Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Gergely Noémi

Numerikus módszerek a Black-Scholes egyenlet megoldásához

BSc Szakdolgozat

Témavezető:

Tóth Árpád

Analízis Tanszék

Budapest, 2014

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Tóth Árpádnak, aki hasznos ötletivel és kérdéseimre adott kielégítő válaszaival segítette munkámat.
Valamint köszönettel tartozom családomnak, barátaimnak és a csoporttársaimnak, akik kitartóan támogattak egyetemi éveim alatt.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Opció fajták:

Az opciók olyan ügyletek,melyek értéke más értékpapírok árfolyamától függ. Feltételes követelésnek is szokták nevezni ezeket az eszközöket. Ma már opciós ügyletekkel számos tőzsdén kereskednek. Ezek többségében részvényekre, devizára, nemesfémekre, részvényindexekre, határidős kamatláb-csereügyletekre és mezőgazdasági termékekre szólnak.

1.0.1. Alapfogalmak áttekintése:

1.0.1. Definíció. *A vételi opció (call option) egy jogot (de nem kötelezettséget) biztosít az opció tulajdonosának, hogy egy adott időben vagy adott időig megvásárolja az opció tárgyát egy meghatározott árfolyamon, (kötési árfolyamon).*

1.0.2. Megjegyzés. A vételi opció tulajdonosának csak akkor éri meg lehívni vételi opcióját , ha a megvásárolandó opció tárgyának piaci értéke meghaladja a kötési árfolyamot.

Ha a piaci árfolyam nagyobb a kötési árfolyamnál, akkor az opció tulajdonosa lehívhatja az opció tárgyát a kötési árfolyamon és így profitra tehet szert! De ha nem hívja le a lejáratáig, akkor a vételi opció lejár, és nem lesz már többé értéke!

$$\text{Jövedelem} = \text{Részvényárfolyam - Kötési árfolyam}$$
$$\text{Profit} = \text{Jövedelem - Eredeti befektetés}$$

1.0.3. Definíció. *Az opció tulajdonosának az eladási opció (put option) jogot biztosít arra, hogy egy meghatározott áron adjon el egy eszközt (az opció alapját képző tárgyat).*

A vételi opció estében minél alacsonyabb az eszközértéke (azaz csökken),annál nagyobb profitunk lesz, míg ezzel szemben az eladási opciót akkor éri meg lehívni, ha az opció tárgyának árfolyama alacsonyabb,mint a kötési árfolyam.

$$\text{Jövedelem} = \text{Kötési árfolyam - Részvény árfolyam}$$
$$\text{Profit} = \text{Jövedelem - Eredeti befektetés}$$

Ezek után, most vizsgáljuk meg az opciók nyereségességi helyzetét. Az opciós ügyletek nyereségességi helyzete a piaci ár és a lehívási ár alakulásától függ.
Ha a lehívási ár alacsonyabb, mint a piaci ár, akkor a vételi opció nyereséges, míg ha eladási opcióról van szó akkor az veszteséges lesz.
Ha a lehívási ár megegyezik a piaci árral, akkor sem a vételi opciót sem az eladási opciót nem érdemes lehívni, hisz ilyenkor egy semleges helyzet áll elő, ugyanis ebben az esetben nem lesz nyereségünk.
Viszont, ha a lehívási ár nagyobb, mint a piaci ár, akkor a vételi opció esetében veszteséges helyzet áll elő, míg az eladási opciónál nyereséges.
Ezt most foglaljuk össze egy táblázat segítségével:

Piaci helyzet	Vételi opció	Eladási opció
Piaci ár > Lehívási ár	Nyereséges	Veszteséges
Piaci ár = Lehívási ár	Semleges	Semleges
Piaci ár < Leívási ár	Veszteséges	Nyereséges

Érdemes figyelni még a prémium összegére is, azaz az opciós jogért fizetett díjra. Ugyanis előállhat olyan helyzet is, mikor a piaci ár nagyobb mint a lehívási ár, azaz a vételi opciónk lehívása elvileg nyereséggel járna, de a prémium összeg meghaladja ezt a nyereségességi összeget, ekkor vagy pont semlegesen jövünk ki vagy pont veszteségesen, és ekkor nem éri meg lehívni az opciónkat. Tehát összefoglalva nyereségességi helyzet így állhat elő:

$$\text{Vételi opció: Piaci ár} > \text{Lehívási ár} + \text{Prémium}$$
$$\text{Eladási opció: Lehívási opció} < \text{Piaci ár} + \text{Prémium}$$

Ha egy opciót rögtön lehívunk és ez jövedelmet biztosít az opció tulajdonosának, akkor ezt belsőértékkel rendelkező (in-the-money, ITM) opciónak nevezzük. Viszont, ha a lehívás veszteséges, akkor az opciót belső érték nélkülinek (out-of-the-money, OTM) hívjuk. Ezek alapján, a vételi opció ITM, ha az eszköz árfolyama alatt van a kötési árfolyam, ellenkező esetben OTM-ről beszélünk. Hasonlóan belső értéke van az eladási opciónak, ha az eszköz értéke felett van a kötési árfolyam. Egy opció at-the-money (ATM), ha az eszköz azonnali ára megegyezik a kötési árfolyammal.

1.1. Opció típusok:

1.1.1. Európai típusú opció:

Az Európai opció esetében, az opció tulajdonosa kizárólag egy előre meghatározott időpontban élhet opciós jogával. (Miszerint, hogy lehívja az opciót vagy sem.)
A vételi opció kiírójának "csak" annyi a kockázata, hogy neki rendelkeznie kell az alaptermékkel az előre meghatározott időpontban, ugyanis nem tudhatja előre, hogy az opció tulajdonosa lehívja majd az opciót vagy sem.

1.1.2. Amerikai típusú opció:

Az Amerikai típusú opciónál az opció tulajdonosa már nem csak egy adott pillanatban élhet opciós jogával-mint az Európai opció esetében-, az opció lehívása egy adott időintervallum alatt bármikor megtörténhet.
Ekkor a vételi opció kiírójának a kockázata is nagy lesz, hisz az opció lehívása bármikor megtörténhet, ezért az alapterméknek is mindig rendelkezésre kell állnia. Ez pedig igencsak jelentős költséget jelent a kötelezett számára.

1.1.3. Bermuda típusú opció:

A Bermuda opció az Európai és az Amerikai típusú opciók között egy átment, hisz ekkor az opció jogosultja csak megadott időpontokban élhet opciós jogával.

1.1.4. Egzotikus opció:

Valamilyen szempontból eltérnek az elsődlegesen alkalmazott opciós típusoktól, innen is kapták nevüket.

1. Limitáras opciók (más néven korlátos opciók):
   A limitáras opciók kifizetése függ attól, hogy meghaladja-e az alaptermék ára az előre meghatározott limitet. Ha nem haladja meg ezt a korlátot, akkor az opció limitár alatt értéktelen és akkor jár le, mikor az alaptermék ára alacsonyabb lesz, mint a limitár. Azonban a limitár alatt értékes opciók az árfolyam limitár alá esésekor fizetnek. Ez egy olyan opció melynek értéke az adott termék lejárati ára mellett még attól is függ, hogy ez az ár átlép-e egy bizonyos korlátot.

2. Bináris opció (vagy fogadásos opció):
   Ebben az esetben ha jól tippeljük meg az eszköz árának elmozdulást nyerünk ellenkező esetben veszítünk. Vételi opció esetén a tulajdonos arra számít, hogy emelkedni fog az eszköz ára, míg eladási opció esetén az ár csökkenését várja. Ha jól tippeltünk, akkor "Bent a pénzben" kifejezést használjuk, viszont ha veszítettünk, akkor pedig a "Kint a pénzből" kifejezést. "Pénznél" kifejezést akkor használjuk, mikor az eszköz árában elmozdulás nem történik, ebben az esetben nem is nyertünk és nem is veszítettünk, és ilyenkor a befektetett pénzünket is visszakapjuk.

1.1.5. Összetett opciós pozíciók:

Ezeknek a pozícióknak az a lényege, hogy olyan kombinációkat hozzanak létre a befektetők, mellyel minimalizálni tudják a kockázatot, és a nyereséget pedig maximalizálni. Az összetett opciók egy típusa az opciós spreadek. A spredek esetében is ugyanúgy egy opció eladásról és egy másik vételéről beszélünk. Ami viszont még fontos a spreadeknél, hogy azonos típusú opcióknak kell lenniük, azaz vagy csak eladási vagy csal vételi lehet az opciónk. Két főtípusa van a bull spread és a bear spread.

1. Bull spread

   A befektető bull spread esetén az árak emelkedésére számít, éppen ezért egy olyan opciót fog megvenni, melynek a küszöbára alacsonyabb és egy olyat ad majd el, melynek a küszöbára magasabb.

   Vételi opció esetén, egy adott lehívási áron kell vásárolnia egy vételi opciót, és egy magasabb lehívási áron eladni egy másik opciót, természetesen ugyanazzal a lehívási időponttal.

   Az eladási opciónál pedig a befektető egy alacsonyabb lehívási áron vásárol eladási opciót, és egy magasabb lehívási áron ad elegy másikat.

2. Bear spread

   A bear spread fordítottja a bull spreadnek, ugyanis itt a befektető nem az árfolyamok növekedésére számít, hanem éppen a csökkenésükre. Épp ezért fog megvenni egy magasabb kötési árfolyamú opciót és fog eladni egy alacsonyabb kötési árfolyamút.

   Vételi opció esetén a befektető először magasabb kötési árfolyamon vásárol opciót és alacsonyabb kötési árfolyamon fog eladni egy másik vételi opciót.

   Eladási opciók kombinációjaként is előállítható bear spread. Mégpedig egy magasabb árfolyamon lévő eladási opció megvásárlásával, és egy eladási opció alacsonyabb árfolyamon történő eladásával állítható elő.

3. Butterfly spread (Pillangó)

   A Pillangó-féle összetett pozíció négy opciós pozíció kombinációja alkotja. Két spread illetve egy bull spread és egy bear spreadből áll. Ennek a lényege, hogy két közepes árfolyamú vételi opciót adunk elés egy magasabb meg egy alacsonyabb árfolyamú vételi opciót veszünk meg.

Ezen opciók közül néhányat a következő fejezetben részletesebben megvizsgálunk.

2. fejezet

Különböző típusú opciók

2.1. Black-Scholes egyenlet:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{2.1}$$

Rövidebb alakja:

$$\tfrac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{L}_{BS}V = 0$$

ahol,

V(S,t) jelöli az opció értékét

S a részvény árfolyamot

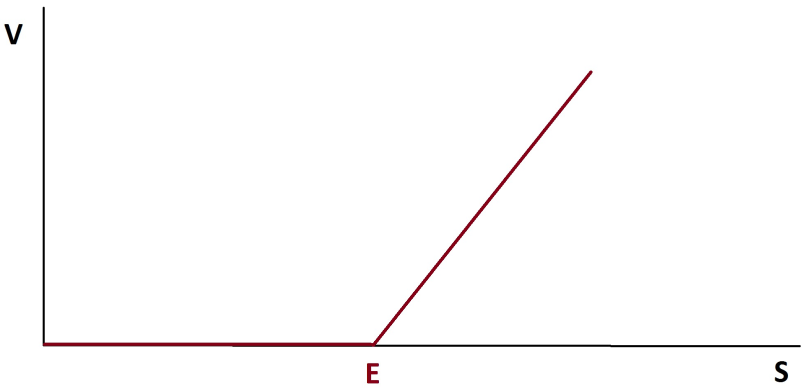
r kockázatmentes kamatlábat

σ a volatilitást

Ennek az egyenletnek több megoldásai is lehet a peremfeltételektől függően. Az S és t (idő) lehetséges értékeinek határán ezek a feltételek határozzák meg a származtatott ügyleteink értékét.

2.2. Európai vételi opció:

Az első fejezetben már láttuk, hogy a vételi opció jogot biztosít az opció tulajdonosának arra, hogy a lejárati időpontba (T) lehívja az opciót. Természetesen csak akkor van értelme az alaptermék megvásárlásának, ha az eszköz jelenértéke magasabb mint a lehívási ár, azaz $S > E$. Ha ez a lehívás nem történik meg - $S \leq E$ esetén - akkor az opció értéktelen lesz. Tehát az opció lejáratkori értéke vagy 0 vagy $S - E$, ami a nettó profit.



$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathcal{L}_{BS}C = 0$$
$$C(0,t) = 0$$
$$C(S,t) = Se^{-\delta(T-t)} - Ee^{-r(T-t)}, \text{ ha } S \to \infty$$

$$C(S,T) = max(S-E,0) = \begin{cases} S-E & \text{, ha } S > E \\ 0 & \text{, ha } S \leq E \end{cases}$$

Ismert a vételi opció analitikus megoldása:

$$C(S,t) = Se^{-\delta(T-t)}N(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$$

A jelölések:

$$d_1 = \frac{lnS - lnE + (r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{2.2}$$

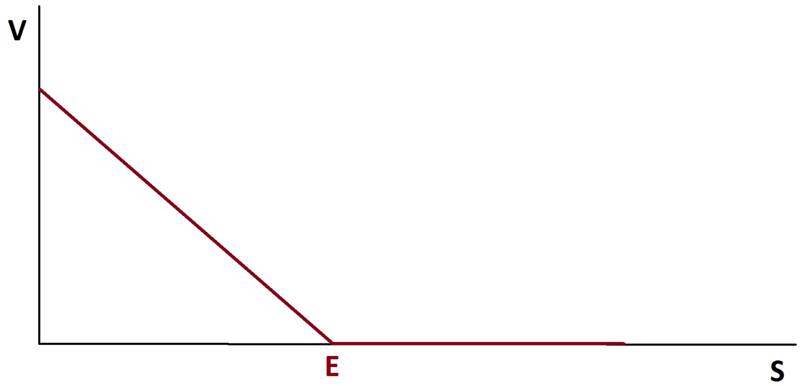
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \tag{2.3}$$

$$N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \tag{2.4}$$

Az $N(d_2)$paraméter jelöli annak a valószínűségét, hogy a lehívási árnál magasabb lesz az eszköz értéke, a δ pedig a folytonos osztalék hozamát.

2.3. Európai eladási opció:

Az európai eladási opció jogot biztosít az opció tulajdonosának, hogy eladjon egy eszközt egy előre meghatározott kötési árfolyamon (E) a lejáratkori időben (T). Ha az eszköz ára magasabb, mint a lehívási ár akkor az opció értéktelen, azaz $P(S,T) = 0$ $\forall S > E$. Ha az eszköz ára alacsonyabb, mint a lehívási ár, akkor a nettó profit $E - S$.



A peremérték feltételek:

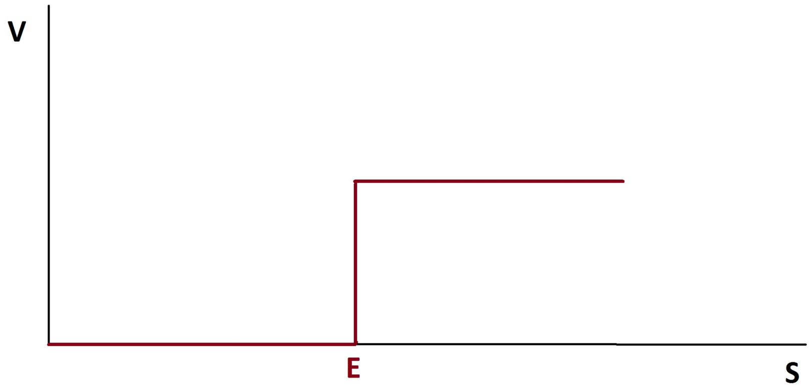
$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mathcal{L}_{BS} P = 0$$
$$P(0,t) = Ee^{-r(T-t)}$$
$$P(S,t) = 0, \text{ha } S \to \infty$$
$$P(S,T) = max(E-S,0) = \begin{cases} E-S & ,\text{ha } S < E \\ 0 & ,\text{ha } S > E \end{cases}$$

Az eladási opció analitikus megoldása is ismert (d_1, d_2 és az N, pedig a (2.2), (2.3) és (2.4) egyenleteknél már láttuk):

$$P(S,t) = Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) - Se^{-\delta(T-t)}N(-d_1)$$

2.4. Digitális vételi opció

Vételi opció esetén, a kereskedő az eszköz emelkedésére számít. Már akkor is nyereséges egy ilyen bináris opciós üzlet, ha az eszköz árában csak nagyon minimális emelkedés történik.



A digitális vételi opció a Heaviside függvénnyel írható le:

$$\mathcal{H}(S): \begin{cases} C = 1 & \text{,ha } S > E \\ C = 0 & \text{,ha } S < E \end{cases}$$

Összegezve a problémákat:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathcal{L}_{BS}C = 0$$
$$C(0,t) = 0$$
$$C(S,t) = Qe^{-r(T-t)}, S \to \infty$$
$$C(S,T) = Q\mathcal{H}(S-E) = \begin{cases} Q & \text{,ha } S > E \\ 0 & \text{,ha } S < E \end{cases}$$

Az (2.2), és (2.4) egyenletből d_1 és N segítségével ismert a digitális vételi opció analitikus megoldása, miszerint

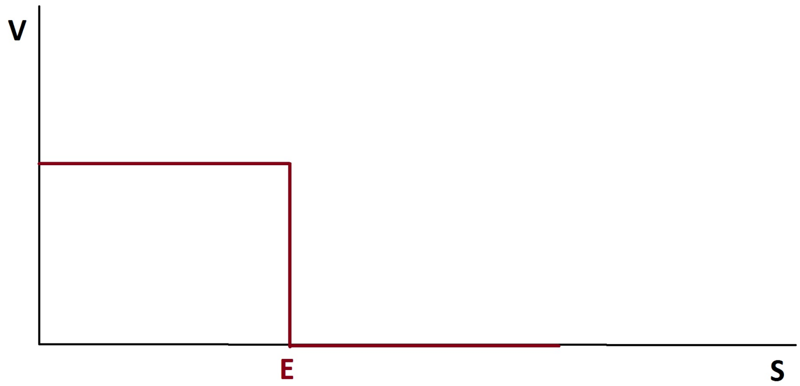
$$C(S,t) = Qe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

Ha az eszköz árában semmilyen változás nem történik akkor az egyenletünk a következő lesz:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathcal{L}_{BS}C = 0$$
$$C(0,t) = 0$$
$$C(S,t) = Se^{-\delta(T-t)}, S \to \infty$$
$$C(S,T) = S\mathcal{H}(S-E) = \begin{cases} S & \text{,ha } S > E \\ 0 & \text{,ha } S < E \end{cases}$$

2.5. Digitális eladási opció

Ebben az esetben a kereskedő az eszköz árának csökkenésére számít. Már akkor is nyereséges egy ilyen bináris opciós üzlet, ha az eszköz árában csak nagyon minimális csökkenés történik.



A digitális eladási opció egyenlete:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mathcal{L}_{BS}P = 0$$
$$P(0,t) = Qe^{-r(T-t)}$$
$$P(S,t) = 0, S \to \infty$$
$$P(S,T) = Q(1 - \mathcal{H}(S - E)) = \begin{cases} 0 & \text{,ha } S > E \\ Q & \text{,ha } S < E \end{cases}$$

A digitális eladási opció analitikus megoldása:

$$P(S,t) = Qe^{-r(T-t)}N(-d_2)$$

Emellett az a lehetőség is fennáll, hogy az eszközben semmi változás nem történik. Ekkor az egyenletünk:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mathcal{L}_{BS}P = 0$$
$$P(0,t) = Se^{-\delta(T-t)}$$
$$P(S,t) = 0, \text{ha } S \to \infty$$
$$P(S,T) = Q(1 - \mathcal{H}(S - E)) = \begin{cases} 0 & \text{,ha } S > E \\ S & \text{,ha } S < E \end{cases}$$

Megoldása ekkor az opciónknak:

$$P(S,t) = Se^{-\delta(T-t)}N(-d_1)$$

2.6. Korlátos (limitáras) opciók

A korlátos opciók is különböznek az európai vanília[1] opcióktól. Ezeket az opciókat is az egzotikus opciók közé soroljuk. Ebben a részben a limitár alatt értéktelen opciókról lesz szó. Limitár alatt értéktelen az opciónk, ha az alaptermék ára nem haladja meg az előre meghatározott B korlátot. Tehát az opció értéktelen ha $S < B$, és ezért a baloldali peremfeltétel változik, miszerint $V(B,t) = 0$ helyett $V(0,t) = 0$ lesz. Egyetlen megoldás, hogy a differenciál egyenletet a $S \in [B, S_{max}]$ területen kell megoldani.
A pontos megoldása:

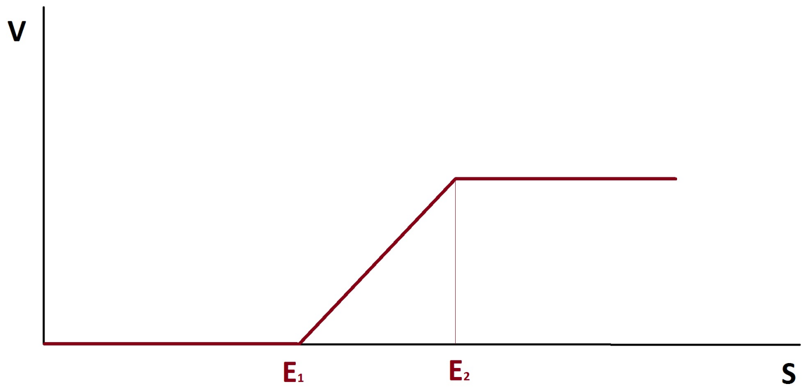
$$V(S,t) = C(S,t) - (\tfrac{S}{B})^{-(k-1)}C(\tfrac{B^2}{S}, t)$$

ahol $C(S,t)$ jelöli a standard európai vételi opció megoldását, és $k = \frac{2r}{\sigma^2}$.

2.7. Összetett opciós pozíciók

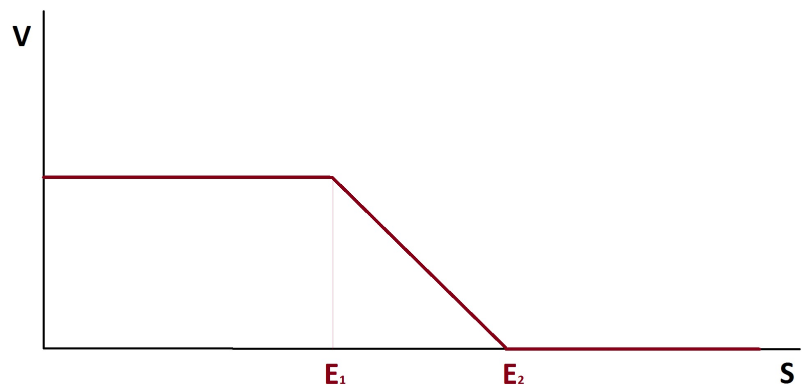
◦ Bull spread (Erősödő különbözeti ügylet)
Vételi opció esetén, a maximális veszteség a kapott és fizetett prémiumok különbsége, míg a maximális nyereség a lehívási árak különbsége lesz.
Az eladási opciónál pedig a maximális nyereség a kapott és a fizetett prémiumok különbsége, és a maximális veszteség pedig a különböző lehívási árfolyamok különbsége lesz.

[1] Egy termék legegyszerűbb változatának elnevezése



$$V(S,t) = max(S-E_1,0) - max(S-E_2,0) \begin{cases} 0 & ,\text{ha } S < E_1 \\ S - E_1 & ,\text{ha } E_1 < S < E_2 \\ S & ,\text{ha } S > E_2 \end{cases}$$

○ Bear spread (Gyengülő különbözeti ügylet)
Vételi opció esetén a maximális nyereség a kifizetett és a kapott prémiumok különbsége lesz, míg a maximális veszteség pedig a lehívási árak különbsége.
Eladási opciónál pedig a maximális nyereség a lehívási árfolyamok különbsége, és a maximális veszteség pedig a kifizetett és a kapott prémiumok különbsége lesz.

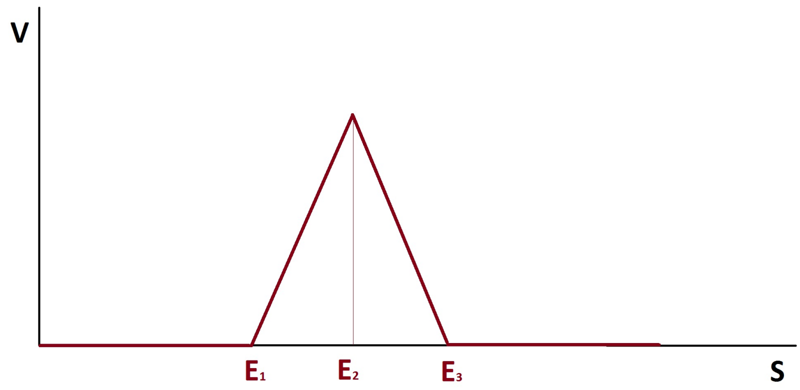


$$V(S,t) = max(E_1 - S, 0) - max(E_2 - S, 0) \begin{cases} S & , \text{ha } S < E_1 \\ E_2 - S & , \text{ha } E_1 < S < E_2 \\ 0 & , \text{ha } S > E_2 \end{cases}$$

◦ Butterfly spread (Pillangó)

Pillangó vétele esetén a befektető a volatilitás csökkenését várja vagy azt, hogy egy bizonyos intervallumon belül legyen lejáratkor az árfolyam. Ebben az esetben a nyereség a középső árfolyam és a szélső árfolyamok közül a kisebbik különbsége plusz a kapott és a fizetett prémiumok különbsége lesz.

Pillangó eladásnál a befektető a volatilitás emelkedésére számít, illetve hogy az azonnali ár jelentősebben tér majd el lejáratkor az árfolyamtól. A nyereség a kapott és a kifizetett prémiumok különbsége és a veszteség pedig a középső árfolyam és a szélső árfolyamok közül a kisebbik különbsége plusz a kapott és a fizetett prémiumok különbsége.



$$V(S,t) = (max(S - E_1, 0) - max(S - E_2, 0)) +$$

$$+(max(E_2 - S, 0) - max(E_3 - S, 0)) \begin{cases} S & , \text{ha } S < E_1 \\ S - E_1 & , \text{ha } E_1 < S < E_2 \\ E_3 - S & , \text{ha } E_2 < S < E_3 \\ 0 & , \text{ha } S > E_3 \end{cases}$$

3. fejezet

Black-Scholes egyenlet matematikai áttekintése

3.1. Részvény derivatívák árszabása és elemzése

Ezekkel az eszközkészletekkel opciók és egyéb részvény derivatívák árszabása, érzékenysége és profit portfóliója számítható ki. Ehhez hasonló becslések hasznosak portfóliók kezelésére.

3.1.1. Érzékenységi vizsgálatok

Az opció árszabással kapcsolatban 6 alapvető vizsgálattípust említhetünk: Δ(delta), Γ(gamma), Λ(lambda), ρ(rho), Θ(theta) és Vega – a „görögök". Az eszközcsomaggal lehetőségünk nyílik ezek érzékenységének és implikált volatilitásának kiszámolására.

1. Δ: Egy származtatott értékpapír deltája nem más, mint a saját értékének a változási üteme az alap nyereség árához viszonyítva. Ez azon görbe első deriváltja, mely összekapcsolja a származék árát az alap értékpapírok árával. Ha delta nagy, a származék ára érzékeny az alap értékpapírok árának kis változásaira.$\Rightarrow$ $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$
2. Γ: Egy származtatott értékpapír gammája kifejezi a delta változási ütemét az alap nyereség árához képest. Azaz a második deriváltja az opció árának az ér-

tékpapír árához képest. Ha gamma kicsi, delta változása kicsi. Az érzékenységvizsgálat fontos annak az eldöntésében, hogyan szabályozzuk a hedge[1] pozícióját.⇒ $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$

3. Λ: Más néven egy opció rugalmasságaként nevezik. Egy opció árának százalékos változását reprezentálja az alap értékpapír árának 1%-os változásának függvényében.

4. ρ: Az opció árának változási üteme az alap értékpapírok kockázatmentes kamatváltozásütemének függvényében.⇒ $\rho = \frac{\partial V}{\partial r}$

5. Θ: Egy származtatott értékpapír árának változási üteme az idő függvényében. Általában nagyon kicsi vagy negatív érték, mivel egy opció értéke általában hajlamos leesni a lejárati időhöz közeledve.⇒ $\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$

6. Vega: Az opció árváltozásának és a volatilitás változásának aránya. Az idő múlásával az alaptermék ára változik, erre utal a volatilitás. Minél nagyobb egy termék változékonysága, annál nagyobb lesz a termékre kiírt opció értéke, akár vételi, akár eladási opcióról van szó. Vételi opció megvásárlása esetén a vega értéke pozitív, és annál nagyobb az értéke minél inkább közelít a lehívási árhoz. Viszont a vételi opció eladásakor a vega értéke negatív és akkor a legkisebb, ha a piaci ár közelíti a lehívási árat. Vega értéke az eladási opció megvételekor is pozitív lesz, s akkor lesz a legnagyobb az értéke, ha a lehívási ár és a piaci ár közötti különbség minimális. Vega értéke az eladási opció eladásakor is negatív lesz és értéke akkor lesz a legkisebb, ha a a piaci és lehívási ár közeli. A volatilitás számszerűsíthető, úgy hogy meghatározzuk az alaptermék folytonos kamatozással számított hozamának szórását.⇒ $Vega = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$

Implikált volatilitás:
Egy opció implikált volatilitása a variancia, amely egy vételi opció árat egyenlővé tesz a piaci árral. Ez egy alaptőke jövőbeni volatilitásának piaci becslésére alkalmazzák ezenkívül – ha szükséges- egy bemenő volatilitást nyújt más Black-Scholes funkciókhoz.

[1] hedge (Fedezeti ügylet): ennek során az árfolyam nem kívánt változásából fakadó kockázatot igyekeznek kivédeni a piaci szereplők. Az árfolyam kockázat ellen védekező adott jövőbeli időpontra, devizára, összegre szólóvételi vagy eladási opciót, jogot vásárol díj ellenében.

Analízis modellek:
Részvény derivatívák analízisére ez az eszközkészlet Black-Scholes modellt alkalmaz. A Black-Scholes modell hipotéziseket állít fel az alap értékpapírokkal és ezek viselkedésével kapcsolatban.

Black-Scholes modell:
A Black-Scholes modell használata az alábbi feltételezéseket vonja maga után:

- Az opció ára egy Ito-folyamatot[2] követ.
- Egy opció csak a lejárati idején belül használható.
- Rövid eladás engedélyezett.
- Nincsenek tranzakciós költségek.
- Minden értékpapír osztható és nem kell fizetni utána jutalékot.
- Nincs kockázatmentes arbitrázs[3].
- A kereskedés egy folytatólagos folyamat.
- A kockázatmentes kamatláb állandó és ugyanannyi marad az összes lejáratig.

3.1.1. Megjegyzés. Ha a felsoroltak közül akár egy is nem teljesül, akkor ez a modell nem használható.

[2]Ito-folyamat: általánosított Wiener-folyamat. Az Ito-folyamat a következő képlettel adható meg: $dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$, ahol a és b paraméterek az alapul szolgáló x változó és az idő függvényei. Általánosított Wiener-folyamat a következő módon írhatjuk fel dz függvényében egy x változóra: $dx = adt + bdz$

[3]kockázatmentes nyereséget biztosító egyszeri ügylet vagy ügyletek egy sorozata

3.2. A Black-Scholes egyenlet visszavezetése a Hővezetési egyenletre

[4] Tegyük fel, hogy adott egy vékony, henger alakú rúd, és jelölje $u(x,t)$ a rúd x koordinátájú pontjának hőmérsékletét a t időpillanatban.
Az egydimenziós Hővezetési [5] egyenlet:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0$$
$$-\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

3.2.1. Definíció. *A Hővezetési egyenlet alapmegoldása:*

$$H(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} & ,ha \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ 0 & ,ha \quad x \in \mathbb{R}, t < 0 \end{cases}$$

$H(x,t)$ ismeretével meghatározható egy adott kezdeti feltételekből kiinduló megoldás.

3.2.2. Tétel. *A hővezetési egyenlet kezdetiérték-probléma megoldása*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(x-s,t)u(s,0)ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\infty}^{\infty} e^{-\frac{|x-s|^2}{4t}} u(s,0)ds \end{aligned} \tag{3.1}$$

A Black-Scholes parciális differenciálegyenlet és peremérték-probléma

$$L(V) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \qquad 0 \leq S, \quad 0 \leq t \leq T$$
$$V(S,T) = f(S), \quad 0 \leq S \qquad V(0,t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T$$

Ha V az értéke a vételi opciónak, akkor a peremérték $f(S) = max(S-E,0)$, ahol E jelöli a vételi opció kötési árfolyamának árát.
Legyen

$$S = e^x, t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}$$

[4] Ebben az alfejezetben az [5] és [6] irodalmat követtem.

[5] Besenyei Ádám - Komornik Vilmos - Simon László: Parciális differenciálegyenletek című könyve alapján

Ebből x és τ kifejezve:

$$\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)$$
$$x = ln(S)$$

Ezek után a $V(S,t)$ a következő lesz:

$$V(S,t) = v(x,\tau) = v\Big(ln(S), \frac{\sigma^2}{2}(T-t)\Big)$$

A V-nek az S és t szerinti első deriváltjai kifejezhető a v x és τ szerinti deriváltjaival.

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial v}{\partial \tau}, \quad \text{mivel} \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{-\sigma^2}{2}$$
$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{1}{S}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \text{mivel} \quad \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{1}{S}$$

Szükségünk van még az S szerinti második deriváltra is:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S}\Big(\frac{\partial V}{\partial S}\Big) = \frac{\partial}{\partial S}\Big(\frac{1}{S}\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\\ &= -\frac{1}{S^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial S}\Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\\ &= -\frac{1}{S^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\frac{\partial x}{\partial S}\\ &= -\frac{1}{S^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{S^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\end{aligned}$$

Behelyettesítve ezeket a kifejezéseket a Black-Scholes egyenletbe a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}\Big(\frac{-\sigma^2}{2}\Big) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\Big(-\frac{1}{S^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{S^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Big) + rS\Big(\frac{1}{S}\frac{\partial v}{\partial x}\Big) - rv = 0 \tag{3.2}$$

Majd $\frac{\partial v}{\partial \tau}$-ra rendezve, az első deriváltban S-sel, míg a második deriváltban S^2-tel és végül az egészet $\frac{\sigma^2}{2}$-vel egyszerűsítve a következő egyszerűsített alakot kapjuk:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\frac{2r}{\sigma^2} - 1)\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2r}{\sigma^2}v$$

Legyen $\kappa = \frac{2r}{\sigma^2}$ és $t = \tau$ (a volatilitás és a kockázatmentes kamatláb arányát méri a κ), ekkor az egyenletünk a következőképpen fog változni

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\kappa - 1)\frac{\partial v}{\partial x} - \kappa v, \tag{3.3}$$

$$ahol, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq t \leq \frac{\sigma^2}{2}T$$

$$v(x,0) = V(e^x, T) = f(e^x), \qquad -\infty < x < \infty$$

A következő átparaméterezéssel tovább tudjuk majd egyszerűsíteni az egyenletünket:

$$v(x,t) = e^{\alpha x + \beta t}u(x,t) = \phi u$$

ahol α-t és β-t olyan konstansok, melyeket később határozunk meg. Ezek után írjuk fel a v-nek x és t szerinti deriváltját:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \beta\phi u + \phi\frac{\partial u}{\partial t}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \alpha\phi u + \phi\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \alpha^2\phi u + 2\alpha\phi\frac{\partial u}{\partial x} + \phi\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Rakjuk ezeket a kifejezéseket a (3.2)-es egyenletbe,

$$\beta\phi u + \phi\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2\phi u + 2\alpha\phi\frac{\partial u}{\partial x} + \phi\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\kappa - 1)\Big(\alpha\phi u + \phi\frac{\partial u}{\partial x}\Big) - \kappa\phi u$$

majd ϕ-vel leosztva

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 u + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\kappa - 1)\Big(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x}\Big) - \kappa u$$

$\frac{\partial u}{\partial t}$-re rendezve.

Majd α-t és β-t úgy választjuk meg, hogy az u együtthatója 0 legyen. Azaz

$$\alpha = -\frac{1}{2}(k-1) = \frac{\sigma^2 - 2r}{2\sigma^2}$$
$$\beta = -\frac{1}{4}(k+1)^2 = -\Big(\frac{\sigma^2 + 2r}{2\sigma^2}\Big)^2$$

α-t β-t behelyettesítve és $\frac{\partial u}{\partial t}$-re rendezve meg is kaptuk a hővezetési egyenletet:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad -\infty < x < \infty, 0 \leq t \leq \frac{\sigma^2}{2}T \tag{3.4}$$

$$u(x,0) = e^{-\alpha x}v(x,0) = e^{-\alpha x}f(e^x), \qquad -\infty < x < \infty \tag{3.5}$$

Már majdnem kész vagyunk, még a kezdeti feltételeket is át kell transzformálnunk. Ha az opció vételi opció, E kötési árfolyammal, akkor $f(x) = max(x - E, 0)$ és

$$\begin{aligned} u(x,0) &= e^{-\alpha x}max(e^x - E, 0) \\ &= e^{-(-\frac{k-1}{2})x - (-\frac{(k+1)^2}{4})0}v(x,0) \\ &= e^{(\frac{k-1}{2})x}max(e^x - 1, 0) \\ &= max(e^{(\frac{k+1}{2})x} - e^{(\frac{k-1}{2})x}, 0) \end{aligned}$$

Ha az x változó szigorúan pozitív, akkor ez az $u(x,0)$ függvény is szigorúan pozitív lesz. A (3.1)-es egyenlethez vezessünk be egy új változót:

$$y = (s-x)/\sqrt{2\tau}$$

Akkor most helyettesítsük is be ezeket az új változót

$$\begin{aligned}
&u(x,\tau)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{\tau\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(s,0) e^{-(s-x)^2/4\tau} dy\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(y\sqrt{2\tau}+x,0) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} max\{e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+y\sqrt{2\tau})} - e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+y\sqrt{2\tau})}, 0\} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+y\sqrt{2\tau})} - e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+y\sqrt{2\tau})}\right) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy\\
&= I_1 - I_2
\end{aligned}$$

Először értékeljük ki I_1-et:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+y\sqrt{2\tau})-\frac{1}{2}y^2} dy\\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} e^{-\frac{1}{2}(y-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau})^2} dy\\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz\\
&= e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \Phi(d_1),
\end{aligned}$$

ahol

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau},$$

és Φ pedig a a normális eloszlás eloszlásfüggvénye, azaz

$$\Phi(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Az I_2 ugyanúgy levezethető, mint az I_1, annyi különbséggel, hogy az $(k+1)$ helyére mindig $(k-1)$-et írunk.
Ezek alapján az I_2 a következő lesz:

$$I_2 = e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau}\Phi(d_2)$$

ahol

$$d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau}$$

Ezek utána transzformált hővezetési egyenlet megoldása a kezdetiérték-problémára:

$$u(x,\tau) = I_1 - I_2 = e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}\Phi(d_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau}\Phi(d_2)$$

Azaz $v(x,t)$ a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned} v(x,t) &= e^{\frac{1}{2}(k-1)x-\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}u(x,\tau) \\ &= e^{\frac{1}{2}(k-1)x-\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}\Big(e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}\Phi(d_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau}\Phi(d_2)\Big) \end{aligned}$$

Végül utolsó lépésként helyettesítsünk be (3.2)-be és $V(S,t)$-be:

$$\begin{aligned} x &= ln(S), \\ \tau &= \frac{1}{2}\sigma^2(T-t), \\ V(S,t) &= v(x,t) \end{aligned}$$

És ezzel végső megoldásként meg is kaptuk a Black-Scholes formulát.

4. fejezet

Véges differenciák módszere

4.1. Egylépéses módszerek

Ebben az alfejezetben a [3] irodalom 9. fejezetének 9.3-as bekezdése alapján lépésről lépésre levezetjük az Egylépéses módszereket.
Csak nagyon speciális f függvény esetén adható meg képlet segítségével a közönséges differenciálegyenletek kezdetiérték-feladatainak megoldásai, éppen ezért *numerikus megoldst* állítunk elő, miszerint az ismeretlen megoldás függvény értékeit véges számú lépéssel közelítve határozzuk meg az értelmezési tartomány egyes pontjaiban.
Most olyan típusú eljárásokat nézünk, ahol valamely rögzített időpontbeli közelítést egy azt megelőző időpontbeli közelítés felhasználásával határozunk meg. Az ilyen módszereket nevezzük egylépéses módszereknek.
Továbbiakban a célunk a

$$\frac{du}{dt} = f(t,u), \quad t \in [0,T] \tag{4.1}$$

$$u(0) = u_0 \tag{4.2}$$

feladat egylépéses módszerrel történő közelítő megoldása, ahol a $T > 0$ olyan szám amely mellett a (4.1) és a (4.2) feladatnak létezik egyértelmű megoldása a $[0,T]$ intervallumon.

4.1.1. Az explicit Euler-módszer

Először bevezetjük a θ-módszert, mert majd szeretnénk felhasználni az explicit Euler-módszer levezetésénél.

4.1.1. Tétel. *Tetszőleges $\theta \in \mathbb{R}$ esetén az*

$$\alpha = (1-\theta)u'(t_i) + \theta u'(t_{i+1}) \tag{4.3}$$

megválasztású α függvény esetén az

$$\alpha - u'(t_i) = \mathcal{O}(h_i) \tag{4.4}$$

becslés érvényes.

Kell egy olyan $P_1(t)$ polinom, amely átmegy a $(t_i, u(t_i))$ ponton, és irányát az $u(t)$ függvény t_i és t_{i+1} pontbeli érintőinek iránya határozza meg. Ezért legyen $P_1(t) := u(t_i) + \alpha(t - t_i)$ $t \in [t_i, t_{i+1}]$ alakú, ahol $\alpha = \alpha(u'(t_i), u'(t_{i+1}))$ egy adott függvény. Ez a $P_1(t)$ polinom az

$$y_{i+1} = y_i + \alpha h_i \tag{4.5}$$

egylépéses numerikus módszert határozza meg, ahol a (4.1) és a (4.3) összefüggések alapján

$$\alpha = (1-\theta)f(t_i, y_i) + \theta f(t_{i+1}, y_{i+1}). \tag{4.6}$$

4.1.2. Definíció. *A (4.5)-(4.6) numerikus módszert θ-módszernek nevezzük.*

Ezek után, hogy végeztünk a θ-módszer áttekintésével, áttérhetünk az explicit Euler-módszer tárgyalására.
Nézzük a θ-módszert a θ=0 megválasztással. Ebben az estben a a következő numerikus módszert generálja a (4.5) és a (4.6):

$$y_{i+1} = y_i + h_i f(t_i, y_i), \quad i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{4.7}$$

Az ismeretlen $u(t)$ függvény t_i pontbeli közelítése y_i lesz,

$$y_0 = u(0) = u_0 \tag{4.8}$$

azaz (4.7) iterációban az i=0 értékhez tartozó y_0 értéke adott.

4.1.3. Definíció. *Explicit Euler-módszernek nevezzük a (4.7) és a (4.8) képlettel definiált egylépéses közelítő módszert.*

4.1.4. Megjegyzés. Egy egyszerű függvény behelyettesítéssel kiszámolható a t_{i+1} pontbeli közelítés, a t_i pontbeli érték ismeretében. Ezért nevezzük a (4.7) (4.8) módszert explicitnek.

4.1.2. Az implicit Euler-módszer

Most nézzük a θ-módszert a θ=1 megválasztással. Ebben az estben a a következő numerikus módszert generálja a (4.5) és a (4.6):

$$y_{i+1} = y_i + h_i f(t_{i+1}, y_{i+1}), \quad i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{4.9}$$

$$y_0 = u_0 \tag{4.10}$$

4.1.5. Definíció. *Implicit Euler-módszernek nevezzük a (4.9) (4.10) képletekkel definiált egylépéses numerikus módszert.*

4.1.6. Megjegyzés. Az időben való előrehaladáshoz y_i ismeretében y_{i+1} értékét minden egyes időlépésben egy egyenlet meghatározásával tudjuk csak meghatározni, ezért nevezzük, a (4.9) implicit Euler-módszert implicitnek.

4.1.3. A Crank Nicolson-módszer

Most nézzük a θ-módszert a θ=0.5 megválasztással. Ebben az estben a a következő numerikus módszert generálja a (4.5) és a (4.6):

$$y_{i+1} - y_i = \frac{h_i}{2}[f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})], \quad i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{4.11}$$

ahol $y_0 = u_0$.

4.1.7. Definíció. *Crank Nicolson-módszernek nevezzük a (4.11) képlettel definiált egylépéses módszert.*

Rögzített rácshálón a numerikus megoldás explicit Euler-módszer és implicit Euler-módszer esetén nagyjából hasonló pontosságot ad, míg a Crank Nicolson-módszer pontosabb az előző két módszernél. Megfigyelhetjük a finomodó rácshálókon, hogy a Crnak Nicolson-módszer hibafüggvénye $\mathcal{O}(h^2)$, az implicit és explicit Euler-módszer hibafüggvénye viszont csak $\mathcal{O}(h)$ rendben tart nullához.

4.1.4. Hővezetési egyenlet véges differenciákkal való közelítése

Mint azt már láthattuk az előző fejezet végén a Black-Scholes egyenlet visszavezethető a Hővezetési egyenletre. Ezek után elegendő a Hővezetési egyenletnek a véges differenciákkal való közelítését bemutatnunk.

Az egydimenziós Hővezetési egyenlet:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t) \qquad \text{, ahol } (x,t) \in (0,l) \times (0,t^*] \tag{4.12}$$

A hozzá tartozó kezdeti feltétel:

$$u(x,0) = \mu_0(x), \qquad x \in (0,l)$$

És peremfeltétel:

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \qquad t \in (0,t^*]$$

ahol f, μ_0, μ_1, μ_2 adott függvények.

Jelölje $\Omega_{t^*} = (0,l) \times (0,t^*)$ azon pontok halmazát amelyen a (4.12) egyenletet felírjuk, $\Gamma_{t^*} = \overline{\Omega}_{t^*} \setminus \Omega_{t^*}$ pedig ennek parabolikus peremét, végül μ egy olyan függvényt mely a Γ halmazon értelmezett és egyes szakaszain megegyezik μ_0, μ_1, μ_2 függvényekkel. Ezek után tegyük fel, hogy $f \in C(\Omega_{t^*})$ és $\mu \in C(\Gamma_{t^*})$.

Most vezessünk be egy $L : C^{2,1}(\overline{\Omega}_{t^*}) \to C(\Omega_{t^*}) \cap C(\Gamma_{t^*})$ lineáris operátort és egy $\widetilde{f} : \overline{\Omega}_{t^*} \to \mathbb{R}$ függvényt.

$$Lu(x,t) = \begin{cases} (\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})(x,t) & \text{, ha } (x,t) \in \Omega_{t^*} \\ u(x,t) & \text{, ha } (x,t) \in \Gamma_{t^*} \end{cases}$$

$$\widetilde{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,t) & \text{, ha } (x,t) \in \Omega_{t^*} \\ \mu(x,t) & \text{, ha } (x,t) \in \Gamma_{t^*} \end{cases}$$

A következő egyenlet megoldásával megkapjuk a (4.12) megoldását is, ahol az $u \in C^{2,1}(\overline{\Omega}_{t^*})$ az ismeretlen.

$$Lu = \widetilde{f} \tag{4.13}$$

Numerikus eljárásunk lényegét most összefoglaljuk három pontban.

1. Megadjuk az $\overline{\Omega}_{t^*}$ halmazon a rácshálókat a következőképpen
   $\omega_{h,\tau} = \{(x_i, t_n), \quad x_i = ih \quad t_n = n\tau, \quad i = 1, 2, \dots N_x - 1, \quad n = 1, 2, \dots N_t\}$
   $\overline{\omega}_{h,\tau} = \{(x_i, t_n), \quad x_i = ih \quad t_n = n\tau, \quad i = 0, 1, 2, \dots N_x, \quad n = 0, 1, 2, \dots N_t\}$
   N_x és N_t az x és t irányú osztásrészek számát jelöli,
   $h = \frac{l}{N_x}$ és $\tau = \frac{t^*}{N_t}$ pedig a lépésközöket
   míg a $\Gamma_{h,\tau} = \overline{\omega}_{h,\tau} \setminus \omega_{h,\tau}$ rácsháló Γ_{t*} parabolikus peremre eső pontjait.

2. Legyen $\mathbb{F}(\overline{\omega}_{h,\tau})$ és $\mathbb{F}(\omega_{h,\tau})$ vektorterek, amelyeket az $\overline{\omega}_{h,\tau}$ és az $\omega_{h,\tau}$ rácsokon értelmezett $\mathbb{R}$-be képező függvények alkotják.

3. Célunk egy $y_{h,\tau} \in \mathbb{F}(\overline{\omega}_{h,\tau})$ rácsfüggvény meghatározása $\overline{\omega}_{h,\tau}$ pontjaiban, $h, \tau \to 0$ esetén, ahol y az u egy közelítése.

Tehát adjunk meg egy $L_{h,\tau} : \mathbb{F}(\overline{\omega}_{h,\tau}) \to \mathbb{F}(\overline{\omega}_{h,\tau})$ lineáris operátort és egy $b_{h,\tau} \in \mathbb{F}(\overline{\omega}_{h,\tau})$ elemet. Ekkor a

$$L_{h,\tau} y_{h,\tau} = b_{h,\tau} \tag{4.14}$$

operátoregyenletnek $y_{h,\tau}$ egy megoldása lesz, amely az előbb felsorolt 3 tulajdonsággal rendelkezni fog.
Az $L_{h,\tau}$ operátor előáll a következőképpen $L_{h,\tau} = \frac{1}{2}(L_{1_{h,\tau}} + L_{2_{h,\tau}})$

4.1.8. Lemma. *($L_{1_{h,\tau}}$ operátor megválasztásához)*
Legyen $y \in C^{4,2}(\overline{\Omega}_{t^*})$.

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x_i, t_n) = \frac{y(x_i, t_{n+1}) - y(x_i, t_n)}{\tau} + \mathcal{O}(\tau)$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x_i, t_n) = \frac{y(x_{i+1}, t_n) - 2y(x_i, t_n) + y(x_{i-1}, t_n)}{h^2} + \mathcal{O}(\tau + h^2).$$

4.1.9. Lemma. *($L_{2_{h,\tau}}$ operátor megválasztásához)*
Legyen $y \in C^{4,2}(\overline{\Omega}_{t^*})$.

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x_i, t_n) = \frac{y(x_i, t_{n+1}) - y(x_i, t_n)}{\tau} + \mathcal{O}(\tau)$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x_i, t_n) = \frac{y(x_{i+1}, t_{n+1}) - 2y(x_i, t_{n+1}) + y(x_{i-1}, t_{n+1})}{h^2} + \mathcal{O}(\tau + h^2).$$

Célunk $(Ly)(x_i, t_n)$ érték közelítése $\mathcal{O}(\tau+h)$ pontossággal y függvény $\overline{\omega}_{h,\tau}$ rácspontbeli értékeivel.
Ezek után vezessünk be egy új jelölést, miszerint $y_{h,\tau} \in \mathbb{F}(\overline{\omega}_{h,\tau})$ adott rácsfüggvény esetén $y_h(x_i, t_n) = y_{i,n}$, $f(x_i, t_n) =: f_{i,n}$ és $\mu(x_i, t_n) = \mu_{i,n}$.
Ezek után a következőképpen definiálható az $L_{h,\tau} : \mathbb{F}(\overline{\omega}_{h,\tau}) \to \mathbb{F}(\overline{\omega}_{h,\tau})$ rácsoperátor, és a $b_{h,\tau} : \mathbb{F}(\overline{\omega}_{h,\tau})$ rácsfüggvény:

$$(L_{h,\tau} y_{h,\tau})(x_i, t_n) = \begin{cases} \frac{y_{i,n+1}-y_{i,n}}{\tau} - \frac{1}{2}\Big(\frac{y_{i+1,n}-2y_{i,n}+y_{i-1,n}}{h^2} + \\ \frac{y_{i+1,n+1}-2y_{i,n+1}+y_{i-1,n+1}}{h^2}\Big) & \text{, ha } (x_i, t_n) \in \omega_{h,\tau} \\ y_{i,n} & \text{, ha } (x_i, t_n) \in \gamma_{h,\tau} \end{cases}$$

$$b_{h,\tau}(x_i, t_n) = \begin{cases} f_{i,n} & \text{, ha } (x_i, t_n) \in \omega_{h,\tau} \\ \mu_{i,n} & \text{, ha } (x_i, t_n) \in \gamma_{h,\tau} \end{cases}$$

A (4.14) egyenletünk ezek alapján azt jelenti, hogy olyan $y_{h,\tau} \in \mathbb{F}(\overline{\omega}_{h,\tau})$ rácsfüggvényt keresünk, amelyet az előbb definiált $L_{h,\tau}$ operátor a $b_{h,\tau}$ rácsfüggvénybe képez le.

Irodalomjegyzék

[1] Bodie-Kane-Marcus, *Befektetések*, Aula Kiadó, 2006

[2] John C. Hull, *Opciók, határidős ügyletek és egyéb származtatott termékek*, Panem Kft., 1999

[3] Faragó István-Horváth Róbert, *Numerikus módszerek*, Typotex, 2011

[4] Hudák Renáta, *Kockázatkezelés-Opciós ügyletek*,2009

[5] http://www.asianscientist.com/books/wp-content/uploads/2013/05/p556_chap04.pdf

[6] http://www.math.cuhk.edu.hk/ rchan/teaching/math4210/chap08.pdf

[7] http://ta.twi.tudelft.nl/mf/users/oosterle/oosterlee/verslag20.pdf