Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Majör Péter

A Rouché-tétel és alkalmazásai

BSc szakdolgozat

Témavezető:

Dr. Kovács Sándor

Numerikus Analízis Tanszék

Budapest, 2014

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Kovács Sándornak, amiért figyelemmel kísérte, és segítette a szakdolgozatom alakulását.

Köszönöm megannyi tanáromnak, akik a gimnázium és az egyetem évei alatt formálták gondolkodásomat, valamint családomnak és barátaimnak a támogatásukat.

Budapest, 2014. május 28.

Major Péter

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

1.1. A dolgozat célja

Az egyváltozós komplex analízis eredményei széles körben használtak a matematika, a fizika, és a mérnöki tudományok területén. Ezen dolgozatban a komplex függvénytan eszköztárának egyik elemét szeretném megvizsgálni és bemutatni annak több alakját, a bizonyításokban használt technikákat és a tétel legszembetűnőbb következményeit.

Először áttekintjük a Rouché-tétel tárgyalásához szükséges ismereteket. Ezt követően megvizsgáljuk a tétel különböző változatait, és azt, mit mondhatunk a megfordításáról, majd az alkalmazások néhány szemléletesebb példája következik.

1.2. Komplex függvénytani bevezetés

Ebben a részben ismertetjük a témához kapcsolódó a legalapvetőbb fogalmakat, kimondjuk a legfontosabb tételeket, és a Rouché-tételhez közeledve bizonyítjuk a legrelevánsabbakat ezek közül. Megjegyezzük, hogy ez a gondolatmenet a szakdolgozatban használt eszközök alátámasztását szolgálja, több, az itt tárgyalt téma szempontjából nem számottevő, azonban az elemi komplex függvénytanban lényeges tételt nem említünk meg.

1.1 Definíció. *Valamely* $z_0 \in \mathbb{C}$ *pont* r *sugarú környezetét, illetve a* z_0 *körüli* r *sugarú körvonalat a következőképp jelöljük:*

$$K_{z_0}(r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

$$\partial K_{z_0}(r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

A pontozott környezet jelölére pedig vezessük be:

$$U_{z_0}(r) := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}.$$

1.2 Definíció. *Azt mondjuk, hogy* $D \subset \mathbb{C}$ *tartomány, ha nyílt, és egyszeresen összefüggő, vagyis tetszőleges* $v, w \in D$ *összeköthető töröttvonallal.*

1.3 Definíció. *Legyen* $D \subset \mathbb{C}$ *nyílt,* $z_0 \in D$*,* $f : D \to \mathbb{C}$*. Azt mondjuk, hogy* f *differenciálható* z_0*-ban (komplex értelemben differenciálható), ha*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

határérték létezik és véges. Ekkor ezt a határértéket $f'(z_0)$*-lal jelöljük, és az* f z_0*-beli differenciálhányadosának nevezzük.*

1.4 Definíció. *Legyen* $D \subset \mathbb{C}$ *tartomány,* $f : D \to \mathbb{C}$*. azt mondjuk, hogy* f *holomorf (vagy reguláris)* D*-n, ha* f *a* D *minden pontjában differenciálható.*

1.5 Definíció. *Egésznek mondunk egy* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *függvényt, ha a teljes* $\mathbb{C}$*-n holomorf.*

Most, hogy tisztáztuk a legalapvetőbb fogalmakat a komplex függvényekkel kapcsolatban, elkezdhetjük bevezetni a komplex vonalmenti integrál fogalmát.

1.6 Definíció. *Legyen* $a < b \in \mathbb{R}$ *és* $\gamma : [a; b] \to \mathbb{C}$ *folytonos. Ekkor azt mondjuk, hogy a* γ *egy görbe paraméterezése. Az általa paraméterezett görbét* $R(\gamma)$*-val jelöljük,*

$$R(\gamma) = \{\gamma(t) \in \mathbb{C} : t \in [a; b]\}.$$

1.7 Definíció. *Legyen* $\gamma : [a;b] \to \mathbb{C}$ *egy görbe paraméterezése, és* $x : [c;d] \to [a,b]$ *szigorúan monoton növő folytonos bijekció. Ekkor* $\gamma^* : [c;d] \to \mathbb{C}$, $\gamma^*(t) = \gamma(x(t))$*-t a* γ *egy átparaméterezésének nevezzük.*

1.8 Definíció. *Ha* $x, y : [a;b] \to \mathbb{R}$ *differenciálhatóak* $(a;b)$*-ben, és a féloldali deriváltak léteznek a-ban és b-ben, akkor a* $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ *görbe paraméterezést differenciálhatónak mondjuk.*

A görbét szakaszonként differenciálhatónak nevezzük, ha létezik olyan véges

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_{n+1} = b$$

felosztás ahol a görbét definiáló paraméterezés leszűkítése $[a_j; a_{j+1}]$*-re* $0 \leq j \leq n$ *esetén differenciálható.*

1.9 Definíció. *Egy görbét Jordan-görbének nevezünk, ha az zárt és egyszerű, azaz létezik olyan* ($\gamma : [a;b] \to \mathbb{C}$) *paraméterezése, hogy rendre* $\gamma(a) = \gamma(b)$ *és minden* $t_1, t_2 \in (a;b)$, $t_1 \neq t_2$*-re* $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$.

1.1 Tétel. *(Jordan) Legyen* $R(\gamma)$ *egy Jordan-görbe. Ekkor léteznek* D_1 *és* D_2 *diszjunkt tartományok, melyekre* D_1 *korlátos,* D_2 *nem az, és* $\mathbb{C} = D_1 \dot{\cup} D_2 \dot{\cup} R(\gamma)$.
Bevezetjük a következő jelöléseket: $int\gamma := D_1$ *és* $ext\gamma := D_2$.

1.10 Definíció. *Egy* $\gamma : [a;b] \to \mathbb{C}$ *görbe paraméterezést rektifikálhatónak mondunk, ha létezik* $K \in \mathbb{R}$*, hogy tetszőleges* $n \in \mathbb{N}$*-re és bármely*

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_n < a_{n+1} = b$$

felosztásra

$$\sum_{k=0}^{n} |\gamma(a_k) - \gamma(a_{k+1})| \leq K.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy γ *hossza*

$$l(\gamma) = sup\left\{\sum_{k=0}^{n} |\gamma(a_k) - \gamma(a_{k+1})| \in \mathbb{R} \ : \ n \in \mathbb{N} \text{ és } a = a_0 < ... < a_{n+1} = b \text{ tetszőleges felosztás}\right\}.$$

1.11 Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* $f : R(\gamma) \to \mathbb{C}$ *függvény* $\gamma : [a;b] \to \mathbb{C}$ *(mely rektifikálható) menti komplex integrálja létezik, ha létezik* $I \in \mathbb{C}$*, hogy minden* $\varepsilon > 0$*-hoz van* $\delta > 0$*, melyre ha az* $a = a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_n < a_{n+1} = b$ *felosztás finomsága kisebb mint* δ $(\max_{k=0..n} |a_k - a_{k+1}| < \delta)$*, akkor tetszőleges* $\xi_k \in [a_k; a_{k+1}]$ *esetén*

$$\left| \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)(a_{k+1} - a_k) - I \right| < \varepsilon.$$

Az integrált jelölése vezessük be a következő szimbólumokat: $I = \int_\gamma f$ *vagy* $I = \int_\gamma f(z)dz$*.*

1.2 Tétel. *Legyen* $\gamma : [a;b] \to \mathbb{C}$ *szakaszonként folytonosan differenciálható,* $f : R(\gamma) \to \mathbb{C}$ *folytonos, ekkor:*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b (f \circ \gamma)(t)dt = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

1.12 Definíció. *Legyen* $D \subset \mathbb{C}$ *tartomány és* $f, F : D \to \mathbb{C}$*, ekkor azt mondjuk, hogy* F *az* f *primitív függvénye, ha minden* $z \in D$*-re* $F(z)$ *differenciálható, és* $F'(z) = f(z)$*.*

1.3 Tétel. *(Newton-Leibnitz-formula) Legyen* $D \in \mathbb{C}$ *tartomány,* $\gamma : [a;b] \to D$ *rektifikálható, és* $f : D \to \mathbb{C}$ *folytonos, melynek* F *a primitív függvénye. Ekkor*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

1.4 Tétel. *Legyen* $D \in \mathbb{C}$ *tartomány,* $f : D \to \mathbb{C}$ *folytonos, ekkor a következők ekvivalensek:*

i) f*-nek létezik* D*-n primitív függvénye.*

ii) Minden $R(\gamma)$ $(\gamma : [a;b] \to D)$ *zárt görbére az* f *integrálja zérus.*

iii) Minden $R(\gamma)$ $(\gamma : [a;b] \to D)$ *zárt töröttvonalra az* f *integrálja zérus.*

1.5 Tétel. *(Cauchy alaptétele) Legyen* $D \in \mathbb{C}$ *tartomány,* $\gamma : [a;b] \to D$*,* $R(\gamma)$ *olyan rektifikálható Jordan-görbe, melyre* $\mathrm{int}\gamma \subset D$*, valamint legyen* $f : D \to \mathbb{C}$ *holomorf. Ekkor*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0.$$

1.6 Tétel. *(Cauchy alaptétele több görbére) Legyen $D \in \mathbb{C}$ tartomány,*

$$\gamma_0, \gamma_1, ...\gamma_n : [a;b] \to D,$$

pozitív irányítású, rektifikálható, egymást páronként nem metsző Jordan-görbéket paraméte-reznek, melyekre:

i) $int\gamma_k \subset int\gamma_0$ *ha* $0 < k \leq n$

ii) $int\gamma_k \cap int\gamma_l = \emptyset$ *ha* $0 < k < l \leq n$

iii) $int\gamma_0 \setminus \bigcup_{k=1}^{n} int\gamma_k \subset D$

valamint $f : D \to \mathbb{C}$ *reguláris. Ekkor :*

$$\oint_{\gamma_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k} f(z)dz.$$

1.7 Tétel. *(Cauchy integrálformulája) Legyen $D \in \mathbb{C}$ tartomány, $\gamma : [a,b] \to D$ pozitív irányítású, rektifikálható Jordan-görbét paraméterez, melyre $int\gamma \subset D$ és $f : D \to \mathbb{C}$ reguláris. Legyen $z_0 \in int\gamma$, ekkor:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

1.8 Tétel. *(A hatványsorba fejtésről) Legyen $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ és $f : K_{z_0}(r) \to \mathbb{C}$ holomorf. Ekkor f itt végtelen sokszor differenciálható, sőt, f hatványsorba fejthető $K_{z_0}(r)$-en, azaz itt:*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

ha

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz,$$

ahol γ rektifikálható, tetszőleges pozitív irányítású Jordan-görbét paraméterez $K_{z_0}(r)$-ben melyre $z_0 \in int\gamma$.

1.9 Tétel. *(Unicitás tétel) Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $z_0 \in D$, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorf, mely zérushelyeinek torlódási pontja z_0. Ekkor $f(z) \equiv 0$.*

1.10 Tétel. *(Liouville tétele) Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ egész függvény. Ekkor ha létezik $K \in \mathbb{R}^+$, melyre $|f(z)| < K$ minden $z \in \mathbb{C}$ esetén, akkor $f \equiv c$ valamely $c \in \mathbb{C}$-re.*

1.11 Tétel. *(Maximum elv) Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorf, nem konstans függvény. Ekkor $|f|$-nek D-ben nincsen lokális maximuma.*

1.13 Definíció. *Legyen $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ ahol $a_k \in \mathbb{C}$ minden $k \in \mathbb{Z}$-re, $z_0 \in \mathbb{C}$, ekkor a*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$$

alakú kifejezéseket Laurent-sornak hívjuk. Azt mondjuk, hogy a Laurent-sor konvergens, ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \text{ és } \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k}$$

sorok konvergensek. Analóg módon definiáljuk a sor abszolút konvergenciáját.

1.12 Tétel. *Legyen $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ egy Laurent-sor. Ekkor létezik r és R, $0 \leq r < R \leq \infty$ melyekre a sor abszolút konvergens, ha $r < |z - z_0| < R$ és a konvergencia egyenletes az $r^* < |z - z_0| < R^*$-on, ha $r < r^*$ és $R^* < R$. Ezen kívül a sor divergens $\overline{K_{z_0}(r)}$-on és $\mathbb{C} \setminus \overline{B_{z_0}(R)}$. Az így meghatározott gyűrűt konvergenciatartománynak nevezzük, s ezen a Laurent-sor összege holomorf.*

1.13 Tétel. *(Laurent-sorfejtésről) Legyen $0 \leq r < R \leq \infty$, $z_0 \in \mathbb{C}$ és legyen*

$$D = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\},$$

melyen $f : D \to \mathbb{C}$ reguláris. Ekkor létezik pontosan egy olyan

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$$

Laurent-sor, mely konvergens D-n és az összege éppen f. Ezen sor együtthatói:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\varrho} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

egy tetszőleges $r < \varrho < R$-re.

1.14 Definíció. *Legyen* $D \subset \mathbb{C}$ *tartomány* $z_0 \in D$, $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ *holomorf. Ekkor azt mondjuk, hogy* f*-nek* z_0*-ban izolált szingularitása van.*

1.15 Definíció. *Legyen* f*-nek* z_0 *egy izolált szingularitása, és legyen* f *Laurent-sora a* $U_{z_0}(r)$ *elég kis sugarú pontozott környezeten* $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$*. Ekkor azt mondjuk, hogy* z_0

i) *megszüntethető szingularitás, ha minden* $m < 0$ *egészre* $a_m = 0$.

ii) n*-ed rendű pólus (*$n \in \mathbb{N}^+$*), ha* $a_{-n} \neq 0$*, de minden* $m < -n$ *egészre* $a_m = 0$.

iii) *lényeges szingularitás, ha végtelen sok negatív indexű együtthatója nem nulla a Laurent-sorozatnak.*

1.16 Definíció. *Legyen* $D \subset \mathbb{C}$ *tartomány,* $M \subset D$ *izolált pontok halmaza. Legyen* $f : D \setminus M \to \mathbb{C}$ *holomorf. Azt mondjuk, hogy* f *meromorf, ha minden* $z \in M$ *megszüntethető szingularitása, vagy* k*-ad rendű pólusa valamely* $k \in \mathbb{N}^+$*-re.*

1.17 Definíció. *Legyen* $f : U_{z_0}(\varepsilon) \to \mathbb{C}$ *holomorf, ekkor itt* f *Laurent-sora*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$$

konvergens, és az f *függvény* z_0*-beli reziduuma a*

$$[Res(f)]_{z=z_0} = a_{-1}$$

együttható.

1.14 Tétel. *(Reziduum tétel) Legyen* $D \subset \mathbb{C}$ *tartomány,* $f : D \to \mathbb{C}$ *holomorf, és* $\gamma : [a;b] \to D$ *pozitív irányítású, rektifikálható Jordan-görbét paraméterez, melyre* $int\gamma \setminus D = \{z_1, z_2, ..., z_n\}$ *valamely* $n \in \mathbb{N}$ *mellett. Ekkor:*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} [Res(f)]_{z=z_j}$$

1.1 Állítás. *Legyen* $f : K_{z_0}(\varepsilon) \to \mathbb{C}$ *reguláris, melynek* z_0*-ban* k*-szoros zérushelye van. Ekkor*

$$\left[Res\left(\frac{f'}{f}\right)\right]_{z=z_0} = k.$$

Bizonyítás: Mivel a fenti környezeten az f reguláris, ezért itt hatványsorba fejthető:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=k}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = (z-z_0)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-k} = (z-z_0)^k h(z),$$

ahol $h(z_0) \neq 0$. Mivel $h(z)$ is reguláris $K_{z_0}(\varepsilon)$-on (hiszen hatványsor definiálja), így

$$f'(z) = k(z-z_0)^{k-1}h(z) + (z-z_0)^k h'(z),$$

$$\frac{f'}{f} = \frac{k}{z-z_0} + \frac{h'}{h},$$

ahol a második tag residuuma nulla, hiszen reguláris z_0-ban, ezért

$$\left[Res\left(\frac{f'}{f}\right)\right]_{z=z_0} = \left[Res\left(\frac{k}{z-z_0}\right)\right]_{z=z_0} = k.$$

1.2 Állítás. *Legyen* $f : U_{z_0}(\varepsilon) \to \mathbb{C}$ *reguláris, melynek* z_0*-ban* k*-ad rendű pólusa van. Ekkor*

$$\left[Res\left(\frac{f'}{f}\right)\right]_{z=z_0} = -k.$$

A bizonyítás teljes mértékben analóg az előző állításéval.

1.15 Tétel. *(A logaritmikus reziduumról) Legyen* $D \subset \mathbb{C}$ *tartomány,* f *meromorf* D*-n és holomorf* $R(\gamma)$*-án,* $\gamma : [a;b] \to D$ *paraméterezzen rektifikálható Jordan-görbét pozitív irányítással. Ekkor* intγ*-ban csak véges sok szingularitása és véges sok zérushelye van* f*-nek. Tegyük fel, hogy minden* $t \in [a;b]$*-re* $f(\gamma(t)) \neq 0$*, akkor*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = Z_f - P_f,$$

ahol Z_f *és* P_f *rendre az* f *zérushelyeinek, és pólusainak multiplicitással vett száma* intγ*-ban.*

Bizonyítás: Ha akár a szingularitások, akár a nullhelyek nem végesen sokan volnának a görbe belsejében (mely a Jordan-tétel miatt korlátos tartomány), akkor a Bolzano-Weierstrass tétel értelmében, ha a pólusok, vagy nullhelyek bármelyikéből tudunk képezni egy nem véges elemszámú, minden elemet legfeljebb egyszer felhasználó sorozatot, akkor annak létezik torlódási pontja $R(\gamma) \cup int\gamma$-án.

Tegyük fel, hogy a pólusok sorozatának $z \in D$ egy torlódási pontja. Mivel a pólusok halmaza izolált, ezért z nem lehet pólus, de f nem lehet holomorf z-ben, hiszen tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra f nem korlátos $U_z(\varepsilon)$-on.

Ha zérushelyek torlódnak, akkor az unicitás tétel értelmében $f \equiv 0$, ami nem lehet mivel f az $R(\gamma)$-án nem nulla.

Jelölje most $\{z_1, z_2, ..., z_n\}$ és $\{p_1, ...p_m\}$ rendre az $int\gamma$-ban lévő különböző zérushelyek és pólusok helyeit (multiplicitás nélkül). Ekkor:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^{n} \left[Res \left(\frac{f'}{f} \right) \right]_{z=z_j} + \sum_{j=1}^{m} \left[Res \left(\frac{f'}{f} \right) \right]_{z=p_j} = Z_f - P_f,$$

ahol az utolsó egyenlőség az előző két állításból következik.

1.16 Tétel. *(Az argumentum-elv) Az előző tétel feltételei mellet, ha $z_0 \in \mathbb{C}$ akkor*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - z_0} dz = N$$

éppen annak a száma, ahányszor $R(f \circ \gamma)$ görbe megkerüli a z_0 pontot.

Bizonyítás: Ez a tétel egy integráltranszformációt használ az előző tételen:

$$N = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{f\circ\gamma} \frac{1}{w - z_0} dw.$$

Az $f \circ \gamma$ zárt görbe paraméterezés, azonban nem biztos hogy egyszerű, így nem használhatjuk a Cauchy-féle integrál formulát. Az $\frac{1}{w}$ primitív függvénye a $ln(w)$, mely azonban csak lokálisan értelmezhető a komplex síkon. Vegyünk egy olyan $a = a_0 < a_1 < ... < a_{n+1} = b$ felosztását, hogy az egyes $\{f(\gamma(t)) \in \mathbb{C} : t \in [a_j; a_{j+1})\}$ szakaszokon már definiálható legyen az egyértékű ln függvény (ehhez véges sok tag elegendő). Az egyes osztási intervallumokra megkapjuk az integrál értékét, ezek összege pedig kiadja az egész integrált:

$$\oint_{f\circ\gamma} \frac{dw}{w} = \sum_{j=0}^{n} \left(ln|\gamma(a_{j+1})| + arg(\gamma(a_{j+1}))i - ln|\gamma(a_j)| - arg(\gamma(a_{j+1}))i\right).$$

A $ln|\gamma(a_j)|$ alakú tagok egy teleszkopikus összegben kiesnek, hiszen γ zárt. Az argumentuok összege azt határozza meg, hányszor kerültük meg a nullát, illetve helyettesítéssel z_0-at.

1.1 Megjegyzés. *Az* $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-z_0}dz$ *értékre mint az* f γ*-ra vett* z_0 *körüli tekeredési számára utalunk a továbbiakban.*

1.17 Tétel. *(Weierstrass) Legyen* $D \subset \mathbb{C}$ *tartomány,* $f_k : D \to \mathbb{C}$ *holomorf függvények egy sorozata. Ekkor, ha az* $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ *sorozat lokálisan egyenletesen konvergens* D*-n, és itt határértéke* f*, akkor* f *is holomorf* D*-n, és* $f_k' \to f'$ *lokálisan egyenletesen* D*-n.*

Bizonyítás: Legyen $z_0 \in D$ és $r > 0$ melyre a konvergencia egyenletes $K_{z_0}(r)$-en. Legyen $\gamma : [a;b] \to K_{z_0}(r)$ tetszőleges zárt törtvonal. Mivel f_k reguláris, és a konvergencia egyenletes:

$$\oint_\gamma f = \lim_{k\to\infty} \oint_\gamma f_k = 0.$$

Tehát f-nek létezik primitív függvénye D-n, mely végtelen sokszor differenciálható, így f holomorf.

Legyen most $\gamma(t) = z_0 + (r/2)e^{it}$. Ekkor minden $z \in K_{z_0}(r)$-re, így $z \in R(\gamma)$-ra is az egyenletes konvergencia miatt létezik $N \in \mathbb{N}$, melyre

$$|f_k(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon \cdot r^2}{16}$$

$n > N$ esetén. Ha $w \in K_{z_0}(r/4)$ akkor mivel a deriváltak is felírhatók integrálokkal:

$$|f_k'(w) - f'(w)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f_k(z)-f(z)}{(z-w)^2}dz\right| \le \frac{1}{2\pi}\oint_\gamma \frac{\frac{\varepsilon\cdot r^2}{16}}{\left(\frac{r}{4}\right)^2}dz = \varepsilon.$$

Minden z_0-hoz konstruáltunk hát egy $r/4 = \varrho > 0$ sugarú környezetet, melyen $f_k' \to f'$ egyenletesen, s ezzel a tételt beláttuk.

2. A Rouché-tétel különböző alakjai

2.1. A tétel hagyományos alakja

2.1 Tétel. *(Rouché)*

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, paraméterezzen $\gamma : [a,b] \to D$ rektifikálható, Jordan-görbét pozitív irányítással, valamint legyen $f, g : D \to \mathbb{C}$ reguláris (holomorf). Tegyük fel, hogy

$$|g(\gamma(t))| < |f(\gamma(t))| \qquad (z \in R(\gamma)).$$

Ekkor f-nek és $f+g$-nek multiplicitással számolva ugyanannyi zérushelye van $int\gamma$-ban.

A tétel egyszerű következménye a logaritmikus reziduumról szóló tételnek, s a komplex függvénytan előadáson is így szokás bevezetni:

Bizonyítás: Legyen $f_\lambda = f + \lambda g$ ahol $\lambda \in [0;1]$. Ekkor minden ilyen λ-ra a $R(\gamma)$ görbén

$$|(f+\lambda g)| \geq |f| - \lambda |g| > 0.$$

Tehát értelmes az integrandus a következő képletben:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'_\lambda(z)}{f_\lambda(z)} dz = N_\lambda,$$

mely a logaritmikus reziduum miatt, és mert f, g holomorfak D tartományon, éppen az f_λ gyökeinek száma $int\gamma$-ban, tehát egész szám. f_λ és f'_λ folytonos λ-ban, így a $R(\gamma)$-án egyenletesen folytonos az integrandus is, ezért $N_\lambda \in \mathbb{N}$ is folytonos, ezért konstans. Tehát $Z_f = N_0 = N_1 = Z_{f+g}$. ■

Szokás a Rouché-tételt "kutyasétáltató" tételnek nevezni, mely analógia az argumentum-elv ismeretében érthető meg. A hozzá tartozó geometriai kép azt mondja, hogy amennyiben a komplex síkon - ahol az origóban van egy villanyoszlop - sétáltatunk egy kutyát az $R(f \circ \gamma)$ görbe mentén akkor, ha a póráz mindig rövidebb mint a villanyoszlop távolsága tőlünk, akkor a kutya pont ugyanannyiszor kerüli meg az oszlopot, mint mi. Tehát a sétát megúszhatjuk a póráz felcsavarodása nélkül. Ez az analógia ötletet is adhat egy szemléletes bizonyításhoz:

Bizonyítás: A tételben szabott egyenlőtlenség miatt az $R(\gamma)$-án f és $f+g$ nem zérus, ezért értelmes a következő osztás, és az argumentum:

$$f(z)+g(z)=f(z)\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right).$$

Az argumentum-elves bizonyításhoz hasonlóan a komplex logaritmus argumentum részét szakaszonként definiálva:

$$\Delta arg(f(z)+g(z))=\Delta arg(f(z))+\Delta arg\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right)$$

A második tagban $1>\frac{g(z)}{f(z)}$ a görbe pontjain, ezért $\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right)\in K_1(1)$ ha a $z\in R(\gamma)$, tehát $\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right)$ nem kerüli meg a nullát, így az összeg második tagja teleszkopikusan kiesik, ha felösszegezzük az argumentumokat. Innen $f(\gamma)$ és $(f+g)(\gamma)$ ugyanannyiszor kerüli meg az origót, és ekkor az argumentum-elvből következik a tétel állítása. ■

2.2. A Rouché-tétel bizonyítása a funkcionálanalízis módszereivel

Ez a bizonyítás nem a csavarodási szám valamely analógiáját használja fel. A komplex függvénytani tételek közül az unicitás tételt és a maximumelvet használja, valamint a sorba fejthetőséget. A levezetés [1] átdolgozásával készült az átláthatóság elősegítése végett.

Vezessünk be néhány jelölést: Legyen $A: X\to Y$ lineáris operátor az X,Y Banach-terek közt. Legyen

$$\alpha(A)=dim(Ker(A)) \text{ és } \beta(A)=dim(Y/Im(A)),$$

valamint amennyiben az előző két érték közül legalább az egyik véges, akkor értelmes

$$\kappa(A)=\alpha(A)-\beta(A),$$

melyet indexnek nevezünk. ($Ker(A)$ és $Im(A)$ az A lineáris operátor mag- és képtere.)

2.2 Tétel. *(T.Kato) Legyen X, Y Banach-tér, $A, B \in L(X, Y)$ (korlátos lineáris operátor). Tegyük fel, hogy $\kappa(A)$ létezik, és $Im(A)$ zárt. Ekkor, ha létezik $a \in \mathbb{R}^+$ úgy, hogy*

$$\|Bx\| \leq a\|Ax\| \qquad (x \in X),$$

akkor minden $\lambda \in \mathbb{C}$-re, melyre $|\lambda| < \frac{1}{a}$ teljesül:

i) $\alpha(A + \lambda B) \leq \alpha(A)$

ii) $\beta(A + \lambda B) \leq \beta(A)$

iii) $\kappa(A + \lambda B) = \kappa(A)$

A fenti tétel következménye T.Kato egy általánosabb tételének, mely bizonyítása megtalálható [2]-ben, mi ezt azonban hely szűkében nem ismételjük itt meg.

Bizonyítás: Legyen

$$B(\overline{D}) = \{h : \overline{D} \to \mathbb{C} \mid h \text{ reguláris } D\text{-n, folytonos a peremen}\},$$

ekkor $B(\overline{D})$ egy Banach-tér a $\|h\| = \sup_{z \in \overline{D}} |h(z)|$ normával, hiszen vektortér, és teljes, mert egyenletesen konvergens, folytonos függvények határértéke folytonos, sőt, Weierstrass (a bevezető végén említett) tétele szerint D-n holomorf függvények egyenletes határértéke holomorf D-n.

Legyen $T_f : B(\overline{D}) \to B(\overline{D})$ olyan, hogy $(T_f h)(z) = f(z)h(z)$. T_f lineáris, és triviális becslés mutatja, hogy $||T_f|| = ||f||$ a sup norma által generált norma az operátoron. A tétel feltételeiből $|f| > 0$ a ∂D-n és mivel D korlátos ezért f-nek csak véges sok zérushelye lehet itt, hiszen megismételhetjük a logaritmikus reziduumnál elhangzott gondolatmenetet azzal kiegészítve, hogy ∂D-n most nem lehet torlódási pont.

Legyenek f-nek a D-ben lévő különböző nullhelyei $z_1, z_2, ..., z_n$ multiplicitásaik pedig rendre $p_1, p_2, ..., p_n$. Ezeken a helyeken a $T_f h$-nak is legalább ennyied rendű zérushelyei vannak, így $Im(T_f) \leq B(\overline{D})$ pontosan olyan függvényekből áll melyeknek $1 \leq j \leq n$ esetén a z_j helyen legalább p_j szeres zérushelye van, hisz egy ilyet elosztva f-el nyilvánvalóan $B(\overline{D})$-beli függvényt kapunk.

Az $N \leq B(\overline{D})$ lineáris alteret generálják a következő függvények:

$$_kG_l = (z-z_1)^{p_1}(z-z_2)^{p_2}...(z-z_{k-1})^{p_{k-1}}(z-z_k)^l(z-z_{k+1})^{p_{k+1}}...(z-z_n)^{p_n}$$

ahol $1 \leq k \leq n$ és a hozzá tartozó l-ekre $0 \leq l < p_k$. Figyeljük meg, hogy

$$_kG_l^{(d)}(z_{j \neq k}) = 0 \qquad (0 \leq d < p_j)$$

és

$$_kG_l^{(d)}(z_k) = 0 \qquad (0 \leq d < l),$$

azonban $_kG_l^{(l)}(z_k) \neq 0$. Ezzel a megfigyeléssel megállapítható, hogy egy $v \in N$ függvény deriváltjai a $z_1, z_2, ..., z_n$ pontokban rendre $p_1 - 1, p_2 - 1, ..., p_n - 1$ mélységben beállíthatók, valamint v értéke megszabható a $z_1, z_2, ..., z_n$ pontokban a generátor elemeinek alkalmas lineáris kombinációjával, hiszen ehhez egy lineáris egyenletrendszert kell megoldanunk.

Vegyünk egy tetszőleges $b \in B(\overline{D})/Im(T_f)$ függvényt. Ilyen létezik, ha f-nek van gyöke. Ha nincs, akkor $N = \emptyset$. Vegyük észre, hogy létezik pontosan egy $a \in N$ függvény, melyre $b - a \in Im(T_f)$, hiszen a értékeit és $p_j - 1$ mélységű deriváltjait a z_j $(0 < j \leq n)$ pontokban azonosra állítva b ugyanezen értékeivel, $0 < j \leq n$-re és $0 \leq l < p_j$-re igaz, hogy $(b-a)^{(l)}(z_j) = 0$, tehát $b - a$-nak z_j legalább p_j szeres zérushelye.

Vegyük még észre, hogy a $_kG_l$ generátorelemek lineárisan függetlenek, hiszen ha lineáris kombinációjuk nulla lenne, akkor z_j pontban a is nulla, ezért mivel $_jG_0(z_j) \neq 0$, de itt minden más generátorelem nulla, így a $_jG_0$ együtthatója a kombinációban nulla. Eztán a lineáris kombináció első deriváltja is nulla z_j-ben, így mivel $_jG_1^{(1)}(z_j) \neq 0$ és minden más még le nem nullázott együtthatójú generátor tag első deriváltja zérus a $_jG_1$ együtthatója is nulla. Az eljárást így folytatva, míg a $p_j - 1$-edik deriválthoz nem jutunk, majd a többi $z_{i \neq j}$-re is megismételve minden együtthatóról megmutathatjuk, hogy nulla.

Tehát

$$B(\overline{D}) = Im(T_f) \bigoplus N,$$

$$\beta(T_f) = dim(N) = \sum_{j=1}^{n} p_j,$$

valamint $\alpha(T_f) = 0$, hiszen fh nullhelyeinek száma csak véges sok lehet, ha $h \neq 0$.

Teljesen analóg módon definiálhatjuk T_g-t, mellyel $T_f + T_g = T_{f+g}$, ami ugyanezekkel a jó tulajdonságokkal bír ($\beta(T_{g+h})$-ra nézve), hiszen az egyenlőtlenség miatt $f + g$ sem nulla ∂D-n. Mivel a peremen $|g| < |f|$ ezért létezik $\varepsilon > 0$, hogy itt $|g| < (1 - \varepsilon)|f|$. A maximum elv miatt $|fh|$ és $|gh|$ a határon veszik fel maximumukat, így az elején definiált sup normával

$$\|T_g h\| = \max_{z \in \overline{D}} |gh| \leq (1 - \varepsilon) \max_{z \in \overline{D}} |fh| = (1 - \varepsilon)\|T_f h\|.$$

A sup helyettesíthető max-al, mert $\overline{D}$ kompakt. Ekkor teljesül a Kato-féle tétel feltétele $a = 1 - \varepsilon$ választással, így:

i) $0 \leq \alpha(T_{f+g}) = \alpha(T_f + T_g) \leq \alpha(T_f) = 0$

ii) $\beta(T_{f+g}) \leq \beta(T_f)$

iii) $\kappa(T_{f+g}) = \kappa(T_f)$

Tehát

$$-\beta(T_{f+g}) = \kappa(T_{f+g}) = \kappa(T_f) = -\beta(T_f).$$

Mint láttuk $\beta(T_f)$ az f és $\beta(T_{f+g})$ az $f + g$ gyökeinek száma multiplicitással D-ben, melyek egyenlőségével beláttuk a tételt. ■

2.3. A tétel szimmetrikus alakja és egy lehetséges megfordítás

A Theodor Estermann-féle szimmetrikus alak ([3]) nemcsak könnyebben megjegyezhető, és elegánsabb alakja a tételnek, de erősebb is az eredetinél. Jó példa erre az $f \equiv 1$, $g \equiv i$ függvénypár. Mindezek ellenére a standard komplex függvénytan kurzusok többsége csak a hagyományos alakot említi meg.

2.3 Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $\gamma : [a, b] \to D$ rektifikálható, Jordan-görbe pozitív irányítású paraméterezése, valamint legyen $f, g : D \to \mathbb{C}$ reguláris (holomorf). Ekkor f-nek és g-nek multiplicitással számolva ugyanannyi nullhelye van intγ-ban, ha a következő egyenlőtlenség teljesül:*

$$|g(z) + f(z)| < |g(z)| + |f(z)| \qquad (z \in R(\gamma))$$

Bizonyítás: A tételben kirótt feltételből következik, hogy $R(\gamma)$-án $f \neq 0 \neq g$. Hiszen feltéve, hogy $f = 0$, az egyenlőtlenségből $|g| < |g|$ ami ellentmondás. Ennek következtében $F = \frac{f}{g}$ a $R(\gamma)$-n értelmes, és holomorf az $R(\gamma)$ egy környezetében. Mivel $F \neq 0$ $R(\gamma)$-án, valamint a háromszög egyenlőtlenség következtében nem lehet pozitív valós, legyen:

$$I(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{(F - t)'(z)}{F(z) - t} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{F'(z)}{F(z) - t} dz,$$

mely definíció értelmes minden $t \geq 0$-ra. Az így definiált $I(t)$ függvény az argumentum elv miatt egész értékű, az integrandus egyenletes folytonossága (t-ben $R(\gamma)$-án) és $l(\gamma)$ végessége miatt pedig folytonos, tehát konstans.

Ha $t \to \infty$ akkor a primitív integrálbecslésből (ha $t > \max_{w \in R(\gamma)} |F(w)|$):

$$|I(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_\gamma \left| \frac{F'(z)}{F(z) - t} \right| dz \leq \frac{1}{2\pi} \oint_\gamma \left| \frac{F'(z)}{t/2} \right| dz \leq \frac{1}{2\pi} l(\gamma) \max_{w \in R(\gamma)} (|F'(w)|) \frac{2}{|t|} \to 0,$$

hiszen F' folytonos, ezért a maximum értelmes és véges, valamint γ rektifikálható. Ezért

$$I(0) = I(t) = 0.$$

Az argumentum elvet felhasználva:

$$0 = I(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{F'(z)}{F(z)} dz = Z_F - P_F,$$

vagyis, mivel f és g nem rendelkezik pólusokkal D-n:

$$Z_f = Z_F = P_F = Z_g$$

amivel a tételt beláttuk. ■

2.1 Megjegyzés. *A tétel feltétele nem ad szükséges kritériumot a következményre, hiszen $f(z) = z = g(z)$ esetén $Z_f = Z_g = 1$ az egységkörlapon, azonban $|z + z| = 2|z| \not< 2|z| = |z| + |z|$ az egységkörvonalon.*

2.2 Megjegyzés. *A Rouché-tétel hagyományos alakja következménye a fenti tételnek, ugyanis ha $a, b : D \to \mathbb{C}$ holomorf függvényekre $|a| < |b|$ egy $R(\gamma) \subset D$ Jordan-görbén, akkor legyen $f + g = a$ és $g = -b$ vagyis $f = a + b$, így $|f + g| = |a| < |b| = |g| \leq |f| + |g|$ ezen a görbén, s ezért a szimmetrikus tétel miatt $a + b$-nek és b-nek ugyanannyi zérushelye van.*

A fenti tétel [4] alapján kiegészíthető úgy, hogy a következményre szükséges és elégséges feltételt kapjunk. Ehhez be kell vezetnünk a véges Blaschke-szorzatokat. Az egyszerűség kedvéért az egységkörre látjuk be a tételt, természetesen tetszőleges körre könnyen átvihető később.

2.1 Definíció. *Legyenek valamely $n \in \mathbb{N}$-re $a_1, ..., a_n \in \mathbb{C} \setminus \partial K_0(1)$ egy n hosszúságú sorozat a komplex síkon. Legyen továbbá*

$$B(s_j, z) = \begin{cases} \frac{|a_j|}{a_j} \frac{a_j - z}{1 - \bar{a}_j z} & ha\ a_j \neq 0 \\ z & ha\ a_j = 0. \end{cases}$$

Ekkor, ha $\theta \in \mathbb{R}$, akkor a $B : \left(\mathbb{C} \setminus \{\bar{a}_k^{-1} \ : \ a_k \neq 0,\ 0 < k \leq n\}\right) \to \mathbb{C}$,

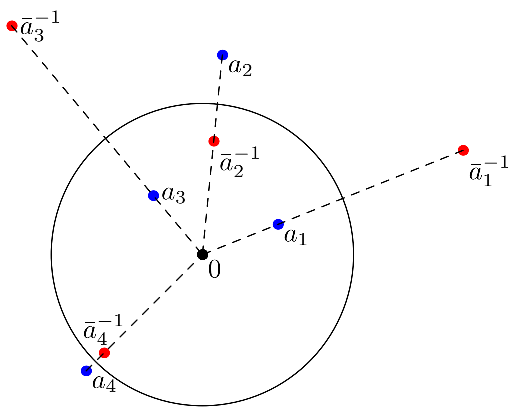
$$B(z) = e^{i\theta} \prod_{j=1}^{n} B(a_j, z)$$

alakú függvényeket véges Blaschke-szorzatnak nevezzük, n-et pedig a Blaschke-szorzat rendjének.

Vegyük észre, hogy a sorozat tagjait $\mathbb{C}$-ből is választhatnánk, azonban az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy nem egység hosszúak, ugyanis behelyettesítve $|b| = 1$-et:

$$B(b,z) = \frac{|b|}{b}\frac{b-z}{1-\bar{b}z} = \frac{1}{b}\frac{b-z}{1-b^{-1}z} = 1.$$

Az ilyen függvények nullhelyei a $\{a_j\}_{j=1}^n$ sorozat tagjai, pólusai pedig az $\{\bar{a}_j{}^{-1}\}_{j=1}^n$ pontok ha $a_j \neq 0$. A sorozat nulla tagjaihoz nem tartozik pólus, vagyis a nullahely-pólus párok egymás inverzei az egységkörre vonatkoztatva.



1. ábra. Egy negyed rendű Blaschke-szorzat nullhelyei, pólusai és az egységkör.

A továbbiakban azokat a függvényeket nevezzük Blaschke-szorzatnak, melyekre az $\{a_k\}_{k=1}^n$ sorozat az egységkör belsejéből van ($|a_j| < 1$). Ekkor minden pólus kívül esik az egységkörvonalon, minden $B(a_j, z)$ reguláris az egységkörlap egy környezetében, így a szorzatuk is.

Figyeljük meg, hogy a Blaschke-szorzatok az egységkörön egységnyi hosszú értékeket vesznek fel, hiszen ha $|z| = 1$

$$|B(a,z)| = \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| = \left|\frac{z-a}{z^{-1}-\bar{a}}z^{-1}\right| = \left|\frac{z-a}{\bar{z}-\bar{a}}\right| = 1.$$

2.1 Állítás. *Bármely folytonos, unimoduláris f függvény ($|f(z)| = 1$ ha $|z| = 1$) egyenletesen közelíthető véges Blaschke-szorzatok hányadosával az egységkörön.*

Bizonyítás: Írjuk a közelíteni kívánt függvényt $f = g^2$ alakban (ahol $g(e^{it})$ folytonos $t \in [0, 2\pi]$-re), és közelítsük g-t egyenletesen racionális törtfüggvényekkel. Ezt úgy tehetjük meg, hogy az egységkört $\gamma(t) = e^{it}$ alakban paraméterezve trigonometrikus polinomokkal közelítjük a $g \circ \gamma$ függvényt a $t \in [0, 2\pi)$ tartományon. Ekkor

$$s_n = \sum_{k=-n}^{n} d_k e^{ikt} = \sum_{k=-n}^{n} d_k z^k$$

a $\partial K_0(1)$-en éppen racionális törtfüggvények. A trigonometrikus polinomok a Stone-Weierstrass tétel értelmében sűrűek $C[0, 2\pi]$-ben (ennek belátását nem tárgyaljuk, de a bizonyítás megtalálható [5]-ben), ezért konstruálható belőlük sorozat, mely egyenletesen konvergál egy tetszőleges $\partial K_0(1)$-en értelmezett folytonos függvényhez. (Megjegyezzük, hogy egy konstruktív módszer erre a közelítésre, ha $g(\gamma(t))$-t Fourier sorba fejtjük, s a keresett sorozat tagjaiként a Cesaro-közepeket használjuk. Ekkor a Cesaro-közepek is racionális törtfüggvények lesznek, és Fejér tétele garantálja az egyenletes konvergenciát [6], ennek részletezésére azonban ezen dolgozat keretei nem adnak lehetőséget.)

Legyen az elkészített közelítő sorozat egyik tagja $h_m = \frac{p_m}{q_m}$ (ahol p_m és q_m polinomok), így

$$\frac{h_m(z)}{\overline{h_m(\frac{1}{\bar{z}})}} = \frac{h_m(z)}{\overline{h_m(z)}} = \frac{h_m^2(z)}{|h_m(z)|^2} \to g(z)$$

egyenletesen, hiszen mivel g unimoduláris, ezért $|h_m|^2 \to 1$. Ugyanakkor $\frac{h_m(z)}{\overline{h_m(\frac{1}{\bar{z}})}}$ két véges Blaschke-szorzat hányadosa, hiszen tetszőleges r polinomra $\frac{r(z)}{\overline{r(\frac{1}{\bar{z}})}}$ két véges Blaschke-szorzat hányadosa. Ugyanis ha $(z-a)$ polinom értelemben osztója r-nek, akkor az ehhez tartozó tag $\overline{r\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$-ben $(z^{-1} - \bar{a}) = z^{-1}(1 - \bar{a}z)$, ezen kettő hányadosa pedig pont véges Blaschke-szorzat, ha $|a| \leq 1$, vagy ha $|a| > 1$ akkor a hányados egy Blaschke-szorzat multiplikatív inverze, és a definícióból is nyilvánvaló, hogy ilyenek szorzata is az. Ez analóg módon elmondható p_m és q_m tagjaira is, és mivel

$$\frac{h_m(z)}{\overline{h_m(\frac{1}{\bar{z}})}} = \frac{p_(z)}{\overline{p_m(\frac{1}{\bar{z}})}} \frac{\overline{q_m(\frac{1}{\bar{z}})}}{q_m(z)}$$

ezzel az állítást beláttuk.

2.1 Lemma. *Legyen* $D = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \leq 1+\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ *és* $f, g : D \to \mathbb{C}$ *reguláris, nem nulla az egységkör peremén. Ekkor léteznek* α *és* β *véges Blaschke-szorzatok úgy, hogy*

$$|\alpha f + \beta g| < \max\{|f|, |g|\} \qquad (z \in \partial K_0(1)).$$

Bizonyítás: A bizonyításban végig $z \in \partial K_0(1)$. Legyen $h = \frac{g}{f}$ amely a egységkörvonalon értelmes definíció, valamint legyen $\delta(z) = \frac{h(z)}{|h(z)|}$, így δ folytonos, unimoduláris függvény, ezért léteznek olyan α és β véges Blaschke-szorzatok, melyekre

$$\left|-\delta - \frac{\alpha}{\beta}\right|(z) < \frac{\min_{|z|=1}(|f|, |g|)}{\max_{|z|=1}|f|} \qquad (z \in \partial K_0(1)).$$

Az előző sor miatt, és mert az egységkörvonalon $|\alpha| = |\beta| = |\delta| = 1$,

$$|\alpha f+\beta g| = \left|\frac{\alpha}{\beta} + \frac{g}{f}\right||f| = \left|\frac{\alpha}{\beta} + \delta|h|\right||f| = \left|\frac{\alpha}{\beta} + \delta + \delta(|h|-1)\right||f| \leq \left[\left|\frac{\alpha}{\beta} + \delta\right| + |\delta(|h|-1)|\right]|f|.$$

Felhasználva az előző egyenlőtlenséget, és azt, hogy $|f| \neq 0$ ha $z \in \partial K_0(1)$:

$$\left[\left|\frac{\alpha}{\beta} + \delta\right| + ||h|-1|\right]|f| < \left[\frac{\min_{|z|=1}(|f|, |g|)}{\max_{|z|=1}|f|} + \left|\left|\frac{g}{f}\right| - 1\right|\right]|f| \leq \min_{|z|=1}(|f|, |g|) + ||g| - |f||$$

$$\min_{|z|=1}(|f|, |g|) + ||g| - |f|| \leq \max\{|f|, |g|\}.$$

Az utolsó három egyenlőtlenség sort összeolvasva kapjuk a lemma állítását.■

2.4 Tétel. *Legyen* $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1 + \varepsilon, \varepsilon > 0\}$, $f, g : D \to \mathbb{C}$ *reguláris* D*-n, és nem zérus az egységkör peremén. Jelölje* f *és* g *egységkörlap belsejében lévő multiplicitással számolt zérushelyeinek számát rendre* Z_f *és* Z_g*. Ekkor* $Z_f = Z_g$ *akkor és csak akkor, ha léteznek* α *és* β *azonos rendű véges Blaschke-szorzatok, melyekre*

$$|\alpha f + \beta g| < |f| + |g| \qquad (z \in \partial K_0(1)).$$

2.3 Megjegyzés. *A szimmetrikus Rouché-tételt láthatóan ez a tétel tartalmazza* $\alpha \equiv 1 \equiv \beta$ *mellett, mi azonban azt felhasználjuk a bizonyításban, így nem kezelhetjük következményként.*

Bizonyítás: Először az "akkor" irányt látjuk be, tehát most $Z_f = Z_g$. A lemma szerint léteznek α és β véges Blaschke-szorzatok melyekre:

$$|\alpha f + \beta g| < \max\{|f|, |g|\} < |f| + |g| = |\alpha f| + |\beta g| \qquad (z \in \partial K_0(1)).$$

Használjuk a Rouché-tétel szimmetrikus alakját az αf, βg párra. Mivel α és β analitikusak az egységkörlap egy környezetében. A fenti választással: $Z_\alpha + Z_f = Z_{\alpha f} = Z_{\beta g} = Z_\beta + Z_g$, így $Z_f = Z_g$ miatt $Z_\alpha = Z_\beta$ vagyis α és β azonos rendű.

A vissza irány esetén α és β olyanok, hogy

$$|\alpha f + \beta g| < |f| + |g| \qquad (z \in \partial K_0(1)),$$

s mint korábban megállapítottuk, az egységkörön $|\alpha| = 1 = |\beta|$, tehát

$$|\alpha f + \beta g| < |\alpha f| + |\beta g|.$$

Az előző részhez hasonlóan ismét a szimmetrikus Rouché-tételt használva:

$$Z_\alpha + Z_f = Z_{\alpha f} = Z_{\beta g} = Z_\beta + Z_g.$$

Most tudjuk, hogy α és β azonos rendű, így $Z_\alpha = Z_\beta$, ezért $Z_f = Z_g$ amivel a tételt beláttuk. ■

2.1 Következmény. *Tegyük fel hogy a tétel feltételei teljesülnek. Ekkor $Z_f - Z_g = m \in \mathbb{Z}$ akkor és csak akkor $K_0(1)$-ben, ha létezik α és β véges Blaschke-szorzatok, hogy β rangja m-el nagyobb α-énál, vagyis $Z_\alpha - Z_\beta = -m$ úgy, hogy*

$$|\alpha f + \beta g| < |f| + |g| \qquad (z \in \partial K_0(1)).$$

A következmény bizonyítása teljesen analóg a fenti tétel bizonyításával.

2.4 Megjegyzés. *A megfordítás bevezetése előtt ígéretet tettünk annak a korrigálására, hogy a tételt csak az egységkörvonalra mondtuk ki. A javítást az f és g függvények transzformációja* *jelenti egy alkalmas differenciálható bijekcióval, ugyanis ha a tétel próbálnánk transzformálni, az elcsúfítaná a Blaschke-szorzatok alakját.*

Vegyük észre, hogy amennyiben másik körvonalra szeretnénk a tételt alkalmazni, akkor egy lineáris függvénnyel az adott körvonal az egységkörvonalra és a kör belseje az egységkör belsejébe transzformálható, így az eredeti tételt érdemes az $f(az+b)$, $g(az+b)$ *függvénypárra alkalmazni alkalmas* a, b *mellett.*

2.4. A tétel bizonyítása polinomokra

A Következő tétel felhasználja az algebra alaptételét, de nem használja a komplex függvénytan olyan erős állításait és fogalmait, mint az eredeti tétel bizonyítása. Segítségével könnyű bizonyítását nyerjük a polinomok gyökeinek folytonosságáról szóló tételnek, de mint látni fogjuk, ezen kívül is fontos tétel, hiszen igen gyakran polinomok gyökeiről szeretnénk információt nyerni. Tételünket [7] alapján az egységkörre látjuk be, azonban megfelelő átparaméterezéssel ez kiterjeszthető tetszőleges körre.

2.5 Tétel. *Legyenek f és g komplex együtthatós polinomok. Ekkor ha teljesül*

$$|g(z) + f(z)| < |g(z)| + |f(z)| \qquad (z \in \partial K_0(1))\,,$$

akkor f és g gyökeinek száma (multiplicitással) megegyezik $K_0(1)$-en.

Bizonyítás: Jelölje f és g $K_0(1)$-beli gyökeinek számát rendre v és w. Mivel egyik függvény sincs kitüntetve a tételben, elegendő megmutatni, hogy $v \le w$, mert a fordított reláció ugyanígy következik, a kettőből pedig az egyenlőség.

Indirekt tegyük fel, hogy $v > w$.

Megmutatjuk, hogy ekkor létezik $x \in [0, 2\pi)$ melyre $|f(e^{ix}) + g(e^{ix})| = |f(e^{ix})| + |g(e^{ix})|$ vagyis azt, hogy a tételben kirótt feltétel nem teljesül.

A háromszög-egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül egyenlőséggel, ha a vektorok által bezárt szög zérus, vagyis elegendő olyan x-et keresnünk, melyre $arg(f(e^{ix})) = arg(g(e^{ix}))$.

Definiáljuk a

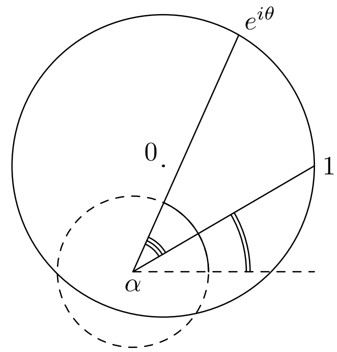
$$w(\alpha, 0) = arg(1 - \alpha)$$

függvényt $|\alpha| \neq 1$ komplexekre, és legyen

$$w(\alpha, \theta) = arg(e^{i\theta} - \alpha) + s(\theta)2\pi$$

ha $|\alpha| \neq 1$, $\alpha \in \mathbb{C}$ és $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, és $s : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ pedig olyan egész értékű függvény, hogy $w(\alpha, \theta)$ folytonos legyen a második változójában. Ha geometriai képet helyezünk a

$w(\alpha,\theta) - w(\alpha,0)$ különbség mögé, akkor ez pont az az α csúcsú szög tekeredés szerinti multiplicitással számolt értéke, melynek szárai az 1 és az $e^{i\theta}$ pontokon haladnak keresztül, ha $\alpha \in K_0(1)$ (tehát valójában s pont a körbetekeredéseket számolja), ha $\alpha \notin \partial K_0(1) \cap K_0(1)$ akkor ugyanez a szög, csak nem multiplicitással számolva. Jobban mondva külső pontból a körvonalat π radiánnál midig kisebb szög alatt látjuk, így nem történhet körbetekeredés.



2. ábra. Az $\alpha \in K_0(1)$ eset szemléltetése: az egyíves szög $w(\alpha,\theta)$, a szaggatott vonal jelzi, hogy ez az érték nem $[0,2\pi)$-re korlátozódik, hanem multiplicitással számolandó. A kétíves szög $w(\alpha,0)$. Kettejük különbsége a háromíves szög.

Ezért

$$w(\alpha,2\pi) - w(\alpha,0) = \begin{cases} 2\pi & \text{ha } |\alpha| < 1 \\ 0 & \text{ha } |\alpha| > 1. \end{cases}$$

Legyen f főegyütthatója a, g-é pedig b, valamint gyökeik rendre $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$ és $\beta_1, ...\beta_m$ multiplicitással felsorolva. $|g(z) + f(z)| < |g(z)| + |f(z)|$ a körvonal minden pontjára garantálja, hogy egyik gyök se essen az egységkörre, így $|\alpha_i| \neq 1$ és $|\beta_j| \neq 1$ minden $1 \leq i \leq n$ és $1 \leq j \leq m$ esetén.

Vezessük be most

$$F(\theta) = arg(a) + 2k\pi + \sum_{j=1}^{n} w(\alpha_j,\theta)$$

függvényt, ahol $k \in \mathbb{Z}$ olyan, hogy $F(0) \in (-2\pi, 0]$, hasonlóképp legyen

$$G(\theta) = arg(b) + 2l\pi + \sum_{j=1}^{m} w(\beta_j, \theta),$$

ahol $l \in \mathbb{Z}$ mellett $G(0) \in [F(0), F(0) + 2\pi)$. Vegyük észre, hogy F és G folytonosak a valósok halmazán.

Ekkor az algebra alaptételét felhasználva faktorizáljunk:

$$arg(f(e^{i\theta})) = arg(a \prod_{j=1}^{n} (e^{i\theta} - \alpha_j)) = arg(a) + \sum_{j=1}^{n} arg(e^{i\theta} - \alpha_j) + 2\pi c$$

ahol $c \in \mathbb{Z}$ úgy, hogy a kifejezés értéke a $[0, 2\pi)$ tartományba essék, vagyis

$$F(\theta) = arg(f(e^{i\theta})) \text{ mod } 2\pi.$$

$$F(2\pi) - F(0) = \sum_{j=1}^{n} w(\alpha_j, 2\pi) - w(\alpha_j, 0) = 2\pi v$$

Teljesen analóg módon $G(\theta) = arg(g(e^{i\theta}))$ mod 2π és $G(2\pi) - G(0) = 2\pi w$.

Legyen most $H(\theta) = F(\theta) - G(\theta)$. Erre $H(0) \leq 0$ hiszen $G(0) \in [F(0), F(0) + 2\pi)$.

$$H(2\pi) = F(2\pi) - G(2\pi) = 2\pi(v - w) - F(0) + G(0) \geq 2\pi - H(0) > 0.$$

Mivel F és G folytonosak, ezért H is az, tehát Bolzano 1817-ben bizonyított tételét felhasználva, van olyan $y \in [0, 2\pi)$, melyre $H(y) = 0$ vagyis

$$0 = F(y) - G(y) = arg(f(e^{iy})) - arg(g(e^{iy})),$$

így a tételt beláttuk. ∎

2.5 Megjegyzés. *Megfigyelhető, hogy ez a bizonyítás valójában a csavarodási szám egy, a komplex függvénytanban látott konstrukciójához igen közel álló analógiáját használja. Annyi a szerencsénk a polinomokkal, hogy a gyöktényezős felbontásukat felírva az egyes nullhelyek járulékai integrálás nélkül megállapíthatók. Sőt, valójában ez a bizonyítás tetszőleges Jordan-görbére általánosítható.*

2.5. A tétel folytonos függvényre vonatkozó változata

Amennyiben szeretnénk elégséges kritériumot arra, hogy adott nem feltétlen differenciálható függvénynek van az általunk kijelölt tartományon zérushelye, hasznunkra lehet a következő, folytonos függvényekre alkalmazható alak, melyet mi főleg azért tárgyaluk, mert bizonyítása hasznos fogásokat tartalmaz. A tétel ezen formában [8]-ban van kimondva.

2.6 Tétel. *Legyen $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} \subset \mathbb{C}$ valamint $g : D \to \mathbb{C}$ folytonos, és $f : D \to \mathbb{C}$ holomorf D egy környezetében. Ekkor ha*

$$|g(z)| \leq |f(z)| \qquad (z \in \partial K_0(1))$$

teljesül, valamint f-nek van gyöke D-ben, akkor $f + g$-nek is van.

Bizonyítás: Kössük ki, hogy $f(z) \neq 0$ ha $z \in \partial K_0(1)$, hiszen másként az állítás igaz. Ekkor amennyiben g differenciálható D-ben, akkor a tétel a hagyományos Rouché-tétel egyenes következménye. Tegyük fel először, hogy g valós $\mathbb{R}^2$ értelemben folytonosan differenciálható D egy környezetében, és $|g(z)| < |f(z)|$. Tegyük fel továbbá indirekt, hogy f-nek van gyöke D-ben, de $f + g$-nek nincs.

A feltételekből minden $t \in [0, 2\pi)$-re és $s \in [0, 1]$-re:

$$|f(e^{it}) + sg(e^{it})| \geq |f(e^{it})| - s|g(e^{it})| > 0 \qquad (z \in \partial K_0(1)).$$

Mivel az egységkör zárt, $\gamma(t) = e^{it}$ $(t \in [0; 2\pi])$ paraméterezés differenciálható, g és f a körvonalon differenciálhatók, definiálhatjuk a $\Gamma_s(t) = f(e^{it}) + sg(e^{it})$ szintén zárt, differenciálható görbe paraméterezés origóra vonatkozó tekeredési számát.

$$n(s) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_s} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_s} \frac{1}{z} \frac{x - iy}{x - iy} dz,$$

ahol a $x = Re(z)$ és $y = Im(z)$ jelöléseket használtuk. Az $n(s)$ folytonos (a fenti egyenlőtlenségből), egészértékű $n : [0, 1] \to \mathbb{Z}$ függvény. Ezen két tulajdonság miatt $n(s)$ konstans. A fenti képletet könnyen nyerhetjük a $\phi = tg(y/x)$ helyettesítéssel a

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_s} d\phi$$

polárkoordinátákban felírt integrálból, mivel Γ zárt az egészértékűség következik.

f komplex értelemben is differenciálható, ezért az argumentum elvnek köszönhetően $n(0)$ pont az ő egységkörön belül lévő gyökeinek a száma. Feltettük, hogy $(f+g)(z) \neq 0$ $z \in D$ esetén, ezért $g(re^{it}) + f(re^{it})$ semely $0 \leq r \leq 1$-re nem lesz zérus, azonban továbbra is zárt és folytonos görbe, tehát a nulla a $\mathbb{C} \setminus \{f(re^{it}) + g(re^{it}) \ : \ t \in [0; 2\pi)\}$ felosztás nem korlátos tartományába esik, így $f(re^{it}) + g(re^{it})$ a tekeredési száma 0 minden r-re. De ez $r = 1$-re ellentmondás, mert ha f-nek van zérushelye $K_0(1)$-ben, akkor $n(0) = n(1) \neq 0$.

Általános esetben vezessük be a $0 < \theta < 1$ paramétert, s használjuk Stone-Weierstrass tételt: mivel g folytonos, ezért létezik olyan $h_m = p_m + iq_m$ sorozat, ahol p_m és q_m kétváltozós polinomok, melyekre $h_m \to \theta g$ egyenletesen a D-n (ld. [5]), valamint $|h_m| < |f|$ a $|z| = 1$-en (ha van olyan tag a sorozatban, ami ez utóbbit nem teljesíti, akkor azt dobjuk ki, hiszen kétezik $M \in \mathbb{N}$, hogy minden $m > M$ esetén $|h_m| - \theta|g| \leq |h_m - \theta g| < \min_{|z|=1}\left(\frac{|f|-|g|}{2}\right)$ vegyük észre, hogy a jobboldal folytonos, ezért a min értelmes, és g a peremen nem nulla, ezért a jobboldal szigorúan pozitív is. Innen $|h_m| < \left(\frac{|f|-|g|}{2}\right) + |g| < |f|$ így a sorozatnak végtelen sok tagja marad.)

Az approximáló polinom már differenciálható ($\mathbb{R}^2$ értelemben), így minden $m \in \mathbb{N}$-re létezik $w_m \in D$, hogy $h_m(w_m) + f(w_m) = 0$. Vegyük ennek egy konvergens részsorozatát (Ami a Bolzano-Weierstrass tétel miatt létezik a zárt és korlátos D-n.), legyen ez $\{w_{m_k}\}_{k=0}^{\infty}$ melynek határértéke w_θ, és $\theta g(w_\theta) + f(w_\theta) = 0$ (Hiszen, ha nem 0 volna, hanem $\theta g(w_\theta) + f(w_\theta) = \eta > 0$, akkor tudunk olyan nagy M-et választani, hogy $m > M$-re $\|h_m - \theta g\| < \eta/2$, de $h_m(w_m) = -f(w_m)$ ezért $|f(w_m) - \theta g(w_m)| < \eta/2$ ami ellentmondás.).

Tekintsük most a $\{\theta_n\}_{k=0}^{\infty}$ egyhez tartó sorozatot az előző θ tulajdonságaival. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$-re kapunk egy $w_{\theta_n} = z_n \in D$ határértéket, melyre $\theta_n g(z_n) + f(z_n) = 0$. Ha most ezen z_n-ek egy konvergens részsorozatát nézzük, és ezek határértéke $z \in D$, akkor $f(z) + g(z) = 0$ amivel az állítást beláttuk. ■

A fenti tétel több érdekes következménnyel is bír.

2.2 Következmény. *Minden $f : D \to \mathbb{C}$ folytonos függvénynek ($\overline{K_0(1)} \subset D$), melyre*

$$|g(z)| \leq 1 \qquad (z \in \partial K_0(1))$$

van fixpontja. (A $f(z) = -z$ helyettesítéssel nyilvánvaló.)

2.3 Következmény. *Minden folytonos $f : \overline{K_0(1)} \to \overline{K_0(1)}$ függvénynek van fixpontja. (Az előző speciális esete.)*

3. A Rouché-tétel egy közeli rokona, a Hurwitz-tétel

3.1. Hurwitz tétele

3.1 Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ korlátos tartomány, $f_n : D \to \mathbb{C}$ holomorf függvények sorozata $n \in \mathbb{N}$-re, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorf, $f \not\equiv 0$ és az $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat egyenletesen konvergál f-hez. Ekkor, ha $z_0 \in D$ k-szoros zérushelye f-nek akkor létezik $U = \partial K_{z_0}(r) \cup K_{z_0}(r)$ környezete melyben nincsen másik nullahely, és létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$-re f_n-nek multiplicitással számolva pontosan k darab zérushelye van U-ban, valamint ezek a zérushelyek z_0-hoz tartanak.*

Bizonyítás: Legyen r olyan, hogy $0 < |z - z_0| \leq r$ esetén $f(z) \neq 0$ (az ilyen r létezése az unicitás tétel következménye). Ekkor létezik $\delta > 0$, hogy $|f(z)| > \delta$, ha $|z - z_0| = r$, hiszen f folytonos.

Az egyenletes konvergenciából következik, hogy létezik $N \in \mathbb{N}$ amelyre minden $n \geq N$ esetén $|f_n(z)| > \delta/2$ ha $|z - z_0| = r$, s így a körvonalon jól definiált az $\frac{f_n'(z)}{f_n(z)}$ hányados.

Weierstrass (a bevezetőben említett) tétele szerint, ha $f_n \to f$ lokálisan egyenletesen, akkor $f_n' \to f'$ lokálisan egyenletesen.

Mivel D-n $f_n \to f$ egyenletesen, ezért lokálisan egyenletesen is, tehát $f_n' \to f'$ lokálisan egyenletesen, vagyis minden D-beli pontnak van egy nyílt környezete ahol a konvergencia egyenletes, így a $z \in U := \partial K_{z_0}(r) \cup K_{z_0}(r)$-nek is. Ez kompakt halmaz, a benne lévő pontokhoz tartozó környezetek lefedik, tehát véges sok is lefedi. Legyen $\varepsilon > 0$. A választott véges fedésben szereplő j-edik környezeten a konvergencia egyenletes, így létezik egy ${}_jN_\varepsilon$ küszöbindex, hogy itt $|f_n'(z) - f'(z)| < \varepsilon$ ha $n >_j N_\varepsilon$. Legyen m a végest alkotó környezetek száma. $D \subset \bigcup_{j=1}^m K_{z_j}(r_j)$ és legyen $N_\varepsilon = \max_{0<j\leq m} \ {}_jN_\varepsilon$. Ezzel

$$|f_n'(z) - f'(z)| < \varepsilon \qquad (|z - z_0| \leq r,\ n > N_\varepsilon).$$

Így beláttuk, hogy $f_n' \to f'$ egyenletesen a $|z-z_0| \leq r$-en, ahonnan $\frac{f_n'(z)}{f_n(z)} \to \frac{f'(z)}{f(z)}$ egyenletesen a körvonalon.

Az argumentum-elvet felhasználva:

$$k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} dz = \lim_{n\to\infty} Z_n,$$

ahol Z_n az f_n zérushelyeinek számát jelöli $K_{z_0}(r)$-ben. Mivel $Z_n \in \mathbb{Z}$ és $Z_n \to k$, ezért létezik $K \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > K$-ra $Z_n = k$. Ez tetszőlegesen kicsi $\varrho < r$ sugarú körlap mellett teljesül elég nagy K küszöbindexre, vagyis a nullhelyek konvergálnak. ■

3.1 Következmény. *A tétel nem csak a zérushelyek köré rajzolt körvonalra igaz, hanem tetszőleges D-beli Jordan görbére melyen* $f \neq 0$*, ugyanis ennek belsejében véges sok zérushely lehet (*$\{z_1, ..., z_m\}$*), ezek köré választhatók akkora sugarú környezetek (*$K_{z_1}(r), ..., K_{z_m}(r)$*), hogy* $K_{z_j}(r) \subset int\gamma$ $0 < j \leq m$*, valamint* $K_{z_k}(r) \cap K_{z_l}(r) = \emptyset$ *(*$0 < k < l \leq m$*). Legyen* N_1 *akkora, hogy az így kijelölt* r *sugarú környezetek mindegyikében* $Z_f = Z_{f_n}$*, ha* $n > N_1$*. Ekkor* $|f(z)| > \varepsilon > 0$*, ha* $z \in H = int\gamma \setminus \bigcup_{j=1}^m K_{z_j}(r)$*. Legyen* $\delta = \inf_{z\in H} |f(z)|$*, és legyen* $N_2 \in \mathbb{N}$ *akkora, hogy* $|f - f_n| < \frac{\delta}{2}$*, így ha* $n > N_2$*, akkor* $f_n \neq 0$ H*-n. Tehát amennyiben* $\max\{N_1, N_2\}$*-t választjuk küszöbindexnek, akkor* $int\gamma$*-ban* f *és* f_n *zérushelyinek száma multiplicitással megegyezik.*

Egyszerű bizonyítást nyerhetünk a Rouché-tétel alkalmazásával:

Bizonyítás: Legyen r ismét olyan, hogy $0 < |z - z_0| \leq r$ esetén $f(z) \neq 0$. Ismét létezik $\delta > 0$, hogy $|f(z)| > \delta$ minden $|z - z_0| = r$ esetén. Ekkor kellően nagy $N \in \mathbb{N}$ küszöbindexre ha

$n > N$, akkor $|f - f_n| < \delta < |f(z)|$ vagyis a Rouché-tétel hagyományos alakja szerint f-nek és $f + (f - f_n)$-nek azonos számú zérushelye van a körvonal belsejében. ■

3.2. Az ellenkező irány

A Hurwitz-tétéből is belátható a Rouché-tétel, Abian [9] cikkében belátja a hagyományos változatot. Mi egy hasonló bizonyítással az erősebb szimmetrikus tételt látjuk be, mely ilyen formában tudtunkkal nem szerepel az irodalomban.

Bizonyítás: Legyen D tartomány, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, $R(\gamma)$ Jordan-görbe, $f, g : D \to \mathbb{C}$ holomorfak D-n és

$$|f + g| < |f| + |g| \qquad (z \in R(\gamma)).$$

Legyen $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$h_{1,n}(z) = f(z) - (f(z) + g(z)) \left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

melyre $h_{1,n} \to -g$ egyenletesen, hiszen $f + g$ folytonos. Az egyenlőtlenségből $f \neq 0 \neq g$ az $R(\gamma)$-án. Vegyük észre, hogy $g(z) = 0$ pontosan akkor ha $-g(z) = 0$. Ha $h_{1,n}(z) = 0$ akkor $f(z) = g(z)(n - 1)$ azaz $(f/g)(z)$ pozitív valós, vagy $f(z) = 0$, de a háromszög egyenlőtlenségből következően $f(z)$ és $g(z)$ argumentuma nem lehet azonos a görbén, illetve $f(z) = 0$ is tiltott, tehát itt $|h_{1,n}| > 0$.

Mivel $h_n \to -g$ egyenletesen, ezért a Hurwitz tétel értelmében létezik olyan n_1 küszöbindex, melyre $int\gamma$-án h_{n_1}-nek és g-nek ugyanannyi gyöke van.

Legyen ekkor

$$h_{2,n} = f - (f + g) \left(1 - \frac{1}{n_1}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

amely egyenletesen konvergál $h_{2,n} \to h_{1,n_1}$, az előző gondolatmenetet megismételve megállapítható, hogy $|h_{2,n}| > 0$ az $R(\gamma)$-án. A Hurwitz tétel állítása szerint létezik n_2 küszöbindex, melyre h_{1,n_1} és h_{2,n_2} $int\gamma$-beli gyökeinek száma azonos, így $Z_{h_{2,n_2}} = Z_g$.

A sorozatot így folytatva, továbbra is D-n holomorf függvényeket nyerünk. A

$$h_{j,n} = f - (f+g)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\prod_{k=1}^{j-1}\left(1 - \frac{1}{n_k}\right)$$

kifejezésben minden $\left(1 - \frac{1}{n_k}\right) < 1$ így szorzatuk pozitív, monoton csökkenő sorozatot alkot, vagyis a $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n_k}\right) = r_\omega$ határérték létezik (ahol ω jelöli az első nem véges ordinált). A korábbi indoklások szerint $h_\omega = f - (f+g)r_\omega$ jelöléssel $|h_\omega| > 0$ az $R(\gamma)$-án, mert $1 > r_\omega \geq 0$. Ekkor $Z_{h_\omega} = Z_g$, hiszen minden $j \in \mathbb{N}$-re $Z_{h_{j,n_j}} = Z_g$ és j-ben egyenletesen konvergál h_ω-hoz.

Ha $r_\omega = 0$ akkor $h_\omega = f$, ezért $Z_f = Z_g$ és készen vagyunk. Ellenkező esetben folytassuk a sorozatot:

$$h_{\omega+j,m} = f - (f+g)r_\omega\left(1 - \frac{1}{m}\right)\prod_{k=1}^{j-1}\left(1 - \frac{1}{m_k}\right),$$

vagyis

$$r_\lambda = \prod_{k\in\lambda}\left(1 - \frac{1}{n_k}\right)$$

egy λ ordinálra. Vegyük észre, hogy λ nem lehet nem megszámolható a nélkül hogy $r_\lambda = 0$ volna, ugyanis ha így volna, akkor egy a λ-val indexelt sorozatot kapnánk, mely szigorúan monoton csökken $\mathbb{R}$-ben. Ekkor $\alpha < \lambda$ esetén r_α és $r_{\alpha+1}$ közt található egy v_α racionális szám (hiszen $\mathbb{Q}$ sűrű $\mathbb{R}$-ben). A szigorú monotonitás miatt $v_\alpha \neq v_\beta$, ha $\alpha \neq \beta$ és így nem megszámlálhatóan sok különböző racionális számból álló sorozatot kaptunk, ami ellentmondás. Tehát r_λ egy megszámlálható ordinálnál eltűnik, és így az előző esethez hasonlóan befejezhetjük a tétel bizonyítását ($f_\lambda = f$). $\blacksquare$

4. A Rouché-tétel alkalmazásai

4.1. Az algebra alaptétele

4.1 Tétel. *Legyen p egy $n \geq 1$-ed fokú $\mathbb{C}$ együtthatós polinomja z-nek. Ekkor p-nek multiplicitással számolva pontosan n darab zérushelye van.*

Bizonyítás: Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a polinomunk főegyütthatója egy, vagyis:

$$p(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$$

alakú. Legyen

$$f(z) = z^n \ \text{ és } \ g(z) = p(z) - f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k,$$

és válasszunk olyan $R \in \mathbb{R}^+$ számot, melyre $R > 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |z^k| > 1$, így az origó körüli R sugarú körvonalon:

$$|g(z)| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| R^k < R^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| < R^n = |z^n| = |f(z)|.$$

Az z^n egy n-szeres nullhellyel rendelkezik az origóban. A polinomok holomorfak az egész $\mathbb{C}$-n, így a Rouché tételt alkalmazva f-nek és $f + g = p$-nek ugyanannyi zérushelye van az origó körüli R sugarú körlapon, és azon kívül p sehol sem nulla, ugyanis a fönti becslés bármely $r \geq R$-re működik. $\blacksquare$

4.1 Következmény. *Ha két n-ed fokú polinom legalább $n + 1$ pontban azonos értéket vesz fel, akkor ez a két polinom ugyan az. Ugyanígy, ha két egyre normált főegyütthatójú polinom legalább n különböző pontban azonos értéket vesz fel, akkor ők azonosak.*

Valóban, hiszen ha nem így volna, akkor a kettejük különbsége legfeljebb n-ed fokú, azonban legalább $n + 1 > n$ gyökhelyük van, tehát konstansnak kell lennie, és mivel valahol nulla, ezért a zéró polinom. A normált eset analóg módon bizonyítható.

4.2 Következmény. *Egy normált $p(z)$ n-ed fokú polinom n darab lineáris faktor szorzatára bontható a sorrendtől eltekintve egyértelműen.*

Megjegyezzük, hogy a komplex függvénytan keretein belül akad ennek a tételnek egy még egyszerűbb bizonyítása. Ez Liouville tételét használja fel.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $p(z)$ n-ed fokú ($n \geq 1$) polinomnak nincsen egyetlen gyöke sem. Ekkor $\frac{1}{p(z)}$ egész függvény.

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{p(z)} = \lim_{z\to\infty} \frac{\frac{1}{z^n}}{1 + a_{n-1}\frac{1}{z} + a_{n-2}\frac{1}{z^2} + ... + a_0\frac{1}{z^n}} \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^n} = 0$$

Ez azt jelenti, hogy létezik $R \in \mathbb{R}$, hogy ha $|z| > R$ akkor $\left|\frac{1}{p(z)}\right| < 1$. Mivel $\left|\frac{1}{p(z)}\right|$ folytonos, ezért Weiestrass tétele szerint felveszi a maximumát egy kompakt halmazon, így legyen

$$M = \max_{|z|\leq R} \left|\frac{1}{p(z)}\right|.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\left|\frac{1}{p(z)}\right| \leq \max\{M, 1\} \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

ezért Liouville tétele miatt $p(z)$ konstans. A polinomnak tehát van gyöke, az ehhez tartozó lineáris taggal oszthatjuk, és az érvelést megismételhetjük a megmaradó, eggyel kisebb (de még nem konstans, nullad-) fokú polinomra. ■

4.2. A polinomok gyökeinek folytonossága az együtthatók függvényében

A következő, alapvető fontosságú tételre is egyszerű bizonyítást nyerhetünk a Rouché-tétel használatával. Valójában már a tétel kimondásában felhasználjuk az algebra alaptételét, nevezetesen azt, hogy a gyökhelyek megszámlálható sokan vannak, és így felsorolhatók.

4.2 Tétel. *Egy polinom gyökeinek helye folytonos függvénye az együtthatóknak, azaz, legyen*

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

egy $n \geq 1$*-ed fokú polinom, és legyenek különböző zérushelyei* $\{z_j\}_{j=0}^m$ *rendre* $\{p_j\}_{j=0}^m$ *multiplicitásokkal. Ekkor minden olyan* $\varepsilon > 0$*-hoz, hogy* $K_{z_j}(\varepsilon) \cap K_{z_k}(\varepsilon) = \emptyset$ $(0 \leq k < j \leq m)$*, létezik* $\delta > 0$*, hogy egy*

$$q(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k$$

polinomra $|a_k - b_k| < \delta$ *esetén a* q*-nak* $K_\varepsilon(z_j)$*-ben multiplicitással pontosan* p_j *darab gyöke van.*

4.1 Megjegyzés. *Amennyiben* $z_0 \in \mathbb{C}$ *egyszeres gyöke a polinomnak, vagyis* $p(z_0) = 0$*, de* $p'(z_0) \neq 0$*, akkor az állítás következik az implicit függvény tételből, sőt, ekkor a gyök helye differenciálható függvénye az együtthatóknak.*

Figyeljük meg, hogy többes gyök esetén a differenciálhatóságot nem tudjuk biztosítani, például a $z^2 + c$ *polinom esetében, ugyanis pozitív* c *esetén a gyökök a valós tengelyen vannak* $\pm\sqrt{c}$*-nél vannak,* $c = 0$ *esetén a nullában, és negatív* c *esetén az imaginárius tengelyen* $\pm i\sqrt{c}$*-nél vannak, tehát a gyökök helye* $c \in [-1, 1]$ *esetén* $c = 0$*-ban nem differenciálható.*

Vizsgálunk meg először egy olyan bizonyítást [10] alapján, amely nem használja a komplex függvénytan eredményeit, ahhoz képest kicsit munkaigényes, de elegáns megoldást kínál. Ehhez vezessünk be néhány új fogalmat:

4.1 Definíció. *Azt mondjuk, hogy* $u, v \in \mathbb{C}$ *esetén* $u = \alpha + i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ *lexikografikusan kisebb mint* $v = \gamma + i\delta$ $(\gamma, \delta \in \mathbb{R})$*, ha* $\alpha < \gamma$*, vagy* $\alpha = \gamma$ *és* $\beta < \delta$*.*
Jelölésére bevezetjük: $v \prec u$*, értelem szerűen* $(v \preceq u) \Leftrightarrow ((v \prec u) \vee (v = u))$*.*

Jelölje továbbá a lexikografikusan rendezett n-eseket

$$C_n = \{x \mid x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n \wedge x_1 \preceq x_2 \preceq ... \preceq x_n\}.$$

C_n lineáris tér, sőt, a $\mathbb{C}^n$-ben szokásos $\|.\|_2$ normával teljes metrikus tér, hiszen $C_n \subset \mathbb{C}^n$ ami teljes, és C_n a határérték tulajdonságai miatt zárt.

Írjuk kényelmi okokból a polinomot a következő alakban:

$$p(z) = z^n - a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} - ... + (-1)^n a_n$$

és legyen $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n$ a váltakozó előjelű együtthatók rendezett n-ese. Az algebra alaptétele szerint p-nek multiplicitással számolva pontosan n gyöke van, legyenek ezek lexikografikusan monoton növő sorrendben $\lambda_1 \preceq \lambda_2 \preceq ... \preceq \lambda_n$, és az ezekből összeállított C_n-beli rendezett n-es $\underline{\lambda}$. A Vieta-formulák segítségével az együtthatók előállanak a gyökhelyek elemi szimmetrikus polinomjaiként:

$$a_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$$

$$a_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + ... + \lambda_{n-1}\lambda_n$$

$$\vdots$$

$$a_n = \lambda_1\lambda_2...\lambda_n,$$

így definiálható a $T : C_n \to \mathbb{C}^n$ leképezés, melyre $T\underline{\lambda} = \overrightarrow{a}$. A Vieta-formulák miatt T triviálisan folytonos. Az algebra alaptétele miatt a gyökhelyek egyértelműek, így T egy bijekció, tehát értelmes $S = T^{-1} : \mathbb{C}^n \to C_n$. A tétel belátásához elegendő megmutatnunk, hogy S folytonos.

4.1 Lemma. $\|S(\overrightarrow{a})\|_2 \leq n \cdot \max\{1, \|\overrightarrow{a}\|_2\}$

Bizonyítás: $S(\overrightarrow{a}) = \underline{\lambda}$ és $p(\lambda_j) = 0$, tehát

$$p(\lambda_j) = \lambda_j^n - a_1\lambda_j^{n-1} + ... + (-1)^n a_n = 0$$

$$|\lambda_j|^n = |a_1\lambda_j^{n-1} - a_2\lambda_j^{n-2} ... - (-1)^n a_n| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k||\lambda_j|^{n-k}.$$

Ha $|\lambda_j| \geq 1$, akkor

$$|\lambda_j|^n \leq |\lambda_j|^{n-1} \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

$$|\lambda_j| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Tehát

$$|\lambda_j| \leq \max\left\{1, \sum_{k=1}^{n} |a_k|\right\} \leq \max\left\{1, \sqrt{n}\|\overrightarrow{a}\|_2\right\} \leq \sqrt{n}\ \max\{1, \|\overrightarrow{a}\|_2\}$$

$$\|S(\overrightarrow{a})\|_2^2 = \|\underline{\lambda}\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2 \leq n\left(\sqrt{n}\ \max\{1, \|\overrightarrow{a}\|_2\}\right)^2.$$

Ahonnan a lemma következik. ■

4.3 Tétel. *Az* $S : \mathbb{C}^n \to C_n$ *leképezés folytonos.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy S nem folytonos, azaz létezik egy $\{\overrightarrow{a}_k\}_{k=0}^{\infty}$ sorozat, mely $\overrightarrow{a}$-hoz konvergál, de $S(\overrightarrow{a}_k) \nrightarrow S(\overrightarrow{a})$. Ez azt jelenti, hogy létezik $\varepsilon > 0$ melyre minden $N \in \mathbb{N}$-hez létezik $k > N$, hogy $\|S(\overrightarrow{a}_k) - S(\overrightarrow{a})\|_2 > \varepsilon$.

Az ilyen $\overrightarrow{a}_k$-k végtelen sokan vannak. Alkossunk belőlük egy $\{\overrightarrow{b}_k\}_{k=0}^{\infty}$ sorozatot, mely részsorozata az előzőnek, ezért konvergens, és határértéke $\overrightarrow{a}$, s ezért korlátos is. A Lemma miatt az $\{S(\overrightarrow{b}_k)\}_{k=0}^{\infty}$ sorozat is korlátos, tehát a Bolzano-Weierstrass tétel szerint van konvergens részsorozata $\mathbb{C}^n$-ben, így C_n-ben is. Legyen egy ilyen konvergens részsorozat $(\{S(\overrightarrow{b}_{k_l})\}_{l=0}^{\infty})$ határértéke $\underline{\kappa}$. T folytonos, ezért

$$T(\underline{\kappa}) = \lim_{l\to\infty}(T(S(\overrightarrow{b}_{k_l})) = \overrightarrow{a}.$$

S mivel T bijekció volt így $\underline{\kappa} = S(\overrightarrow{a})$ ami $\|S(\overrightarrow{b}_{k_l}) - S(\overrightarrow{a})\|_2 > \varepsilon$ mellett ellentmondás. Ezzel a tételt beláttuk. ■

Vessünk most egy pillantást a bizonyításra a Rouché-tétel segítségével! Mint látni fogjuk a bizonyítás sokkal gyorsabb.

Bizonyítás: Legyenek a $p(z)$ polinom különböző zérushelyei $\{z_k\}_{k=0}^m$, legyen $\varepsilon > 0$ akkora, hogy a zérushelyek köré írt ε sugarú lezárt körlapok diszjunktak legyenek. Adott z_k zérushelyre vezessük be a

$$\mu_k = \min_{|z-z_k|=\varepsilon} |p(z)|$$

$$M_k = \max_{|z-z_k|=\varepsilon} \sum_{j=0}^{n} |z|^j > 0$$

jelöléseket, melyek léteznek a polinomok folytonossága miatt. $\mu_k > 0$ mert ε-t úgy választottuk, hogy ne legyen a határán másik nullahely. Legyen

$$\mu = \min_{0 \le k \le m} \mu_k$$

$$M = \max_{0 \le k \le m} M_k.$$

Tehát:

$$|q - p|(z) = \left| \sum_{j=0}^{n} (a_j - b_j) z^j \right| \le \sum_{j=0}^{n} |(a_j - b_j)||z|^j \le \delta \sum_{j=0}^{n} |z|^j \le \delta M \le \mu \le |p(z)|$$

a zérushelyek köré írt körvonalak mindegyikén, ha $\delta < \frac{\mu}{M}$. Vagyis ilyen δ mellett a Rouché-tétel feltételei külön-külön teljesülnek minden $\overline{K_{z_j}(\varepsilon)}$-ra, így p-nek és $(q-p)+p = q$-nak ugyanannyi zérushelye van $K_{z_j}(\varepsilon)$-ban. Mivel tudjuk az algebra alaptételéből, hogy p és q összes gyökeinek száma multiplicitással megegyezik, ezért másutt nincs is gyöke q-nak sem.

■

4.2 Megjegyzés. *Feltűnő, hogy a tétel mennyire hasonlít Hurwitz tételéhez. Valóban, a Hurwitz-tétel segítségével gyorsan bizonyítást nyer:*

$$|p - q|(z) = \left| \sum_{j=0}^{n} (a_j - b_j) z^j \right| \le \sum_{j=0}^{n} |(a_j - b_j)||z|^j \le \delta \sum_{j=0}^{n} |z|^j$$

egy adott z_k mellett legyen

$$ {}_kA_\varepsilon = \max_{z \in \overline{K_{z_k}(\varepsilon)}} \left(\sum_{j=0}^{n} |z|^j \right), $$

mely létezik és véges a hatványfüggvények folytonossága miatt. Legyen $A_\varepsilon = \max_{0 \le j \le n}({}_jA_\varepsilon)$, így

$$ |p - q|(z) \le \delta A_\varepsilon < \frac{1}{l} $$

minden $\varepsilon > 0$ sugarú gyök körüli környezeten, ha $\delta < \frac{1}{lA_\varepsilon}$. Ha

$$ q_l(z) = \sum_{j=0}^{n} b_{j,l} z^j $$

polinomsorozat együtthatóira $|a_j - b_{j,l}| < \frac{1}{lA_\varepsilon}$ akkor $g_l \to p$ egyenletesen $\bigcup_{k=0}^{n} \overline{K_{z_k}(\varepsilon)}$-on, vagyis van Hurwitz tétele szerint van olyan $L \in \mathbb{N}$ küszöbindex, mely esetben ha $\delta < \frac{1}{LA_\varepsilon}$ akkor a tétel állítása teljesül.

Ez a tétel igen figyelemreméltó következményekkel bír, vegyünk sorra néhányat.

4.3 Következmény. *Legyen $A \in M^{n \times n}[\mathbb{C}]$, tehát A $n \times n$-es méretű mátrix a komplex test felett. Ekkor mivel A karakterisztikus polinomjának az együtthatói folytonosan függenek a mátrixelemektől, ezért ezeken keresztül a gyökök is, vagyis a mátrix sajátértékei folytonos függvényei a mátrixelemeknek. Tehát, ha $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ mátrixok egy sorozata, melyre $A_n \to A$ és $\varepsilon > 0$, akkor létezik olyan N küszöbindex, hogy $\forall n > N$-re A_n minden sajátértéke az A sajátértékeinek ε sugarú környezetében van.*

4.4 Következmény. *Legyen most $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ valós együtthatós polinom. Ekkor, ha λ a polinomnak egyszeres, valós zérushelye, akkor nem csak annyi igaz, hogy ezen gyök helye folytonos függvénye az együtthatóknak, de elég kis valós perturbáció esetén λ valós is marad, mint ahogy arra [11] felhívja a figyelmet.*

Valóban, legyen $q(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k$, $b_k \in \mathbb{R}$ a kicsit megváltoztatott (de valós együtthatós) polinom. Az előző tétel szerint (elég kicsire választott $\varepsilon > 0$ mellett) létezik olyan $\delta > 0$, hogy $|a_k - b_k| < \delta$ esetén a p és q polinomnak pontosan ugyanannyi gyöke van $K_\lambda(\varepsilon)$-ban. Ez a *környezet szimmetrikus a valós tengelyre. Mivel q valós együtthatós, ezért ha $\mu \in \mathbb{C}$ gyöke, akkor $\bar{\mu}$ is az lesz, hiszen a valós együtthatók miatt $\bar{0} = \overline{q(\mu)} = q(\bar{\mu})$. A konjugált pontok szimmetrikusan helyezkednek el a valós tengelyre, ezért ha $\mu \in B_\lambda(\varepsilon)$, akkor $\bar{\mu} \in B_\lambda(\varepsilon)$. Ha $Im\mu \neq 0$ akkor $\mu \neq \bar{\mu}$ ami ellentmondás, hiszen $K_\lambda(\varepsilon)$-ban p-nek csak egy gyöke van, ezért aztán $Im\mu = 0$.* ■

4.3. Polinomok irreducibilitása

4.4 Tétel. *(Perron) Ha $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomra $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0$ melyre $a_j \in \mathbb{Z}$ minden $0 \leq j < n$ esetén, és $|a_{n-1}| > 1 + |a_{n-2}| + |a_{n-3}| + ... + |a_1| + |a_0|$, valamint $a_0 \neq 0$, akkor az f irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett.*

Bizonyítás: A polinomok teljes függvények, az egész $\mathbb{C}$ síkon holomofak. Legyen $f(z) = g(z) + h(z)$ ahol $g(z) = a_{n-1}z^{n-1}$ és $h(z) = f(z) - g(z)$.
Ekkor a tételben kirótt egyenlőtlenség garantálja, hogy $z \in \partial K_0(1)$ esetén

$$|g(z)| = |a_{n-1}| > 1+|a_{n-2}|+|a_{n-3}|+...+|a_0| = |z^n|+|a_{n-2}z^{n-2}|+|a_{n-3}z^{n-3}|+...+|a_0| \geq |h(z)|,$$

tehát a Rouché tétel feltételei teljesülnek g-re és h-ra. Az $K_0(1)$-en $f = g + h$ és g gyökeinek száma multiplicitással számolva megegyezik, szám szerint $n - 1$.

Ha f reducibilis $\mathbb{Z}$ felett akkor léteznek f_1, f_2 egész együtthatós, nem konstans (normált) polinomok, melyekre $f = f_1 f_2$, azonban az egyiknek csak egynél kisebb abszolútértékű gyökei vannak, így (a polinom gyöktényezős alakjából láthatóan normált polinom esetén a konstans tag a gyökhelyek szorzata) a konstans tagja egynél kisebb, és egész, tehát nulla, de akkor f_1, f_2-t összeszorozva $a_0 = 0$, ami ellentmondás.■

4.4. Polinomok gyökeire vonatkozó korlátok

A komplex függvénytan zárthelyi dolgozatok egyik kedvelt feladata, hogy el kell dönteni egy polinom gyökei az adott körlapra esnek-e. Ezt általánosítja valamennyire a következő állítás:

4.1 Állítás. *Legyen* $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_n z^n$ *egy* n*-ed fokú komplex együtthatós polinom. Ha létezik* $R \in \mathbb{R}^+$ *és* $0 \leq k \leq n$*,* $k \in \mathbb{N}$*, melyre teljesül az*

$$|a_k|R^k > |a_0| + |a_1|R + ... + |a_{k-1}|R^{k-1} + |a_{k+1}|R^{k+1} + ... + |a_{n-1}|R^{n-1} + |a_n|R^n$$

egyenlőtlenség, akkor $p(z)$*-nek pontosan* k *darab gyöke van, melyek abszolúltértéke* R*-nél kisebb.*

Bizonyítás: Legyen $f(z) = a_k z^k$ és $g(z) = p(z) - f(z)$ ekkor f és g egész függvények. A tételben szereplő R sugarú origó középpontú körön a háromszög egyenlőtlenség és a tételben feltett egyenlőtlenség miatt

$$|f| > |g| \qquad (z \in (\partial K_0(R)),$$

ezért a Rouché-tétel miatt f-nek és $f+g = p$-nek pontosan ugyanannyi zérushelye van $K_0(R)$-ben. f-nek k-szoros multiplicitású gyöke van 0-ban, és másutt nincs, ezért p gyökeinek száma $K_0(R)$-ben multiplicitással véve k. ■

4.3 Megjegyzés. *A fönti tétel jelölései mellett* $k = n$*, és ha* $a_0 \neq 0$*, akkor* $k = 0$ *számokhoz mindig találhatunk ilyen* R*-et. Vizsgáljuk meg most* $k = n$ *esetet, és állapítsunk meg egy felső korlátot* R*-re!*

$$\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|R^k \leq \max_k |a_k| \frac{R^n - 1}{R - 1} < \max_k |a_k| \frac{R^n}{R - 1}$$

A tételben megszabott egyenlőtlenség teljesül, ha

$$R^n = \frac{\max_k |a_k|}{|a_n|} \frac{R^n}{R - 1},$$

$$R = 1 + \frac{\max_k |a_k|}{|a_n|}.$$

Hasonlóképp, ha $R > 1$*:*

$$\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|R^k < R^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| = |a_n|R^n$$

ezért

$$R = max\left\{1, \frac{\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|}{|a_n|}\right\}$$

is egy jó példa ilyen R-re.

Rövid megfontolás után nyerhető, hogy a $k = 0$-hoz tartozó R-ek alsó korlátaira az előző módszerekkel:

$$R = \frac{|a_0|}{|a_0| + \max_k |a_k|}$$

$$R = \frac{|a_0|}{max\left\{|a_0|, \sum_{k=0}^{n-1}|a_k|\right\}}$$

ami pont az előző korátok reciproka, az együtthatók fordított indexelése mellett. Ennek helyessége gyorsan látható abból, hogy $z^n p\left(\frac{1}{z}\right)$ szintén polinom, mely legnagyobb gyöke a $p(z)$ legkisebb gyökének reciprokával egyezik meg (hisz $a_0 \neq 0$).

4.5. Alkalmazás a stabilitáselméletben

Differenciálegyenletek vizsgálatakor fontos kérdés a megoldások stabilitása. A differenciálegyenletek témakörét terjedelmi korlátok miatt nem tudjuk tárgyalni, ezért vissza is vezetjük a problémát egy másik fogalomra. Autonóm differenciálegyenletek megoldásainak stabilitása az egyenletből nyerhető karakterisztikus függvény zérushelyeiből állapíthatók meg. Nevezetesen, ha a karakterisztikus függvény minden $z_0 \in \mathbb{C}$ zérushelyére $Re(z_0) < 0$ akkor a függvényt stabilnak mondjuk. Azt mondjuk, hogy a karakterisztikus függvény instabil, ha legalább egy gyökére $Re(z_0) > 0$.

Amennyiben megengedünk a differenciálegyenletben egy egyszeres időkésleltetést, vagyis azt, hogy az egyenletben ne csak $u(t)$ és annak deriváltjai, hanem ($T \in \mathbb{R}^+$ esetén) $u(t-T)$ és deriváltjai is szerepeljenek, akkor legegyszerűbb esetben a következő karakterisztikus függvényhez jutunk:

$$H_T(\lambda) = P(\lambda) + Q(\lambda)e^{-\lambda T}$$

ahol P és Q polinomok. Ez a karakterisztikus függvény a

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{d}{dt}\right)^k u(t) + \sum_{l=0}^{m} b_l \left(\frac{d}{dt}\right)^l u(t-T) = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenlethez tartozik ($a_k, b_l \in \mathbb{C}$, $0 \le k \le n$ és $0 \le l \le m$). A továbbiakban a $H_T(\lambda) = P(\lambda)+Q(\lambda)e^{-\lambda T}$ alakú karakterisztikus függvényekkel foglalkozunk, ahol immár P és Q nem feltétlenül polinomok.

A problémában ezentúl T-t paraméternek tekintjük, és a T_c értéket stabilitásváltónak mondjuk, ha a rendszer stabilitása megváltozik a $T - T_c$ előjelével, elég kicsi $|T - T_c|$ esetén.

A következő tétel L.Cooke és Driessche [12] munkáját dicséri. A tétel egyik feltétele azonban nem volt kielégítő, ezért F.G.Boese [13] javaslatot tett a kicserélésére, mely a gyökök helyének bekorlátozását igen elegánsan a Rouché-tétel alkalmazásával oldja meg. Mi itt ennek megfelelően a tételt javítva közöljük.

4.5 Tétel. *Legyen $H = \{z \in \mathbb{C} \ : \ Re(z) \geq 0\}$, $H \subset D$ tartomány, $P, Q : D \to \mathbb{C}$ holomorf függvények, melyek kielégítik a következő feltételeket:*

i) P és Q nem rendelkezik közös imaginárius zérushelyekkel

ii) $\bar{P}(-iy) = P(iy)$ és $\bar{Q}(-iy) = Q(iy)$, ha $y \in \mathbb{R}$

iii) $P(0) + Q(0) \neq 0$

iv) $limsup \left\{ \left| \frac{Q(z)}{P(z)} \right| \ : \ |z| \to \infty, \ Re(z) \geq 0 \right\} \leq L < 1$

v) $F(y) = |P(iy)|^2 - |Q(iy)|^2$-nek legfeljebb véges sok zérushelye van $y \in \mathbb{R}$-re

És legyen $H_T(z) = P(z) + Q(z)e^{-zT}$. Ekkor a következők teljesülnek:

a) Tegyük fel, hogy $F(y) = 0$-nak nincsenek pozitív gyökei, ekkor ha a H_T stabil $T = 0$ -ra akor stabil minden $T \geq 0$-ra is, míg ha nem az, akkor semely $T \geq 0$ -ra nem stabil.

b) Tegyük fel, hogy $F(y) = 0$-nak van legalább egy pozitív gyöke, és hogy minden pozitív gyök egyszeres. Ekkor létezik $T^* \geq 0$ melyre minden $T \geq T^*$ esetén H_T instabil, valamint a $[0; T^*]$ intervallumon legfeljebb véges sok stabilitásváltó fordulhat elő.

4.2 Lemma. *$H = \{z \in \mathbb{C} \ : \ Re(z) \geq 0\}$, legyen $H \subset D$ tartomány, $P, Q : D \to \mathbb{C}$ holomorf. A H_T azon H-beli gyökei melyek különböznek a P és Q közös gyökeitől egy kompakt halmazban fekszenek, ha a fenti feltételek közül iv) teljesül.*

Bizonyítás: (Lemma) Nem polinomok esetén P és Q közös gyökeinek száma könnyedén lehet nem korlátos H-n, amire példa a $P(z) = sin(z)$ és $Q(z) = sin(2z)$. Azon zérushelyei H_T-nek, melyek nem közös zérushelyei P-nek és Q-nak értelmes a következő kifejezés:

$$G(z) = e^{zT} + \frac{Q(z)}{P(z)}$$

mely egy meromorf függvény D-n és gyökei pontosan a H_T nem P, Q-val közös gyökeivel azonosak. Legyen R_j egy az imaginárius tengelyre illeszkedő téglalap H-ban, vagyis

$$R_j = \{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 \leq Re(z) \leq A_j, \ -B_j \leq Im(z) \leq C_j \text{ ahol } A_j, B_j, C_j > 0\}.$$

Tetszőleges ilyen téglára:

$$\min_{z\in\partial R_j}|e^{zT}| = \min_{z\in\partial R_j}(e^{TRe(z)}) = 1.$$

Tekintsük most iv)-ből L-et. Mivel $L < 1$ így létezik $\varepsilon > 0$ úgy, hogy $L + \varepsilon < 1$. Ekkor ugyancsak iv) miatt van olyan $K \in R$, hogy $|z| > K$-ra $\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| < L+\varepsilon$, így R_1 megválasztható olyan nagynak, hogy $\overline{H \setminus R_1}$-ben P/Q holomorf, és

$$M = \max_{z\in\overline{H\setminus R_1}}\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| < L + \varepsilon$$

Legyen $R_2 \supset R_1$ egy második tégla, mely szintén illeszkedik az imaginárius tengelyre. Az előző megállapításunkból következik, hogy $G(z)$ holomorf $\overline{R_2 \setminus R_1}$-en, és

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| < L + \varepsilon < 1 \leq |e^{zT}| \qquad (z \in \partial(R_2 \setminus R_1)).$$

A Rouché-tételt alkalmazva a fenti kontúron e^{zT}-nek és $G(z)$-nek ugyanannyi zérushelye van $R_2 \setminus R_1$-ben, vagyis nulla. Mivel R_2 mérete nem számít a bizonyításban, ezért $H \setminus R_1$-en G nem zérus, vagyis minden nullhelye R_1-ben fekszik. Ezzel a lemmát beláttuk. ■

Bizonyítás: (Tétel) A $H_T = 0$ egyenletet T-re felírva, a logaritmus egy egyértékű ágát választva:

$$T = \frac{ln\left(-\frac{Q(z)}{P(z)}\right)}{z} = \frac{L(z)}{z} = f(z).$$

A iii) feltétel kiköti, hogy $P(0) + Q(0) \neq 0$ vagyis, hogy $H_T(0) \neq 0$. Legyen A az f szingularitásainak halmaza, vagyis P, Q nullhelyei valamint $z = 0$. Ha $z \in A$, akkor $H_T(z) \neq 0$, csak a triviális zérushelyeknél (ahol $Q(z) = P(z) = 0$), viszont $f(z)$ $H \setminus A$-ban reguláris. Minket az imaginárius tengely zérushelyei érdekelnek elsősorban, i) azonban biztosít arról, hogy ezek közül egyik sem esik A-ba.

Ha H_T egy nullhelye az imaginárius tengelyen fekszik akkor erre ($y \in \mathbb{R}$ mellett):

$$|P(iy)| = |Q(iy)|.$$

Ennek egy megoldását beírva f-be a H_T-t nullává tevő T-k egy végtelen sorozatát nyerjük, az e^z $2\pi i$ periodicitása miatt. Mi azt szeretnénk tudni, hogy az adott zérushely T növelésével belép-e H-ba, vagy távozik onnan.

A további vizsgálatokhoz Boese cikkében felteszi, hogy $f'(iy) \neq 0$, ha $|P(iy)| = |Q(iy)|$. Tegyük ezt fel mi is, utólag ellenőrizzük ennek jogosságát. Ekkor az implicit függvény tétel szerint $T = f(iy)$ egy környezetében $z(T)$ létezik és differenciálható. Deriváljuk a $T = f(z)$-t T szerint. A fölső pont T szerinti deriváltat, a vessző z szerintit jelez. Ekkor a láncszabállyal:

$$1 = \dot{z}\left(\frac{zL'(z) - L(z)}{z^2}\right)$$

$$\dot{z} = \frac{z}{L'(z) - T}$$

A gyök valós tengellyel párhuzamos elmozdulásának irányát jelölje

$$\sigma = sign(Re(\dot{z}))$$

(a *sign* az előjelfüggvény). Ekkor, a függvényekre tett szimmetriamegkötések miatt választhatjuk $y > 0$-t, s így $z = iy$ mellett:

$$\sigma = sign\left(Re\left(\frac{z}{L'(z) - T}\right)\right) = sign\left(Re\left(z\overline{(L'(z) - T)}\right)\right) =$$

$$= sign\left(Re\left(z\overline{L}'(z)\right)\right) = sign\left(Re\left(i\overline{L}'(iy)\right)\right) = sign\left(Re\left(-\frac{d}{dy}\overline{L}(iy)\right)\right) =$$

$$= sign\left(-\frac{d}{dy}Re\left(L(iy)\right)\right) = sign\left(\frac{d}{dy}ln\left(\left|\frac{P(iy)}{Q(iy)}\right|^2\right)\right) =$$

$$= sign\left(\left|\frac{Q(iy)}{P(iy)}\right|^2\frac{d}{dy}\left(\left|\frac{P(iy)}{Q(iy)}\right|^2\right)\right) = sign\left(\frac{d}{dy}\left(\left|\frac{P(iy)}{Q(iy)}\right|^2\right)\right) =$$

$$= sign\left(\frac{|Q(iy)|^2\frac{d}{dy}|P(iy)|^2 - |P(iy)|^2\frac{d}{dy}|Q(iy)|^2}{|Q(iy)|^4}\right) =$$

$$= sign\left(\frac{\frac{d}{dy}|P(iy)|^2 - \left|\frac{P(iy)}{Q(iy)}\right|^2\frac{d}{dy}|Q(iy)|^2}{|Q(iy)|^2}\right) =$$

$$= sign\left(\frac{d}{dy}|P(iy)|^2 - \left|e^{iyT}\right|^2\frac{d}{dy}|Q(iy)|^2\right) = sign\left(\frac{d}{dy}\left(|P(iy)|^2 - |Q(iy)|^2\right)\right) =$$

$$= sign\left(\frac{d}{dy}F(y)\right).$$

A σ az épp az imaginárius tengelyt átlépő zérushely "sebességének" előjeleként értelmezhető. A korábban mondott feltevésünk, miszerint f' nem tűnik el iy-ban, garantálja, hogy ez a sebesség nem nulla. Fontos lesz a továbbiakban, hogy a pont haladásának iránya csak y függvénye, nem T-é.

Figyeljük meg, hogyha $H_T(iy) = 0$, akkor $F(y) = |P(iy)|^2 - |Q(iy)|^2 = 0$. Fordítva, ha $F(y) = 0$, akkor $|P(iy)| = |Q(iy)|$, és f segítségével kapható T-k egy végtelen sorozata melyre $H_T = 0$.

Ha $F(y) = 0$ akkor $|P(iy)| = |Q(iy)|$, így $i)$ miatt $P(iy) \neq 0$ és $Q(iy) \neq 0$, ekkor ha $F'(y) \neq 0$, az előző egyenletet visszafelé írva ($z = iy$):

$$0 \neq sign\left(\frac{d}{dy}F(y)\right) = sign\left(Re\left(z\overline{(L'(z) - T)}\right)\right) = sign\left(Re\left(|z|^2\overline{f'(z)}\right)\right)$$

Mivel a $b)$ pont szerint $F(y) = 0$ esetén y egyszeres zérushely, így itt $f'(iy) \neq 0$ vagyis a feltevésünk jogos volt.

Tegyük fel most $F'(y) \neq 0$, $F(y) = 0$ mellett, hogy $H_T(iy) = 0$ és

$$H_T'(z)|_{z=iy} = 0 = P'(z) + (Q'(z) - TQ(z))e^{-zT}|_{z=iy},$$

$$0 = (P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z) + TP(z)Q(z))|_{z=iy} = P(z)Q(z)\left(\frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{Q'(z)}{Q(z)} + T\right)\Bigg|_{z=iy},$$

$$0 = \left(\frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{Q'(z)}{Q(z)} + T\right)\Bigg|_{z=iy} = -\left(ln\left(-\frac{Q(z)}{P(z)}\right)' - T\right)\Bigg|_{z=iy} \neq 0,$$

hiszen $f'(iy) \neq 0$. Tehát iy egyszeres gyöke H_T-nek.

Jelölje F pozitív gyökeit, melyekről feltettük, hogy mind egyszeres, és $v)$ miatt tudjuk, hogy véges sokan (p darab) vannak:

$$y_p > y_{p-1} > ... > y_2 > y_1 > 0.$$

Ekkor minden y_k ($0 < k \leq p$) gyökhöz megállapítható $T_{k,m}$-ek egy nem véges sorozata, melyre $H_{T_{k,m}}$-nek iy_k egyszeres gyöke. Ezekre $T_{k,m+1} - T_{k,m} = 2\pi/y_k$, tehát legsűrűbben a

legnagyobb gyökre követik egymást. Mivel F gyökei egyszeresek, és F valós értékű függvény, ezért a szomszédos gyökhelyeken F' ellentétes előjelű kell legyen, így az imaginárius tengelyen való átlépés is alternáló irányba történik.
Vonjuk le a tétel végső következtetéseit:

Az a) esetben, ha iy és T esetén $H_T(iy) = 0$ akkor $F(y) = 0$, tehát $F(y) \neq 0$ miatt a H_T egyetlen gyöke sem lépheti át az imaginárius tengelyt, így ha H_0 stabil volt, H_T stabil marad minden $T > 0$-ra, ellenkező esetben pedig instabil.

A b) esetben tegyük fel, hogy $F(y)$ legalább egy pozitív gyökkel rendelkezik, és ezek mindegyike egyszeres. Mivel iv) teljesül, ezért a korábban belátott lemma miatt a H_T nem triviális zérushelyei (azok melyek nem zérushelyei P, Q polinomoknak is) a jobboldali félsíkon egy kompakt halmazban fekszenek, s így mivel H_T nem konstans nulla, csak véges sok nem triviális zérushelye lehet itt. A triviális zérushelyek helyzete nyilvánvalóan független T értékétől. A korábban megállapítottak szerint ahogy növeljük T-t az y_k pontnál $\Delta T_k = 2\pi/y_k$-nként valamelyik irányba keresztezi egy zérushely az imaginárius tengelyt, továbbá az áthaladás irány adott y_k mellett független T értékétől. Minden ilyen átkeléssel a jobboldalon lévő nem triviális gyökök száma kettőt változik, ugyanis a gyökök konjugáltjával is ugyan ez történik ii) miatt.

Tudjuk, hogy az egyes y_k-kban a gyökök alternáló irányban vándorolnak. Tegyük fel, hogy y_p-ben a vándorlás jobbról balra történik, így $y_{p-2}, y_{p-4}, ...$ pontokban a vándorlás szintén jobbról balra folyik, és $y_{p-1}, y_{p-3}...$ pontokban pedig balról jobbra. Elegendően nagy időre nézve azt kapjuk, hogy összességében a gyökök jobbról balra vándorolnak, hiszen (és ez a gondolatmenet kellően precízzé tehető, ha a jobbra folyó áramokat alul- a balra folyókat felülbecsüljük racionális számokkal, úgy, hogy a nagyság szerinti sorrend ne változzék) a gyökök vándorlását áramnak tekintve, y_k arányos az y_k pontnál átfolyó árammal, ezek alternáló előjeles, szigorúan monoton csökkenő abszolúltértékű összegének előjele mindig megegyezik az első tag előjelével, hiszen kettesével zárójelezhető az összeg, s ezen zárójelek előjele mind az első tag előjelével egyezik meg (esetleg az utolsó tag nem kerül zárójelbe, de ekkor előjele megegyezik az első tagéval). Azonban a gyökök nem haladhatnak jobbról balra T-től függetlenül, hiszen jobb oldalt csak véges sok gyök van, mely helyére T értéke hatással van. Ebből következik, hogy a gyökök $y_p, y_{p-2}, y_{p-4}, ...$ pontokban balról jobbra vándorolnak, míg a $y_{p-1}, y_{p-3}...$ pontokban jobbról balra. Ez az előző gondolatmenet alapján azt jelenti, hogy elegendően nagy T^*-ra ha $T \geq T^*$ akkor a jobb féltéren lesz gyök, s így a rendszer instabillá válik. Az hogy véges sok stabilitásváltás történik nyilvánvaló a gyökvándorlások konstrukciójából. ■

Nézzünk most egy példát az imént bemutatott tétel alkalmazására! [12] alapján az idő-késleltetett Goodwin-modellt vesszük szemügyre, mely az enzimtermelés szabályozását önti matematikai formába. A differenciálegyenletből a következő karakterisztikus függvény nyerhető:

$$\prod_{j=1}^{n}(z + b_j) + ae^{-zT} = 0.$$

Ahol $a, b_j > 0$, ha $0 < j \leq n$. Könnyű kiszámítani, hogy

$$F(y) = \prod_{j=1}^{n}(y^2 + b_j^2) - a^2,$$

és így

$$F'(y) = 2y \sum_{k=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (y^2 + b_j^2).$$

$F(0) > 0$ pontosan akkor, ha $\prod_{j=1}^{n} b_j > a$. Ekkor minden valósra $F > 0$ így a) miatt az egyenlet megőrzi a stabilitási tulajdonságait, amik $T = 0$-ban voltak. $Re(z) \geq 0$ mellett azonban

$$\left|\prod_{j=1}^{n}(z + b_j)\right| \geq \left|\prod_{j=1}^{n} b_j\right| > |a|,$$

tehát itt nincs gyök, a rendszer stabil minden $T \geq 0$-ra. Amennyiben $\prod_{j=1}^{n} b_j \leq a$, akkor $F(0) < 0$ és $y > 0$ esetén szigorúan monoton nő, deriváltja pozitív, tehát egyetlen egyszeres gyöke van F-nek, ahol a b)-ben tett megállapítások szerint a gyökök balról jobbra vándorolnak. Tehát van egy T_1 érték, melynél először destabilizálódik a rendszer, és utána nagyobb T-re már nem is válthat vissza stabil állapotba, $T^* = T_1$.

Hivatkozások

[1] *D. van Dulst: A Functional Analytic Proof of Rouche's Theorem*
The American Mathematical Monthly Vol. 78, No. 7 (Aug. - Sep., 1971), pp. 770-771

[2] *Kato, Tosio. "Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators." Journal d'Analyse Mathématique 6.1 (1958): 261-322.*

[3] *Estermann, Theodor. Complex numbers and functions. Athlone Press, 1962.*

[4] *Challener, David, and Lee Rubel: A converse to Rouche's Theorem*
American Mathematical Monthly (1982): 302-305.

[5] *Matt Young: The Stone-Weierstrass Theorem*
MATH 328 Notes, Queen's University at Kingston, Winter Term, 2006
http://www.mast.queensu.ca/ speicher/Section14.pdf

[6] *William Wu: Fourier Series and Fejér's Theorem, June 1 2004*
http://www.ocf.berkeley.edu/ wwu/articles/fejer_ theorem.pdf

[7] *Michael Filaseta: Rouche's Theorem for Polynomials*
The American Mathematical Monthly Vol. 97, No. 9 (Nov., 1990), pp. 834-835

[8] *A. Tsarpalias: A Version of Rouche's Theorem for Continuous Functions*
The American Mathematical Monthly Vol. 96, No. 10 (Dec., 1989), pp. 911-913

[9] *Alexander Abian, Hurwitz' Theorem Implies Rouché's Theorem*
Journal of Mathematical Analysis and Applications 61, 113-l 15 (1977)

[10] *Raul Naulin,Carlos Pabst:*
The roots of a polynomial depend continuously on its coefficients
Universidad Nacional de Colombia. Departamento de Matemáticas, and Sociedad Colombiana de Matemáticas. Revista colombiana de matemáticas. Vol. 28. 1994. p. 35-37.

[11] *Alexanderian, Alen. "On continuous dependence of roots of polynomials on coefficients."*

[12] *K. L. Cooke and P. van den Driessche, On the zeroes of some transcendental equations, Funkcial. Ekvac. 29 (1986), 77-90.*

[13] *Boese, F. G. (1998): Stability with Respect to the Delay: On a paper of K. L. Cooke and P. van den Driessche, J. Math. Anal. Appl. 228, 293–321*

NYILATKOZAT

Név: Major Péter

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

NEPTUN azonosító: RRZAYP

Szakdolgozat címe: A Rouché-tétel és alkalmazásai

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2014 május 28.

Major Péter