Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Szűcs Renáta

Fixponttételek

BSc szakdolgozat

Témavezető:

Dr. Kovács Sándor

Numerikus Analízis Tanszék

Budapest, 2014

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék hálás köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Kovács Sándornak, aki a konzultációk során sok tanáccsal és ötlettel segítette a dolgozatom megírását. Tiszta szívvel köszönöm szüleimnek és páromnak a sok gondoskodást, támogatást és szeretetet, amit egyetemi éveim alatt kaptam tőlük.

Budapest, 2014. május 30.

Szűcs Renáta

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A fixponttételek története a 20. század elejére nyúlik vissza. Brouwer (1881-1966) és Hamadard (1865-1963) holland és francia matematikusok 1910-ben bizonyították egy folytonos leképezés fixpontjának létezését euklideszi zárt gömbben. Néhány évvel később, 1922-ben Banach (1892-1945) lengyel matematikus publikálta fixponttételét. Majd 1930-ban Schauder (1899-1943) általánosította Brouwer tételét. Magyar szálak is fűződnek a témakörhöz. Neumann János (1903-1957), közgazdasági modelljének megalkotásához Brouwer fixponttételének bizonyítását alkalmazta.

Ezen tételek segítségével, a matematika számos területéről (ilyen például a funkcionálanalízis, a differenciálegyenletek, a numerikus analízis és a valószínűségszámítás is) származó feladatot meg tudunk oldani.

A numerikus analízisben a gyökközelítő módszerek nagy részét az úgynevezett fixpontiterációs módszerek alkotják, amelyek azon az elven nyugszanak, hogy valamilyen $f(x) = 0$ egyenlet gyökét egy olyan alkalmas függvény fixpontjaként állítják elő, ami a keresett gyök valamilyen környezetén kontrakció. Ezen módszerek tipikus példája elég sima függvényekre a Newton-módszer és lineáris egyenletrendszerek numerikus megoldására a Jacobi-iteráció. Az alkalmazásoknál mindkettőt megismerhetjük.

A megértéshez szükséges definíciók után a legfontosabb fixponttételek és bizonyítások kerülnek bemutatásra, majd dolgozatom további részében különféle alkalmazásokat, feladatokat és mindennapi érdekességeket ismertetek.

Dolgozatom célja, hogy átfogó leírást kapjunk a fixponttételek kialakulásáról és továbbfejlődéséről, illetve a kezdetektől napjainkig használatos alkalmazásokról.

2. Alapvető definíciók és jelölések

A következőkben felsorolom a tételek megértéséhez elengedhetetlen definíciókat, jelöléseket, példákkal kiegészítve.

Definíció. Az $(\mathbf{X}, \varrho)$ párt metrikus térnek nevezzük, ha $\mathbf{X}$ egy tetszőleges nemüres halmaz, továbbá $\varrho : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, amelyre teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

1. *minden* $x, y \in \mathbf{X}$-re $\varrho(x, y) = 0 \iff x = y$;
2. *minden* $x, y \in \mathbf{X}$-re $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$;
3. *minden* $x, y, z \in \mathbf{X}$-re $\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$.

Példák metrikára

1. A valós számok halmaza a szokásos $\varrho(x, y) = |\ x - y\ |$ távolsággal ellátva metrikus tér lesz.
2. Tetszőleges $\mathbf{X}$ halmaz ellátható metrikus tér struktúrával a

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

   függvénnyel. Ekkor $(\mathbf{X}, \varrho)$-t diszkrét metrikus térnek nevezzük.

Definíció. Az $(\mathbf{X}, \|\cdot\|)$ párt normált térnek nevezzük, ha $\mathbf{X}$ egy $\mathbb{K}$ feletti vektortér, ahol $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ vagy $\mathbb{R}$, továbbá $\|\cdot\| : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, amely teljesíti az alábbi normaaxiómákat:

1. *minden* $x \in \mathbf{X}$-re $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
2. *minden* $\lambda \in \mathbb{K}$-ra és $x \in \mathbf{X}$-re $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$;
3. *minden* $x, y \in \mathbf{X}$-re $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Példák normára

1. tekintsük a valós számok halmazát, mint önmaga feletti vektorteret a következő normával: $\|x\| := |x|$, tehát a szokásos abszolút értéket kapjuk.

2. hasonlóan normált tér lesz $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, ahol a 2-es index az euklideszi normát jelenti, azaz egy $x \in \mathbb{R}^n$-re

$$\|x\|_2 = \|(x_1, x_2, ..., x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

3. Az előző teret más normákkal is elláthatjuk, fontosak az úgynevezett p-normák, ahol egy $x \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p}.$$

Kapcsolat a metrikus tér és a normált tér között

Minden normált tér egyben metrikus tér is, ugyanis ha $(\mathbf{X}, \|.\|)$ normált tér, $x, y \in \mathbf{X}$, akkor

$$\varrho(x, y) = \|x - y\|$$

egy metrikát definiál $\mathbf{X}$-en és ezzel a normából származtatott metrikával $(\mathbf{X}, \varrho)$ metrikus tér is egyben.

Definíció. Adott $(\mathbf{X}, \rho)$ metrikus tér esetén azt mondjuk, hogy a $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ leképezés

1. Lipschitz-folytonos, ha alkalmas $L := L_\varphi \in [0, +\infty)$ számmal

$$\rho(\varphi(x), \varphi(y)) \leq L\rho(x, y) \qquad (x, y \in \mathbf{X})$$

teljesül,

2. kontraktív vagy kontrakció, ha Lipschitz-folytonos és $L < 1$.

Példa kontrakcióra

A $(\mathfrak{C}[0,1], \rho_\infty)$ metrikus tér esetén a

$$\varphi : \mathfrak{C}[0,1] \to \mathfrak{C}[0,1], \qquad \varphi(f)(x) := 1 + \frac{1}{2}\int_0^x f \quad (x \in [0,1])$$

leképezés kontrakció, hiszen bármely $f, g \in \mathfrak{C}[0,1]$ és $x \in [0,1]$ esetén

$$\begin{aligned} |\varphi(f)(x) - \varphi(g)(x)| &= \frac{1}{2}\left|\int_0^x (f-g)\right| \leq \frac{1}{2}\int_0^x |f-g| \leq \\ &\leq \frac{1}{2}(x-0)\sup\{|f(t)-g(t)| \in \mathbb{R} : t \in [0,x]\} \leq \\ &\leq \frac{1}{2}x\rho_\infty(f,g) \end{aligned}$$

így

$$\rho_\infty(\varphi(f), \varphi(g)) = sup\{|\varphi(f)(x) - \varphi(g)(x)| \in \mathbb{R} : x \in [0,1]\} \leq \tfrac{1}{2}\rho_\infty(f,g).$$

Definíció. Egy euklideszi tér egy részhalmazát konvexnek nevezzük, ha két tetszőleges halmazbeli pontnak az összekötő szakasza is a halmazban van.

Definíció. Legyen K egy részhalmaza az $\mathbf{X}$ vektortérnek. Azt mondjuk, hogy K konvex burka az a halmaz, amelyet $\mathbf{X}$ összes részhalmazának metszete határoz meg és K-t is magában foglalja. A konvex burok jelölése: $conv(K)$. Egy eleme a következőnek felel meg:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in conv(K), \qquad x_i \in K, \alpha_i \in \mathbb{R}_+, \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Definíció. Legyen $\mathbf{X}$ egy Banach-tér. $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{X}$ egy részhalmaza $\mathbf{X}$-nek. Ekkor egy halmaz dimenzióján a következőt értjük:

$$dim(\mathbf{M}) := dim(span(\mathbf{M} - \mathbf{M})),$$

ahol $\mathbf{M} - \mathbf{M} = \{m_1 - m_2 | m_1, m_2 \in \mathbf{M}\}$. Ha $dim(\mathbf{M}) < \infty$, akkor $\mathbf{M}$ véges-dimenziós.

Definíció. Legyen $(\mathbf{X}, \rho)$ metrikus tér, $f : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ egy leképezés, és $x \in \mathbf{X}$-nek. Azt mondjuk, hogy x fixpontja f-nek, ha $f(x) = x$.

Definíció. Legyen $(\mathbf{X}, d)$ egy metrikus tér. $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}$ egy részhalmaza $\mathbf{X}$-nek és $p \in \mathbf{X}$ egy pont $\mathbf{X}$-ben. Ekkor egy p pont távolságát egy részhalmaztól a következőképpen definiáljuk:

$$dist(p, \mathbf{A}) := \inf \{d(p, a) \in \mathbb{R} : \ a \in \mathbf{A}\} .$$

Definíció. Az $(A; \leq)$ párt részbenrendezett halmaznak nevezzük, ha A tetszőleges halmaz, $\leq$ pedig A-n értelmezett részbenrendezés, azaz tetszőleges $a, b, c \in A$ elemekre teljesülnek a következők:

- $a \leq a$,
- ha $a \leq b$ és $b \leq a$, akkor $a = b$,
- ha $a \leq b$ és $b \leq c$, akkor $a \leq c$.

3. Fixponttételek

A következőkben bemutatom a legfontosabb fixponttételeket, ezek közül néhányat a bizonyításával együtt. Először Brouwer tételének három különböző, de ekvivalens alakját olvashatjuk. A továbbiakban csak a III. alakra lesz szükség Schauder tételének bizonyításakor.

3.1. Brouwer-féle fixponttétel I.

Tétel. Legyen $\mathbf{B} := \overline{\mathbf{B_1}(0)}$ a zárt egységgömb $\mathbb{R}^n$-ben az euklideszi normával $\| \cdot \|_2$. Legyen továbbá $\mathrm{T} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ egy folytonos függvény. Ekkor létezik egy olyan $x \in \mathbf{B}$, hogy $\mathrm{T}(x) = x$, azaz x fixpontja T-nek. $\square$

A tétel egy általánosítását kapjuk, ha az egységgömb helyett egy $\mathbb{R}^n$-beli részhalmazt veszünk, amelynek eleme a nulla. Így kapjuk a következő tételt:

3.2. Brouwer-féle fixponttétel II.

Tétel. Legyen $\mathbf{K} \subset \mathbb{R}^n$ egy részhalmaz $\mathbb{R}^n$-ben, amely korlátos és konvex. Majd tegyük fel, hogy $0 \in int(\mathbf{K})$. Legyen $\mathrm{T} : \overline{\mathbf{K}} \to \overline{\mathbf{K}}$. Ekkor létezik egy olyan $x \in \overline{\mathbf{K}}$, hogy $\mathrm{T}(x) = x$, azaz x fixpontja T-nek. $\square$

A Schauder-féle fixponttétel bizonyításához szükség van az előzőek egy újabb általánosítására, ahol K halmazra megköveteljük, hogy korlátos, zárt, konvex és végesdimenziós legyen, így kapjuk a következőt:

3.3. Brouwer-féle fixponttétel III.

Tétel. Legyen $(\mathbf{X}, \| \cdot \|)$ egy Banach-tér és $\emptyset \neq \mathbf{K} \subset \mathbf{X}$ egy nemüres részhalmaza $\mathbf{X}$-nek. $\mathbf{K}$ legyen véges-dimenziós, korlátos, zárt és konvex és $\mathrm{T} : \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ egy folytonos leképezés. Ekkor létezik egy olyan $x \in \mathbf{K}$, hogy $\mathrm{T}(x) = x$, azaz x fixpontja T-nek. $\square$

Folytatva az általánosítást, megkapjuk Schauder tételét:

3.4. Schauder-féle fixponttétel

Tétel. Legyen $(\mathbf{X}, \|\cdot\|)$ egy Banach-tér és $\mathbf{K} \subset \mathbf{X}$ egy részhalmaza $\mathbf{X}$-nek. $\mathbf{K}$ legyen kompakt és konvex, továbbá $\mathrm{T} : \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ egy folytonos leképezés. Ekkor létezik egy olyan $x \in \mathbf{K}$, hogy $\mathrm{T}(x) = x$, azaz x fixpontja T-nek.

Bizonyítás.

1. lépés. Először belátjuk, hogy a távolságfüggvény folytonos, majd keresünk egy $\mathbf{K}_k$ konvex, zárt, korlátos és véges dimenziós halmazt,a amelyre $\mathbf{K}$-t megszoríthatjuk.

Lemma 1. $dist(\cdot, A)$ folytonos.

Bizonyítás. A következő egyenlőtlenséggel megmutatjuk $dist(\cdot, A)$ Lipschitz-folytonosságát, amiből automatikusan következik, hogy $dist(\cdot, A)$ folytonos is.

$$|dist(y,a) - dist(x,a)| \leq d(x,y)$$

ahol $a \in A$;$x, y \in \mathbf{X}$ tetszőlegesek, és a következők teljesülnek:

$$\begin{gathered}
d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a) \\
\Leftrightarrow \inf d(y,a) \leq d(y,x) + \inf d(x,a) \\
\Leftrightarrow dist(y,A) \leq d(x,y) + dist(x,A) \\
\Leftrightarrow dist(y,A) - dist(x,A) \leq d(x,y) \\
d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a) \\
\Leftrightarrow \inf d(x,a) \leq d(x,y) + dist(y,A) \\
\Leftrightarrow dist(x,A) \leq d(x,y) + dist(y,A) \\
\Leftrightarrow dist(x,A) - dist(y,A) \leq d(x,y)
\end{gathered}$$

$\mathbf{K}$ halmazra keresünk egy $\mathbf{K}_k$ megszorítást, amelyre teljesül, hogy konvex, zárt, kompakt és véges-dimenziós. Ekkor $\mathbf{K}$ le lesz fedve hasonló gömbökkel úgy, hogy a következők érvényesüljenek: $k \in \mathbb{N}, k > 0$ tetszőleges, $N = N(k) \in \mathbb{N}$ a gömbök száma, amely szükséges $\mathbf{K}$ lefedéséhez. Legyenek

$$B^i := B_{\frac{1}{k}}, \qquad x_i \in \mathbf{K}, \qquad i \in 1, \ldots, N$$

gömbök x_i gömbközéppontjaikkal és $\frac{1}{k}$ sugarukkal. Ehhez legyen k olyan nagy, hogy a $\mathbf{K}$ halmaz lefedéséhez legalább két gömb szükséges legyen. Az x_i gömbközéppontok alkalmasak lesznek a $\mathbf{K}_k := conv(\{x_1, \ldots, x_N\})$ konvex burokhoz.

$\mathbf{K}_k$ halmaz tehát egy szűkítés $\mathbf{K}$ halmazra. A következő bizonyításhoz alkalmazzuk Brouwer fixponttételénk III. alakját, hogy belássuk $\mathbf{K}_k$ konvex, zárt, korlátos és véges dimenziós halmaz.

Lemma 2. $\mathbf{K}_k$ korlátos

Bizonyítás. Nézzük meg a konvex burok egy elemét:

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{N} \|\alpha_i x_i\| =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \|x_i\| \leq \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \max \|x_i\| =$$
$$= \max \|x_i\| \cdot \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = \max \|x_i\| \cdot 1 < \infty$$

Lemma 3. $\mathbf{K}_k$ véges dimenziós

Bizonyítás. Tekintsük $a, b \in \mathbf{K}_k$ tetszőlegesre

$$a = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \qquad \text{és} \qquad b = \sum_{i=1}^{N} \beta_i x_i$$

A két elemet egymásból kivonva kapjuk:

$$a - b = \sum_{i=1}^{N} (\alpha_i - \beta_i) \cdot x_i$$
$$\Rightarrow span\{a - b\} = span\{\sum_{i=1}^{N} (\alpha_i - \beta_i) \cdot x_i\},$$

ahol N véges, kapunk tehát egy véges dimenziós generátorrendszert.

$$dim(span\{\mathbf{K}_k - \mathbf{K}_k\}) < \infty.$$

Ezenkívül teljesülnek a következők:

1. $\mathbf{K}_k$ konvex, ahol $\mathbf{K}_k$ a $\mathbf{K}$ halmaz konvex burkát jelenti.
2. $\mathbf{K}_k$ zárt: abból, hogy a gömbközéppontok egy véges dimenziós generátorrendszert alkotnak, automatikusan következik, hogy $\mathbf{K}_k$ zárt

2. lépés. Definiálunk egy segédfüggvényt.

Definiáljuk a $J_k : \mathbf{K} \to \mathbf{K}_k$ függvényt a következő módon:

$$J_k(x) := \frac{\sum_{i=1}^{N} dist(x, K - B^i) \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{N} dist(x, K - B^i)}.$$

Ez a segédfüggvény alkalmazható lesz és jól definiált, azaz a nevező nem lehet nulla. Ez következik abból a feltételből, hogy legalább két nyílt gömbre szükség van a lefedéshez. Teljesül, hogy a nevező nem nulla, mert x ugyan mindig benne van egy gömbben, de nincs benne soha az összes gömbben. A cél továbbra is az, hogy alkalmazzuk Brouwer fixponttételének III. alakját. Ezért még meg kell mutatni, hogy $J_k(x)$ egy folytonos transzformáció. Azt tudjuk, hogy a távolságfüggvény $dist(\cdot, A)$ folytonos. Folytonos függvények kompozíciója szintén folytonos, így tudjuk, hogy $J_k(x)$ is folytonos.

Lemma 4. J_k a $\mathbf{K}_k$-ba képez

Bizonyítás.

$$J_k(x) := \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} dist(x, K - B^i) \cdot x_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} dist(x, K - B^i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{dist(x, K - B^i) \cdot x_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} dist(x, K - B^i)} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left[\left(\frac{dist(x, K - B^i)}{\sum\limits_{i=1}^{N} dist(x, K - B^i)} \right) \cdot x_i \right]$$

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{dist(x, K - B^i)}{\sum\limits_{i=1}^{N} dist(x, K - B^i)} \right) = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$$

$$\Rightarrow J_k(x) \in \mathbf{K}_k$$

Segédállítás.

$$\|J_k(x) - x\| \leq \frac{1}{k} \qquad \forall x \in \mathbf{K}$$

Bizonyítás.

$$
\begin{aligned}
\|J_k(x)-x\| &= \left\| \frac{\sum\limits_{i=1}^{N}(dist(x,K-B^i))x_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} dist(x,K-B^i)} - x \right\| = \\
&= \left\| \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} dist(x,K-B^i)\cdot(x_i-x)}{\sum\limits_{i=1}^{N} dist(x,K-B^i)} \right\| \leq \\
&\leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} dist(x,K-B^i)\|x_i-x\|}{\sum\limits_{i=1}^{N} dist(x,K-B^i)} = \\
&= \frac{\sum\limits_{i|x\in B^i} dist(x,K-B^i)\|x_i-x\|}{\sum\limits_{i|x\in B^i} dist(x,K-B^i)} \leq \\
&\leq \frac{\sum\limits_{i|x\in B^i} dist(x,K-B^i)\cdot\frac{1}{k}}{\sum\limits_{i|x\in B^i} dist(x,K-B^i)}
\end{aligned}
$$

3. lépés. Meghatározzuk T fixpontját.

Egy olyan folytonos transzformációt kellene találnunk, amely $\mathbf{K}_k$-ból $\mathbf{K}_k$-ba képez, így alkalmazhatjuk a Brouwer-féle fixponttételt.

$$
\begin{gathered}
S_k : \mathbf{K}_k \subset \mathbf{K} \xrightarrow{T} \mathbf{K} \xrightarrow{J_k} \mathbf{K}_k \\
x \mapsto (J_k \circ T)(x) = J_k(T(x))
\end{gathered}
$$

Tudjuk, hogy mindkét függvény J_k és T is folytonos, mivel folytonos leképezések kompozíciója is folytonos, így S_k is az. Minden feltétel teljesül a Schauder-féle fixponttétel alkalmazhatóságához:

$\Rightarrow S_k$ tartalmaz egy $f_k \in \mathbf{K}_k$ fixpontot

$$S_k(f_k) = f_k$$

$$(J_k \circ T)(f_k) = f_k$$

Ötlet:

Ha k-t nagyobbnak választjuk, a gömbök sugarát pedig kisebbnek, akkor $\mathbf{K}$ lefedéséhez több gömbre lesz szükség. Egy fixpontsorozatot kapunk: minden $k \in \mathbb{N}$-re

$$k \mapsto f_k \in \mathbf{K}_k \subset K$$

Tudjuk, hogy $\mathbf{K}$ kompakt, ebben a térben sorozatkompakt is (egy topologikus tér sorozatkompakt, ha minden benne lévő sorozatnak létezik konvergens részsorozata). Ebben az esetben:

f_k tartalmaz egy konvergens részsorozatot: $(f_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ $f \in \mathbf{K}$ határértékkel
$\lim_{j\to\infty} f_{k_j} = f \in \mathbf{K}$.

Belátjuk, hogy f fixpontja T-nek

$$\|f_{k_j} - T(f_{k_j})\| = \|S_{k_j}(f_{k_j}) - T(f_{k_j})\| = \|(J_{k_j} \circ T)(f_{k_j}) - T(f_{k_j})\| =$$

$$= \|J_{k_j} T(f_{k_j}) - T(f_{k_j})\| \leq \frac{1}{k_j}$$

Használva a segédállítást:

$$\Leftrightarrow \lim \|(J_{k_j} \circ T)(f_{k_j}) - T(f_{k_j})\| \leq \lim \left(\frac{1}{k_j}\right)$$

$$\Leftrightarrow \| \lim(J_{k_j} \circ T)(f_{k_j}) - \lim(T(f_{k_j}))\| = 0$$

$$\Leftrightarrow \|f - \lim(T(f_{k_j}))\| = 0$$

$$\Leftrightarrow f = \lim(T(f_{k_j}))$$

$$\Leftrightarrow f = T(\lim(f_{k_j}))$$

$$\Leftrightarrow f = T(f)$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

3.5. Banach-féle fixponttétel

Tétel. Legyen $(\mathbf{X}, d)$ egy teljes metrikus tér, $F : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ egy kontrakció. Ekkor F-nek pontosan egy p fixpontja létezik $\mathbf{X}$-en, és tetszőleges $x_0 \in \mathbf{X}$-re

$$x_{k+1} = F(x_k)$$

fixpont iterációs sorozat konvergál p-hez.

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in [a, b] \subset \mathbf{X}$ tetszőleges, és $x_{k+1} = F(x_k), k = 0, 1, \ldots$. Azt kell megmutatni, hogy (x_k) konvergens. Ehhez elég belátni, hogy Cauchy-sorozat. Legyen $k > m$, tekintsük $d(x_k, x_m)$-t. A háromszög-egyenlőtlenséget, a sorozat definícióját és a kontrakciós tulajdonságot használva a következőt kapjuk:

$$(x_k, x_m) \leq d(x_k, x_{k-1}) + d(x_{k-1}, x_{k-2}) + \ldots + d(x_{m+1}, x_m) =$$

$$= d(F(x_{k-1}), F(x_{k-2})) + d(F(x_{k-2}), F(x_{k-3})) + \ldots + d(F(x_m), F(x_{m-1})) \leq$$

$$\leq cd(x_{k-1}, x_{k-2}) + cd(x_{k-2}, x_{k-3}) + \ldots + cd(x_m, x_{m-1})$$

Az egyes tagokban ismételten alkalmazva a sorozat definícióját és a kontrakciós tulajdonságot következik, hogy

$$d(x_k, x_m) \leq (c^{k-1} + c^{k-2} + \ldots + c^m)d(x_1, x_0),$$

és ezért

$$d(x_k, x_m) \leq (\textstyle\sum_{j=m}^{\infty} c^j)d(x_1, x_0) = \frac{c^m}{1-c}d(x_1, x_0) \to 0, \qquad \text{ha } m, k \to \infty.$$

Tehát (x_k) Cauchy-sorozat és így konvergens. Legyen $x_k \to p$, ha $k \to \infty$. Belátjuk, hogy p fixpontja F-nek. Mivel $x_{k+1} = F(x_k)$, így mindkét oldal határértékét véve és felhasználva F folytonosságát, azt kapjuk, hogy $p = F(p)$, azaz p fixpontja F-nek. A fixpont egyértelműségét megmutatva, tegyük fel, hogy p és q is fixpontja F-nek. Ekkor a kontrakciós tulajdonságot felhasználva:

$$d(p, q) = d(F(p), F(q)) \leq cd(p, q),$$

ami csak úgy lehet, ha $d(p, q) = 0$, azaz $p = q$. ■

3.6. Banach fixponttétele normált terekre

Tétel. Legyen $(\mathbf{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $E \subset \mathbf{X}$ zárt halmaz, és $F : E \to E$ egy kontrakció E-n, azaz létezik olyan $0 \leq c < 1$ konstans, hogy

$$\|F(x) - F(y)\| \leq c\|x - y\| \qquad (x, y \in E)$$

Ekkor F-nek pontosan egy fixpontja létezik E-n, amely tetszőleges E-beli kezdőpontból indított fixpont iteráció határértékeként megkapható. □

Legyen $(\mathbf{X}, \|\cdot\|)$ egy normált tér. Egy $T : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ leképezést affin leképezésnek nevezünk, ha $Tx = Ax + b$ alakú, ahol $A : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ egy lineáris leképezés, $b \in \mathbf{X}$. Affin leképezés esetén a kontrakciós tulajdonság azzal ekvivalens, hogy az A lineáris leképezés normája 1-nél kisebb. Ebből kapjuk a tétel következő speciális alakját:

3.7. Banach fixponttétele lineáris leképezésekre

Tétel. Legyen $(\mathbf{X}, \|\cdot\|)$ egy Banach-tér, és $T : \mathbf{X} \to \mathbf{X}, Tx = Ax+b$ egy affin leképezés, amelyre $\|A\| < 1$. Ekkor T-nek pontosan egy fixpontja létezik $\mathbf{X}$-en, amely tetszőleges kezdőpontból indított fixpont iteráció határértékeként megkapható. $\square$

Példa

Legyen $a < b$, $F : [a, b] \to [a, b]$ folytonos és F legyen differenciálható (a, b) intervallumon. Ekkor igaz $q \in [0, 1)$:

$$|F'(\xi)| \leq q \qquad (\xi \in (a, b)).$$

Ekkor F-nek pontosan egy fixpontja van az [a,b] intervallumon, mert a differenciálszámítás középértéke miatt F egy kontrakció.

3.8. Weissinger-féle fixponttétel

Tétel. Ha $(\mathbf{X}, \rho)$ teljes metrikus tér és az $\alpha_n \in [0, +\infty)$ $n \in \mathbb{N}_0$ sorozatra, ill. a $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ leképezésre $(\alpha_n) \in l_1$, ill.

$$\rho(\varphi^{[n]}(u), \varphi^{[n]}(v)) \leq \alpha_n \cdot \rho(u, v) \qquad (u, v \in \mathbf{X}, n \in \mathbb{N}_0)$$

teljesül, (ahol $\varphi^{[n]}$ φ n-edik iteráltját jelöli és a következőt jelenti:

$$\varphi^{[n]} := \varphi \circ \varphi^{[n-1]} = \varphi \circ \ldots \circ \varphi \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

1. φ-nek pontosan egy fixpontja van, azaz pontosan egy olyan $u^* \in \mathbf{X}$ létezik, amelyre

$$\varphi(u^*) = u^*;$$

2. bármely $u_0 \in \mathbf{X}$ esetén az

$$u_n := \varphi^{[n]}(u_0) \qquad n \in \mathbb{N}$$

   sorozatra $\lim(u_n) = u^*$;

3. tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén igazak az alábbi becslések:

   - $\rho(u_n, u^*) \leq (\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k)\rho(u_0, u_1)$ (a priori becslés)
   - $\rho(u_n, u^*) \leq (\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k)\rho(u_n, u_{n+1})$ (a posteriori becslés)

Bizonyítás.

1. lépés Ha tetszőleges $u_0 \in \mathbf{X}$ esetén

$$u_n := \varphi^{[n]}(u_0) \ (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\rho(u_n, u_{n+1}) = \rho(\varphi^{[n]}(u_0), \varphi^{[n]}(u_1)) \leq \alpha_n \cdot \rho(u_0, u_1) \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

így a háromszög-egyenlőtlenség többszöri alkalmazásával, bármely $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\rho(u_n, u_{n+m}) \leq \sum_{k=0}^{m-1} \rho(u_{n+k}, u_{n+k+1}) \leq \left(\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{n+k}\right) \rho(u_0, u_1),$$

azaz

$$\rho(u_n, u_{n+m}) \leq \left(\sum_{k=n}^{n+m-1} \alpha_k\right) \rho(u_0, u_1) \leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k\right) \rho(u_0, u_1).$$

A $\sum(\alpha_k)$ sor konvergenciája következtében az (u_n) sorozat Cauchy-sorozat, amely a tér teljessége miatt konvergens. Ezért, ha

$$\lim(u_n) =: u^* \in \mathbf{X},$$

akkor φ folytonossága (φ Lipschitz-tulajdonságú) miatt

$$\varphi(u^*) = \varphi(\lim(u_n)) = \lim(\varphi(u_n)) = \lim(u_{n+1}) = u^*,$$

azaz $u^* \in \mathbf{X}$ fixpontja f-nek.

2. lépés Ha $u^*, v^* \in \mathbf{X} : u^* \neq v^*$ fixpontjai φ-nek, azaz

$$\varphi(u^*) = u^* \qquad \text{és} \qquad \varphi(v^*) = v^*,$$

akkor

$$\varphi^{[2]}(u^*) = \varphi(u^*) = u^*, \text{ ill. } \varphi^{[2]}(v^*) = \varphi(v^*) = v^*.$$

Teljes indukcióval adódik, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re

$$\varphi^{[n]}(u^*) = \varphi(u^*) = u^*, \text{ ill. } \varphi^{[n]}(v^*) = \varphi(v^*) = v^*,$$

ezért

$$\rho(u^*, v^*) = \rho(\varphi^{[n]}(u^*), \varphi^{[n]}(v^*)) \leq \alpha_n \cdot \rho(u^*, v^*) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

hiszen a $\sum(\alpha_n)$ sor konvergenciája miatt $\lim(\alpha_n) = 0$.

3. lépés Ha n tetszőleges, akkor

- a háromszög-egyenlőtlenség egy változatának következményeként

  $$|\rho(u_{n+m}, u_n) - \rho(u_n, u^*)| \leq \rho(u_{n+m}, u^*) \to 0 \qquad (m \to \infty),$$

  ezért

  $$\rho(u_{n+m}, u_n) \to \rho(u_n, u^*) \qquad (m \to \infty).$$

  Így az első lépésben felírt egyenlőtlenséget használva kapjuk az a priori-becslést.

- $\rho(u_{n+m}, u_{n+m+1}) = \rho(\varphi^{[m]}(u_n), \varphi^{[m]}(u_{n+1})) \leq \alpha_m \cdot \rho(u_n, u_{n+1})$ $m \in \mathbb{N}_0$, ezért

$$\rho(u_n, u_{n+m}) \leq \sum_{k=0}^{m-1} \rho(u_{n+k}, u_{n+k+1}) \leq (\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k)\rho(u_n, u_{n+1}) \qquad m \in \mathbb{N}_0,$$

Így

- $\rho(u_n, u_{n+m}) \to \rho(u_n, u^*) \qquad (m \to \infty)$

  következménye az a posteriori becslés. ■

3.9. Kakutani fixponttétele

Tétel. Legyen K egy nemüres, kompakt és konvex részhalmaz $\mathbb{R}^n$-ben és legyen

$$Kon(K) := \{C \subset K | C \neq \emptyset, \text{C konvex }\}.$$
$$\Gamma : K \rightrightarrows Kon(K).$$

Legyen G_Γ a következő teljes gráf:

$$G_\Gamma := \{(x, y) | y \in \Gamma(x), x \in K\}$$

Ekkor létezik egy $x \in K$ olyan, hogy $x \in \Gamma$. □

3.10. Knaster-Tarski fixponttétele

Tétel. Legyen $(\mathbf{X}, \leq)$ egy parciálisan rendezett Banach-tér, M az $\mathbf{X}$ olyan részhalmaza, amelyre teljesülnek a következők:

1. $\inf M \in M$,
2. minden $N \subset M$ nemüres részhalmazra $\sup N \in M$.

Legyen $F : M \to M$ egy monoton növekvő leképezés, azaz

$$F(x) \leq F(y), \qquad \text{ha } x, y \in M \qquad \text{és} \qquad x \leq y$$

Ekkor F-nek van fixpontja az M-ben, továbbá az F leképezés fixpontjai között létezik legkisebb. Ha F fixpontja egyértelmű és $x_0 \in M$ olyan, hogy vagy $x_0 \leq F(x_0)$ vagy $x_0 \geq F(x_0)$, akkor az

$$x_{k+1} = F(x_k)$$

fixpont iterációs sorozat konvergál az F leképezés fixpontjához. □

4. Alkalmazások

Ebben a fejezetben különféle példákkal szeretném bemutatni a fixpontéttelek használhatóságát. Kezdve a nemlineáris egyenletrendszerek megoldhatóságával, a numerikus analízisben fontos Jacobi-iterációval majd szöveges és gyakorlatias feladatokkal.

4.1. Nemlineáris egyenletrendszerek megoldhatósága

Brouwer fixponttételének I. alakja alapján megállapítható a következő állítás:

Állítás. Legyen $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezés a zárt gömbön $\overline{\mathrm{B}_R(0)} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq R\}$ folytonos, ahol $R > 0$ és $\forall x \in \mathbb{R}^n$ esetén teljesül:

$$\|x\| = R$$

és legyen

$$h(x)x := \sum_{j=1}^{n} h_j(x)x_j \geq 0$$

tehát van egy $\hat{x} \in \overline{\mathrm{B}_R(0)}$, hogy $h(\hat{x}) = 0$.

Bizonyítás. Indirekten, tegyük fel, hogy minden $x \in \overline{\mathrm{B}_R(0)}$ teljesül, hogy $h(x) \neq 0$. Ekkor a következő g leképezés:

$$g(x) := -R\frac{h(x)}{\|h(x)\|}$$

egy jól definiált és folytonos leképezés $\overline{\mathrm{B}_R(0)}$-ra nézve. Brouwer tételéből következik, hogy létezik legalább egy $x^* \in \overline{\mathrm{B}_R(0)}$ úgy, hogy $g(x^*) = x^*$. $\|g(x)\| = R$ miatt, g a $\overline{\mathrm{B}_R(0)}$ gömb határára képez. Eszerint a g leképezés x^* fixpontja $\overline{\mathrm{B}_R(0)}$ peremén helyezkedik el és ebből következik, hogy $\|x^*\| > 0$. Ekkor igaz rá a feltétel:

$$0 < x^*x^* = g(x^*)x^* = -R\tfrac{h(x^*)}{\|h(x^*)\|}x^* \leq 0.$$

Ez egy ellentmondás önmagában, tehát a feltevésünk hamis volt.

Egy példa nemlineáris egyenletrendszerre:

$$x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - 4x_1 = 0$$
$$2x_1^2 + 2x_1x_2 - 8x_2 + 2 = 0$$

Ekvivalens átalakítások után:

$$x_1 = \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{8}x_2^2$$
$$x_2 = \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_1x_2 + \frac{1}{4}$$

Írjuk fel a következő egyenletet:

$$x = f(x)$$

Válasszunk egy alkalmas M halmazt úgy, hogy $f : M \to M$. Azt akarjuk megmutatni, hogy M-et mint egységgömböt a szuprémumnormára vonatkozóan kell megválasztanunk, azaz

$$M := \{(x_1, x_2) : |x_1| \leq 1 \text{ és } |x_2| \leq 1\}.$$

Legyen $(x_1, x_2) \in M$, ekkor

$$|\tfrac{1}{4}||x_1|^2 + |-\tfrac{1}{8}||x_2|^2 \leq \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{8} \leq 1$$

4.2. Kezdeti érték feladat közönséges differenciálegyenleteknél

Klasszikus alkalmazásnak tekinthető a kezdeti érték feladat megoldásának keresése közönséges differenciálegyenleteknél, a következő feladat ennek bemutatására szolgál: Adott:

$$f : [t_0, t_1] \times D \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad D \subset \mathbb{R}^n, \qquad y^0 \in D \qquad (t_0, t_1 \in \mathbb{R}, t_0 < t_1).$$

Keressük: a következő kezdeti érték feladat φ megoldását

$$y' = f(t, y),$$
$$y(t_0) = y^0$$

A fenti feladatmegadásnál nevezzük f-et jobb oldalnak és y^0-t a kezdeti értéknek t_0 kezdeti időpontban, $y(t_0) = y^0$ kezdeti feltétel mellett. A megoldás egy differenciálható függvény

$$\varphi : [t_0, t_1] \longrightarrow D$$

Legyen f jobb oldal folytonos. A kezdeti érték feladat megoldásának keresése összekapcsolható a következő integrálegyenlet megoldásának keresésével:

$$\varphi(t) = y^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds \qquad (t \in [t_0, t_1]).$$

Tehát φ-re megoldjuk az előző egyenletet, így φ differenciálható és megoldja a kezdeti érték feladatot. Megfordítva, φ megoldja a kezdeti érték feladatot, így azonnal látható, hogy φ megoldja az integrálegyenletet is.

4.3. Newton-módszer

A numerikus analízisben a Newton-módszer az egyik legjobb ismert módszer, amivel valós függvények esetén jól közelíthetjük a gyököket.

Oldjuk meg az $f(x) = 0$ egyenletet, ahol $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható. Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ adott. Közelítsük f(x)-et x_0 körüli lineáris Taylor-polinommal, és tekintsük az

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

egyenletet. Ha $f'(x_0) \neq 0$, akkor ennek megoldása

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Az x_1 pontban ismételjük a fenti eljárást, így kapjuk az

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

iterációs sorozatot. Belátható, hogy ha x_0 elegendően közel van az f függvény p gyökéhez, akkor a sorozat p-hez konvergál. A fenti képlettel definiált numerikus módszert f gyökének keresésére Newton-módszernek hívjuk.

4.4. Jacobi-iteráció

A Jacobi iteráció nagyméretű lineáris egyenletrendszerek megoldására használatos.

Tekintsük az

$$Ax = b$$

lineáris egyenletrendszert, ahol

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ és } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Keressük meg az egyenletrendszer megoldását a szukcesszív approximáció módszerével! Ehhez alakítsuk át az egyenletet fixpont egyenlet alakra. Tekintsük az i-edik egyenletet:

$$\textstyle\sum_{j=1}^n = a_{ij}x_j = b_i, \qquad 1 \le i \le n$$

Tegyük fel, hogy $a_{ii} \neq 0 (i = 1, \dots, n)$. Az i-edik egyenletből fejezzük ki az i-edik változót:

$$x_i = -\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{b_i}{a_{ii}}, \qquad 1 \le i \le n.$$

Ezt vektoriális alakba felírva kapjuk, hogy

$$x = -\tilde{A}x + \tilde{b},$$

ahol

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad \tilde{b} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

4.5. Szöveges feladat

Egy tó vizére fektetett derékszögű koordinátarendszerre vonatkozóan valamely csónak az $y = x^2$ egyenletű parabola mentén szeli a hullámokat, a (4,16) és a (0,0) pontok között. Mikor lesz a csónak a lehető legközelebb az $a := (2, -1)$ pontban elhelyezett bójához?

Megoldás: átfogalmazva a feladatot a pontnak az

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 4], y = x^2\}$$

halmaztól vett távolságát, pontosabban az a-t legjobban közelítő A-beli elemet keressük $(\mathbb{R}^2, \rho)$ metrikus térben. Mivel $\mathbb{R}^2$ véges dimenziós, ezért ilyen elem létezik. Ennek a közelítő elemnek az első koordinátája nem más, mint a

$$d(x) := \sqrt{(x-2)^2 + (x^2+1)^2} \qquad (x \in [0, 4]),$$

illetve a $t := d^2$ függvény minimumhelye. Mivel

$$t'(x) = 2(x-2) + 4x(x^2+1) = 4x^3 + 6x - 4 \qquad (x \in [0, 4]),$$

ezért t'-nek a

$$2x^3 + 3x - 2 = 0 \qquad (x \in [0, 4])$$

egyenlet megoldáshalmazán lesz zérushelye. Az egyenlet megoldása:

$$\varphi : [0, 4] \to \mathbb{R} \qquad \varphi(x) := \frac{2}{2x^2 + 3}$$

leképezés fixpontja. Mivel $\varphi[[0, 4]] \subset [0, 4]$ és a

$$|\varphi'(x)| = |-\frac{2}{(2x^2+3)^2} \cdot 4x| = \frac{8x}{(2x^2+3)^2} := f(x) \qquad x \in [0, 4]$$

függvénynek az $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$-ben van minimumhely, (mivel az intervallum két végpontjában a felvett értékek nagyobbak, $d(0) = \sqrt{5}, d(4) = \sqrt{293}$)

$$f'(x) = \frac{24 - 48x^2}{(2x^2+3)^3}$$

ezért

$$f(x) \leq f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$$

ezzel megtaláltuk a legkisebb távolságra levő pontot.

4.6. Banach-féle fixponttétel egy alkalmazása

(Perron tétele)

Tétel. Legyen az $A \in M^{n\times n}$ mátrix minden a_{ij} komponense pozitív. Ekkor A-nak van legalább egy pozitív sajátértéke, amelyhez megadható egy csupa nemnegatív komponensekből álló sajátvektor.

Bizonyítás.
Legyen

$$G := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, i = 1, \ldots, n; \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$$

Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy G korlátos, zárt és konvex részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek. Legyen továbbá

$$f : G \to G, f(x) = \frac{Ax}{\|Ax\|_1}.$$

Ekkor nyilván f folytonos, hiszen minden vektornorma folytonos függvény és $x \mapsto Ax$ is folytonos leképezés. Ezért a Brouwer-féle fixponttétel szerint létezik legalább egy fixpontja f-nek G-ben, legyen ez $v \in G$. Ekkor v-re

$$\frac{Av}{\|Av\|_1} = v,$$

azaz $Av = \|Av\|_1 v$ teljesül. Ekkor $\lambda = \|Av\|_1$ sajátértéke A-nak a v sajátvektorral.

4.7. Schauder-féle fixponttétel egy alkalmazása

Peano tétele.

Tétel. Legyen

$$f : [t_0 - a, t_0 + a] \times [u - b, u + b] \to \mathbb{R}$$

folytonos függvény, maximumát jelöljük M-mel, azaz

$$M = \max\{|f(t,x)| : |t - t_0| \le a, |x - u| \le b\}.$$

Legyen $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$. Ekkor a következő kezdeti érték feladatnak létezik legalább egy megoldása az $I = [t_0 - h, t_0 + h]$ intervallumon.

$$x' = f(t,x)x(t_0) = u$$

Bizonyítás. Tekintsük az I-n definiált folytonos függvények $C(I, \mathbb{R})$ Banach-terét a

$$\|g\|_\infty = \max_{t \in I} |g(t)|$$

normával. Legyen

$$E = \{g \in C(I, \mathbb{R}) : |g(t) - u| \le b, t \in I\}.$$

Definiáljuk az F nemlineáris operátort az

$$(F(x))(t) = u + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \qquad t \in I, x \in E$$

képlettel. Mivel $x \in E$, ezért $f(s, x(s))$, és így $F(x)$ is jól definiált. Továbbá

$$|(F(x))(t) - u| = \left| \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \right| \le M|t - t_0| \le Mh \le b \qquad t \in I$$

Azaz $F(x) \in E$. Nyilván E nemüres, konvex részhalmaza $C(I, \mathbb{R})$-nek.

4.8. Magyar vonatkozás

1928-ban a kiváló magyar matematikus, Neumann János formálta meg a játékelmélet modelljét. A modell lényeges pontja, hogy a topológiai módszert bevezeti a közgazdasági modell építésébe, melyre a közgazdaságtan történetében még nem volt példa. Különösen a Brouwer-féle fixponttétel használata, és annak általánosított alkalmazása volt a modell elemzésének kulcspontja, azaz Neumann rámutatott, hogy a fixponttétel felhasználható a modell egyensúlyának megoldási bizonyításában. Ebben Neumann a pontértékű Brouwer-féle fixponttételt a halmazértékű tételre bővítette, melyet pár évvel később a Princetonban tartózkodott japán matematikus Kakutani, Neumannal közösen, egy elegáns és szép formára dolgozott ki. Így született meg a Kakutani-féle fixponttétel.

5. Érdekességek

Dolgozatom végén szeretnék példát mutatni pár érdekességre, amelyek a fixponttételekhez kapcsolódnak és mindennapjainkban is jelen vannak. Ilyen például az emberek fején található forgó, ami miatt nem lehet egy irányba fésülni a hajunkat, erről a sündisznótételben olvashatunk, illetve arról is, hogy mi történik a vízmolekulákkal, ha megkeverünk egy pohár vizet.

5.1. Brouwer fixponttételének hétköznapi példái

Vegyünk példának egy képet (pl. a Mona Lisát) és másoljuk le. Ezzel a másolattal azt csinálunk, amit akarunk, felnagyítjuk, lekicsinyítjük, elforgatjuk, összegyűrjük, bármit tehetünk vele. A Brouwer-féle fixpont-tétel állítása szerint, ha ezt a másolatot az eredeti kép felé helyezzük, legalább egy olyan pontja van a másolatnak, ami az eredeti képen is ugyanott szerepel. Lehet ez a Mona Lisa szemének, fülének, vagy akár a mosolyának egy része, de biztos, hogy létezik. Ez három dimenziós környezetben is érvényes: képzeljük el, hogy egy pohár vizet jól megkavarunk egy kanállal. Brouwer tétele szerint legalább egy vízmolekula ugyanazon a helyen van, mint a keverés előtt.

5.2. Sündisznótétel

A három dimenziós gömb felületét nem lehet megfésülni, azaz mindig van "forgó". Tegyük fel, hogy a gömbfelületet, vagyis S_3 halmazt haj borítja. Ennek megfésülése azt jelenti, hogy minden $x \in S_3$-ra az x pontbeli hajszál valamilyen $v(x)$ irányban simul S_3-ra, ahol a $v(x)$ egységvektor az x pont folytonos függvénye. Tehát a gömbfelület megfésülése egy olyan folytonos $v : S_3 \to S_3$ leképezés létezését követeli meg, amelyre teljesül, hogy $v(x)$ az x-re merőleges egységvektor minden $x \in S_p$-re. A sünnek csak annyi köze van hozzá, hogy ugyanilyen elven, nem tudjuk megsimogatni.

Tétel

Ha p páratlan, akkor nem létezik olyan folytonos $v : S_p \to S_p$ leképezés, amelyre $\langle v(x), x \rangle = 0$ minden $x \in S_p$-re. $\square$

5.3. Koszinusz iterálása

A Banach-féle fixponttétel érdekes közvetlen alkalmazása a következő feladat: mi történik, ha egy tetszőleges számra a számológéppel egymás után sokszor alkalmazzuk a koszinusz függvényt? Legyen x_0 tetszőleges valós szám, $\cos x_0$ ekkor már $[-1, 1]$ intervallumba esik. Ezen az intervallumon a koszinusz kontrakció, lévén a deriváltja abszolútértékének a korlátja $sin1 < 1$, így létezik fixpontja. A fixponttétel bizonyításakor használt sorozat épp a koszinusz iterálása, amiről tudjuk, hogy koszinusz fixpontjához tart, így bármely számról is indulunk a koszinusz gomb kitartó nyomkodásával a $\cos x = x$ egyenlet egyetlen gyökét közelítjük.

Hivatkozások

[1] Kurics, T. *Bevezetés a funkcionálanalízisbe, Karátson János előadásai alapján*

[2] Hund, Ch.: *Bachelorarbeit zum Thema Fixpunktsatz von Brouwer*, (2010)

[3] Győri, I., Hartung, F.: *előadásjegyzet*, (2006/2007)

[4] Scheible, N.Sch.: *Fixpunktsatz von Schauder* (2009)

[5] Kovács, S.:*Funkcionálanalízis feladatokban, egyetemi jegyzet*, (2013) ISBN: 978-963-284-445-9

[6] Laczkovich, M.,T.Sós, V.: *Analízis II.* (2007) ISBN: 987-963-19-6084-6