a három gyök  $\lambda_1, \lambda_2$  és  $r$ ! Felírva a Hoffman-polinomot

$$n \frac{(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)}{(r - \lambda_1)(r - \lambda_2)} = J$$

Átrendezve

$$\begin{aligned} A^2 &= (\lambda_1 + \lambda_2)A - \lambda_1\lambda_2I + \frac{(r - \lambda_1)(r - \lambda_2)}{n}J = \\ &= A \left( \frac{(r - \lambda_1)(r - \lambda_2)}{n} + \lambda_1 + \lambda_2 \right) + (J - I - A) \frac{(r - \lambda_1)(r - \lambda_2)}{n} + \\ &\quad + I \left( \frac{(r - \lambda_1)(r - \lambda_2)}{n} - \lambda_1\lambda_2 \right), \end{aligned}$$

ami a 2.9.2 lemma szerint azt jelenti, hogy a sajátértékek meghatározzák, egy szomszédos illetve nemszomszédos csúcspár hány közös szomszédal bír.  $\square$

## 2.10. A Hoffman-Singleton-tétel

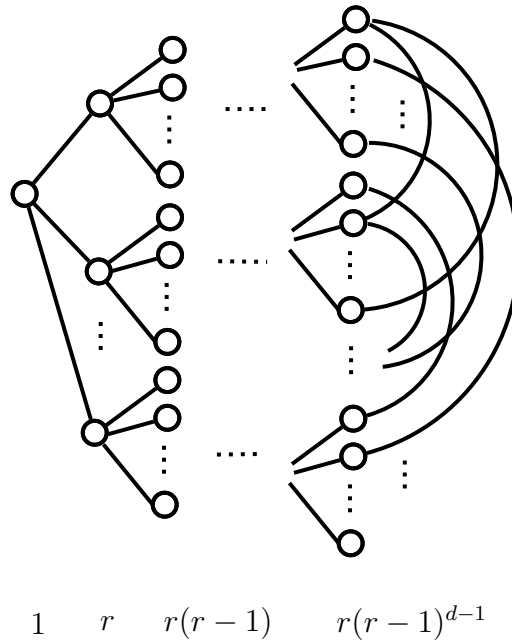
Tekintsünk egy  $G$  egyszerű  $r$ -reguláris gráfot, melynek átmérője  $d$ . Egy ilyen gráfnak legfeljebb  $1 + r + r(r - 1) + \dots + r(r - 1)^{d-1}$  pontja lehet. Valóban, induljunk ki egy tetszőleges csúcsból, mivel az foka  $r$ , ezért tőle 1 távolságban legfeljebb (sőt, pontosan)  $r$  pont lehet. A 2 távolságban levő pontok száma akkor lesz maximális, ha az iménti mind az  $r$  pont mind az  $r - 1$  fennmaradó foka más-más csúcsban ér véget. A gondolatmenetet folytatva a 2.10 ábrához hasonló gráfhoz jutunk. Azon gráfokat, melyek csúcsszáma eléri e korlátot **Moore-gráfoknak** nevezzük.

Ha egy gráf eléri ezt a korlátot, akkor tetszőleges csúcsából indítva az iménti gondolatmenetet mindig azt találjuk, hogy már meglévő csúcsokat csak a legutolsó szinten kötnek össze élek (az ábra jobb oldali íves élei). Ezek szerint a gráfban a legrövidebb kör  $2d + 1$ -hosszú. Egy gráfban a legrövidebb kör hosszát a gráf **bőségének** (angolul girth) nevezik.

Mindez meg is fordítható. Ha egy  $G$  gráf  $r$ -reguláris és bősége  $2d + 1$ , akkor legalább  $1 + r + r(r - 1) + \dots + r(r - 1)^{d-1}$  pontja van. Ez az előbbi gondolatmenet mintájára látható be, amiből az is kiderül, hogy átmérője  $d$ . Ezek szerint a Moore-gráfokat ekvivalens módon definiálhattuk volna olyan  $r$ -reguláris  $2d + 1$  bőségű gráfként, melynek csúcsszáma  $1 + r + r(r - 1) + \dots + r(r - 1)^{d-1}$ .

**2.10.1. Megjegyzés.** Robert Singleton 1968-as cikkében belátta (lásd [12]), hogy ha  $G$  összefüggő, egyszerű, átmérője  $d$ , bősége  $2d + 1$ , akkor szükségképpen  $r$ -reguláris is valamilyen  $r$ -re. Ebből már következik, hogy a csúcsszáma megfelel az előírásnak, hisz a  $d$  átmérő miatt legalább annyi, a  $2d + 1$  bőség miatt pedig legfeljebb annyi pontja van.





2.10. ábra.

Számunkra a 2 átmérőjű, vagy ekvivalensen 5 bőséű Moore-gráfok lesznek most érdekesek, ugyanis ezekről látható, hogy erősen regulárisak  $(1+r+r(r-1) = r^2+1, r, 0, 1)$  paraméterekkel. Valóban, két szomszédos csúcsnak nem lehet közös szomszédja, mert akkor ők hárman 3-hosszú kört alkotnának. Két nem szomszédos csúcsnak biztosan van közös szomszédja, hisz az átmérő 2, viszont nem lehet kettő közös szomszéd, mert akkor ők négyen négyhosszú kört alkotnának, holott a bőség 5. Kérdés, hogy milyen  $r$ -re létezik ilyen gráf.

Amint azt az előző részben láttuk, a sajátértékeket és multiplicitásukat ki tudjuk számítani a paramétereiből:

$$g(x) = x^2 + x + (1-r) \Rightarrow \lambda_1 = \frac{-1 - \sqrt{4r-3}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-1 + \sqrt{4r-3}}{2}$$

$$m_1 + m_2 = r^2$$

$$m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 = -r$$

A második egyenletbe beírva a gyököket:

$$\frac{m_1 - m_2}{2} \sqrt{4r-3} - \underbrace{\frac{m_1 + m_2}{2}}_{=\frac{r^2}{2}} + r = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(m_1 - m_2)\sqrt{4r - 3} = r(r - 2)$$

Itt ha  $\sqrt{4r - 3}$  nem egész, akkor amint azt számelméletből tudjuk, irracionális. Ebben az esetben  $m_1 = m_2$ , amiből  $r = 2$ .

Ha  $\sqrt{4r - 3} =: t$  pozitív egész, akkor  $r = \frac{t^2+3}{4}$ . Ezt beírva

$$(m_1 - m_2)t = \frac{t^2 + 3}{4} \left( \frac{t^2 + 3}{4} - 2 \right)$$

$$\Updownarrow$$

$$16(m_1 - m_2)t = t^4 - 2t^2 - 15$$

Az utolsó egyenlet teljesülése esetén  $t$  osztja 15-öt, azaz  $t = 1, 3, 5, 15$  számok valamelyike, amiből rendre  $r = 1, 3, 7, 57$ . Kaptuk tehát, hogy csakis  $r = 1, 2, 3, 7, 57$  esetén létezik ilyen gráf. Ezt tétel formájában is kimondjuk.

**2.10.2. Tétel. (Hoffman-Singleton)** *Ha  $G$  gráf erősen reguláris  $(1+r+r(r-1), r, 0, 1)$  paraméterekkel, akkor  $r = 2, 3, 7$  vagy  $57$ .*

Az első három értékhez tudjuk, hogy létezik is megfelelő Moore-gráf:  $r = 2$ -re az öthosszú kör,  $r = 3$ -ra a Petersen-gráf és  $r = 7$  az úgynevezett Hoffman-Singleton-gráf (lásd [7]). Viszont az  $r = 57$ -reguláris Moore-gráf létezése a kérdés 1960-as felvetése óta megoldatlan.

## 2.11. Becslések a sajátértékekre

**2.11.1. Tétel.** *Legyenek  $G$  és  $G'$  irányítatlan gráfok! Ha  $G'$  feszített részgráfja  $G$ -nek, akkor  $\lambda_{\min}(G) \leq \lambda_{\min}(G') \leq \lambda_{\max}(G') \leq \lambda_{\max}(G)$ , ahol  $\lambda_{\min}(\cdot)$  és  $\lambda_{\max}(\cdot)$  a legkisebb és legnagyobb (hagyományos) sajátértéket jelölik.*

**Bizonyítás.** Mivel  $G'$  adjacenciamatrixa  $G$  adjacenciamatrixából annak a műveletnek az ismételt alkalmazásaként születik, hogy valamely  $i$ -re elhagyjuk az  $i$ -dik sort és az  $i$ -dik oszlopot, az állítás az 1.4.1 tétel triviális következménye.  $\square$

**2.11.2. Megjegyzés.** Ha  $G'$  (nem feltétlenül feszített) részgráfja  $G$ -nek, akkor  $\lambda'_{\max} \leq \lambda_{\max}$ , ahol  $\lambda'_{\max}$  és  $\lambda_{\max}$  rendre  $G'$  és  $G$  legnagyobb sajátértéke. Mivel az izolált pontok nem

befolyásolják a legnagyobb a sajátértéket, ezért  $G'$  tekinthető mint egy  $|E(G')| \leq |E(G)|$  élű gráf  $G$  csúcshalmazán. Legyen  $y$  egység hosszú sajátvektora  $G'$ -nek  $\lambda'_{max}$ -höz. Ekkor

$$\lambda'_{max} \stackrel{1.2.1 \text{ tétel}}{=} y^\top A_{G'} y = \sum_{ij \in E(G')} y_i y_j \leq \sum_{ij \in E(G)} y_i y_j = y^\top A_G y \stackrel{1.2.1 \text{ tétel}}{\leq} \lambda_{max}$$

A  $G$  gráfban előforduló legkisebb és legnagyobb fokszámot rendre  $\delta(G)$  és  $\Delta(G)$  jelöli.

**2.11.3. Megfigyelés.**  $G$  irányítatlan gráf minden  $\lambda$  sajátértékére  $|\lambda| \leq \Delta(G)$

**Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy  $Av = \lambda v$ , ahol  $v \neq 0$ , és legyen  $i$  az az index, amire  $|v_i|$  maximális! Az  $\lambda v = Av$  mátrixegyenlet  $i$ -dik sorának abszolút értéke

$$|\lambda v_i| = |\lambda| |v_i| = \left| \sum_{j:ij \in E(G)} v_j \right| \leq \sum_{j:ij \in E(G)} |v_j| \leq \deg(i) \max_{j:ij \in E(G)} |v_j| \leq \Delta(G) \max_{j:ij \in E(G)} |v_j|$$

Átrendezve

$$|\lambda| \leq \Delta(G) \underbrace{\frac{\max_{j:ij \in E(G)} |v_j|}{|v_i|}}_{\leq 1} \leq \Delta(G).$$

□

**2.11.4. Tétel.** Legyen  $G$  irányítatlan gráf  $n$  csúcson, és jelölje  $\delta(G)$  a legkisebb,  $\Delta(G)$  a legnagyobb fokszámot! Ekkor

$$\delta(G) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \deg(i) \leq \lambda_{max}(G) \leq \Delta(G).$$

Az átlagos fokszám pontosan akkor egyenlő  $\lambda_{max}$ -szal, ha  $G$   $r$ -reguláris  $r = \lambda_{max}$ -re, és ekkor a fenti négy szám mindegyike egybeesik.

**Bizonyítás.** A felső korlát épp az előbbi megfigyelés, a legkisebb fokszám pedig nyilvánvalóan kisebb az átlagos fokszámnál. A megmaradó egyenlőtlenséghez az 1.2.1 tételt használjuk.

$$\lambda_{max} = \max_{x \neq 0} \frac{x^\top A x}{x^\top x} \geq \frac{\mathbf{1}^\top A \mathbf{1}}{\mathbf{1}^\top \mathbf{1}} = \frac{1}{n} \sum_{i,j \in \{1, \dots, n\}} (A)_{i,j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \deg(i) = \frac{2|E(G)|}{n},$$

ahol  $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^\top$ . Az 1.2.1 tétel szerint itt pontosan akkor áll egyenlőség, ha  $\mathbf{1}$  sajátvektor  $\lambda_{max}$ -hoz, ami épp azt jelenti, hogy  $G$   $\lambda_{max}$ -reguláris. (És ilyenkor persze  $\lambda_{max}$  egész.) □

**2.11.5. Tétel.**  $G$  gráf pontosan akkor reguláris, ha sajátértékeire  $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \lambda_{max} n$  teljesül.

**Bizonyítás.** Láttuk, hogy  $r$ -reguláris gráfban  $\lambda_{max} = r$ , és a foksámösszeg (ami 2.4.5 tétel miatt  $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2$ ) éppen  $rn$ .

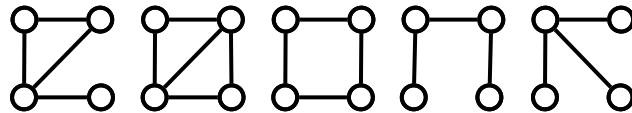
A másik irányhoz osszunk le  $n$ -nel! Így már világos, hogy  $\lambda_{max}$  most az átlagos foksám, és ezért a 2.11.4 tétel értelmében  $G$  reguláris.  $\square$

A minimális sajátértékre is mutatunk néhány triviális korlátot.

**2.11.6. Tétel.**  $G$  összefüggő gráf minimális sajátértékére igazak a következők:

- $\lambda_{min} \leq 0$ , és egyenlőség csak az élmentes gráfra áll
- ha  $G$  nem nullgráf, akkor  $\lambda_{min} \leq -1$ , és egyenlőség pontosan a teljes gráfra áll
- ha  $G$  nem nullgráf és nem teljes gráf, akkor  $\lambda_{min} \leq -\sqrt{2}$ , és egyenlőség pontosan  $K_{1,2}$ -re áll

**Bizonyítás.** Mivel  $\text{trace } A = 0$ , ezért  $\lambda_{min} \leq 0$ . Amennyiben  $G$ -nek van éle, akkor  $K_2$  feszített részgráfja, így a 2.11.1 tétel miatt  $\lambda_{min} \leq \lambda_{min}(K_2) = -1$ . Amennyiben  $G$  nem nullgráf és nem teljes gráf, akkor van benne  $K_{1,2}$  feszített részgráfként, emiatt  $\lambda_{min} \leq -\sqrt{2}$ .



2.11. ábra.

Ha  $G$  nemüres, nem teljes, nem  $K_{1,2}$ , akkor legalább négypontú. Meggondolható, hogy izomorfia erejéig 5 darab összefüggő négypontú nemteljes gráf van (kettő tartalmaz háromszöget, 3 pedig nem). Ezek a 2.11 ábrán láthatóak. Közülük mindegyikre igaz, hogy  $\lambda_{min} < -\sqrt{2}$ . Ha  $G$  legalább négypontú, nemteljes és összefüggő, akkor tartalmazza a fenti öt valamelyikét feszített részgráfként, így 2.11.1 tétel miatt  $\lambda_{min}(G) < -\sqrt{2}$ .  $\square$

**2.11.7. Megjegyzés.** Az esetek módszeres végigvizsgálásával belátható, hogy az üres és teljes gráfon, valamint  $K_{1,2}$ -n kívül csak a 2.11 ábra első gráfja az, amire  $\lambda_{min} \geq -1.5$ .

## 2.12. A kromatikus szám

Egy  $G$  gráfot  $k$ -színezhetőnek mondunk, ha csúcsai kiszínezhetők  $k$ -színnel úgy, hogy minden szomszédos csúcspár különböző színt kap. A legkisebb ilyen  $k$  számot a gráf **kromatikus számának** mondjuk, és  $\chi(G)$ -vel jelöljük. Világos, hogy minden gráf kiszínezhető  $\Delta(G) + 1$  színnel, hisz ha mohó módon egymás után sorra színezzük ki a csúcsokat, akkor mindig legfeljebb  $\Delta(G)$  színt zár ki a színezés eddigi állása. Ennél most erősebb korlátot mondunk.

**2.12.1. Tétel.**  $\chi(G) \leq 1 + \lambda_{max}(G)$

**Bizonyítás.** Töröljünk ki  $G$ -ből csúcsokat egymás után, míg végül egy úgynevezett  $\chi(G)$ -kritikus  $H$  részgráfot kapunk, azaz olyan  $H$ -t, hogy bármely  $v \in H$ -ra  $\chi(H \setminus v) = \chi(G) - 1$ . Azt állítjuk, hogy  $\delta(H) \geq \chi(G) - 1$ . Valóban, hisz ha lenne kisebb fokú  $w$  csúcs, akkor  $H \setminus w$  gráf  $\chi(G) - 1$ -színezhető lenne, és utána hozzávéve  $w$ -t nem volna szükségünk újabb színre. Így

$$\chi(G) \leq 1 + \delta(H) \underset{2.11.4 \text{ tétel}}{\leq} 1 + \lambda_{max}(H) \underset{2.11.1 \text{ tétel}}{\leq} 1 + \lambda_{max}(G)$$

□

## 3. fejezet

# Vegyes témák

### 3.1. Korlátozásos variációk

Egy leszámplálási problémát fogunk most megvizsgálni, amit a 2.4.1 tétel ismeretében egyszerűen meg fogunk tudni oldani. Az olvasó számára bizonyára nem jelent nehézséget megválaszolni a következő kérdést: adott egy  $n$ -elemű  $H$  halmaz, az egyszerűség kedvéért válasszuk ezt most  $H := \{1, 2, \dots, n\}$ -nek, és kíváncsiak vagyunk rá, hányféle  $k$ -hosszú sorozatot képezhetünk  $H$  elemiből. Azt mondjuk, hogy  $H$  halmaz  $k$ -adosztályú ismétléses variációinak számát keressük. Jólismert tény, hogy a válasz  $n^k$ .

Mi a helyzet akkor, ha  $H$  minden elemére előírjuk, hogy a sorozatban mely  $H$ -beli elemek lehetnek az ő rákövetkezői? Ezt megadhatjuk egy  $A$   $0 - 1$  mátrixszal:

$$(A)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i\text{-t közvetlenül követheti } j \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Rájöhetünk, hogy ez tekinthető egy irányított gráf adjacenciamátrixának, és ezen nyelven fogalmazva a feladat a következőképp szól: adott egy  $G$  digráf a  $H$  csúcshalmazon, keressük az összes  $k$  hosszú séta számát. A 2.4.1 tétel értelmében  $(A^k)_{i,j}$  az összes  $i$ -ből induló és  $j$ -ben végződő  $k$ -hosszú séta száma. Ezek szerint nincs más dolgunk, mint e számokat összeadni minden  $i, j$ -re:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (A^k)_{i,j}$$

## 3.2. Páratlan távolságok

**3.2.1. Tétel.** *Nem adható meg a síkon négy pont úgy, hogy páronkénti távolságaik mindegyike páratlan egész legyen.*

**Bizonyítás.** Tegyük fel indirekt, hogy létezik négy ilyen pont. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük azt is, hogy egyikük az origó, a másik hármat nevezzük  $a, b, c$ -nek. Ekkor feltevésünk, hogy  $\|a\|, \|b\|, \|c\|, \|a - b\|, \|a - c\|, \|b - c\|$  mindegyike páratlan egész. (A skaláris szorzat alatt  $\mathbb{R}^n$  szokásos belső szorzatát, azaz a koordinátánkénti szorzatösszeget értjük,  $\|\cdot\|$  pedig az általa indukált norma.) Ki fogjuk használni, hogy páratlan szám négyzete eggyel kongruens modulo 8. Valóban, hisz

$$(2k + 1)^2 = 4 \underbrace{k(k + 1)}_{\text{páros}} + 1 \equiv 1 \pmod{8}$$

Ezért  $\|a\|^2 = \langle a, a \rangle \equiv 1 \pmod{8}$ , és a koszinusztételből

$$2\langle a, b \rangle = \underbrace{\|a\|^2}_{\equiv 1} + \underbrace{\|b\|^2}_{\equiv 1} - \underbrace{\|a - b\|^2}_{\equiv 1} \equiv 1 \pmod{8}$$

Tekintsük a következő  $B$  mátrixot!

$$B = \begin{pmatrix} \langle a, a \rangle & \langle a, b \rangle & \langle a, c \rangle \\ \langle b, a \rangle & \langle b, b \rangle & \langle b, c \rangle \\ \langle c, a \rangle & \langle c, b \rangle & \langle c, c \rangle \end{pmatrix}$$

Ekkor

$$2B \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =: R \pmod{8},$$

ahol a kongruenciát elemenként értjük. Általában igaz, hogy ha  $C$  és  $D$  mátrixokra  $C \equiv D \pmod{m}$ , akkor  $\det C \equiv \det D \pmod{m}$ , hiszen

$$\det C = \sum_{\sigma \text{ permutáció}} (-1)^{\text{sgn}(\sigma)} \prod_{i=1}^n \underbrace{(C)_{i, \sigma(i)}}_{\equiv (D)_{i, \sigma(i)}} \equiv \sum_{\sigma \text{ permutáció}} (-1)^{\text{sgn}(\sigma)} \prod_{i=1}^n (D)_{i, \sigma(i)} = \det D \pmod{m}$$

Így  $\det(2B) = 2^3 \det(B) \equiv \det R = 4 \pmod{8}$ , ami azt mutatja, hogy  $B$  nemszinguláris, azaz rangja 3.

Vezessük be az  $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$  mátrixot, aminek oszlopai  $a, b$  és  $c$  koordinátavektorai. Ezzel  $B = A^T A$ . Mivel szorzat rangja legfeljebb a tényezők rangja, ezért  $\text{rank } B \leq 2$ . Ezen ellentmondás igazolja a tételt.  $\square$

### 3.3. A Graham-Pollak-tétel

Feladatunk a következő: fedjük le a  $K_n$  teljes gráf éleit minél kevesebb teljes páros gráffal úgy, hogy minden élet csak egyszer fogunk le! Egy triviális megoldást rögtön tudunk mondani. Minden él önmagában  $K_{1,1}$  teljes páros gráf, így  $\binom{n}{2}$  darab  $K_{1,1}$  jó fedés. Viszont ennél kevesebb gráf is elég. Válasszuk először egy csúcs és a szomszédai által alkotott csillagot (ami  $K_{1,n-1}$ ), és hagyjuk el ezt a gráfból. Így csak fedett élet hagyunk el, és a megmaradó csúcsok egy  $K_{n-1}$ -et feszítenek, amire megismételhetjük a műveletet. Ezt folytatva egy  $n - 1$ -elemű fedést kapunk. Bebizonyítjuk, hogy ennél kisebb fedés nem is létezik.

**3.3.1. Tétel.** *Ha  $m$  darab teljes páros gráf éldiszjunkt módon fedi egy  $n$  pontú teljes gráf minden élet, akkor  $m \geq n - 1$*

**Bizonyítás.** Jelölje  $G_1, G_2, \dots, G_m$  a fedő gráfokat, közülük az  $k$ -dik a két pontosztálya legyen  $X_k$  és  $Y_k$ ! Vezessük be minden  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ -re az  $A_k$  mátrixot a következőképp:

$$(A_k)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i \in X_k \text{ és } j \in Y_k \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad ! \text{ Minden } k\text{-ra rank } A_k = 1, \text{ hisz minden nemnulla sora}$$

megegyezik. Ha tekintjük az  $S = \sum_{k=1}^m A_k$  mátrixot, akkor  $S + S^\top = J - I$ , hisz minden élet pontosan egyszer fedtünk le.

Állítjuk, hogy ha  $S$  teljesíti az iménti egyenlőséget, akkor  $\text{rank } S \geq n - 1$ . Ugyanis tegyük fel indirekt, hogy  $\text{rank } S \leq n - 2$ ! Ekkor az

$$Sx = 0$$

$$\mathbf{1}x = 0$$

homogén lineáris egyenletnek van nemtriviális  $x$  megoldása. Mivel  $Jx = 0$ , ezért

$$S^\top x = (S + S^\top)x = (J - I)x = -x.$$

Emiatt  $-\|x\|^2 = (-x)^\top x = (S^\top x)^\top x = x^\top Sx = 0$ , amiből  $x = 0$ , ez pedig ellentmondás.

Ezek szerint

$$n - 1 \leq \text{rank } S = \text{rank} \sum_{k=1}^m A_k \leq \sum_{k=1}^m \underbrace{\text{rank } A_k}_{=1} = m,$$

ahol felhasználtuk, hogy mátrixok összegének rangja legfeljebb a tagok rangjainak összege.  $\square$



### 3.4. $K_{10}$ fedése Petersen-gráfokkal

$K_{10}$ -nek 10 csúcsa van, mindegyiknek foka 9, egy Petersen-gráf ugyancsak 10 csúcsának mindegyike harmadfokú. Fölmerülhet a kérdés, hogy beágyazható-e a Petersen-gráf három példánya éldiszjunkt módon  $K_{10}$ -be úgy, hogy együtt minden éle lefedjenek. A válasz nemleges.

**3.4.1. Tétel.** *Nincs három éldiszjunkt részgráf  $K_{10}$ -ben úgy, hogy mindegyik izomorf egy Petersen-gráffal, és  $K_{10}$  mindegyik éle benne van a három Petersen-gráf valamelyikében.*

**Bizonyítás.** Tegyük fel indirekt, hogy van három ilyen részgráf, melyek adjacenciamátrixai rendre  $A_1, A_2$  és  $A_3$ ! Mivel együtt az összes éle lefedik, ezért  $A_1 + A_2 + A_3 = J - I$ . Amint az előző fejezetben láttuk, egyszerűen meggyőződhetünk róla, hogy a Petersen-gráf spektruma  $(-2)^4, 1^5, 3^1$ , ahol a multiplicitást kitevőként jelöltük. Állítjuk, hogy létezik  $A_2$ -nek és  $A_3$ -nak közös sajátvektora az 1 sajátértékhez. Valóban. Ehhez vegyük észre, a  $\mathbf{1}$  vektor által feszített  $\mathbb{R}\mathbf{1}$  altér mindkettőnek sajátaltere 3-hoz, így mindegyiküknek minden más sajátalterétől diszjunkt. Ha  $A_2$  és  $A_3$  1-hez tartozó  $V_2$  és  $V_3$  sajátalterei is diszjunktak lennének, akkor  $\dim(\mathbb{R}\mathbf{1} \oplus V_2 \oplus V_3) = 10 + 1$  lenne, ami lehetetlen.

Vegyünk tehát egy  $v \neq 0$  vektort  $V_2 \cap V_3$ -ből! Ekkor  $v^\top \mathbf{1} = 0$ , hiszen szimmetrikus mátrix különböző sajátértékekhez tartozó sajátalterei ortogonálisak egymásra. Ezért

$$A_1 v = (J - I - A_2 - A_3)v = \underbrace{Jv}_{=0} - v - \underbrace{(A_2 - I)v}_{=0} - \underbrace{(A_3 - I)v}_{=0} - 2v = -3v$$

Eszerint  $-3$  sajátértéke  $A_1$ -nek, ami nem igaz. □

### 3.5. Általánosított Fisher-egyenlőtlenség

**3.5.1. Tétel.** *Legyen  $S = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $C_1, C_2, \dots, C_m$   $S$  részhalmazai úgy, hogy egyik sem üres és bármely két különbözőnek a metszete ugyanannyi elemű. Ekkor  $m \leq n$ .*

**Bizonyítás.** Jelölje  $C_i \cap C_j$  elemszámát  $t$   $i \neq j$ -re!

Külön kezeljük azt az esetet, mikor létezik  $k$ , amire  $C_k \subseteq C_i$  minden  $i$ -re. Ekkor  $C_i \setminus C_k$  halmazok  $i \neq k$ -ra diszjunkt részhalmazai  $\{1, 2, \dots, n\} \setminus C_k$ -nak, ezért legfeljebb  $|\{1, 2, \dots, n\} \setminus C_k| \leq n - 1$ -en vannak.

Most tegyük fel, hogy  $d_i := |C_i| > t$  minden  $i$ -re. Definiáljuk  $A$   $n \times m$ -es mátrixot a következőképp:

$$(A)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i \in C_j \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Ekkor a  $B = A^\top A$  ( $m \times m$ -es) metszetmátrix így fest:

$$B = A^\top A = \begin{pmatrix} d_1 & t & t & \dots & t \\ t & d_2 & t & \dots & t \\ t & t & d_3 & \dots & t \\ \vdots & & & \ddots & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Ha belátjuk, hogy  $B$  rangja  $m$ , akkor kész vagyunk, hisz  $\text{rank } B = \text{rank}(A^\top A) \leq \text{rank } A \leq n$ . Megmutatjuk, hogy  $\text{rank } B$  valóban  $m$ . Ehhez belátjuk, hogy  $B$  pozitív definit. Vegyük észre, hogy

$$B = tJ + \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 - t & 0 & 0 & \dots & t \\ 0 & d_2 - t & 0 & \dots & t \\ 0 & 0 & d_3 - t & \dots & t \\ \vdots & & & \ddots & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}}_{=:D}$$

Itt tetszőleges  $x \neq 0$ -re  $x^\top (tJ)x = t \sum_{i,j \in \{1,2,\dots,m\}} x_i x_j = (t \sum_{i=1}^m x_i)^2 \geq 0$  és  $x^\top D x = \sum_{i=1}^m (d_i - t)x_i^2 > 0$ , ezért  $B$  pozitív definit, és így rangja  $m$ .  $\square$

# Irodalomjegyzék

- [1] Andries E. Brouwer, Willem H. Haemers, *Spectra of graphs*, Universitext. Springer, New York, 2011
- [2] László Babai, Péter Frankl, *Linear Algebra Methods in Combinatorics*, befejeztlen kézirat
- [3] Lowell W. Beineke (szerk.), Robin J. Wilson (szerk.), *Topics in Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, 2011
- [4] Richard A. Brualdi, Dragoš Cvetković, *A Combinatorial Approach to Matrix Theory and Its Applications*, Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton). CRC Press, Boca Raton, FL 2009
- [5] Richard A. Brualdi, Herbert J. Ryser, *Combinatorial Matrix Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **39**. Cambridge University Press, Cambridge, 1991
- [6] Chris Godsil, Gordon Royle, *Algebraic Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics, **207**. Springer-Verlag, New York, 2001
- [7] Hoffman, A. J.; Singleton, R. R. *On Moore graphs with diameters 2 and 3*. IBM J. Res. Develop. **4** 1960 497-504 33
- [8] Jiří Matoušek, *Thirty-three Miniatures: Mathematical and Algorithmic Applications of Linear Algebra*. Student Mathematical Library, **53**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010
- [9] Carl D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2000

- [10] Hung Q. Ngo, *Linear Algebra Primer*,  
<http://www.cse.buffalo.edu/~hungngo/classes/2005/Expanders/notes/LA-intro>,  
előadásjegyzet
- [11] Hung Q. Ngo, *Introduction to Algebraic Graph Theory*,  
<http://www.cse.buffalo.edu/~hungngo/classes/2005/Expanders/notes/AGT-intro>,  
előadásjegyzet
- [12] Robert Singleton, *There is No Irregular Moore Graph*, Amer. Math. Monthly **75** 1968  
42-43. 31