Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Császár Szilvia

Exponenciális dichotómia

BSc szakdolgozat

Témavezető:

Dr. Kovács Sándor

Numerikus Analízis Tanszék

Budapest, 2015

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani Dr. Kovács Sándornak, hogy lehetőséget adott nekem a szakdolgozat témájának megismerésére, feldogozására, és hogy a konzultációk alkalmával a differenciálegyenletekhez kapcsolódó ismereteimet is bővítette, ami nélkülözhetetlen volt a dolgozat írásakor. Továbbá hálás vagyok, hogy bármikor rendelkezésemre állt, és választ adott a felmerülő kérdéseimre.

Budapest, 2015. május 31.

Császár Szilvia

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Differenciálegyenlet-rendszerek vizsgálatakor fontos szempont az adott rendszer megoldásainak aszimptotikus viselkedése, illetve stabilitása. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartomány, $f \in \mathfrak{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\xi \in \Omega$. Ismeretes, hogy az

$$\dot{x} = f \circ x \tag{1.1}$$

autonóm rendszer ξ egyensúlyi helyzete ($f(\xi) = 0 \in \mathbb{R}^n$) aszimptotikusan stabilis, ha az $f'(\xi)$ Jacobi-mátrix minden sajátértékének valós része negatív.

Legyen $A \in \mathfrak{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$ és tekintsük az

$$\dot{x} = Ax \tag{1.2}$$

nem-autonóm rendszert. Az (1.2) rendszer esetében beszélhetünk a rendszer stabilitásáról, ugyanis megmutatható (vö. [2]), hogy lineáris differenciálegyenlet-rendszer tetszőleges megoldása pontosan akkor stabilis, aszimptotikusan stabilis, ill. labilis, ha a triviális megoldása – tehát a $\xi = 0 \in \mathbb{R}^n$ egyensúlyi helyzete – stabilis, aszimptotikusan stabilis, ill. labilis.

Létezik azonban olyan homogén nem-autonóm rendszer, melyre az előbb említett, a Jacobi-mátrix sajátértékeit vizsgáló módszer nem használható. Egy ilyen a klasszikus Markus-Yamabe példa is (vö.: [1]). Legyen az (1.2) rendszer együtthatómátrixa

$$A(t) = \begin{bmatrix} -2 + 2cos^2(t) & 1 - sin(2t) \\ -1 - sin(2t) & -2 + 2sin^2(t) \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

alakú. Ekkor minden $t \in \mathbb{R}$ esetén A mindkét sajátértéke -1, ugyanis rögzített t esetén A karakterisztikus polinomja:

$$z^2 - \mathrm{sp}(A)z + \det(A) = z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2 \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Azonban a rendszer

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} -e^t cos(t) \\ e^t sin(t) \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{1.3}$$

megoldása nem stabilis, ugyanis látni fogjuk majd a 2.1. következményben, hogy lineáris rendszerek esetében a stabilitásból következik a megoldások korlátos volta. Az (1.3)-ban megadott φ megoldás azonban nyilvánvalóan nem korlátos.

Tehát nem-autonóm rendszerek ilyenfajta vizsgálatát máshogy kell megközelítenünk. Az exponenciális dichotómia fogalma a stabilitás, ill. az aszimptotikus stabilitás fogalmának egy lehetséges általánosítását kínálja.

O. Perron: *Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen* című 1930-ban megjelent cikke az exponenciális dichotómia kiindulóállomásaként is tekinthető. Ennek megjelenése után számos más szerző tanulmányozta a fogalmat, különböző definíciók léteznek, tételek, melyek szükséges és elégséges feltételeit adják az említett fogalom létezésének. Továbbá több elméleti illetve alkalmazott problémában is szerepet játszik az exponenciális dichotómia fogalma, illetve annak számos következménye.

Egyik alkalmazása a stabilitás fogalmának általánosítása, illetve meghatározása nem-autonóm rendszerek esetében, erről legtöbbet Coppel munkáiból ([4], [5], [6]) olvashatunk. Ezen túl példaként említhetjük még a lokális Hartman-Grobman tétel bizonyítását nem-autonóm lineáris rendszerekre (vö.: [3]).

A dolgozat fő témája az exponenciális dichotómia definiálása, létezése szükséges és elégséges feltételeinek adása különböző alakú lineáris differenciálegyenlet-rendszerek esetében. A 3. fejezetben három különböző, de ekvivalens definíciót mutatunk, majd bizonyítunk néhány állítást, melyek általában valamelyik definícióból adódnak. Majd a 4. fejezetben 3 különböző esetben vizsgáljuk az exponenciális dichotómia létezését, minden esetben egy vagy több példában szemléltetve az adott módszert. Az 5. fejezetben diszkrét idejű lineáris rendszer exponenciális dichotómiáját definiáljuk, itt is több ekvivalens megfogalmazásban. A 6. fejezetben pedig visszatérünk a stabilitás kérdéséhez, és néhány összefüggést mutatunk a stabilitás, ill az aszimptotikus stabilitás és a közönséges, ill. az exponenciális dichotómia között.

2. Alapfogalmak

2.1. Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek megoldása

Adott $n \in \mathbb{N}$ és $J \subset \mathbb{R}$ intervallum, tekintsük az $A \in \mathfrak{C}(J, \mathbb{R}^{n \times n})$, ill. az $f \in \mathfrak{C}(J, \mathbb{R}^n)$ függvényekkel megadott

$$\dot{x} = Ax + f \tag{2.4}$$

elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszert, illetve a hozzá tartozó

$$\dot{x} = Ax \tag{2.5}$$

homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszert.

2.1. Tétel. *A homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer ($f \equiv 0$) $\mathcal{M}_0$ megoldáshalmaza n-dimenziós altere $\mathfrak{C}^1(J, \mathbb{R}^n)$-nek.*

Így – mivel $\mathcal{M}_0$ véges dimenziós vektortér – a homogén rendszer tetszőleges φ megoldásának előállításához elegendő $\mathcal{M}_0$ egy bázisát ismerni, azaz a homogén rendszernek n darab lineárisan független $\mu_1, \ldots, \mu_n$ megoldását meghatározni. Ekkor ugyanis pontosan egy olyan $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor van, hogy

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu_k(t) \qquad (t \in J).$$

2.1. Definíció. *A homogén rendszer esetében*

1. *az $\mathcal{M}_0$ egy bázisát a homogén rendszer egy **alaprendszer**ének nevezzük;*

2. *a $\Phi : J \to \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixértékű függvényt a homogén rendszer **alapmátrix**ának nevezzük, ha Φ oszlopai a homogén rendszer alaprendszerét alkotják, azaz ha $\mu_1, \ldots, \mu_n$ alaprendszer, akkor*

$$\Phi := [\mu_1, \ldots, \mu_n] \tag{2.6}$$

alapmátrix.

Ha Φ alapmátrix, akkor a definícióból következik, hogy

$$\det(\Phi(t)) \neq 0 \quad \text{és} \quad \dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t) \qquad (t \in J).$$

2.1. Állítás. (Alapmátrix tulajdonságai) *Ha Φ alapmátrixa a* (2.5) *rendszernek, akkor*

1. *tetszőleges $c \in \mathbb{R}^n$ esetén $\varphi := \Phi c$ megoldása a* (2.5) *rendszernek;*

2. *tetszőleges $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $\det(C) \neq 0$ esetén ΦC is alapmátrixa a* (2.5) *rendszernek;*

3. *Ha Ψ is alapmátrixa a* (2.5) *rendszernek, akkor van olyan $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $\det(C) \neq 0$, hogy $\Phi = \Psi C$;*

4. *Ha Ψ is alapmátrixa a* (2.5) *rendszernek, akkor*

$$\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau) = \Psi(t)\Psi^{-1}(\tau) \qquad (t, \tau \in J).$$

Ismeretes, hogy tetszőleges $(\tau, \xi) \in J \times \mathbb{R}^n$ esetén az

$$\dot{x} = Ax + f, \quad x(\tau) = \xi$$

elsőrendű lineáris kezdeti érték feladat teljes megoldása:

$$\varphi(t) = \ \Phi(t)\big\{[\Phi(\tau)]^{-1}\xi + \int_\tau^t [\Phi(s)]^{-1} b(s) ds\big\} \qquad (t \in J).$$

2.2. Definíció. *Ha Φ alapmátrixa a* (2.5) *rendszernek, akkor a*

$$\Lambda(t, \tau) := \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau) \qquad (t, \tau \in J)$$

mátrixot a (2.5) *rendszer Cauchy-mátrixának nevezzük.*

Így a (2.4) teljes megoldás a

$$\varphi(t) = \Lambda(t, \tau)\xi + \int_\tau^t \Lambda(t, s) b(s) ds \qquad (t \in J)$$

alakban is felírható.

2.2. Állítás. (Cauchy-mátrix tulajdonságai)

1. *A Cauchy-mátrix független az alaprendszer választásától.*

2. *Tetszőleges $t, \tau \in J$ esetén*

$$\det(\Lambda(t, \tau)) \neq 0.$$

3. Tetszőleges $t, \tau \in J$ esetén

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda(t,\tau) = A(t)\Lambda(t,\tau).$$

4. Tetszőleges $\tau, \sigma, \rho \in J$ esetén

$$\Lambda(\tau,\tau) = E_n, \quad \Lambda(\tau,\sigma)\Lambda(\sigma,\rho) = \Lambda(\tau,\rho).$$

A továbbiakban legyen $J = [t_0, +\infty)$ $(t_0 \geq 0)$ és jelölje Φ a homogén rendszer azon alapmátrixát, melyre

$$\Phi(t_0) = I$$

teljesül.

2.2. Sajátértékek

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, jelölje I_n az $n\times n$-es egységmátrixot, Θ_n pedig az $n\times n$-es nullmátrixot. Az A sajátértékeinek halmaza, spektruma:

$$\sigma(A) := \{z \in \mathbb{C} : zI_n - A \text{ szinguláris}\}, \qquad \lambda \in \sigma(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \chi_A(z) = 0,$$

ahol

$$\chi_A(z) := \det(zI_n - A) = (-1)^n \det(A - zI_n) \qquad (z \in \mathbb{C})$$

az A karakterisztikus polinomja. A sajátértékek ismeretében a karakterisztikus polinom a következőképpen írható fel:

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots \lambda_r\} \Longrightarrow \chi_A(z) = (-1)^n \prod_{k=1}^{r} (\lambda_k - z)^{n_k} \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

ahol

$$n_1 + \dots + n_r = n, \quad \sum_{k=1}^{r} n_k \lambda_k = \mathrm{sp}(A), \quad \prod_{k=1}^{n} \lambda_k^{n_k} = \det(A),$$

n_k neve a λ_k sajátérték algebrai multiplicitása. Tehát algebrai multiplicitással számolva $n\times n$-es mátrixnak pontosan n db sajátértéke van, és a sajátértékek összege az A nyoma, szorzata a determinánsa.

2.2. Tétel. (Cayley-Hamilton) *A karakterisztikus polinom annullálja a mátrixot, azaz*

$$\chi_A(A) = \Theta_n.$$

2.1. Megjegyzés. *Legyen*

$$p(z) := a_0 + a_1 z + \dots + a_{k-1} z^{k-1} + a_k z^k \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Ekkor a p polinomnak az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ helyen vett helyettesítési értékén a

$$p(A) := a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_{k-1} A^{k-1} + a_k A^k$$

mátrixot értjük.

Az A minimálpolinomja (μ_A) az a legkisebb fokszámú, de legalább elsőfokú polinom, amely a mátrixot annullálja, azaz amelyre $\mu_A(A) = \Theta$.

2.3. Tétel. *A minimálpolinomjának gyökei A sajátértékei és A minden sajátértéke előfordul a gyökök között:*

$$\chi_A(\lambda) = 0 \iff \mu_A(\lambda) = 0.$$

A λ_k sajátérték geometriai multiplicitása: $g_{\lambda_k} := \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_k I_n)$.

2.2. Megjegyzés. $1 \leq g_{\lambda_k} \leq a_{\lambda_k}$ *és* $g_{\lambda_k} = a_{\lambda_k} \Leftrightarrow \lambda_k$ *egyszeres gyöke* $\mu_A - nak.$

2.3. Floquet-elmélet alapjai

Az exponenciális dichotómia létezéséhez szükséges és elégséges feltétel kimondásához és megértéséhez periodikus együttható mátrixú lineáris rendszer esetében szükség lesz a periodikus mátrixokkal kapcsolatos néhány alapvető eredményre a Floquet-elméletből. Ezek megtalálhatóak [2]-ben. Legyen

$$A \in \mathfrak{C}([0, +\infty), \mathbb{R}^n)$$

T-periodikus mátrixértékű függvény ($T > 0$), azaz

$$A(t + T) = A(t) \quad (t \in [0, \infty)),$$

és tekintsük az

$$\dot{x} = Ax \tag{2.7}$$

homogén lineáris rendszert.

2.3. Állítás. *Ha* $\Phi(t)$ $(t \in [0, +\infty))$ *alapmátrixa a* (2.7) *rendszernek, akkor* $\Phi(t+T)$ $(t \in [0, +\infty))$ *is alapmátrixa, azaz létezik* $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$*, hogy*

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)C \qquad (t \in [0, +\infty)),$$

ahol

$$C = \Phi^{-1}(0)\Phi(T).$$

Bizonyítás: Ha Φ alapmátrix, akkor

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t) \qquad (t \in [0, +\infty)),$$

így az egyenletet felírva $t+T$-re kapjuk, hogy

$$\dot{\Phi}(t+T) = A(t+T)\Phi(t+T) \qquad (t \in [0, +\infty)).$$

Az együtthatómátrix periodikusságából

$$\dot{\Phi}(t+T) = A(t)\Phi(t+T) \qquad (t \in [0, +\infty)),$$

továbbá $\det \Phi(t+T) \neq 0$, azaz $\Phi(t+T)$ is alapmátrix. Ekkor a 2.1. állítás 3. pontjának értelmében létezik olyan $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, hogy

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)C \qquad (t \in [0, +\infty)). \tag{2.8}$$

Ezt az egyenletet $t = 0$-ra alkalmazva:

$$\Phi(T) = \Phi(0)C \Longrightarrow C = \Phi^{-1}(0)\Phi(T).$$

■

A 2.3. állításból következik, hogy $C = \Phi(T)$, mivel feltettük, hogy Φ azt az alapmátrixot jelöli, melyre $\Phi(0) = I$. Ezt visszaírva a (2.8) egyenlőségbe kapjuk, hogy

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)\Phi(T) \qquad (t \in [0, +\infty)).$$

A C mátrixot a rendszer **monodrómia mátrix**ának, vagy **főmátrix**ának nevezzük.

2.3. Definíció.

*(i) A monodrómia mátrix $\lambda_1, \dots \lambda_n$ sajátértékeit a (2.7) rendszer **karakterisztikus multiplikátor**ainak (vagy karakterisztikus tényezőinek) nevezzük.*

*(ii) A $\mu_1, \dots \mu_n$ számok a (2.7) rendszer **karakterisztikus kitevői** (vagy Floquet kitevői), ha teljesül rájuk, hogy*

$$\lambda_1 = \exp\{\mu_1 T\},\ \dots,\ \lambda_n = \exp\{\mu_n T\}.$$

2.4. Állítás. *A karakterisztikus multiplikátorok egyértelműen meghatározottak, azaz ha C és $\tilde{C}$ is monodrómia mátrixa a (2.7) rendszernek, akkor $\sigma(C) = \sigma(\tilde{C})$.*

Bizonyítás: Legyen $\tilde{\Phi}$ a (2.7) rendszer egy másik alapmátrixa, és legyen $\tilde{C}$ az ehhez tartozó monodrómia mátrix, azaz $\tilde{C} = \tilde{\Phi}^{-1}(0)\tilde{\Phi}(T)$. Mivel $\tilde{\Phi}$ is alapmátrix, létezik egy reguláris U mátrix, hogy $\tilde{\Phi} = \Phi U$, és így

$$\tilde{C} = \tilde{\Phi}^{-1}(0)\tilde{\Phi}(T) = U^{-1}\Phi^{-1}(0)\Phi(T)U = U^{-1}CU,$$

tehát C és $\tilde{C}$ hasonlóak, így a sajátértékeik megegyeznek. ■

2.3. Megjegyzés. *A karakterisztikus kitevők komplex értékek is lehetnek, és így ezek nem egyértelműen meghatározottak, mivel az exponenciális függvény $2\pi i$ szerint periodikus, ha értékkészlete $\mathbb{C}$, azaz ha μ karakterisztikus kitevő, akkor $\mu + k\frac{2\pi i}{T}$, $(k \in \mathbb{Z})$ is karakterisztikus kitevő, ugyanis*

$$\exp\{\mu T\} = \exp\{\mu T + k2\pi i\} = \exp\{(\mu + k\frac{2\pi i}{T})T\}.$$

2.4. Tétel. (Floquet) *Tegyük fel, hogy a (2.7) rendszer együtthatómátrixa $2T$ periodikus. Ekkor létezik*

$$B \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \textit{és} \quad P \in \mathfrak{C}^1([0,+\infty), \mathbb{R}^{n\times n})$$

$2T$-periodikus, $P(0) = I$-t teljesítő függvény úgy, hogy a (2.7) rendszer alapmátrixa előáll

$$\Phi(t) = P(t)e^{Bt} \qquad (t \in [0,+\infty))$$

alakban.

Bizonyítás: Legyen B az a mátrix, amelyre

$$e^{B2T} = C^2 = \Phi(2T),$$

ahol C a rendszer monodrómia mátrixa. Így az alapmátrixot

$$\Phi(t) = \Phi(t)e^{-Bt}e^{Bt} \qquad (t \in [0, +\infty))$$

alakban felírva látható, hogy

$$P(t) := \Phi(t)e^{-Bt} \qquad (t \in [0, +\infty))$$

választással kapjuk a tételben szereplő állítást, ha az így definiált P rendelkezik a tételben megadott tulajdonságokkal. Nyilván

$$P(0) = \Phi(0)e^{B0} = I,$$

így már csak azt kell megmutatnunk, hogy P $2T$-periodikus.

$$\begin{aligned} P(t+2T) &= \Phi(t+2T)e^{-B(t+2T)} = \\ &= \Phi(t)\Phi(2T)e^{B2T}e^{-Bt} = \\ &= \Phi(t)e^{B2T}e^{B2T}e^{-Bt} = \\ &= \Phi(t)e^{-Bt} = P(t) \quad (t \in [0, +\infty)). \end{aligned}$$

■

2.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* (2.7) *rendszer együtthatómátrixa* $2T$*-periodikus* ($T > 0$). *Ekkor létezik*

$$P \in \mathfrak{C}^1([0, +\infty), \mathbb{R}^{n \times n})$$

$2T$*-periodikus,* $P(0) = I$*-t teljesítő függvény úgy, hogy az*

$$x = Py$$

koordináta-transzformációval a (2.7) *rendszer az*

$$\dot{y} = By$$

állandó együtthatós rendszerbe vihető.

Bizonyítás: Megmutatjuk, hogy a 2.4. tételben definiált P függvény illetve B mátrix teljesítik ezeket a feltételeket. A

$$\dot{P}y + P\dot{y} = \dot{x} = Ax = APy$$

egyenlőséget átrendezve az

$$\dot{y} = P^{-1}(AP - \dot{P})y$$

azonosságot kapjuk. Ennek együtthatómátrixát átrendezve tetszőleges $t \in [0, +\infty)$ esetén a

$$\begin{aligned} P^{-1}(t)(A(t)P(t) - \dot{P}(t)) &= (\Phi(t)e^{-Bt})^{-1}[A(t)(\Phi(t)e^{-Bt}) - (\Phi(t)e^{-Bt})^{\cdot}] = \\ &= e^{Bt}\Phi^{-1}(t)[A(t)\Phi(t)e^{-Bt} - \dot{\Phi}(t)e^{-Bt} + \Phi(t)Be^{-Bt}] = \\ &= e^{Bt}\Phi^{-1}(t)\Phi(t)Be^{-Bt} = B \end{aligned}$$

egyenlőséget kapjuk, tehát a megadott koordináta-transzformáció a rendszert valóban az

$$\dot{y} = By$$

rendszerbe viszi. ∎

2.4. Stabilitás

Mint hogy azt már a bevezetőben említettük, a dolgozat utolsó fejezetében megvizsgáljuk az exponenciális dichotómia és a stabilitás kapcsolatát. Ehhez szükségünk lesz majd néhány, a stabilitással kapcsolatos definícióra, tételre.

2.4. Megjegyzés. *A dolgozat során, ha külön nem említünk módosítást, akkor a*

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \tag{2.9}$$

jelölje az euklideszi normát, azaz $x \in \mathbb{R}^n$ *esetén*

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\ ,$$

illetve az

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R} \tag{2.10}$$

jelölje az euklideszi norma által indukált mátrixnormát, azaz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *esetén*

$$\|A\| = (\lambda_{\max}(A^T A))^{\frac{1}{2}},$$

ahol $\lambda_{\max}(A^T A)$ *jelöli az* $A^T A$ *mátrix legnagyobb sajátértékét. A* $\|\cdot\|_V$ *vektornorma által indukált* $\|\cdot\|_M$ *mátrixnorma a következőképpen definiált:*

$$\|A\|_M := \sup\left\{\frac{\|Ax\|_V}{\|x\|_V}\ : x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0\right\} \qquad (A \in \mathbb{R}^{n\times n}).$$

A dolgozatban használni fogjuk még az

$$\|x\|_1 \ = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad (x \in \mathbb{R}^n),$$

$$\|x\|_\infty \ = \max\{|x_i|\ :\ i = 1, \ldots, n\} \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

vektornormák által indukált

$$\|A\|_1 \ = \max\{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\ :\ j = 1, \ldots, n\},$$

$$\|A\|_\infty \ = \max\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\ :\ i = 1, \ldots, n\}$$

mátrixnormákat, ahol $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tartomány, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, és tekintsük az

$$\dot{x} = f \circ (\mathrm{id}, x) \tag{2.11}$$

differenciálegyenlet-rendszert. $(\tau, \xi) \in \Omega$ esetén a (2.11) rendszer $x(\tau) = \xi$ kezdeti feltételt teljesítő megoldását jelölje $\varphi(\cdot; \tau, \xi)$, és ennek értelmezési tartományát jelölje az $I(\tau, \xi) \subset \mathbb{R}$ intervallum.

2.4. Definíció. *Legyen* $-\infty \le t_0 \in \mathbb{R}$, $\tau \in (t_0, +\infty)$. *A* (2.11) *egy*

$$\mu : (t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$$

megoldását ***Ljapunov értelmében stabilis****nak nevezzük, ha minden* $\varepsilon > 0$*-hoz van olyan* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *, hogy tetszőleges*

$$\xi \in \mathbb{R}^n, \quad \|\xi - \mu(\tau)\| < \delta$$

esetén, $[\tau, +\infty) \subset I(\tau, \xi)$ *és*

$$\|\varphi(t; \tau, \xi) - \mu(t)\| < \varepsilon \qquad (t \in [\tau, +\infty)).$$

μ-t **labilis**nak nevezzük, ha nem stabilis.

2.5. Definíció. *Legyen* $-\infty \le t_0 \in \mathbb{R}$, $\tau \in (t_0, +\infty)$. *A* (2.11) *egy*

$$\mu : (t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$$

megoldását ***aszimptotikusan stabilis****nak nevezzük, ha stabilis és van olyan* $\eta > 0$*, hogy tetszőleges*

$$\xi \in \mathbb{R}^n, \quad \|\xi - \mu(\tau)\| < \eta$$

esetén $[\tau, +\infty) \subset I(\tau, \xi)$ *és*

$$\lim_{t \to +\infty} \|\varphi(t; \tau, \xi) - \mu(t)\| = 0.$$

2.6. Tétel. *A* (2.11) *rendszer* $\mu : (t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ *megoldása pontosan akkor stabilis ill. aszimptotikusan stabilis, ha az*

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t) + \mu(t)) - f(t, \mu(t)) \qquad (t \in (t_0, +\infty)) \tag{2.12}$$

rendszernek a $(t_0, +\infty)$ *intervallumon értelmezett triviális megoldása stabilis ill. aszimptotikusan stabilis.*

Bizonyítás: Az $y := x - \mu$ helyettesítéssel a (2.11) rendszer az

$$\dot{y} = \dot{x} - \dot{\mu} = f \circ (\mathrm{id}, x) - f \circ (\mathrm{id}, \mu) = f \circ (\mathrm{id}, y + \mu) - f \circ (\mathrm{id}, \mu)$$

alakot ölti, ami megegyezik a (2.12) rendszerrel. Továbbá a $\mu : (t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ megoldása a (2.11) rendszernek megegyezik a (2.12) rendszer $(t_0, +\infty)$ intervallumon értelmezett triviális megoldásával. ■

2.7. Tétel. *Legyen $t_0 \in [-\infty, +\infty)$, $A \in \mathfrak{C}((t_0, +\infty), \mathbb{R}^{n\times n})$, $f \in \mathfrak{C}((t_0, +\infty), \mathbb{R}^n)$. Ekkor az*

$$\dot{x} = Ax + f \tag{2.13}$$

lineáris rendszer tetszőleges megoldása pontosan akkor stabilis, ill. aszimptotikusan stabilis, ha a homogén rendszer triviális megoldása stabilis, ill. aszimptotikusan stabilis.

Bizonyítás: Ha $\mu : (t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ a (2.13) megoldása, akkor az

$$\dot{y} = [A(y + \mu) + f] - [A\mu + f] = Ay$$

rendszer éppen a (2.13) rendszerhez tartozó homogén rendszer. Így az előző tételt alkalmazva kapjuk ezen tétel bizonyítását. ■

Így lineáris rendszerek esetében beszélhetünk a rendszer stabilitásáról, ill. aszimptotikus stabilitásáról.

2.5. Állítás. *A* (2.13) *rendszerhez tartozó homogén rendszer pontosan akkor*

1. *stabilis, ha minden $s \geq t_0$-hoz létezik $K > 0$ konstans úgy, hogy*

$$\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \leq K \qquad (t \geq s)$$

teljesül, illetve

2. *aszimptotikusan stabilis, ha minden $s \geq t_0$-hoz létezik K, $\alpha > 0$ konstans úgy, hogy*

$$\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)} \qquad (t \geq s).$$

A 2.5. állítás 1. pontjának következménye az alábbi, mely a korlátos megoldások létezésével határozza meg a (2.5) rendszer stabilitását.

2.1. Következmény. *A* (2.5) *rendszer pontosan akkor stabilis, ha minden megoldása korlátos, azaz ha minden* $\mu : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ *megoldáshoz létezik* $K \geq 0$*, hogy tetszőleges* $t \in [t_0, +\infty)$ *esetén*

$$\|\mu(t)\| \leq K.$$

Bizonyítás:

1. lépés: Tegyük fel, hogy a (2.5) rendszer stabilis. Ekkor a 2.5. állítás 1. pontja alapján tetszőleges $t \in [t_0, +\infty)$ esetén létezik $K > 0$ konstans, hogy

$$\|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\| \leq K. \tag{2.14}$$

Indirekt tegyük fel, hogy a $\xi \in \mathbb{R}^n$ pontból induló

$$\mu(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\xi \qquad (t \geq t_0)$$

megoldása a rendszernek nem korlátos. A (2.14) egyenlőtlenség miatt azonban igaz a

$$\|\mu(t)\| \leq \|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\xi\| \leq \|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\| \cdot \|\xi\| \leq K\|\xi\| \quad (t \geq t_0)$$

egyenlőtlenség, így ellentmondásra jutottunk.

2. lépés: Tegyük fel, hogy minden megoldás korlátos. Ekkor tetszőleges alaprendszert választva az alaprendszerben lévő megoldások is korlátosak, így az ezekből alkotott alapmátrix is korlátos. Azaz tetszőleges Φ alapmátrixhoz létezik $K > 0$ konstans, hogy tetszőleges $t \geq t_0$ esetén

$$\|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\| \leq K.$$

A rendszer tetszőleges megoldása

$$\mu(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\xi \qquad (t \geq t_0)$$

alakú, ahol $\xi \in \mathbb{R}^n$ alkalmas konstans vektor. Így minden $t \geq t_0$ esetén

$$\|\mu(t)\| = \|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\xi\| \leq \|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\| \cdot \|\xi\| \leq K\|\xi\|. \tag{2.15}$$

Ha $\varepsilon > 0$ rögzített, akkor $\delta := \frac{\varepsilon}{K}$ választással ha

$$\|\mu(t_0) - 0\| = \|\xi - 0\| \leq \delta$$

teljesül, akkor a (2.15) egyenlőtlenség miatt tetszőleges $t \geq t_0$ esetén

$$\|\mu(t) - 0\| \leq K\|\xi\| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon,$$

azaz a (2.5) rendszer triviális megoldása stabilis, így a (2.5) rendszer stabilis.

■

A bevezetőben láttunk egy példát, amelynél a stabilitás megállapításához nem használható a Jacobi-mátrix sajátértékeit vizsgáló módszer. A következő példa (vö.: [4]) is egy ilyen ellenpélda hivatott lenni, de most a 2.5. állítás segítségével mutatjuk meg hogy a példában szereplő rendszer nem stabilis.

2.1. Példa. *Tekintsük a* (2.5) *rendszert, és tegyük fel, hogy a rendszer együtthatómátrixa*

$$A(t) = U^{-1}(t)A_0U(t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

módon definiált, ahol

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad U(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Ekkor minden $t \in \mathbb{R}$ *esetén* A *és* A_0 *hasonlóak, így* A *mindkét sajátértéke* -1. *A rendszer alapmátrixa:*

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^t(\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t)) & e^{-3t}(\cos(t) - \frac{1}{2}\sin(t)) \\ e^t(\sin(t) - \frac{1}{2}\cos(t)) & e^{-3t}(\sin(t) + \frac{1}{2}\cos(t)) \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

az alapmátrix inverze:

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t}(\sin(t) + \frac{1}{2}\cos(t)) & -e^{-t}(\cos(t) - \frac{1}{2}\sin(t)) \\ -e^{3t}(\sin(t) - \frac{1}{2}\cos(t)) & e^{3t}(\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t)) \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

A $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\|_1$ *normát kiszámolva látszik, hogy a rendszer labilis a 2.5. állítás alapján, ugyanis az említett norma*

$$\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\|_1 = K_1e^{t-s} + K_2e^{-3(t-s)} \qquad (t \geq s)$$

alakú, ahol $K_1,\ K_2 > 0$ konstansok. Így rögzített $s \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{t\to+\infty} \|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| = +\infty,$$

azaz nem teljesül rá a 2.5. állítás egyik pontja sem, így a példában megadott rendszer nem stabilis.

A következő példában pedig a bevezetőben látott példához hasonlóan a 2.1. következményt felhasználva mutatjuk meg, hogy az adott rendszer nem stabilis, annak ellenére, hogy minden sajátértékének valós része negatív.

2.2. Példa. *Tekintsük a* (2.5) *rendszert, és tegyük fel, hogy együtthatómátrixa*

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1-2\cos(4t) & 2+2\sin(4t) \\ -2+2\sin(4t) & -1+2\cos(4t) \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

alakú. Tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén A mindkét sajátértékének valós része negatív, ugyanis karakterisztikus polinomja

$$z^2 - \operatorname{sp}(A)z + \det(A) = z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2 \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Azonban a

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} e^t \sin(2t) \\ e^t \cos(2t) \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

megoldás nem korlátos, így a bevezetőben látott példához hasonlóan a 2.1. következmény miatt a rendszer triviális megoldása nem stabilis, így a rendszer nem stabilis.

3. Exponenciális dichotómia

Legyen $J \subset \mathbb{R}$ intervallum, $A \in \mathfrak{C}(J, \mathbb{R}^{n\times n})$, és tekintsük az

$$\dot{x} = Ax \tag{3.16}$$

homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszert. A (3.16) rendszer esetében definiáljuk az exponenciális dichotómia fogalmát, majd néhány, a definíciókhoz kapcsolódó alapvető állítást mondunk ki.

3.1. Definíciók

Különböző szerzőknél különböző definíciókkal találkozhatunk, nézzünk meg ezek közül most hármat. Az első definíció megtalálható [3]-ban.

3.6. Definíció. (Exponenciális dichotómia) *Legyen* Φ *a* (3.16) *rendszer alapmátrixa. Ha tetszőleges* $t, s \in J$ *esetén* $\Phi(t)$ *és* $\Phi^{-1}(s)$ *felbontható a következőképpen:*

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \Phi_1(t) + \Phi_2(t), \\ \Phi^{-1}(s) &= \Psi_1(s) + \Psi_2(s), \\ \Phi(t)\Phi^{-1}(s) &= \Phi_1(t)\Psi_1(s) + \Phi_2(t)\Psi_2(s), \end{aligned} \tag{3.17}$$

és léteznek $K, \alpha > 0$ *konstansok úgy, hogy*

$$\begin{aligned} \|\Phi_1(t)\Psi_1(s)\| &\leq Ke^{-\alpha(t-s)} \quad (t \geq s), \\ \|\Phi_2(t)\Psi_2(s)\| &\leq Ke^{\alpha(t-s)} \quad (s \geq t) \end{aligned} \tag{3.18}$$

ahol

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) &= \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t) & \Theta \end{bmatrix}, \quad \Phi_2(t) = \begin{bmatrix} \Theta & \Phi_{12}(t) \end{bmatrix}, \\ \Psi_1(s) &= \begin{bmatrix} \Psi_{11}(s) \\ \Theta \end{bmatrix}, \qquad \Psi_2(s) = \begin{bmatrix} \Theta \\ \Psi_{12}(s) \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

akkor azt mondjuk, hogy a (3.16) *rendszernek exponenciális dichotómiája van a* J *intervallumon a* K, α *konstansokkal.*

A második definíció sokkal elterjedtebb a szakirodalomban, megtalálható például [4]-ben.

3.7. Definíció. (Exponenciális dichotómia) *Legyen* Φ *a* (3.16) *rendszer alapmátrixa. Ha léteznek* K_1, K_2, α_1, $\alpha_2 > 0$ *konstansok és* P *projekció úgy, hogy minden* $t,\ s \in J$ *esetén teljesülnek a*

$$\begin{aligned} \|\Phi(t)P\Phi^{-1}(s)\| &\leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)} \quad (t \geq s), \\ \|\Phi(t)(I-P)\Phi^{-1}(s)\| &\leq K_2 e^{-\alpha_2(s-t)} \quad (s \geq t) \end{aligned} \tag{3.20}$$

egyenlőtlenségek, akkor azt mondjuk, hogy a (3.16) *rendszernek exponenciális dichotómiája van a* J *intervallumon a* $K_1,\ K_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2$ *konstansokkal és* P *projekcióval.*

3.5. Megjegyzés. *Ha a* (3.20)*-ban megadott egyenlőtlenségek* $\alpha_1 = 0$ *és* $\alpha_2 = 0$ *konstansokkal teljesülnek, akkor azt mondjuk, hogy a* (3.16) *rendszernek közönséges dichotómiája van.*

A harmadik definíció a 3.7. definícióhoz hasonló, annál azonban kicsit általánosabb (vö.: [7]).

3.8. Definíció. (Exponenciális dichotómia) *Azt mondjuk, hogy a* (3.16) *rendszernek exponenciális dichotómiája van a* $[t_0, +\infty)$ *intervallumon, ha léteznek* $P(t)$ *projekciók* $(t \geq t_0)$*, és* $K > 0$, $\alpha_1 < \alpha_2$ *konstansok úgy, hogy*

$$\Lambda(t,s)P(s) = P(t)\Lambda(t,s) \qquad (t, s \geq t_0), \tag{3.21}$$

továbbá teljesülnek a

$$\begin{aligned} \|\Lambda(t,s)P(s)\| &\leq K e^{\alpha_1(t-s)} \quad (t \geq s \geq t_0), \\ \|\Lambda(s,t)(\mathrm{id} - P(t)\| &\leq K e^{\alpha_2(s-t)} \quad (t \geq s \geq t_0) \end{aligned} \tag{3.22}$$

egyenlőtlenségek, ahol Λ *a* (3.16) *rendszer Cauchy-mátrixa.*

3.6. Megjegyzés. *A 3.7. és a 3.8. definíciók közötti különbség, hogy míg az előbbiben szerepelt kikötés* α_1, α_2 *előjelére, addig az utóbbiban nem, így ebből a szempontból mondható általánosabbnak a 3.8. definíció.*

A következőkben megmutatjuk, hogy a fenti 3 definíció ekvivalens, feltéve az előbb említett előjel megszorítást.

3.6. Állítás. *Ha a 3.8. definíció feltételeit kiegészítjük az $\alpha_1 < 0 < \alpha_2$ előjel megszorítással, akkor a 3.6., 3.7. és 3.8. definíciók ekvivalensek.*

Bizonyítás: **1.** A 3.7. és 3.6. definíciók ekvivalenciája:

1. lépés: Tegyük fel, hogy a 3.7. definíció teljesül K_1, K_2, α_1, $\alpha_2 > 0$ konstansokkal és P projekcióval. Vegyük P Jordan-felbontását. Megmutatható, hogy $\sigma(P) = \{0, 1\}$, ugyanis $\lambda \in \sigma(P)$, ha létezik $x \neq 0$ vektor, hogy

$$Px = \lambda x,$$

és mivel P projekció ($P^2 = P$), így

$$P^2 x = \lambda x \Rightarrow \lambda P x = \lambda x \Rightarrow \lambda^2 x = \lambda x \Rightarrow \lambda(\lambda - 1)x = 0.$$

Az $x \neq 0$ kikötés miatt $\lambda = 0$ vagy $\lambda = 1$. Továbbá létezik n független sajátvektor, azaz a Jordan blokkokat tartalmazó mátrixban nincs

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

alakú blokk, mert erre nem teljesül a $J^2 = J$ azonosság, így ha lenne ilyen blokk, akkor P-re sem teljesülne az azonosság, ami ellentmondás lenne. Így a Jordan alak felírható a következőképpen:

$$P = V J_k V^{-1},$$

ahol V oszlopai a sajátvektorok, és

$$J_k = \begin{bmatrix} I_k & \Theta \\ \Theta & \Theta \end{bmatrix},$$

ha P-nek az 1 k-szoros sajátértéke. Ez a felbontás adja a $\Phi(t)P\Phi^{-1}(s)$ $(s, t \in [t_0, +\infty))$ mátrix egy alkalmas felbontását, amivel teljesül a 3.6. definíció. Legyen $t, s \in [t_0, +\infty)$ tetszőleges, ekkor

$$\Phi(t)P\Phi^{-1}(s) = \Phi(t)V J_k V^{-1}\Phi^{-1}(s) = \tilde{\Phi}(t)J_k\tilde{\Phi}^{-1}(s) = \tilde{\Phi}(t)J_k J_k\tilde{\Phi}^{-1}(s), \quad (3.23)$$

ahol

$$\tilde{\Phi} = \Phi V \tag{3.24}$$

szintén alapmátrix. Vegyük észre, hogy

$$\tilde{\Phi} J_k = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{11} & \tilde{\Phi}_{12} \\ \tilde{\Phi}_{21} & \tilde{\Phi}_{22} \end{bmatrix} J_k = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{11} & \Theta \\ \tilde{\Phi}_{21} & \Theta \end{bmatrix},$$

így

$$\Phi_1 := \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{11} & \Theta \\ \tilde{\Phi}_{21} & \Theta \end{bmatrix}$$

választással pontosan olyan alakú mátrixot kapunk, ami a 3.6. definícióban szerepel. Hasonlóan

$$J_k \tilde{\Phi}^{-1} = J_k \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}^1_{11} & \tilde{\Phi}^1_{12} \\ \tilde{\Phi}^1_{21} & \tilde{\Phi}^1_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}^1_{11} & \tilde{\Phi}^1_{12} \\ \Theta & \Theta \end{bmatrix},$$

így a 3.6. definícióban szereplő Ψ_1 mátrixot válasszuk a

$$\Psi_1 := \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}^1_{11} & \tilde{\Phi}^1_{12} \\ \Theta & \Theta \end{bmatrix}$$

módon. Hasonlóan tetszőleges $s, t \in [t_0, +\infty)$ esetén tekintsük a

$$\Phi(t)(I - P)\Phi^{-1}(s) = \Phi(t)V(I - J_k)V^{-1}\Phi^{-1}(s) = \tilde{\Phi} J_{n-k} J_{n-k} \tilde{\Phi}^{-1} \tag{3.25}$$

felbontást, ahol $\tilde{\Phi}$ (3.24)-ben definiált, és

$$J_{n-k} = \begin{bmatrix} \Theta & \Theta \\ \Theta & I_{n-k} \end{bmatrix}.$$

Így

$$\tilde{\Phi} J_{n-k} = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{11} & \tilde{\Phi}_{12} \\ \tilde{\Phi}_{21} & \tilde{\Phi}_{22} \end{bmatrix} J_{n-k} = \begin{bmatrix} \Theta & \tilde{\Phi}_{12} \\ \Theta & \tilde{\Phi}_{22} \end{bmatrix},$$

illetve

$$J_{n-k} \tilde{\Phi}^{-1} = J_{n-k} \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}^1_{11} & \tilde{\Phi}^1_{12} \\ \tilde{\Phi}^1_{21} & \tilde{\Phi}^1_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta & \Theta \\ \tilde{\Phi}^1_{21} & \tilde{\Phi}^1_{22} \end{bmatrix},$$

így természetes módon adódik a

$$\Phi_2 := \begin{bmatrix} \Theta & \tilde{\Phi}_{12} \\ \Theta & \tilde{\Phi}_{22} \end{bmatrix},$$

és a

$$\Psi_2 := \begin{bmatrix} \Theta & \Theta \\ \tilde{\Phi}^1_{21} & \tilde{\Phi}^1_{22} \end{bmatrix}$$

választás. Az így definiált mátrixok teljesítik a (3.17) és a (3.19) feltételeket. Továbbá a (3.23) és (3.25) egyenlőségek miatt a (3.18) egyenlőtlenségek teljesülése közvetlenül adódik a (3.20) egyenlőtlenségekből.

2. lépés: Tegyük fel, hogy a 3.6. definíció teljesül K, $\alpha > 0$ konstansokkal, és hogy a Φ alapmátrix, illetve annak inverze felbontható

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \quad \Phi^{-1} = \Psi_1 + \Psi_2$$

alakban, ahol tetszőleges $t, s \in [t_0, +\infty)$ esetén

$$\Phi_1(t) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t) & \Theta) \end{bmatrix}, \quad \Phi_2(t) = \begin{bmatrix} \Theta & \Phi_{12}(t) \end{bmatrix},$$

$$\Psi_1(s) = \begin{bmatrix} \Psi_{11}(s) \\ \Theta \end{bmatrix}, \qquad \Psi_2(s) = \begin{bmatrix} \Theta \\ \Psi_{12}(s) \end{bmatrix}.$$

Tegyük fel továbbá, hogy $\Phi_{11}(t) \in \mathbb{R}^{n \times k}$ ($t \in [t_0, +\infty)$, $k \leq n$) ekkor a (3.17) azonosságok miatt $\Psi_{11}(t) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ ($t \in [t_0, +\infty)$). Ekkor a 3.7. definíció teljesül a $K_1 := K$, $K_2 := K$, $\alpha_1 := \alpha$, $\alpha_2 := \alpha$ konstansokkal és a

$$P = \begin{bmatrix} I_k & \Theta \\ \Theta & \Theta \end{bmatrix}$$

projekcióval ugyanis tetszőleges $s, t \in [t_0, +\infty)$ esetén teljesülnek a következő azonosságok:

$$\begin{aligned} \Phi(t) P \Phi^{-1}(s) = \ & (\Phi_1(t) + \Phi_2(t)) P (\Psi_1(s) + \Psi_2(s)) = \\ & = \Phi_1(t) P \Psi_1(s) = \\ & = \Phi_1(t) \Psi_1(s), \end{aligned}$$

és

$$\Phi(t)(I-P)\Phi^{-1}(s) = (\Phi_1(t)+\Phi_2(t))(I-P)(\Psi_1(s)+\Psi_2(s)) =$$

$$= \Phi_2(t)(I-P)\Psi_2(s) =$$

$$= \Phi_2(t)\Psi_2(s),$$

mivel $i \neq j$ esetén

$$\Phi_i(t)\Psi_j(s) = 0,$$

és

$$\Phi_1(t)P\Psi_1(s) = \begin{bmatrix}\Phi_{11}(t) & \Theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_k & \Theta\\ \Theta & \Theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Psi_{11}(s)\\ \Theta\end{bmatrix} =$$

$$= \Phi_{11}(t)\Psi_{11}(s) =$$

$$= \Phi_1(t)\Psi_1(s),$$

és hasonlóan

$$\Phi_2(t)(I-P)\Psi_2(s) = \begin{bmatrix}\Theta & \Phi_{12}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Theta & \Theta\\ \Theta & I_{n-k}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Theta\\ \Psi_{12}(s)\end{bmatrix} =$$

$$= \Phi_{12}(t)\Psi_{12}(s) =$$

$$= \Phi_2(t)\Psi_2(s).$$

Így a (3.18) egyenlőtlenségekből következik, hogy a (3.20) egyenlőtlenségek is teljesülnek.

2. A 3.7. és 3.8. definíciók ekvivalenciája:

1. lépés: Tegyük fel, hogy a 3.7. definíció teljesül. Definiáljuk a

$$P(t) := \Phi(t)P\Phi^{-1}(t) \qquad (t \in [t_0, +\infty))$$

projekciókat. Megmutatjuk, hogy ezekkel teljesülnek a 3.8. definícióban szereplő feltételek. Tetszőleges $t, s \in [t_0, +\infty)$ esetén

$$\begin{aligned}\Lambda(t,s)P(s) &= \Phi(t)\Phi^{-1}(s)\Phi(s)P\Phi^{-1}(s) = \\ &= \Phi(t)P\Phi^{-1}(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(s) = \\ &= P(t)\Lambda(t,s),\end{aligned}$$

ezzel beláttuk a (3.21) egyenlőséget. Ugyanezzel az átalakítással kapjuk a

$$\Lambda(t,s)P(s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)\Phi(s)P\Phi^{-1}(s) = \Phi(t)P\Phi^{-1}(s) \qquad (t, s \in [t_0, +\infty))$$

azonosságot, így a (3.20) egyenlőtlenségek közül az elsőből rögtön kapjuk a

$$\|\Lambda(t,s)P(s)\| \leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)} \qquad (t \geq s \geq t_0)$$

egyenlőtlenséget. Hasonlóan tetszőleges $t, s \in [t_0, +\infty)$ esetén

$$\begin{aligned}\Lambda(s,t)(I - P(t)) &= \Phi(s)\Phi^{-1}(t)(\Phi(t)\Phi^{-1}(t) - \Phi(t)P\Phi^{-1}(t)) = \\ &= \Phi(s)\Phi^{-1}(t)\Phi(t)(I-P)\Phi^{-1}(t) = \\ &= \Phi(s)(I-P)\Phi^{-1}(t),\end{aligned}$$

így a (3.20) egyenlőtlenségek közül a másodikat felhasználva kapjuk a

$$\|\Lambda(s,t)(I - P(t))\| \leq K_2 e^{\alpha_2(s-t)} \qquad (t \geq s \geq t_0)$$

egyenlőtlenséget. Végül a $K := \max(K_1, K_2)$ választással látható, hogy valóban a (3.22) egyenlőtlenségek teljesülnek.

2. lépés: Tegyük fel, hogy a 3.8. definíció teljesül. Legyen $P := P(t_0)$. Megmutatjuk, hogy a 3.7. definíció igaz $K_1 := K$, $K_2 := K$, $-\alpha_1$ illetve α_2 konstansokkal és a P projekcióval. A (3.21) azonosságból $s, t \in [t_0, +\infty)$ esetén

$$P(t) = \Lambda(t,s)P(s)(\Lambda(t,s))^{-1} = \Lambda(t,s)P(s)\Lambda(s,t),$$

amiből $s = t_0$ helyettesítéssel:

$$P(t) = \Phi(t)P\Phi^{-1}(t) \qquad (t \in [t_0, +\infty)).$$

Az előző irány bizonyításánál látott azonosságokat használjuk most is, nevezetesen a következőket:

$$\Lambda(t,s)P(s) \;=\; \Phi(t)P\Phi^{-1}(s) \qquad\qquad (s,t \in [t_0,+\infty)),$$

$$\Lambda(s,t)(I-P(t)) \;=\; \Phi(s)(I-P)\Phi^{-1}(t) \qquad (s,t \in [t_0,+\infty))$$

Így a (3.22) egyenlőtlenségekből kapjuk a (3.20) egyenlőtlenségeket.

■

3.7. Megjegyzés. *Ebből a bizonyításból az is látszik, hogy a 3.8. definícióban szereplő $P(t)$ projekciókat meghatározza a $P(t_0)$ projekció, ugyanis ha $P(t_0)$ adott, akkor a 3.8. definíció szerint minden $t \in [t_0, +\infty)$ esetén teljesül a*

$$\Lambda(t,t_0)P(t_0) = P(t)\Lambda(t,t_0)$$

egyenlőség, amiből így $P(t)$ egyértelműen kifejezhető minden $t \in [t_0, +\infty)$ esetén:

$$P(t) = \Lambda(t,t_0)P(t_0)\Lambda(t,t_0).$$

3.2. Alapvető állítások

A 3.7. definícióban szereplő egyenlőtlenségek felírhatók egy másik, azokkal ekvivalens alakban (vö.: [4]). Az átírás azért jó, mert az ekvivalens egyenlőtlenségek szemléletesebben mutatják, hogy mit is jelent az exponenciális dichotómia fogalma.

3.7. Állítás. *A következő egyenlőtlenségek ekvivalensek a 3.7. definícióban szereplő egyenlőtlenségekkel:*

$$\begin{aligned}
\|\Phi(t)P\xi\| &\le K_1{}'e^{-\alpha_1(t-s)}\cdot\|\Phi(s)P\xi\| && (t \ge s,\ t,s \in J)\\
\|\Phi(t)(I-P)\xi\| &\le K_2{}'e^{-\alpha_2(t-s)}\cdot\|\Phi(s)(I-P)\xi\| && (t \le s,\ t,s \in J)\\
\|\Phi(t)P\Phi^{-1}(t)\| &\le M' && (t \in J),
\end{aligned} \tag{3.26}$$

ahol $K_1{}',\ K_2{}',\ M' > 0$ konstansok, $\xi \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges konstans vektor.

Bizonyítás:

1. lépés: Legyen $\xi \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges konstans vektor, és tegyük fel, hogy a (3.16) rendszernek exponenciális dichotómiája van a J intervallumon, $K_1,\ K_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2$ konstansokkal. Ekkor tetszőleges $t, s \in J$, $t \geq s$ esetén:

$$\begin{aligned}\|\Phi(t)P\xi\| &= \|\Phi(t)P\Phi^{-1}(s)P\xi\| \leq \\ &\leq \|\Phi(t)P\Phi^{-1}(s)\| \cdot \|\Phi(s)P\xi\| \leq \\ &\leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)} \cdot \|\Phi(s)P\xi\|,\end{aligned}$$

ezzel beláttuk a (3.26) egyenlőtlenségek közül az elsőt. Hasonlóan tetszőleges $t, s \in J$, $t \leq s$ esetén a második egyenlőtlenség is belátható:

$$\begin{aligned}\|\Phi(t)(I-P)\xi\| &= \|\Phi(t)(I-P)\Phi^{-1}(s)P\xi\| \leq \\ &\leq \|\Phi(t)(I-P)\Phi^{-1}(s)\| \cdot \|\Phi(s)(I-P)\xi\| \leq \\ &\leq K_2 e^{-\alpha_2(t-s)} \cdot \|\Phi(s)(I-P)\xi\|.\end{aligned}$$

A harmadik egyenlőtlenség teljesülése nyilvánvaló:

$$\|\Phi(t)P\Phi^{-1}(t)\| \leq \|\Phi(t)\| \cdot \|P\| \cdot \|\Phi^{-1}(t)\| = \|P\| \qquad (t \in J).$$

Ezzel az állítás szükséges feltételét beláttuk.

2. lépés: Tegyük fel, hogy teljesülnek az (3.26) egyenlőtlenségek. Tekintsük közülük az elsőt a

$$\xi := \Phi^{-1}(s)x_0 \qquad (s \in J)$$

választással, ahol $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges rögzített vektor. Ekkor minden $t, s \in J$, $t \geq s$ esetén igaz a

$$\begin{aligned}\|\Phi(t)P\underbrace{\Phi^{-1}(s)x_0}_{\xi}\| &\leq K_1{}' e^{-\alpha_1(t-s)}\|\Phi(s)P\underbrace{\Phi^{-1}(s)x_0}_{\xi}\| \leq \\ &\leq K_1{}' e^{-\alpha_1(t-s)}\|\Phi(s)P\Phi^{-1}(s)\| \cdot \|x_0\| \leq \\ &\leq K_1{}' M' e^{-\alpha_1(t-s)}\|x_0\|\end{aligned}$$

egyenlőtlenség. Így a $K := {K_1}'M'$ választással tetszőleges $x_0 \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén beláttuk, hogy:

$$\|\Phi(t)P\Phi^{-1}(s)x_0\| \leq Ke^{-\alpha_1(t-s)}\|x_0\| \qquad (t, s \in J, t \geq s).$$

Az indukált norma definíciójából kapjuk a

$$\|B\| \leq \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

egyenlőtlenséget, ahol $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tetszőleges mátrix. Ezt alkalmazva

$$B := \Phi(t)P\Phi^{-1}(s) \qquad (t, s \in J)$$

mátrixra kapjuk a 3.7. definícióban szereplő első egyenlőtlenséget.

A másik egyenlőtlenség bizonyítása teljesen hasonló, tekintsük a (3.26) egyenlőtlenségek közül a másodikat a

$$\xi := \Phi^{-1}(s)x_0 \qquad (s \in J)$$

választással, ahol $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges rögzített vektor. Ekkor minden $t, s \in J$, $s \geq t$ estén igaz a

$$\begin{aligned}
\|\Phi(t)(I-P)\Phi^{-1}(s)x_0\| &\leq {K_2}'e^{-\alpha_2(s-t)}\|\Phi(s)(I-P)\Phi^{-1}(s)x_0\| \leq \\
&\leq {K_2}'e^{-\alpha_2(s-t)}\|\Phi(s)(I-P)\Phi^{-1}(s)\| \cdot \|x_0\| \leq \\
&\leq {K_2}'e^{-\alpha_2(s-t)}\|I + \Phi(s)P\Phi^{-1}(s)\| \cdot \|x_0\| \leq \\
&\leq {K_2}'e^{-\alpha_2(s-t)}(\underbrace{\|I\|}_{\leq N} + \|\Phi(s)P\Phi^{-1}(s)\|) \cdot \|x_0\| \leq \\
&\leq {K_2}'(N+M')e^{-\alpha_2(s-t)} \cdot \|x_0\|
\end{aligned}$$

egyenlőtlenség. Így az $L := {K_2}'(N + M')$ választással tetszőleges $x_0 \in \mathbb{R}^n$ esetén:

$$\|\Phi(t)(I-P)\Phi^{-1}(s)x_0\| \leq Le^{-\alpha_2(s-t)}\|x_0\| \quad (t, s \in J, s \geq t),$$

így szintén az indukált norma definíciójából származó egyenlőtlenségből a

$$B := \Phi(t)(I - P)\Phi^{-1}(s) \qquad (t, s \in J)$$

választással kapjuk a 3.7. definícióban lévő második egyenlőtlenséget.

■

3.2. Következmény. *Tegyük fel, hogy a* (3.16) *rendszernek exponenciális dichotómiája van a P projekcióval, melyre* $\mathrm{rang}(P) = k$. *A 3.7. állítás első két egyenlőtlensége azt mondja, hogy létezik egy $V_0 \subset \mathbb{R}^n$ altér, hogy a V_0-ból induló megoldásokra, azaz a*

$$\mu = \Phi \cdot \xi \qquad (\xi \in V_0)$$

alakú megoldásokra teljesül, hogy

$$\lim_{t \to +\infty} \mu(t) = 0,$$

és hasonlóan a $V_1 := \mathbb{R}^n \setminus V_0$-ból induló, azaz a

$$\mu = \Phi \cdot \xi \qquad (\xi \in V_1)$$

alakú megoldásokra teljesül, hogy

$$\lim_{t \to +\infty} \mu(t) = +\infty.$$

A harmadik egyenlőtlenség ennek a két altérnek a szögéről ad információt, mégpedig hogy az origótól távolodva korlátos marad.

Ez a tulajdonság a 3.8. definícióból is levezethető (vö.: [7]), sőt mivel ebben a definícióban nem szerepel kikötés α_1 és α_2 előjelére vonatkozóan, általánosabb következmény is megfogalmazható. Tegyük fel, hogy $J = [t_0, +\infty)$, és legyen $t, s \in J$. $\xi \in \mathrm{Im}\, P(s)$ esetén a $\Lambda(t, s)\xi$ megoldás a

$$\|\Lambda(t, s)\xi\| \le K_1 e^{\alpha_1 (t-s)} \|\xi\| \quad (t \ge s) \tag{3.27}$$

módon becsülhető. Ez azt jelenti, hogy a (3.16) rendszernek az $(s,\xi)\quad(\xi\in\operatorname{Im}P(s))$ pontból induló megoldásának exponenciális felső korlátja van. Hasonlóan, ha $\xi\in\operatorname{Im}(I-P(s))$, akkor a

$$\psi(t):=\Lambda(t,s)\xi\qquad(t,s\in J)$$

megoldásra

$$\psi(t)\in\operatorname{Im}(I-P(t))\qquad(t\in J).$$

Ugyanis, ha $\xi\in\operatorname{Im}(I-P(s))$, akkor

$$\exists\eta\in\mathbb{R}^n\quad:\quad(I-P(s))\eta=\xi,$$

így minden $s,t\in J$ esetén

$$\begin{aligned}\psi(t)\; &=\Lambda(t,s)\xi=\Lambda(t,s)(I-P(s))\eta=\\ &=\Lambda(t,s)\eta-\Lambda(t,s)P(s)\eta=\Lambda(t,s)\eta-P(t)\Lambda(t,s)\eta=\\ &=(I-P(t))\Lambda(t,s)\eta,\end{aligned}$$

ami pedig azt jelenti, hogy $\psi(t)\in\operatorname{Im}(I-P(t))$. Ebben az esetben $s\geq t$ esetén a következő becslés igaz:

$$\|\xi\|=\ \|\Lambda(s,t)(I-P(t))\psi\|\leq K_2e^{\alpha_2(s-t)}\|\psi\|=K_2e^{\alpha_2(s-t)}\|\Lambda(t,s)\xi\|,\tag{3.28}$$

és így

$$\frac{1}{K_2}\|\xi\|e^{\alpha_2(s-t)}\leq\|\Lambda(t,s)\xi\|.\tag{3.29}$$

A (3.29) egyenlőtlenségből ebben az esetben azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a (3.16) rendszer $(s,\xi)\quad(\xi\in\operatorname{Im}(I-P(s))$ pontból induló megoldásainak exponenciális alsó korlátja van. Végül a 3.8. definícióban szereplő egyenlőtlenségek közül az elsőt $t=s$ esetre felírva a

$$\|P(t)\|\leq K\qquad(t\geq t_0)\tag{3.30}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Így, ha feltesszük a 3.7. definícióban szereplő kikötéseket α_1-re és α_2-re, akkor valóban megkapjuk a 3.2. következményben megfogalmazottakat.

3.8. Megjegyzés. *Tetszőleges rögzített* $s_1, s_2 \in J$ *esetén*

$$\mathrm{Im}(P(s_1)) = \mathrm{Im}(P(s_2)),$$

és

$$\mathrm{Im}(I - P(s_1)) = \mathrm{Im}(I - P(s_2)),$$

ugyanis a (3.21) *feltételből adódóan*

$$P(s_1) \sim P(s_2), \tag{3.31}$$

és

$$I - P(s_1) \sim I - P(s_2), \tag{3.32}$$

és hasonló mátrixokkal megadott lineáris leképezések képtere megegyezik. A (3.31) *és* (3.32) *eredményekből az is következik, hogy*

$$P(s) \sim P(t_0), \qquad I - P(s) \sim I - P(t_0),$$

ahol $s \in J = [t_0, +\infty)$, *továbbá a 3.7. és 3.8. definíciók ekvivalenciájának bizonyításában látott konstrukció alapján*

$$P(t_0) = P,$$

ahol a P *a 3.7. definícióból való projekció. Így azt is beláttuk, hogy tetszőleges rögzített* $s \in J$ *esetén*

$$P(s) \sim P, \qquad I - P(s) \sim I - P,$$

így a 3.2. következményben írt két altér az

$$\mathrm{Im}(P), \qquad \mathrm{Im}(I - P) \tag{3.33}$$

alterek.

3.3. Következmény. *A 3.2. következmény és az iménti, a* P *projekció képterével kapcsolatos megfontolások alapján azt mondhatjuk, hogy ha a* (3.16) *rendszernek exponenciális dichotómiája van, akkor a rendszernek pontosan az* $\mathrm{Im}(P)$*-ből induló megoldásai korlátosak.*

3.3. Példa. *Tekintsük az*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) \qquad (t \geq 0)$$

állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszert. Könnyen látható, hogy ez exponenciálisan dichotóm a

$$K_1 = K_2 = 1,\ \alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 1,\ P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

konstansokkal és projekcióval. Továbbá $\mathrm{rang}(P) = \mathrm{rang}(I - P) = 1$. *A rendszer stabil, ill. instabil altere:*

$$\begin{aligned} E_s &= \{(0, a) \mid a \in \mathbb{R}\}, \\ E_u &= \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Látható, hogy ezek 1*-dimenziós alterei* $\mathbb{R}^2$*-nek, és* $E_s = \mathrm{Im}(P)$*, ill.* $E_u = \mathrm{Im}(I - P)$*. A rendszer alapmátrixa:*

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \qquad (t \geq 0).$$

Így egy $\xi \in \mathrm{Im}(P)$*-ből induló megoldás*

$$\mu_s(t) = \Phi(t) \cdot \xi = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_2 e^{-2t} \end{bmatrix} \quad (t \geq 0)$$

alakú, és hasonlóan egy $\xi \in \mathrm{Im}(I - P)$*-ből induló megoldás*

$$\mu_u(t) = \Phi(t) \cdot \xi = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 e^t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t \geq 0)$$

alakú, így

$$\begin{aligned} \lim_{t \to +\infty} \mu_s(t) &= 0, \\ \lim_{t \to +\infty} \mu_s(t) &= 0. \end{aligned}$$

Továbbá a rendszer minden megoldása előáll

$$\mu(t) = \Phi(t)\xi = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 e^t \\ \xi_2 e^{-2t} \end{bmatrix} \qquad (t \geq 0)$$

alakban alkalmas $\xi \in \mathbb{R}^2$ vektorral, így látható, hogy a μ megoldás pontosan akkor lesz korlátos, ha

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_2 \end{bmatrix},$$

azaz ha $\xi \in \mathrm{Im}(P)$.

A következőkben megmutatjuk, hogy ha a (3.16) rendszer exponenciálisan dichotóm, akkor tetszőleges megoldása felbontható egy nem növekvő és egy nem csökkenő megoldás összegére. Legyen $t \in [t_0, +\infty)$, és definiáljuk a következő altereket:

$$S_-(t) := \{\Phi(t)Px_0 \mid x_0 \in \mathbb{R}^n\} = \mathrm{Im}\,\Phi(t)P, \tag{3.34}$$

$$S_+(t) := \{\Phi(t)(I-P)x_0 \mid x_0 \in \mathbb{R}^n\} = \mathrm{Im}\,\Phi(t)(I-P). \tag{3.35}$$

3.8. Állítás. *Az $S_-(t)$ és $S_+(t)$ halmazok direkt összege $\mathbb{R}^n$, továbbá $S_-(t)$ tartalmazza a nem növekedő, és $S_+(t)$ a nem csökkenő megoldásait a* (3.16) *rendszernek.*

Bizonyítás: Először belátjuk, hogy minden $t \geq t_0$ esetén

$$S_-(t) \oplus S_+(t) = \mathbb{R}^n.$$

Ehhez elég megmutatni, hogy tetszőleges $t \in [t_0, +\infty)$ és μ megoldás esetén $\mu(t)$ előáll egy $S_-(t)$ és egy $S_+(t)$-beli elem összegeként, és hogy a két halmaz metszete csak a 0-ból áll. Legyen μ tetszőleges megoldása a (3.16) rendszernek, és legyen $t \geq t_0$. Tegyük fel, hogy $\mu(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, ekkor μ felírható

$$\mu(t) = \Phi(t)x_0 = \Phi(t)Px_0 + \Phi(t)(I-P)x_0$$

alakban, amiről látható, hogy egy $S_-(t)$ és egy $S_+(t)$-beli elem összege.
Legyen $z \in S_-(t) \cap S_+(t)$ $(t \geq t_0)$. Ekkor létezik $w_1,\ w_2 \in \mathbb{R}^n$, hogy

$$z = \Phi(t)Pw_1, \qquad z = \Phi(t)(I-P)w_2,$$

amiből

$$\Phi(t)Pw_1 = \Phi(t)(I-P)w_2.$$

Mivel $\Phi(t)$ reguláris,

$$Pw_1 = (I - P)w_2.$$

Felhasználva továbbá, hogy P projekció ($P^2 = P$) kapjuk, hogy

$$Pw_1 = P^2 w_1 = P(I - P)w_2 = Pw_2 - P^2 w_2 = Pw_2 - Pw_2 = 0,$$

amiből az adódik, hogy

$$z = \Phi(t)Pw_1 = 0,$$

így

$$S_-(t) \cap S_+(t) = \{0\}.$$

Most azt mutatjuk meg, hogy $S_-(t)$ a nem növekvő megoldásokat tartalmazza (tetszőleges $t \geq t_0$ esetén). Legyen $\mu(t) \in S_-(t)$, amelyre $\mu(t) \neq 0$, azaz $Px_0 \neq 0$. Ekkor minden $s \leq t$ esetén

$$\frac{\|\mu(t)\|}{\|\mu(s)\|} = \frac{\|\Phi(t)Px_0\|}{\|\Phi(s)Px_0\|} = \frac{\|\Phi(t)P\Phi^{-1}(s)\Phi(s)Px_0\|}{\|\Phi(s)Px_0\|} \leq$$

$$\leq \|\Phi(t)P\Phi^{-1}(s)\| \leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)},$$

így minden $s \leq t$ esetén

$$\|\mu(t)\| \leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)} \|\mu(s)\|,$$

azaz a μ megoldás nem növekedő.

Hasonlóan legyen $\mu(t) \in S_+(t)$, amelyre $\mu(t) \neq 0$, azaz $(I - P)x_0 \neq 0$. Ekkor minden $s \geq t$ esetén

$$\frac{\|\mu(t)\|}{\|\mu(s)\|} \leq \|\Phi(t)(I - P)\Phi^{-1}(s)\| \leq K_2 e^{-\alpha_2(s-t)},$$

így minden $s \geq t$ esetén

$$\|\mu(s)\| \geq \frac{1}{K_2} e^{\alpha_2(s-t)} \|\mu(t)\|,$$

azaz a μ megoldás nem csökkenő. ■

3.4. Példa. *Tekintsük az*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

állandó együtthatós lineáris rendszert. Ennek alapmátrixa

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

így a rendszer megoldásai

$$\Phi(t)\xi = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}\xi_1 \\ e^{t}\xi_2 \end{bmatrix} = \xi_1 \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} + \xi_2 \begin{bmatrix} 0 \\ e^{t} \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{3.36}$$

alakúak, ahol $\xi \in \mathbb{R}^2$ tetszőleges vektor. A (3.36) felbontásból látszik, hogy a rendszer tetszőleges megoldása felbontható egy nem csökkenő és egy nem növekvő komponensre.

A dolgozat során szinte mindenhol feltesszük, hogy az exponenciális dichotómia definíciójában szereplő intervallum $J = [t_0, +\infty)$ $(t_0 \geq 0)$. A következő állítás (vö.: [4]) miatt azonban erre a J-re bizonyított eredmények igazak maradnak $J = [0, +\infty)$ feltevés mellett is.

3.9. Állítás. *Ha a (3.16) egyenletnek exponenciális dichotómiája van a $[t_0, +\infty)$ intervallumon, akkor a $[0, +\infty)$ intervallumon is ugyanazzal a P projekcióval és $\alpha_1,\ \alpha_2 > 0$ kitevőkkel.*

Bizonyítás: A 3.7. definícióban szereplő egyenlőtlenségeket elég abban az esetben belátni, ha $0 \leq s,\ t \leq t_0$, mert azt feltettük, hogy a $[t_0, +\infty)$ intervallumon teljesülnek. Legyen

$$N := \exp \int_0^{t_0} \|A(u)\| \,\mathrm{d}u,$$

így

$$\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \leq N \qquad (0 \leq s,\ t \leq t_0).$$

Ha $0 \leq s \leq t_0 \leq t$ akkor

$$\begin{aligned} \|\Phi(t)P\Phi^{-1}(s)\| &= \|\Phi(t)P\Phi^{-1}(t_0)\Phi(t_0)\Phi^{-1}(s)\| \leq \\ &\leq \|\Phi(t)P\Phi^{-1}(t_0)\| \cdot \|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \leq \end{aligned}$$

$$\leq N\|\Phi(t)P\Phi^{-1}(t_0)\| \leq$$

$$\leq NK_1e^{-\alpha_1(t-t_0)} \leq$$

$$\leq NK_1e^{\alpha_1 t_0}e^{-\alpha_1(t-s)}.$$

Hasonlóan ha $0 \leq s \leq t \leq t_0$ akkor

$$\begin{aligned}
\|\Phi(t)P\Phi^{-1}(s)\| &\leq N^2\|\Phi(t_0)P\Phi^{-1}(t_0)\| = \\
= N^2K_1 &\leq N^2K_1e^{\alpha_1(t_0-(t-s))} \leq \\
&\leq N^2K_1e^{\alpha_1 t_0}e^{-\alpha_1(t-s)}.
\end{aligned}$$

Így teljesül a

$$\|\Phi(t)P\Phi^{-1}(s)\| \leq \tilde{K}_1e^{-\alpha_1(t-s)} \qquad (0 \leq s \leq t)$$

egyenlőtlenség, ahol $\tilde{K}_1 := N^2K_1e^{\alpha_1 t_0}$. Hasonlóan belátható, hogy a 3.7. definícióban szereplő második egyenlőtlenség is teljesül $\tilde{K}_2 := N^2K_2e^{\alpha_2 t_0}$ konstanssal, azaz:

$$\|\Phi(t)(I-P)\Phi^{-1}(s)\| \leq \tilde{K}_2e^{-\alpha_2(s-t)} \qquad (0 \leq t \leq s).$$

■

A dolgozatban a Φ alapmátrixra feltesszük, hogy

$$\Phi(0) = I. \tag{3.37}$$

Ez a feltevés azért lehetséges, mert ha a 3.7. definíció egy P projekcióval teljesül, akkor nyilván teljesül bármely, a P mátrixszal hasonlóval is. Jelöljön Ψ egy olyan alapmátrixot, mellyel igaz a 3.7. definíció, de a (3.37) feltétel nem. Legyen

$$P' := \Psi^{-1}(0)P\Psi(0),$$

amire $P' \sim P$, továbbá P'-vel és a $\Phi := \Psi \cdot \Psi^{-1}(0)$ alapmátrixszal teljesül a 3.7. definíció, és látható, hogy Φ alapmátrixra teljesül a (3.37) feltétel.

A következő két lemmával (vö.: [7]) megmutatjuk, hogy ha a (3.16) rendszernek exponenciális dichotómiája van a $P(t)$ $(t \geq t_0)$ projekciókkal, akkor a

$$Q(t) := \Lambda(t, t_0)Q(t_0)\Lambda(t_0, t) \qquad (t \geq t_0) \tag{3.38}$$

projekciókkal is, ha $\operatorname{Im} P(t_0) = \operatorname{Im} Q(t_0)$.

3.1. Lemma. *Tegyük fel, hogy a* (3.16) *rendszernek exponenciális dichotómiája van a* $[t_0, +\infty)$ *intervallumon a* K, α, *konstansokkal és* $P(t)$ $(t \geq t_0)$ *projekciókkal. Legyen* $Q(t_0)$ *egy projekció, amire* $\operatorname{Im} P(t_0) = \operatorname{Im} Q(t_0)$, *és definiáljuk a*

$$Q(t) := \Lambda(t, t_0)Q(t_0)\Lambda(t_0, t) \qquad (t \geq t_0)$$

projekciókat. Ekkor létezik $\tilde{K} \in \mathbb{R}$, *hogy*

$$\|P(t) - Q(t)\| \leq \tilde{K}e^{(\alpha_1 - \alpha_2)(t - t_0)} \qquad (t \geq t_0).$$

Bizonyítás: Mivel feltettük, hogy $\operatorname{Im} P(t_0) = \operatorname{Im} Q(t_0)$, felírható a következő egyenlőtlenség:

$$P(t_0) - Q(t_0) = P(t_0)(P(t_0) - Q(t_0))(I - P(t_0)).$$

A (3.22) egyenlőtlenségeket használva kapjuk a következő becslést:

$$\begin{aligned}
\|P(t) - Q(t)\| &= \|\Lambda(t, t_0)(P(t_0) - Q(t_0))\Lambda(t_0, t)\| = \\
&= \|\Lambda(t, t_0)P(t_0)(P(t_0) - Q(t_0))(I - P(t_0))\Lambda(t_0, t)\| \leq \\
&\leq \|\Lambda(t, t_0)P(t_0)\| \cdot \|(P(t_0) - Q(t_0))\| \cdot \|(I - P(t_0))\Lambda(t_0, t)\| = \\
&= \|\Lambda(t, t_0)P(t_0)\| \cdot \|(P(t_0) - Q(t_0))\| \cdot \|\Lambda(t_0, t)(I - P(t))\| \leq \\
&\leq K^2\|(P(t_0) - Q(t_0))\|e^{(\alpha_1 - \alpha_2)(t - t_0)} \qquad (t \geq t_0).
\end{aligned}$$

Ebből következően a

$$\tilde{K} := K^2\|(P(t_0) - Q(t_0))\|$$

választással beláttuk a lemmát. ■

3.2. Lemma. *Tegyük fel, hogy a* (3.16) *rendszernek exponenciális dichotómiája van a* $[t_0, +\infty)$ *intervallumon a* K, α, *konstansokkal és* $P(t)$ $(t \geq t_0)$ *projekciókkal. Legyen* $Q(t_0)$ *egy projekció, amire* $\operatorname{Im} P(t_0) = \operatorname{Im} Q(t_0)$. *Ekkor a* (3.16) *rendszernek a*

$$Q(t) := \Lambda(t, t_0) Q(t_0) \Lambda(t_0, t) \qquad (t \geq t_0)$$

projekciókkal is exponenciális dichotómiája van.

Bizonyítás: A lemma bizonyításához belátjuk, hogy a $Q(t)$ projekciókra teljesülnek a 3.8. definícióban a $P(t)$ projekciókra szereplő állítások.

Először belátjuk, hogy tetszőleges $t, s \in [t_0, +\infty)$ esetén $\Lambda(t, s)Q(s) = Q(t)\Lambda(t, s)$.

$$\begin{aligned} \Lambda(t, s)Q(s) &= \Lambda(t, s)\Lambda(s, t_0)Q(t_0)\Lambda(t_0, s) = \\ &= \Lambda(t, t_0)Q(t_0)\Lambda(t_0, t)\Lambda(t_0, s) = \\ &= Q(t)\Lambda(t, s). \end{aligned}$$

A (3.30) egyenlőtlenségből és a 3.1. lemmából következik, hogy $\|Q(t)\|$ is korlátos. Továbbá $Q(t)$ konstrukciója miatt $\operatorname{Im} P(t) = \operatorname{Im} Q(t)$ is teljesül, mert ahogyan azt már említettük, a $P(t)$ projekciókat egyértelműen meghatározza a $P(t_0)$ projekció, és $P(t)$ felírható a

$$P(t) = \Lambda(t, t_0)P(t_0)\Lambda(t_0, t)$$

alakban minden $t \in [t_0, +\infty)$ esetén. Ezen kívül feltettük, hogy

$$\operatorname{Im} P(t_0) = \operatorname{Im} Q(t_0),$$

így tetszőleges $t \in [t_0, +\infty)$ esetén

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \Lambda(t, t_0)P(t_0)\Lambda(t_0, t) &= \operatorname{Im} \Lambda(t, t_0)Q(t_0)\Lambda(t_0, t) \\ &\Downarrow \\ \operatorname{Im} P(t) &= \operatorname{Im} Q(t). \end{aligned}$$

Továbbá igaz a

$$\begin{aligned} P(t)Q(t) &= \Lambda(t,t_0)P(t_0)\Lambda(t_0,t)\Lambda(t,t_0)Q(t_0)\Lambda(t_0,t) = \\ &= \Lambda(t,t_0)Q(t_0)Q(t_0)\Lambda(t_0,t) = \\ &= \Lambda(t,t_0)Q(t_0)\Lambda(t_0,t) = Q(t) \qquad (t \geq t_0), \end{aligned}$$

illetve az

$$\begin{aligned} (I-Q(t))(I-P(t)) &= I - Q(t) - P(t) + P(t)Q(t) = \\ I - Q(t) - P(t) + P(t) &= (I - Q(t)) \qquad (t \geq t_0) \end{aligned}$$

azonosság. Így tetszőleges $t \geq s \geq t_0$ esetén

$$\|\Lambda(t,s)Q(s)\| = \|\Lambda(t,s)P(s)Q(s)\| \leq \|\Lambda(t,s)P(s)\| \cdot \|Q(s)\|.$$

Így $\|\Lambda(t,s)P(s)\|$ normára alkalmazva a (3.22) egyenlőtlenségek közül az elsőt kapjuk, hogy létezik olyan $\tilde{K}$ konstans úgy, hogy

$$\|\Lambda(t,s)Q(s)\| \leq \tilde{K}e^{\alpha_1(t-s)} \quad (t \geq s \geq t_0),$$

azaz beláttuk a (3.22) egyenlőtlenségek közül az elsőt a $Q(t)$ projekciókra.

Hasonlóan $t, s \in [t_0, +\infty)$ esetén

$$\begin{aligned} \|\Lambda(s,t)(I-Q(t))\| &= \|\Lambda(s,t)(I-Q(t))(I-P(t))\| = \\ &= \|(I-Q(s))\Lambda(s,t)(I-P(t))\| \leq \\ &\leq \|(I-Q(s))\| \cdot \|\Lambda(s,t)(I-P(t))\|, \end{aligned}$$

így most $\|\Lambda(s,t)(I-P(t))\|$-re alkalmazva a (3.22) egyenlőtlenségek közül a másodikat kapjuk, hogy létezik $\tilde{K}$ konstans úgy, hogy

$$\|\Lambda(s,t)(I-Q(t))\| \leq \tilde{K}e^{\alpha_2(s-t)} \quad (t \geq s \geq t_0),$$

azaz beláttuk a (3.22) egyenlőtlenségek közül a másodikat is a $Q(t)$ projekciókra. ■

3.3. (μ_1, μ_2) dichotómia

Ebben az alfejezetben megnézünk egy, a 3.6., 3.7. és 3.8. definícióknál általánosabbat. (vö. [8]):

3.9. Definíció. ($(\boldsymbol{\mu_1}, \boldsymbol{\mu_2})$-dichotómia) *Legyen $J = (\omega_-, \omega_+)$, $(\omega_-, \omega_+ \in \mathbb{R})$ intervallum, és $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{C}(J, \mathbb{R})$. Azt mondjuk, hogy a (3.16) rendszernek (μ_1, μ_2)-dichotómiája van a J intervallumon, ha létezik olyan P projekció és $K_1, K_2 > 0$ számok úgy, hogy $t, s \in J$ esetén*

$$\begin{aligned} \|\Phi(t)P\Phi^{-1}(s)\| &\leq K_1 \exp\Big\{ \int_s^t \mu_1(\tau)\mathrm{d}\tau \Big\} \quad (t \geq s), \\ \|\Phi(t)(I-P)\Phi^{-1}(s)\| &\leq K_2 \exp\Big\{ \int_t^s \mu_2(\tau)\mathrm{d}\tau \Big\} \quad (s \geq t). \end{aligned} \tag{3.39}$$

3.9. Megjegyzés. *Ha μ_1, μ_2 konstans függvények, akkor azt mondjuk, hogy a (3.16) rendszernek exponenciális dichotómiája van, ha $\mu_1, \mu_2 < 0$, és közönséges dichotómiája, ha $\mu_1 = 0$ és $\mu_2 = 0$.*

Ennek az általánosabb fogalomnak a létezéséről szól a következő tétel.

3.10. Állítás. *Tegyük fel, hogy létezik $\rho \in \mathfrak{C}(J, \mathbb{R})$ függvény és $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ $(0 \leq l_1, l_2 < 1)$ konstansok úgy, hogy valamely m-re $(0 \leq m \leq n)$ fennállnak a következő egyenlőtlenségek:*

$$\max\Big\{ l_1 \Re(a_{jj}) + l_1 \sum_{i=1, i\neq j}^{m} |a_{ij}| + \sum_{i=m+1}^{n} |a_{ij}| : j = 1, \dots, m \Big\} \leq l_1 \rho,$$

$$\min\Big\{ l_2 \Re(a_{jj}) - \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| - l_2 \sum_{i=m+1, i\neq j}^{n} |a_{ij}| : j = m+1, \dots, n \Big\} \geq l_2 \rho.$$

Ekkor a (3.16) rendszernek (μ_1, μ_2) dichotómiája van, ahol

$$\mu_1 = \max\Big\{ l_1 \Re(a_{jj}) + \sum_{i=1, i\neq j}^{m} |a_{ij}| + l_2 \sum_{i=m+1}^{n} |a_{ij}| : j = 1, \dots, m \Big\},$$

$$\mu_2 = \min\Big\{ l_2 \Re(a_{jj}) - l_1 \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| - \sum_{i=m+1, i\neq j}^{n} |a_{ij}| : j = m+1, \dots, n \Big\}.$$

3.5. Példa. *Tekintsük a (3.16) lineáris rendszert, a következő együtthatóval:*

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1/2 \\ t/2 & t & t^2 \\ t/2 & -t^2 & t \end{bmatrix} \qquad (t > 0).$$

Legyen $m := 1$*,* $J = (0, \infty)$*. Keressünk* $\rho \in \mathfrak{C}(J, \mathbb{R})$ *függvényt, és* $l_1, l_2 \in [0, 1)$ *konstansokat, hogy az állításban szereplő egyenlőtlenségek teljesüljenek.*

$$\max\Big\{l_1 \Re(a_{jj}) + l_1 \sum_{i=1, i\neq j}^{m} |a_{ij}| + \sum_{i=m+1}^{n} |a_{ij}| : j = 1, \dots, m\Big\} =$$

$$\max\big\{l_1 \cdot (-1) + \frac{t}{2} + \frac{t}{2}\big\} = \max\big\{t - l_1\big\} = t - l_1 \leq l_1 \rho,$$

$$\min\Big\{l_2 \Re(a_{jj}) - \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| - l_2 \sum_{i=m+1, i\neq j}^{n} |a_{ij}| : j = m+1, \dots, n\Big\} =$$

$$\min\big\{l_2 t - 0 - l_2(t + t^2), l_2 t - \frac{t}{2} - l_2(t^2 + t)\big\} =$$

$$\min\big\{l_2 t^2, l_2 t^2 - \frac{t}{2}\big\} = l_2 t^2 - \frac{t}{2} \geq l_2 \rho.$$

Ezek alapján ρ*-ra teljesülnie kell:*

$$\frac{t}{l_1} - 1 \leq \rho(t) \leq t^2 - \frac{t}{2l_2} \quad (t > 0), \tag{3.40}$$

azaz teljesülnie kell a

$$\frac{t}{l_1} - 1 \leq t^2 - \frac{t}{2l_2} \quad (t > 0), \tag{3.41}$$

egyenlőtlenségnek, ami igaz, ha

$$t^2 - t \cdot (\frac{1}{2l_2} + \frac{1}{l_1}) + 1 \geq 0 \quad (t > 0).$$

Ehhez elég, ha a másodfokú kifejezés diszkriminánsa negatív, amiből l_1*-re és* l_2*-re a következő feltételeket kapjuk még:*

$$l_1 > \frac{2}{3}, \quad l_2 > \frac{1}{2}.$$

Így $l_1 \in (\frac{2}{3}, 1)$, $l_2 \in (\frac{1}{2}, 1)$ *és ezekből az intervallumokból tetszőleges értéket választva* l_1*-nek és* l_2*-nek a* (3.41) *igaz lesz, válasszuk a következő értékeket:* $l_1 := \frac{3}{4}$, $l_2 := \frac{3}{4}$. *A rögzített konstansokat visszahelyettesítve látható, hogy a* (3.41) *teljesül:*

$$\frac{4t}{3} - 1 \le t^2 - \frac{2t}{3}.$$

Mivel a (3.40)*-ben egyenlőség is megengedett, a* ρ *függvényt választhatjuk a következőképpen:*

$$\rho(t) = \frac{4t}{3} - 1 \quad (t > 0).$$

Határozzuk most meg μ_1 *és* μ_2 *függvényeket:*

$$\begin{aligned}
\mu_1(t) = \quad & \max\left\{ l_1 \Re(a_{jj}) + \sum_{i=1, i\neq j}^{m} |a_{ij}| + l_2 \sum_{i=m+1}^{n} |a_{ij}| : j = 1, \ldots, m \right\} = \\
& \max\left\{ \frac{3}{4} \cdot (-1) + (\frac{t}{2} + \frac{t}{2}) + \frac{3}{4}(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}) = \frac{7t}{4} - \frac{3}{4}, \right. \\
\mu_2(t) = \quad & \min\left\{ l_2 \Re(a_{jj}) - l_1 \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| - \sum_{i=m+1, i\neq j}^{n} |a_{ij}| : j = m+1, \ldots, n \right\} = \\
& \min\left\{ t - \frac{3}{4} \cdot 0 + t^2, t - \frac{1}{2} - t^2 \right\} = t - \frac{1}{2} - t^2.
\end{aligned}$$

Tehát a (3.16) *lineáris rendszernek, ha az adott* A *együtthatóval definiált,* (μ_1, μ_2)*-dichotómiája van a* $(0, +\infty)$*-n.*

4. Exponenciális dichotómia létezése

Legyen $f \in \mathfrak{C}(J, \mathbb{R}^n)$. A következőkben tekintsük a (3.16) homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszert és a hozzá tartozó

$$\dot{x} = Ax + f \tag{4.42}$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszert. Ebben a fejezetben az exponenciális dichotómia létezését vizsgáljuk különböző együtthatómátrixú lineáris differenciálegyenlet-rendszerek esetében. A követendő sorrendet [9] szolgáltatja:

1. $A(\cdot) \equiv A$ konstans mátrix,
2. A periodikus mátrix értékű függvény,
3. az együtthatómátrix $A + B$ alakú, ahol a B mátrix értékű függvény bizonyos értelemben kis perturbáció.

4.1. Állandó együtthatós eset

Tegyük fel, hogy a (3.16) rendszerben $A(t) \equiv A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $(t \in \mathbb{R})$ alakú, azaz tekintsük az

$$\dot{x} = Ax \tag{4.43}$$

állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszert.

Ha az A együtthatómátrix $\sigma(A)$ spektruma felbontható két nem üres σ_1, σ_2 halmaz uniójára úgy, hogy léteznek α_1, α_2 konstansok úgy, hogy tetszőleges $\lambda_1 \in \sigma_1$ és $\lambda_2 \in \sigma_2$ sajátérték esetén

$$\Re\lambda_1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \Re\lambda_2, \tag{4.44}$$

akkor a (4.43) rendszernek exponenciális dichotómiája van a $[0, +\infty)$ intervallumon. Fordítva, ha a (4.43) rendszernek exponenciális dichotómiája van $[0, +\infty)$ intervallumon α_1, α_2 konstansokkal, akkor az A együtthatómátrix spektrumának létezik egy

$$\sigma(A) = \sigma_1 \cup \sigma_2$$

felbontás úgy, hogy a (4.44) teljesül. Továbbá ha a 3.7. definíciót tekintjük, azaz feltesszük, hogy $0 < \alpha_1, \alpha_2$, akkor σ_1 az A stabil spektruma, σ_2 az A instabil spektruma. Megjegyezzük még, hogy ebben az esetben a 3.8. definícióban megadott $P(t)$ projekciók is választhatóak $P(t) \equiv P$ módon, ahol P az A spektrumának adott felbontásához tartozó spektrál projekció.

Az előjel feltétellel megfogalmazott eredmény a szakirodalomban több helyen is megtalálható (pl.: [4], [9]) a következő alakban:

4.11. Állítás. *A (4.43) rendszernek pontosan akkor van exponenciális dichotómiája a $[0, +\infty)$ intervallumon, ha az A együtthatómátrix minden sajátértékének valós része nem nulla, azaz ha az A hiperbolikus, és pontosan akkor van közönséges dichotómiája a rendszernek, ha minden nulla valós részű sajátértéke az A minimálpolinomjának egyszeres gyöke. Mindkét esetben a P projekció a következőképpen áll elő:*

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} (zI - A)^{-1} \mathrm{d}z,$$

ahol γ olyan egyszerű, zárt, rektifikálható görbe a bal félsíkban, melyre

$$\Re(\lambda) \in int(\gamma), \quad \forall \lambda \in \sigma(A).$$

4.6. Példa. *Tekintsük az*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x(t) \qquad (t \in [0, +\infty)) \tag{4.45}$$

állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszert.

Az alapmátrix meghatározása:

Az A együtthatómátrix sajátértékei és a hozzájuk tartozó sajátvektorok:

$$\lambda_1 = 1, v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda_2 = 2, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda_3 = -3, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

az A együtthatómátrix Jordan-normálalakja:

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} =: B,$$

ahol

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Így az alapmátrix:

$$\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{SBS^{-1}t} = S\mathrm{e}^{Bt}S^{-1} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & e^{2t} - e^{-3t} \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} = \Phi(t) \qquad (t \in [0, +\infty)),$$

az alapmátrix inverze:

$$\Phi^{-1}(s) = \begin{bmatrix} e^{-s} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2s} & e^{-2s} - e^{3s} \\ 0 & 0 & e^{3s} \end{bmatrix} \qquad (s \in [0, +\infty)).$$

A P projekció meghatározásához először számítsuk ki az integrálandó mátrixot:

$$(zI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} z-1 & 0 & 0 \\ 0 & z-2 & -5 \\ 0 & 0 & z+3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-2} & \frac{5}{(z-2)(z+3)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{z+3} \end{bmatrix}.$$

A γ görbe pedig legyen -3 körüli 1 sugarú körvonal, azaz $\gamma : |z+3| = 1$. a_{11}, a_{22} integrálja 0 lesz, mert $1, 2 \notin int(\gamma)$, így $\frac{1}{z-1}$ és $\frac{1}{z-2}$ is reguláris $int(\gamma) - n$, így a Cauchy-alaptétel miatt az integráljuk 0. a_{23} és a_{33} integrálja:

$$\int\limits_{|z+3|=1} \frac{1}{z+3}\mathrm{d}z = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it} - 3 + 3} ie^{it}\mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi} i\mathrm{d}t = 2\pi i,$$

az első egyenlőségnél a $\delta(t) = e^{it} - 3$ $(t \in [0, 2\pi])$ helyettesítést használtuk fel,

$$\int\limits_{|z+3|=1} \frac{5}{(z-2)(z+3)}\mathrm{d}z = 2\pi i \frac{5}{z-2}\Big|_{z=-3} = -2\pi i,$$

az

$$\int\limits_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0)$$

képletet használva. Az integrálandó mátrix még nem tárgyalt elemei pedig 0*-k, így azok integrálja is* 0 *lesz. Tehát a projekció:*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nézzük meg ezzel a 3.7. definícióban szereplő egyenlőtlenségeket:

$$\Phi(t)P\Phi^{-1}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-3(t-s)} \\ 0 & 0 & e^{-3(t-s)} \end{bmatrix} \qquad (t, s \in [0, +\infty)),$$

így például $||\cdot||_1$ *normával számolva* $s, t \in [0, +\infty)$ *esetén:*

$$\|\Phi(t)P\Phi^{-1}(s)\|_1 = e^{-3(t-s)} \qquad (s \leq t).$$

$$\Phi(t)(I-P)\Phi^{-1}(s) = \begin{bmatrix} e^{-(s-t)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2(s-t)} & -e^{-2(t-s)} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (t, s \in [0, +\infty)),$$

Szintén az $||\cdot||_1$ *normával:*

$$\|\Phi(t)(I-P)\Phi^{-1}(s)\|_1 = e^{-(s-t)} \qquad (s \geq t).$$

Azaz a (4.46) *rendszernek exponenciális dichotómiája van a* $[0, +\infty)$ *intervallumon a* $K_1, K_2 = 1, \alpha_1 = 3, \alpha_2 = 1$ *konstansokkal.*

4.7. Példa. *Tekintsük az*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) \qquad (t \in [0, +\infty)) \tag{4.46}$$

állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszert. Most az együttható mátrix nem hiperbolikus, de minden 0 valós részű sajátértéke egyszeres, ugyanis az A együtthatómátrix karakterisztikus polinomja:

$$\det\left[\begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right] = \det\begin{bmatrix} z & -1 & -1 \\ 1 & z & 1 \\ 0 & 0 & z+1 \end{bmatrix} =$$

$$= z^2(z+1) + (z+1) = (z+1)(z^2+1) \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

a karakterisztikus polinom gyökei: $\lambda_{1,2} = \pm i, \lambda_3 = -1$, mivel ezek mindegyike egyszeres gyök, a minimálpolinom megegyezik a karakterisztikus polinommal, így a minimálpolinom minden 0 valós részű gyöke egyszeres gyök. Így a 4.11. állítás második részének feltételei teljesülnek, azaz a rendszernek közönséges dichotómiája van a $[0, +\infty)$ intervallumon.

Nézzük meg, hogy milyen konstansokkal teljesül a definíció. Ehhez meg kell határozni a rendszer alapmátrixát, annak inverzét és az állítás alapján a P projekciót.

Az alapmátrix meghatározása:

Az imént láttuk az együtthatómátrix sajátértékeit, az ezekhez tartozó sajátvektorok pedig a következők:

$$\lambda_{1,2} = \pm i,\ v_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \pm i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \lambda_3 = -1,\ v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

az A együtthatómátrix Jordan-normálalakja:

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} =: B,$$

ahol

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

így az alapmátrix pedig a következő:

$$\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{SBS^{-1}t} = S\mathrm{e}^{Bt}S^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) & \cos(t) - e^{-t} \\ -\sin(t) & \cos(t) & -\sin(t) \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} = \Phi(t) \qquad (t \in [0, +\infty)),$$

az alapmátrix inverze:

$$\Phi^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \cos(s) & -\sin(s) & \cos(s) - e^{s} \\ \sin(s) & -\cos(s) & \sin(s) \\ 0 & 0 & e^{s} \end{bmatrix} \qquad (s \in [0, +\infty)).$$

A P projekció meghatározásához először számítsuk ki az integrálandó mátrixot:

$$(zI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} z & -1 & -1 \\ 1 & z & 1 \\ 0 & 0 & z+1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{z}{z^2+1} & \frac{1}{z^2+1} & \frac{z-1}{(z+1)(z^2+1)} \\ -\frac{1}{z^2+1} & \frac{z}{z^2+1} & -\frac{1}{z^2+1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{z+1} \end{bmatrix} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

A γ görbe legyen a -1 körüli $\frac{1}{2}$ sugarú körvonal, azaz γ: $|z+1| = \frac{1}{2}$. Az a_{13} és az a_{33} elemeken kívül a többi elem integrálja 0 lesz, vagy azért mert már maga az elem nulla, vagy pedig azért, mert létezik primitív függvénye $\mathrm{int}(\gamma)$-n. A maradék két elem integrálja pedig:

$$\int\limits_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{z-1}{(z+1)(z^2+1)}\mathrm{d}z = 2\pi i \frac{z-1}{z^2+1}\Big|_{z=-1} = -2\pi i,$$

az

$$\int\limits_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0)$$

képletet használva, és

$$\int\limits_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z+1}\mathrm{d}z = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1}{e^{it}-1+1} i e^{it}\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{2\pi} i\mathrm{d}t = 2\pi i,$$

a $\delta(t) = \frac{1}{2}e^{it} + 1$ helyettesítéssel. Így

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a keresett projekció. Tetszőleges $t, s \in [0, +\infty)$ esetén

$$\Phi(t)P\Phi^{-1}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -e^{-(t-s)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-(t-s)} \end{bmatrix},$$

így például $\|\cdot\|_1$ normával számolva:

$$\|\Phi(t)P\Phi^{-1}(s)\|_1 = e^{-1(t-s)} \qquad (t \geq s).$$

Illetve tetszőleges $t, s \in [0, +\infty)$ esetén

$$\Phi(t)(I-P)\Phi^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \cos(s-t) & -\sin(s-t) & \cos(s-t) \\ \sin(s-t) & \cos(s-t) & \sin(s-t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

így szintén az $\|\cdot\|_1$ normával:

$$\|\Phi(t)(I-P)\Phi^{-1}(s)\|_1 \leq |\cos(s-t)| + |\sin(s-t)| \leq 2 \qquad (t \leq s).$$

Azaz a (4.46) rendszernek közönséges dichotómiája van a $[0, +\infty)$ intervallumon a $K_1 = 1, K_2 = 2, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$ konstansokkal.

4.8. Példa. *A következő rendszerre nem teljesül az állításnak egyik feltétele sem. Tekintsük a (4.43) rendszert a következő együttható mátrixszal definiálva:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mivel A felső háromszögmátrix, sajátértékei a főátlóban lévő elemek, azaz $\sigma(A) = \{0\}$, tehát rögtön látszik, hogy az A együtthatómátrix nem hiperbolikus. Továbbá karakterisztikus polinomja

$$\chi_A(z) = z^2 \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

így az együtthatómátrix μ_A minimálpolinomja a következő két polinom közül valamelyik: $\mu_1(z) = z$, $\mu_2(z) = z^2$. Mivel a minimálpolinom a legkisebb fokszámú polinom, amely a mátrixot annullálja, így ha $\mu_1(A) = \Theta$, akkor $\mu_A = \mu_1$, ha nem, akkor $\mu_A = \mu_2$.

$$\mu_1(A) = A \neq \Theta,$$

így az együtthatómátrix minimálpolinomja

$$\mu_A(z) = z^2 \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Tehát a 0 *a minimálpolinomnak kétszeres (nem egyszeres) gyöke, így a 4.43 tétel értelmében a megadott mátrixszal definiált állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszernek nincs sem exponenciális, sem közönséges dichotómiája a* $[0, +\infty)$ *intervallumon.*

4.2. Periodikus együtthatómátrixszal definiált rendszer

Tekintsük a következő differenciálegyenlet-rendszert:

$$\dot{x} = Ax, \tag{4.47}$$

ahol

$$A \in \mathfrak{C}([0, +\infty), \mathbb{R}^n), \quad \exists T \in \mathbb{R} \ : \ A(t+T) = A(t) \quad (t \in [0, +\infty)),$$

azaz tegyük fel, hogy a (3.16) rendszer együtthatómátrixa folytonos és T-periodikus.

A periodikus együttható mátrixszal definiált rendszer exponenciális dichotómiája létezésének vizsgálatát az állandó együtthatós rendszerére vezetjük majd vissza a 2.5. tétel segítségével. A következő állítás szintén megtalálható több cikkben is, pl.: [4],[9].

4.12. Állítás. *A* (4.47) *rendszernek pontosan akkor van exponenciális dichotómiája a* $[0, +\infty)$ *intervallumon, ha nem létezik* 1 *abszolút értékű karakterisztikus multiplikátora.*

Bizonyítás: A 2.5. tétel alapján a (4.47) rendszer az

$$\dot{y} = By \tag{4.48}$$

rendszerbe vihető át alkalmas koordináta-transzformációval, ahol $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, amelyre $e^{BT} = C$, ahol C jelöli a (4.47) rendszer monodrómia-mátrixát. A 4.11. állításból tudjuk, hogy a (4.48) rendszernek pontosan akkor van exponenciális dichotómiája, ha $0 \notin \sigma(B)$, azaz a 0 nem karakterisztikus kitevő, ami pedig pontosan azt jelenti, hogy nincs 1 abszolút értékű karakterisztikus multiplikátor. ■

A 4.12. állítás segítségével már periodikus együttható mátrixú nem-autonóm rendszereknél is tudjuk vizsgálni az exponenciális dichotómia létezését. Nézzünk meg egy ilyet részletesen a következő példában.

4.9. Példa. *Tekintsük a* (4.47) *rendszert az*

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\cos(t)}{2+\sin(t)} & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (t \in [0, +\infty))$$

periodikus együttható mátrixszal. A differenciálegyenlet-rendszer alapmátrixa

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^t(2 + \sin(t)) & 0 \\ e^t(1 + \frac{2}{5}\sin(t) - \frac{1}{5}\cos(t)) & e^{-t} \end{bmatrix} \qquad (t \in [0, +\infty)).$$

A karakterisztikus kitevők a $B = \Phi^{-1}(0)\Phi(2\pi)$ *mátrix sajátértékei, ezek meghatározásához így először a mátrixot kell megadnunk.*

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \frac{4}{5} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2e^{2\pi} & 0 \\ \frac{4}{2}e^{2\pi} & e^{-2\pi} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{2\pi} & 0 \\ \frac{4}{5}e^{2\pi} & e^{-2\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2\pi} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

tehát a karakterisztikus tényezők $\rho_1 = e^{2\pi}$, $\rho_2 = e^{-2\pi}$. *Ezek egyike sincs az egységkörvonalon, tehát a rendszer exponenciálisan dichotóm a*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

projekcióval. Tetszőleges $s, t \in [0, +\infty)$ *esetén:*

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(s) &= \frac{1}{2+\sin(s)} \begin{bmatrix} e^{-s} & 0 \\ e^s(\frac{1}{5}\cos(s) - \frac{2}{5}\sin(s) - 1) & e^s(2 + \sin(s)) \end{bmatrix}, \\ \Phi(t)P\Phi^{-1}(s) &= \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2+\sin(s)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e^{-(t-s)}(\frac{1}{5}\cos(s) - \frac{2}{5}\sin(s) - 1) & e^{-(t-s)}(2 + \sin(s)) \end{bmatrix},$$

$$\Phi(t)(I-P)\Phi^{-1}(s) \;=\; \tfrac{1}{2+\sin(s)}\begin{bmatrix} e^{-(t-s)}(2+\sin(s)) & 0 \\ e^{-(t-s)}(1+\frac{2}{5}\sin(s)-\frac{1}{5}\cos(s)) & 0 \end{bmatrix}.$$

Így a 3.7. definícióban szereplő normákra teljesülnek a következő egyenlőségek:

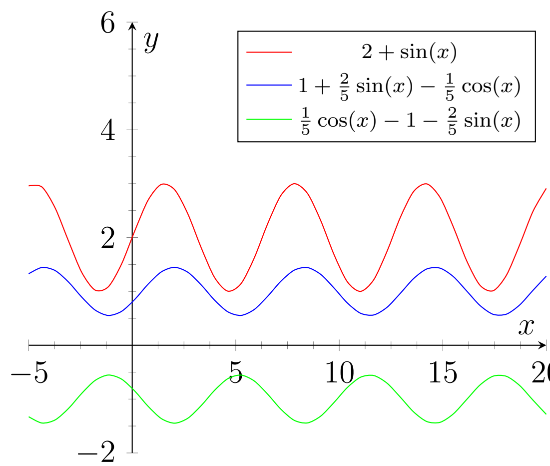
$$\|\Phi(t)P\Phi^{-1}(s)\|_1 \;=\; e^{-(t-s)} \qquad (s \le t),$$

$$\|\Phi(t)(I-P)\Phi^{-1}(s)\|_\infty \;=\; e^{-(s-t)} \qquad (t \le s),$$

mivel

$$\left|\frac{1}{5}\cos(x)-\frac{2}{5}\sin(x)-1\right| = \left|1+\frac{2}{5}\sin(x)-\frac{1}{5}\cos(x)\right| < 2+\sin(x), \tag{4.49}$$

ahogyan az 1. ábrán látható.



1. ábra. A 4.49 egyenlőtlenség bizonyítása.

4.3. Perturbált rendszer

Tekintsük a (3.16) rendszer perturbációját, azaz az

$$\dot{x} = (A+B)x \tag{4.50}$$

differenciálegyenlet-rendszert, ahol $B \in \mathfrak{C}(J, \mathbb{R}^{n\times n})$.

Az exponenciális dichotómia egyik legfontosabb tulajdonsága, hogy perturbáció esetén öröklődik, azaz bizonyos feltételek mellett ha a (3.16) rendszer exponenciálisan dichotóm volt, akkor a (4.50) is az lesz. Ezek a bizonyos feltételek általában a perturbáló mátrix függvényre vonatkozó korlátossági feltételek.

Érezhető, hogy ez valóban fontos tulajdonság, mind az elmélet, mind az alkalmazások szempontjából. A téma fontosságát annak népszerűsége is mutathatja, sok cikk és könyvfejezet foglalkozik a perturbált rendszer exponenciális dichotómiájának vizsgálatával. Ezek között vannak összefoglaló jellegű munkák, melyek valamilyen csoportosítás alapján közölnek eredményeket, például [13]-ban először az az eset tárgyalt, amikor A korlátos, majd utána az, amikor nemkorlátos, [10]-ben pedig először a $[0, +\infty)$ intervallumon értelmezett rendszert vizsgálják, majd az egész $\mathbb{R}$-en. [14] és [15] végtelen dimenziós Banach-téren értelmezett rendszerek esetében vizsgálja a tulajdonságot, [13] pedig tetszőleges Banach-térben ad szükséges és elégséges feltételt. További eredmények találhatóak még: [3], [4], [5], [16], [17]. A dolgozat ezen fejezete nagyrészt [10] felépítését követi, valós intervallumon értelmezett együtthatóval definiált lineáris rendszer exponenciális dichotómiájának létezését nézzük meg a $[0, +\infty)$ intervallumon.

Definiáljuk a következő függvényteret, melyet ezen alfejezet további részében használni fogunk:

$$\mathbf{M}_{J,T} := \{f : J \to \mathbb{R}^n \mid \|f\|_{\mathbf{M}_{J,T}} := \frac{1}{T} \sup_{s \in J} \int_t^{t+T} \|f(s)\| \mathrm{d}s < +\infty, f \in L^1_{loc}\}, \tag{4.51}$$

ahol $T > 0$ rögzített konstans.

4.10. Megjegyzés. *Más szerzőknél (például [3], [4]) a* (4.51) *függvénytér* $T = 1$ *konstanssal definiált.*

A következő állítást (vö.: [4], [18]) a perturbált rendszerre vonatkozó tétel bizonyításában fogjuk majd felhasználni, de magában is hasznos, hiszen a (3.16) rendszerhez tartozó inhomogén rendszer esetében ad szükséges és elégséges feltételt az exponenciális dichotómia létezésére.

4.13. Állítás. *Az*

$$\dot{x} = Ax + f \tag{4.52}$$

inhomogén rendszernek akkor és csak akkor létezik korlátos megoldása minden $f \in M_{J,T}$ *esetén, ha a* (3.16) *homogén rendszer exponenciálisan dichotóm.*

A következő állítás (vö.: [20]) azt mutatja meg, hogy ha a (3.16) rendszer exponenciálisan dichotóm és $f \in \mathfrak{C}(J, \mathbb{R}^n)$, akkor hogyan lehet megadni a (4.52) rendszer egy korlátos megoldását.

4.14. Állítás. *Legyen* $f \in \mathfrak{C}(J, \mathbb{R}^n)$. *Ha a* (3.16) *rendszer exponenciálisan dichotóm, akkor a*

$$\mu(t) = \int_J \Gamma(t,u) f(u) \mathrm{d}u \qquad (t \in J) \tag{4.53}$$

korlátos megoldása a (4.52) *rendszernek, ahol* $s, t \in J$ *esetén*

$$\Gamma(t,s) = \begin{cases} \Phi(t) P \Phi^{-1}(s) & (t > s) \\ -\Phi(t)(I-P)\Phi^{-1}(s) & (t < s). \end{cases} \tag{4.54}$$

Bizonyítás: Γ definíciójából következik, hogy tetszőleges $s, t \in J$ esetén:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Gamma(t,s) = \begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t) P \Phi^{-1}(s) & (t > s) \\ -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t)(I-P)\Phi^{-1}(s) & (t < s) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} A(t)\Phi(t) P \Phi^{-1}(s) & (t > s) \\ -A(t)\Phi(t)(I-P)\Phi^{-1}(s) & (t < s) \end{cases} =$$

$$= A(t)\Gamma(t,s),$$

és

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Gamma(t,s) = \begin{cases} \Phi(t) P \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\Phi^{-1}(s)) & (t > s) \\ -\Phi(t)(I-P)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\Phi^{-1}(s)) & (t < s) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -A(t)\Phi(t) P \Phi^{-1}(s) A(s) & (t > s) \\ A(t)\Phi(t)(I-P)\Phi^{-1}(s) A(s) & (t < s) \end{cases} =$$

$$= -\Gamma(t,s)A(s),$$

továbbá:

$$\Gamma(t, t+0) - \Gamma(t, t-0) = -\Phi(t)(I-P)\Phi^{-1}(t) - \Phi(t)P\Phi^{-1}(t) = -I.$$

Megmutatjuk, hogy a (4.53)-ben definiált függvény megoldása a (4.42) rendszernek. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és tegyük fel, hogy $J = [a, b]$.

$$\begin{aligned}
\mu'(t) = \;& -\Gamma(t, t+0)f(t) + \Gamma(t, t-0)f(t) \\
+ \;& \int_a^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Gamma(t,s)f(s)\mathrm{d}s + \int_t^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Gamma(t,s)f(s)\mathrm{d}s = \\
= \;& f(t) + \int_J A(t)\Gamma(t,s)f(s)\mathrm{d}s = A(t)\mu(t) + f(t) \quad (t \in J),
\end{aligned}$$

így ha J véges, akkor a (4.53)-ben definiált függvény valóban megoldás. Legyen most $J = (-\infty, +\infty)$. Megmutatjuk a (3.20) egyenlőtlenségek felhasználásával, hogy

$$\int_J \|\Gamma(t,s)\|\mathrm{d}s \leq \frac{K_1}{\alpha} + \frac{K_2}{\alpha_2},$$

így a (4.53) $J = (-\infty, +\infty)$ esetén is értelmes.

$$\begin{aligned}
& \int_J \|\Gamma(t,s)\|\mathrm{d}s = \\
= \;& \int_{-\infty}^t \|\Phi(t)P\Phi^{-1}(s)\|\mathrm{d}s + \int_t^{+\infty} \|\Phi(t)(I-P)\Phi^{-1}(s)\|\mathrm{d}s \leq \\
\leq \;& \int_{-\infty}^t K_1 e^{-\alpha_1(t-s)}\mathrm{d}s + \int_t^{+\infty} K_2 e^{-\alpha_2(s-t)}\mathrm{d}s = \\
= \;& K_1 e^{-\alpha_1 t} \lim_{c\to-\infty} \int_c^t e^{\alpha_1 s}\mathrm{d}s + K_2 e^{\alpha_2 t} \lim_{c\to+\infty} \int_t^c e^{-\alpha_2 s}\mathrm{d}s = \\
= \;& K_1 e^{-\alpha_1 t} \lim_{c\to-\infty} \left[\frac{e^{\alpha_1 s}}{\alpha_1}\right]_c^t + K_2 e^{\alpha_2 t} \lim_{c\to+\infty} \left[\frac{e^{-\alpha_2 s}}{\alpha_2}\right]_t^c = \\
= \;& \frac{K_1}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 t}(e^{\alpha_1 t} - \lim_{c\to-\infty} e^{\alpha_1 c}) - \frac{K_2}{\alpha_2} e^{\alpha_2 t}(\lim_{c\to+\infty} e^{-\alpha_2 c} - e^{-\alpha_2 t}) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{K_1}{\alpha_1} + \frac{K_2}{\alpha_2}.$$

Mivel $\|\Gamma(t,s)\| \geq 0$, így ha a J egyik végpontja véges, az iménti becslés akkor is érvényben marad, ugyanis legyen $t_0 \geq 0$ tetszőleges, ekkor

$$\int_{t_0}^{+\infty} \|\Gamma(t,s)\| \mathrm{d}s \quad \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|\Gamma(t,s)\| \mathrm{d}s \quad \leq \frac{K_1}{\alpha_1} + \frac{K_2}{\alpha_2},$$

$$\int_{-\infty}^{-t_0} \|\Gamma(t,s)\| \mathrm{d}s \quad \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|\Gamma(t,s)\| \mathrm{d}s \quad \leq \frac{K_1}{\alpha_1} + \frac{K_2}{\alpha_2}.$$

Így a

$$\int_J \|\Gamma(t,s) f(s)\| \mathrm{d}s \leq \int_J \|\Gamma(t,s)\| \|f(s)\|_\infty \mathrm{d}s$$

egyenlőtlenségből adódik, hogy a (4.53)-ben megadott megoldás tetszőleges J intervallum esetén érvényes. Továbbá a

$$\|\mu\|_\infty \leq \left\{ \frac{K_1}{\alpha_1} + \frac{K_2}{\alpha_2} \right\} \|f\|_\infty$$

egyenlőtlenségből adódik, hogy a (4.53)-ben megadott megoldás korlátos, ahol

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in J} \|f(t)\|$$

jelöli az $f \in \mathfrak{C}(J', \mathbb{R}^n)$ függvény maximum normáját a J intervallumon. ■

4.3. Lemma. *Legyen γ egy nemnegatív, lokálisan integrálható függvény, és tegyük fel, hogy $\exists C_0 \in \mathbb{R}$, hogy $T > 0$ esetén*

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \gamma(s) \mathrm{d}s \leq C_0 \qquad (t \geq 0).$$

Ekkor ha $\alpha > 0$, akkor minden $t \geq 0$ esetén fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \gamma(s) \mathrm{d}s \leq \frac{C_0 T}{1 - e^{-\alpha T}}, \tag{4.55}$$

$$\int_t^{+\infty} e^{\alpha(t-s)} \gamma(s) \mathrm{d}s \leq \frac{C_0 T}{1 - e^{-\alpha T}}. \tag{4.56}$$

A bizonyítás megtalálható [4]-ben illetve [3]-ban $T = 1$ esetén, azok alapján nézzük meg tetszőleges $T > 0$ esetén az állítás bizonyítását.

Bizonyítás: A feltételből következik, hogy

$$\int_{t+kT}^{t+(k+1)T} e^{\alpha(t-s)}\gamma(s)\mathrm{d}s \leq \tag{4.57}$$

$$\leq e^{\alpha t} \int_{t+kT}^{t+(k+1)T} \underbrace{e^{-\alpha s}}_{\leq e^{-\alpha(t+kT)}} \gamma(s)\mathrm{d}s \leq$$

$$\leq e^{\alpha t} e^{-\alpha(t+kT)} \underbrace{\int_{t+kT}^{t+(k+1)T} \gamma(s)\mathrm{d}s}_{\leq TC_0} \leq e^{-\alpha kT} TC_0.$$

A (4.56) egyenlőtlenséget összegre bontva, majd az összeg minden tényezőjét a (4.57) egyenlőtlenséggel becsülve:

$$\int_{t}^{+\infty} e^{\alpha(t-s)}\gamma(s)\mathrm{d}s \quad = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{t+kT}^{t+(k+1)T} e^{\alpha s}\gamma(s)\mathrm{d}s \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\alpha kT} TC_0 \quad = TC_0 \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\alpha kT} = \frac{C_0 T}{1 - e^{-\alpha T}}.$$

Ezzel a (4.56) egyenlőtlenséget beláttuk. A (4.55) egyenlőtlenség bizonyítása hasonlóan történik. Szintén a feltétel felhasználásával kapjuk, hogy:

$$\int_{t-(k+1)T}^{t-kT} e^{-\alpha(t-s)}\gamma(s)\mathrm{d}s \leq$$

$$\leq \quad e^{-\alpha t} \int_{t-(k+1)T}^{t-kT} \underbrace{e^{\alpha s}}_{\leq e^{\alpha(t-kT)}} \gamma(s)\mathrm{d}s \leq$$

$$\leq \; e^{-\alpha t} \underbrace{e^{\alpha(t-kT)} \int\limits_{t-(k+1)T}^{t-kT} \gamma(s)\mathrm{d}s}_{\leq TC_0} \leq e^{-\alpha kT} TC_0.$$

Majd a (4.55) egyenlőtlenséget összegre bontva és az összeg tagjait külön-külön becsülve a (4.3) segítségével kapjuk, hogy

$$\int\limits_0^t e^{-\alpha(t-s)}\gamma(s)\mathrm{d}s \leq$$

$$\leq \; \int\limits_{-\infty}^t e^{-\alpha(t-s)}\gamma(s)\mathrm{d}s = \sum_{k=0}^{+\infty} \int\limits_{t-(k+1)T}^{t-kT} e^{\alpha s}\gamma(s)\mathrm{d}s \leq$$

$$\leq \; \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\alpha kT} TC_0 = TC_0 \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\alpha kT} = \frac{C_0 T}{1 - e^{-\alpha T}}.$$

Ezzel a (4.55) egyenlőtlenséget is beláttuk. ■

Most pedig nézzük meg az alfejezet fő tételét, mely megtalálható [10].

4.8. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* (3.16) *rendszernek exponenciális dichotómiája van a* $J = [t_0, +\infty)$ *intervallumon* ($t_0 \geq 0$) *a* $K_1,\ K_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2 > 0$ *konstansokkal,* P *projekcióval. Továbbá tegyük fel, hogy*

$$\inf_{t_0' \geq t_0} \inf_{T>0} \|B\|_{\mathbf{M}_{J',T}} \left\{ \frac{K_1 T}{1 - e^{-\alpha_1 T}} + \frac{K_2 T}{1 - e^{-\alpha_2 T}} \right\} < 1, \tag{4.58}$$

ahol $J' = [t_0', +\infty)$*. Ekkor a* (4.50) *rendszernek exponenciális dichotómiája van a* $[0, +\infty)$ *intervallumon a* $K_1' = K_2' = K_3 > 0$*,* $\alpha_1' = \alpha_2' = \alpha_3 > 0$ *konstansokkal és* Q *projekcióval. Továbbá igaz az*

$$\|Y(t)QY^{-1}(t) - \Phi(t)P\Phi^{-1}(t)\| \leq (K_1 + K_2)K_3 \qquad (t \in J), \tag{4.59}$$

egyenlőtlenség, ahol Y *a* (4.50) *rendszer alapmátrixa.*

Bizonyítás: A (4.58) egyenlőtlenségből következik, hogy $\exists t_0' \geq t_0$ és $T > 0$, hogy a $J' = [t_0', +\infty)$ intervallumon igaz a

$$\|B\|_{\mathbf{M}_{J',T}} < \left\{ \frac{K_1 T}{1 - e^{-\alpha_1 T}} + \frac{K_2 T}{1 - e^{-\alpha_2 T}} \right\}^{-1} \tag{4.60}$$

egyenlőtlenség.

Legyen $f \in \mathbf{M}_{J',T}$, és definiáljuk a $\mathcal{T}$ operátort a

$$(\mathcal{T}y)(t) = \int\limits_{J'} \Gamma(t,s)B(s)y(s)\mathrm{d}s + \int\limits_{J'} \Gamma(t,s)f(s)\mathrm{d}s \quad (t \in J') \tag{4.61}$$

módon. Ekkor a 4.3. lemma segítségével belátható, hogy $\mathcal{T}$ folytonos, hiszen

$$\|\mathcal{T}(y)(t)\| \leq \left\| \int\limits_{t_0'}^{+\infty} \Gamma(t,s)B(s)y(s)\mathrm{d}s + \int\limits_{t_0'}^{+\infty} \Gamma(t,s)f(s)\mathrm{d}s \right\| \leq$$

$$\leq \quad \left\| \int\limits_{t_0'}^{t} \Gamma(t,s)\big\{B(s)y(s) + f(s)\big\}\mathrm{d}s \right\| + \left\| \int\limits_{t}^{+\infty} \Gamma(t,s)\big\{B(s)y(s) + f(s)\big\}\mathrm{d}s \right\| \leq$$

$$\leq \quad \int\limits_{t_0'}^{t} \|\Gamma(t,s)\| \big\{\|B\|_{M_{J',T}}\|y\|_\infty + \|f\|_{M_{J',T}}\big\}\mathrm{d}s +$$

$$+ \quad \int\limits_{t}^{+\infty} \|\Gamma(t,s)\| \big\{\|B\|_{M_{J',T}}\|y\|_\infty + \|f\|_{M_{J',T}}\big\}\mathrm{d}s \leq$$

$$\leq \quad \big\{\|B\|_{M_{J',T}}\|y\|_\infty + \|f\|_{M_{J',T}}\big\} \left\{ \int\limits_{t_0'}^{t} K_1 e^{-\alpha_1(t-s)}\mathrm{d}s + \int\limits_{t}^{+\infty} K_2 e^{\alpha_2(t-s)}\mathrm{d}s \right\} \leq$$

$$\leq \quad (\|B\|_{M_{J',T}}\|y\|_\infty + \|f\|_{M_{J',T}}) \left\{ \frac{K_1 T}{1 - e^{-\alpha_1 T}} + \frac{K_2 T}{1 - e^{-\alpha_2 T}} \right\}.$$

Továbbá a fenti egyenlőtlenség segítségével az is belátható, hogy $\mathcal{T}$ kontrakció, ugyanis ha $y, z \in \mathfrak{C}(J', \mathbb{R}^n)$, akkor

$$\|(\mathcal{T}y)(t) - (\mathcal{T}z)(t)\| = \left\| \int\limits_{J'} \Gamma(t,s)B(s)(y(s) - z(s))\mathrm{d}s \right\| \quad \leq$$

$$\leq \|B\|_{M_{J',T}} \|y - z\|_\infty \int\limits_{J'} \|\Gamma(t,s)\|\mathrm{d}s \quad \leq$$

$$\leq \underbrace{\|B\|_{M_{J',T}} \left\{ \frac{K_1 T}{1 - e^{-\alpha_1 T}} + \frac{K_2 T}{1 - e^{-\alpha_2 T}} \right\}}_{<1} \|y - z\|_\infty \quad .$$

Így $\mathcal{T}$-nek egyértelműen létezik fixpontja, azaz egyértelműen létezik $y \in \mathfrak{C}(J', \mathbb{R}^n)$, amelyre $y(t) = \mathcal{T}(y)(t)$ minden $t \in J'$ esetén, de ez pontosan azt jelenti a 4.14. állítás alapján, hogy ez az y korlátos megoldása az

$$\dot{y} = (A + B)y + f \tag{4.62}$$

differenciálegyenlet-rendszernek a J' intervallumon. Így a 4.13. állításból következik, hogy a (4.50) rendszernek exponenciális dichotómiája van a J' intervallumon, de akkor a 3.9. állításból tudjuk, hogy $[0, +\infty)$ intervallumon is.

Végül bebizonyítjuk a (4.59) egyenlőtlenséget. Ehhez először alakítsuk át az egyenlőtlenségben lévő mátrixot a következőképpen:

$$\begin{aligned}
& Y(t)QY^{-1}(t) - \Phi(t)P\Phi^{-1}(t) + \\
+ \quad & \Phi(t)P\Phi^{-1}(t)Y(t)QY^{-1}(t) - \Phi(t)P\Phi^{-1}(t)Y(t)QY^{-1}(t) = \\
= \quad & (\underbrace{I}_{=\Phi(t)\Phi^{-1}(t)} - \Phi(t)P\Phi^{-1}(t))Y(t)QY^{-1}(t) - \\
- \quad & \Phi(t)P\Phi^{-1}(t)(\underbrace{I}_{=Y(t)Y^{-1}(t)} - Y(t)QY^{-1}(t)) = \\
= \quad & \Phi(t)(I - P)\Phi^{-1}(t)Y(t)QY^{-1}(t) - \Phi(t)P\Phi^{-1}(t)Y(t)(I - Q)Y^{-1}(t).
\end{aligned}$$

Így a normára

$$\begin{aligned}
& \|Y(t)QY^{-1}(t) + \Phi(t)P\Phi^{-1}(t)Y(t)QY^{-1}(t)\| = \\
& = \|\Phi(t)(I - P)\Phi^{-1}(t)\| \cdot \|Y(t)QY^{-1}(t)\| + \\
& + \|\Phi(t)P\Phi^{-1}(t)\| \cdot \|Y(t)(I - Q)Y^{-1}(t)\| \le \\
& \le K_2 e^{-\alpha_2(t-t)} K_3 e^{-\alpha_3(t-t)} + K_1 e^{-\alpha_1(t-t)} K_3 e^{-\alpha_3(t-t)} = \\
& = K_3(K_2 + K_1). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Az alábbi a 4.58 tétel következménye, ez szintén a (4.50) rendszer exponenciális dichotómiájára ad elégséges feltételt (vö.: [10]).

4.4. Következmény. *Tegyük fel, hogy a* (3.16) *rendszernek exponenciális dichotómiája van a* $J = [t_0, +\infty)$ *intervallumon* ($t_0 \geq 0$) *a* $K_1,\ K_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2 > 0$ *konstansokkal,* P *projekcióval. Továbbá tegyük fel, hogy*

$$\limsup_{s \to +\infty} \|B(s)\| < \left\{ \frac{K_1}{\alpha_1} + \frac{K_2}{\alpha_2} \right\}^{-1}. \tag{4.63}$$

Ekkor a (4.50) *rendszernek exponenciális dichotómiája van a* $[0, +\infty)$ *intervallumon a* $K_1' = K_2' = K_3 > 0$, $\alpha_1' = \alpha_2' = \alpha_3 > 0$ *konstansokkal és* Q *projekcióval. Továbbá igaz az*

$$\|Y(t)QY^{-1}(t) - \Phi(t)P\Phi^{-1}(t)\| \leq (K_1 + K_2)K_3 \qquad (t \in J) \tag{4.64}$$

egyenlőtlenség, ahol Y *a* (4.50) *rendszer alapmátrixa.*

Bizonyítás: A (4.63) egyenlőtlenségből látható, hogy valamely J' intervallum esetén minden $T > 0$-ra

$$\|B\|_{M_{J',T}} < \left\{ \frac{K_1}{\alpha_1} + \frac{K_2}{\alpha_2} \right\}^{-1}. \tag{4.65}$$

Legyenek $c_0, \alpha > 0$ konstansok és tekintsük a

$$g(t) = \frac{c_0 t}{1 - e^{-\alpha t}} \qquad (t > 0) \tag{4.66}$$

függvényt. Ennek deriváltjára teljesül a

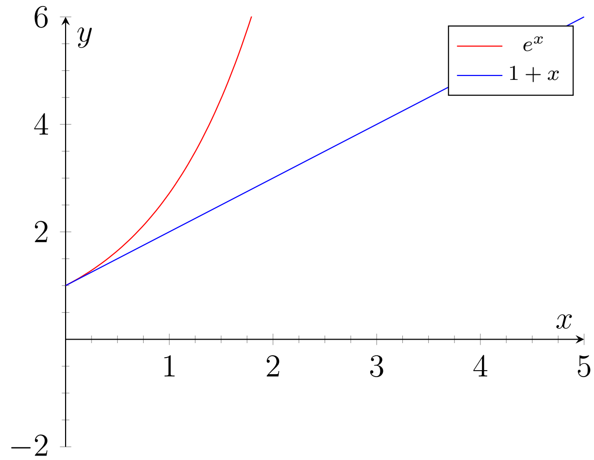
$$g'(t) = \frac{c_0(e^{\alpha t} - 1 - \alpha t)}{e^{\alpha t}(1 - e^{-\alpha t})^2} > 0 \qquad (t > 0) \tag{4.67}$$

egyenlőtlenség, hiszen a nevező pozitív, és a 2. ábra alapján látható, hogy a számlálóban lévő kifejezés is pozitív. Így

$$\inf_{t>0} g(t) = \lim_{t \to 0^+} g(t) = \frac{c_0}{\alpha}. \tag{4.68}$$

Mindezekből következik, hogy

$$\inf_{T>0} \quad \|B\|_{M_{J',T}} \left\{ \frac{K_1 T}{1 - e^{-\alpha_1 T}} + \frac{K_2 T}{1 - e^{-\alpha_2 T}} \right\} <$$



2. ábra. A (4.67)-ben található tört számlálójának előjelét mutató ábra.

$$< \left\{ \frac{K_1}{\alpha_1} + \frac{K_2}{\alpha_2} \right\}^{-1} \inf_{T>0} \left\{ \frac{K_1 T}{1 - e^{-\alpha_1 T}} + \frac{K_2 T}{1 - e^{-\alpha_2 T}} \right\} \leq$$

$$\leq \left\{ \frac{K_1}{\alpha_1} + \frac{K_2}{\alpha_2} \right\}^{-1} \left\{ \frac{K_1}{\alpha_1} + \frac{K_2}{\alpha_2} \right\} = 1.$$

Tehát ebben az esetben is teljesül a (4.58) feltétel, így a 4.8. tétel miatt igaz a 4.4. következmény. ■

A következő példában a (3.16) rendszert fogjuk vizsgálni olyan együtthatóval megadva, hogy a rendszer exponenciális dichotómiájára vonatkozóan a már korábban ismertetett 4.12. tételből és a jelen fejezet fő eredményéből, a 4.8. tételből (illetve annak a 4.4. következményéből) is információt tudunk nyerni. Tehát az együttható periodikus lesz, de összegre fogjuk bontani úgy, hogy a 4.8. tételt is alkalmazni tudjuk.

4.10. Példa. *Tegyük fel, hogy a (3.16) rendszer együtthatómátrixa a következőképpen definiált:*

$$A(t) = \begin{bmatrix} 2 + \delta \cos^2(t) & 0 \\ 0 & -1 + \delta \sin^2(t) \end{bmatrix} \qquad (t \in [0, +\infty)). \tag{4.69}$$

Látható, hogy a (4.69) periodikus függvény, így a 4.12. állítás segítségével nézzük meg, hogy mikor lesz exponenciálisan dichotóm. A rendszer alapmátrixa:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \exp\{\frac{1}{4}(\delta \sin(2t) + t(8 + 2\delta)\} & 0 \\ 0 & \exp\{-\frac{1}{4}(\delta \sin(2t) + t(4 - 2\delta)\} \end{bmatrix} \qquad (t \in [0, +\infty)),$$

a monodrómia mátrix:

$$C = \Phi^{-1}(0)\Phi(\pi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp\{\frac{\pi}{2}(4+\delta)\} & 0 \\ 0 & \exp\{\frac{\pi}{2}(\delta-2)\} \end{bmatrix},$$

tehát a karakterisztikus multiplikátorok:

$$\mu_1 = \exp\{\frac{\pi}{2}(4+\delta)\}, \quad \mu_2 = \exp\{\frac{\pi}{2}(\delta-2)\}.$$

Így a 4.12. állítás alapján a rendszer pontosan akkor exponenciálisan dichotóm, ha

$$\mu_1 = \exp\{\frac{\pi}{2}(4+\delta)\} \neq 1 \Longleftrightarrow \delta \neq -4,$$

és

$$\mu_2 = e^{\frac{\pi}{2}(\delta-2)} \neq 1 \Longleftrightarrow \delta \neq 2.$$

Ezután bontsuk fel a (4.69) *együtthatót a következőképpen:*

$$A(t) = \begin{bmatrix} 2+\delta\cos^2(t) & 0 \\ 0 & -1+\delta\sin^2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta\cos^2(t) & 0 \\ 0 & \delta\sin^2(t) \end{bmatrix} \qquad (t \in [0,+\infty)).$$

A 4.11. állításból tudjuk, hogy az

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x$$

rendszer exponenciálisan dichotóm a $K_1 = K_2 = 1, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2$ *konstansokkal a* $[0,+\infty)$ *intervallumon. A 4.4. következmény pedig azt mondja, hogy a perturbált rendszer exponenciálisan dichotóm, ha*

$$|\delta| = \limsup_{s\to+\infty} \|B(s)\| < \frac{K_1}{\alpha_1} + \frac{K_2}{\alpha_2}^{-1} = (\frac{1}{1}+\frac{1}{2})^{-1} = \frac{2}{3}.$$

5. Diszkrét idejű rendszer exponenciális dichotómiája

Ebben a fejezetben azt nézzük meg, hogy az exponenciális dichotómia fogalma hogyan néz ki diszkrét idejű differenciálegyenlet-rendszereknél. Ehhez tekintsük az

$$x(n+1) = A(n)x(n) \qquad (n \in J \subset \mathbb{Z}) \tag{5.70}$$

rendszert, ahol tetszőleges rögzített $n \in J$ esetén

$$A(n) \in \mathbb{R}^{d\times d}, \qquad A(n) \text{ invertálható.}$$

Jelölje Φ az (5.70) rendszer alapmátrixát, ekkor

$$\Phi(n) = A(n-1) \cdot \ldots \cdot A(0) \qquad (n \in J).$$

A továbbiakban legyen $J = \mathbb{Z}_+ := \{0, \ldots\}$.

5.10. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* (5.70) *rendszernek exponenciális dichotómiája van $\mathbb{Z}_+$-on, ha léteznek K, $\alpha > 0$ konstansok és P projekció úgy, hogy minden $m, n \in \mathbb{Z}_+$ esetén*

$$\begin{aligned} \|\Phi(n)P\Phi^{-1}(m)\| &\leq Ke^{-\alpha(n-m)} \qquad (n \geq m), \\ \|\Phi(n)(I-P)\Phi^{-1}(m)\| &\leq Ke^{-\alpha(m-n)} \qquad (m \geq n). \end{aligned}$$

[23]-ben található egy ettől nem sokban eltérő definíció, érdemes azonban ezt is megnézni, mert a diszkrét idejű rendszerek exponenciális dichotómiájának vizsgálatakor elterjedtek ehhez hasonló megközelítések, illetve ebben a fejezetben is mutatunk majd egy példát, amelynél kényelmesebb lesz ezt a definíciót ellenőrizni.

5.11. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* (5.70) *rendszernek exponenciális dichotómiája van $\mathbb{Z}_+$-on, ha léteznek $K > 0$, $0 < p < 1$ konstansok és P projekció úgy, hogy tetszőleges $m, n \in \mathbb{Z}_+$ esetén teljesülnek a*

$$\begin{aligned} \|\Phi(n)P\Phi^{-1}(m)\| &\leq Kp^{n-m} \qquad (n \geq m), \\ \|\Phi(n)(I-P)\Phi^{-1}(m)\| &\leq Kp^{m-n} \qquad (m \geq n). \end{aligned}$$

egyenlőtlenségek.

5.15. Állítás. *az 5.10. és az 5.11. definíciók ekvivalensek.*

Bizonyítás:

1. lépés: Tegyük fel, hogy az 5.10. definíció teljesül. Ekkor az 5.11. definíció is igaz a

$$p := e^{-\alpha}$$

konstanssal és természetesen ugyanazzal a P projekcióval és K konstanssal. Továbbá az így definiált p-re teljesül az 5.11. definícióban szereplő feltétel is, hiszen

$$\alpha > 0 \Rightarrow -\alpha < 0 \Rightarrow e^{-\alpha} < 1,$$

illetve az exponenciális függvény pozitív tulajdonsága miatt $e^{-\alpha} > 0$, így $0 < p < 1$.

2. lépés: Tegyük fel, hogy az 5.11. definíció teljesül. Legyen

$$\alpha := \log\left(\frac{1}{p}\right) = -\log(p),$$

így

$$0 < p < 1 \Rightarrow \log(p) < 0 \Rightarrow -\log(p) > 0,$$

azaz az így definiált α konstans pozitív. Továbbá nyilvánvaló, hogy az 5.10. definíció teljesül α, K konstansokkal és P projekcióval, ahol K és P az 5.11. definícióból származnak.

Tehát a két definíció valóban ekvivalens. ■

Diszkrét idejű rendszerek esetében is megadható az exponenciális dichotómia fogalma projekciók egy családjának létezésével (egy projekció létezése helyett), erről szól a következő állítás.

5.16. Állítás. *Az* (5.70) *rendszernek pontosan akkor van exponenciális dichotómiája* $\mathbb{Z}_+$*-on a* K*,* α *pozitív konstansokkal és* P *projekcióval, ha léteznek* $K^{'}$*,* α' *pozitív konstansok és projekciók egy* $P(n)$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ *családja úgy, hogy minden* $m, n \in \mathbb{Z}_+$ *esetén*

$$P(n+1)A(n) = A(n)P(n) \tag{5.71}$$

$$\|\Phi(n)\Phi^{-1}(m)P(m)\| \leq K'e^{-\alpha'(n-m)} \qquad (n \geq m), \tag{5.72}$$

$$\|\Phi(n)\Phi^{-1}(m)(I - P(m))\| \leq K'e^{-\alpha'(m-n)} \qquad (m \geq n). \tag{5.73}$$

Bizonyítás:

1. lépés: Tegyük fel, hogy az (5.70) rendszernek exponenciális dichotómiája van. Definiáljuk projekciók egy családját, majd megmutatjuk, hogy ehhez léteznek olyan konstansok, melyekkel teljesülnek az (5.71), (5.72), és (5.73) feltételek. Legyen

$$P(n) = \Phi(n)P\Phi^{-1}(n) \qquad (n \in \mathbb{Z}_+),$$

ahol P az exponenciális dichotómiából származó projekció, továbbá az állításban szereplő konstansokat válasszuk $K' := K$, $\alpha' := \alpha$ módon. Vegyük észre, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{Z}_+$ esetén teljesülnek a következő azonosságok:

$$\begin{aligned} \Phi(n+1) &= A(n)A(n-1)\dots A(0) = A(n)\Phi(n), \\ \Phi^{-1}(n+1)A(n) &= A^{-1}(0)\dots A^{-1}(n-1)A^{-1}(n)A(n) = \Phi^{-1}(n). \end{aligned}$$

Így tetszőleges $n \in \mathbb{Z}_+$ esetén

$$\begin{aligned} P(n+1)A(n) = &\ \Phi(n+1)P\Phi^{-1}(n+1)A(n) = \\ = &\ A(n)\Phi(n)P\Phi^{-1}(n) = A(n)P(n), \end{aligned}$$

azaz az (5.71) azonosság teljesül. Továbbá tetszőleges $n, m \in \mathbb{Z}_+$ esetén teljesülnek a

$$\begin{aligned} \Phi(n)\Phi^{-1}(m)P(m) &= \Phi(n)\Phi^{-1}(m)\Phi(m)P\Phi^{-1}(m) = \\ &= \Phi(n)P\Phi^{-1}(m), \\ \Phi(n)\Phi^{-1}(m)(I-P(m)) &= \Phi(n)\Phi^{-1}(m)(I-\Phi(m)P\Phi^{-1}(m)) = \\ &= \Phi(n)\Phi^{-1}(m)\Phi(m)(I-P)\Phi^{-1}(m) = \\ &= \Phi(n)(I-P)\Phi^{-1}(m), \end{aligned}$$

azonosságok, így az 5.10. definícióban szereplő egyenlőtlenségek teljesülése maga után vonja az (5.72) és az (5.73) egyenlőtlenségek teljesülését.

2.lépés: Tegyük fel, hogy az 5.16. állításban szereplő feltételek teljesülnek. Legyen most is $K := K'$ és $\alpha := \alpha'$ és a definícióban szereplő projekciót pedig válasszuk $P := P(0)$ módon. Az (5.71) feltételből következik, hogy $n, m \in \mathbb{Z}_+$ esetén

$$\begin{aligned} P(m) = \;& A(m)P(m)A^{-1}(n) = \ldots = \\ = \;& A(m)\ldots A(0)P(0)A^{-1}(0)\ldots A^{-1}(m) = \\ = \;& \Phi(m)P\Phi^{-1}(m). \end{aligned}$$

Így $n, m \in \mathbb{Z}_+$ esetén a

$$\begin{aligned} \|\Phi(n)P\Phi^{-1}(m)\| \; &= \|\Phi(n)\Phi^{-1}(m)P(m)\|, \\ \|\Phi(n)(I-P)\Phi^{-1}(m)\| \; &= \|\Phi(n)\Phi^{-1}(m)(I-P(m))\|, \end{aligned}$$

azonosságokból és az (5.72) és (5.73) egyenlőtlenségekből következik, hogy a választott konstansokkal és projekcióval teljesülnek az exponenciális dichotómia 5.10. definícióban szereplő feltételei.

■

A következő példában egy egyszerű esetben vizsgáljuk az exponenciális dichotómia létezését, nevezetesen amikor az (5.70) rendszer állandó együtthatós és az együtthatómátrix diagonális. Legyen $d = 2$ és tegyük fel, hogy $1 \notin \sigma(A)$, azaz, hogy a rendszer együtthatómátrixa a következő alakú:

$$A(n) \equiv A = \begin{bmatrix} e^{\delta_1} & 0 \\ 0 & e^{\delta_2} \end{bmatrix} \qquad (n \in \mathbb{Z}_+), \tag{5.74}$$

ahol

$$\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Nyilván az A mátrix invertálható, ugyanis A inverze:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-\delta_1} & 0 \\ 0 & e^{-\delta_2} \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg a rendszer alapmátrixát.

$$\Phi(n) = A(n-1) \cdot \ldots \cdot A(0) = A^n = \begin{bmatrix} e^{n\delta_1} & 0 \\ 0 & e^{n\delta_2} \end{bmatrix} \qquad (n \in \mathbb{Z}_+),$$

ugyanis diagonális mátrix k. hatványa egy olyan diagonális, mely főátlójának j. eleme a hatványozandó mátrix j. főátlóbeli elemének k. hatványa. Az alapmátrix inverze

$$\Phi^{-1}(n) = \begin{bmatrix} e^{-n\delta_1} & 0 \\ 0 & e^{-n\delta_2} \end{bmatrix} \qquad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

A P projekciót δ_1 és δ_2 előjelének függvényében a következőképpen határozzuk meg:

$$I. \qquad \delta_1 < 0 \quad \text{és} \quad \delta_2 < 0 \quad \Longrightarrow \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$II. \qquad \delta_1 < 0 \quad \text{és} \quad \delta_2 > 0 \quad \Longrightarrow \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$III. \qquad \delta_1 > 0 \quad \text{és} \quad \delta_2 < 0 \quad \Longrightarrow \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$VI. \qquad \delta_1 > 0 \quad \text{és} \quad \delta_2 > 0 \quad \Longrightarrow \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

azaz röviden:

$$P = \begin{bmatrix} \chi_{\{\delta_1 < 0\}} & 0 \\ 0 & \chi_{\{\delta_2 < 0\}} \end{bmatrix}, \tag{5.75}$$

ahol χ_A jelöli az A halmaz karakterisztikus függvényét,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A), \\ 0 & (x \notin A). \end{cases}$$

Tegyük fel, hogy a II. eset áll fenn, azaz $\delta_1 < 0$ és $\delta_2 > 0$. Nézzük meg, hogy milyen konstansokkal teljesül az 5.10. definíció az imént meghatározott P projekcióval. Legyen

$n, m \in \mathbb{Z}_+$ tetszőleges, ekkor:

$$\Phi(n)P\Phi^{-1}(m) = \begin{bmatrix} e^{n\delta_1} & 0 \\ 0 & e^{n\delta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Phi^{-1}(m) =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{n\delta_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-m\delta_1} & 0 \\ 0 & e^{-m\delta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-|\delta_1|(n-m)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

és

$$\Phi(n)(I-P)\Phi^{-1}(m) = \begin{bmatrix} e^{n\delta_1} & 0 \\ 0 & e^{n\delta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Phi^{-1}(m) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{n\delta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-m\delta_1} & 0 \\ 0 & e^{-m\delta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{-\delta_2(m-n)} \end{bmatrix},$$

így a definícióban szereplő mátrixnormákra felírhatóak a

$$\begin{aligned} \|\Phi(n)P\Phi^{-1}(m)\| &\leq e^{-|\delta_1|(n-m)} \qquad (n \geq m), \\ \|\Phi(n)(I-P)\Phi^{-1}(m)\| &\leq e^{-\delta_2(m-n)} \qquad (m \geq n). \end{aligned}$$

Ami azt jelenti, hogy a vizsgált rendszer exponenciálisan dichotóm a P projekcióval és a $K = 1$, $\alpha = \min\{|\delta_1|, \delta_2\}$ konstansokkal. Általánosan az mondható az I.–VI. esetekben, hogy a rendszer exponenciálisan dichotóm a (5.75) projekcióval és a $K = 1$, $\alpha = \min\{|\delta_1|, |\delta_2|\}$ konstansokkal.

A következő példában egy nem-autonóm rendszer exponenciális dichotómiáját vizsgáljuk. A példa megtalálható [23]-ben.

5.11. Példa. *Legyen az* (5.70) *rendszer együtthatómátrixa a következő:*

$$A(n) = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{3n^2+3n+1} & 2^{3n^2+3n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{3n^2+3n+1} \\ 0 & 2^{3n^2+3n+1} \end{bmatrix} \qquad (n \in \mathbb{Z}). \tag{5.76}$$

Megmutatjuk, hogy az így definiált rendszer exponenciálisan dichotóm a $K = 2$, $p = \frac{1}{2}$ konstansokkal és a

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

projekcióval. A rendszer alapmátrixa:

$$\Phi(n) = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{n^3} & 2^{n^3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n^3} \\ 0 & 2^{n^3} \end{bmatrix} \qquad (n \in \mathbb{Z}). \tag{5.77}$$

Az 5.11. definícióban szereplő egyenlőtlenségeket ellenőrizzük le. Nézzük először a definícióban szereplő első egyenlőtlenséget. Legyen $n, m \in \mathbb{Z}$ tetszőleges, ekkor

$$\Phi(n)P\Phi^{-1}(m) = \begin{bmatrix} 2^{m^3-n^3} & -2^{m^3-n^3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

így az $\|\cdot\|_1$ normát használva

$$\|\Phi(n)P\Phi^{-1}(m)\|_1 = 2^{m^3-n^3} \quad (n \geq m).$$

Kellene, hogy tetszőleges $n \geq m$ esetén teljesül a

$$2^{m^3-n^3} \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} = 2^{m-n+1}$$

egyenlőtlenség, ami $m = n$ esetén nyilvánvalóan igaz, $m < n$ esetén pedig ekvivalens az

$$m^3 - n^3 \leq m - n + 1 \tag{5.78}$$

egyenlőtlenséggel. Az (5.78) egyenlőtlenség teljesülése látható a 3. ábrából. Hasonlóan megy az 5.11. definícióban szereplő második egyenlőtlenség ellenőrzése is. Legyen $n, m, \in \mathbb{Z}$ tetszőleges, először meghatározzuk a vizsgálandó mátrixot:

$$\Phi(n)(I-P)\Phi^{-1}(m) = \begin{bmatrix} 0 & 2^{n^3-m^3} \\ 0 & 2^{n^3-m^3} \end{bmatrix},$$

így a $\|\cdot\|_\infty$ normát használva

$$\|\Phi(n)(I-P)\Phi^{-1}(m)\|_\infty = 2^{n^3-m^3} \qquad (n, m \in \mathbb{Z}).$$

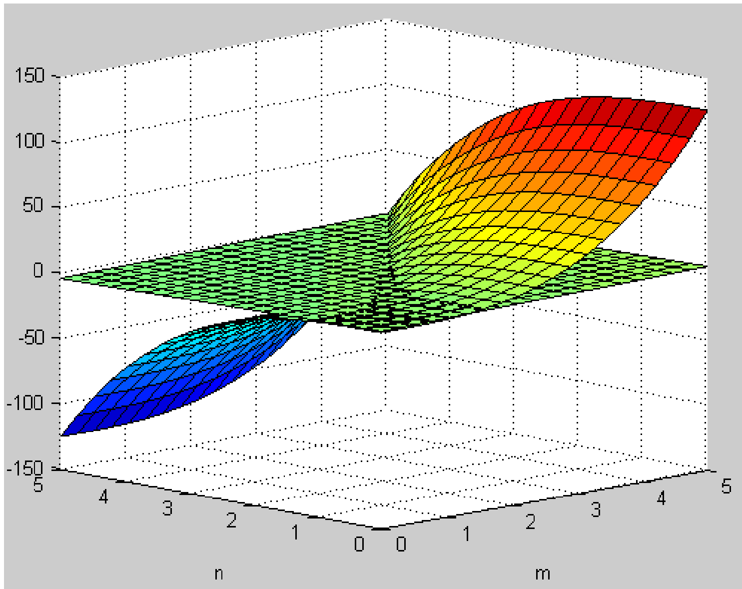
Most a következő egyenlőtlenségnek kell teljesülnie:

$$2^{n^3-m^3} \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^{m-n} = 2^{n-m+1} \quad (n \leq m),$$

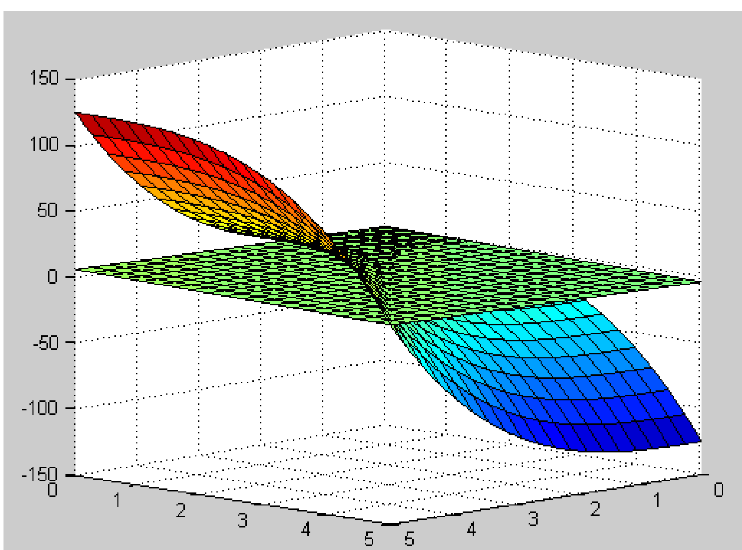
ami $n = m$ esetén nyilvánvalóan igaz, $n < m$ esetén pedig ekvivalens a

$$n^3 - m^3 \leq n - m + 1, \tag{5.79}$$

egyenlőtlenség fennállásával, aminek teljesülését a 4. ábra mutatja.



3. ábra. Az (5.78) egyenlőtlenségben szereplő kifejezések ábrázolása.



4. ábra. Az (5.79) egyenlőtlenségben szereplő kifejezések ábrázolása.

6. A dichotómia és a stabilitás kapcsolata

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy a közönséges, ill. exponenciális dichotómia bizonyos speciális esetben való teljesülése ekvivalens a stabilitással, ill. az aszimptotikus stabilitással, azaz a közönséges, ill. exponenciális dichotómia fogalma valóban tekinthető a stabilitás, ill. az aszimptotikus stabilitás általánosításaként.

6.17. Állítás. *A* (3.16) *rendszer pontosan akkor*

1. *aszimptotikusan stabilis, ha exponenciális dichotómiája van a J intervallumon alkalmas konstansokkal, és a $P = I$ projekcióval, ill.*

2. *stabilis, ha közönséges dichotómiája van a J intervallumon alkalmas konstansokkal, és a $P = I$ projekcióval.*

Bizonyítás:

1. bizonyítása:

1. lépés: Tegyük fel, hogy a (3.16) rendszer aszimptotikusan stabilis. Legyen $J = [t_0, +\infty)$ $(t_0 \geq 0)$, ekkor a 2.5. állítás 2. pontja alapján t_0-hoz léteznek $K_1,\ \alpha > 0$ konstansok, hogy

$$\|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\| \leq K_1 e^{-\alpha(t-t_0)} \qquad (t \geq t_0),$$

amiből a $\Phi(t_0) = I$ feltevés miatt következik, hogy

$$\|\Phi(t)\| \leq K_1 e^{-\alpha(t-t_0)} \qquad (t \geq t_0).$$

Továbbá a 2.1. következmény alapján létezik $K_2 \in \mathbb{R}$, hogy

$$\|\Phi^{-1}(s)\| \leq K_2 \qquad (s \geq t_0),$$

így a $K := K_1 \cdot K_2$ választással igaz a következő egyenlőtlenség:

$$\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| = \|\Phi(t)\| \cdot \|\Phi^{-1}(s)\| \leq K e^{-\alpha(t-t_0)} \leq K e^{-\alpha(t-s)} \qquad (s, t \geq t_0).$$

Legyen $P := I$. Ekkor $s, t \geq t_0$ esetén

$$\begin{aligned} \|\Phi(t)P\Phi^{-1}(s)\| &= \|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)} \qquad (t \geq s), \\ \|\Phi(t)(I-P)\Phi^{-1}(s)\| &= \|0\| = 0 \qquad (t \leq s), \end{aligned}$$

azaz teljesülnek a (3.20) egyenlőtlenségek, tehát a (3.16) rendszer exponenciálisan dichotóm $P = I$ projekcióval.

2. lépés: Tegyük fel, hogy a (3.16) rendszer exponenciálisan dichotóm a $P = I$ projekcióval és a $K_1,\ K_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2$ konstansokkal. Ekkor a (3.20) egyenlőtlenségek közül az elsőt felírva kapjuk, hogy

$$\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| = \|\Phi(t)P\Phi^{-1}(s)\| \leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)} \qquad (t \geq s, \quad t, s \in J),$$

azaz a rendszer aszimptotikusan stabilis a 2.5. állítás 2. pontjából következően.

2. bizonyítása:

1. lépés: Tegyük fel, hogy a (3.16) rendszer stabilis. Legyen $J = [t_0, +\infty)$ $(t_0 \geq 0)$, ekkor a 2.5. állítás 1. pontja alapján t_0-hoz létezik $K_1 > 0$ konstans, hogy

$$\|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\| \leq K_1 \qquad (t \geq t_0),$$

amiből a $\Phi(t_0) = I$ feltevés miatt következik, hogy

$$\|\Phi(t)\| \leq K_1 \qquad (t \geq t_0).$$

Továbbá a 2.1. következmény alapján létezik $K_2 \in \mathbb{R}$, hogy

$$\|\Phi^{-1}(s)\| \leq K_2 \qquad (s \geq t_0),$$

így a $K := K_1 \cdot K_2$ választással igaz a következő egyenlőtlenség:

$$\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| = \|\Phi(t)\| \cdot \|\Phi^{-1}(s)\| \leq K \qquad (s, t \geq t_0).$$

Legyen $P := I$. Ekkor $s, t \geq t_0$ esetén

$$\begin{aligned} \|\Phi(t)P\Phi^{-1}(s)\| &= \|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \leq K \qquad (t \geq s), \\ \|\Phi(t)(I-P)\Phi^{-1}(s)\| &= \|0\| = 0 \qquad (t \leq s), \end{aligned}$$

azaz teljesülnek a (3.20) egyenlőtlenségek, így a (3.16) rendszernek közönséges dichotómiája van a $P = I$ projekcióval.

2. lépés: Tegyük fel, hogy a (3.16) rendszernek közönséges dichotómiája van a $P = I$ projekcióval és a $K_1,\ K_2$ konstansokkal. Ekkor a (3.20) egyenlőtlenségek közül az elsőt felírva kapjuk, hogy

$$\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| = \|\Phi(t)P\Phi^{-1}(s)\| \leq K_1 \qquad (t \geq s, \quad t, s \in J),$$

azaz a (3.16) rendszer stabilis a 2.5. állítás 1. pontjából következően.

Ezzel beláttuk az állítás mindkét pontját. ■

6.11. Megjegyzés. *A 6.17. állítás* 2. *pontja és a 2.1. következmény alapján pedig az mondható, hogy a* (3.16) *rendszer minden megoldása pontosan akkor korlátos, ha a rendszernek közönséges dichotómiája van a $P = I$ projekcióval.*

Végül három egyszerű példán keresztül megnézzük a 6.17. állítást.

6.12. Példa. *Tekintsük az*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x \tag{6.80}$$

állandó együtthatós lineáris rendszert. A 4.11. állítás alapján a (6.80) *rendszernek közönséges dichotómiája van a $[0, +\infty)$ intervallumon a $P = I$ projekcióval, és a $K_1 = K_2 = 1$, $\alpha_1 = 0$, α_2 tetszőleges konstanssal. Továbbá a rendszer együtthatómátrixának sajátértékei $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, tehát a rendszer stabilis.*

6.13. Példa. *Tekintsük az*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x \tag{6.81}$$

állandó együtthatós lineáris rendszert. Az előző példához hasonlóan itt is a 4.11. állításból tudjuk, hogy a (6.81) *rendszernek exponenciális dichotómiája van a $[0, +\infty)$ intervallumon a $P = I$ projekcióval, és a $K_1 = K_2 = 1$, $\alpha_1 = 1$, α_2 tetszőleges konstansokkal. Továbbá az együtthatómátrix sajátértékei $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, így a rendszer aszimptotikusan stabilis.*

6.14. Példa. *Tekintsük az*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x \tag{6.82}$$

állandó együtthatós lineáris rendszert. Ennek a

$$\mu(t) = \Phi(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

$(0,1)$ *pontból induló megoldása nem korlátos, így a 2.1. következményből adódik, hogy a rendszer nem stabilis, így nem is aszimptotikusan stabilis. Továbbá a 4.11. állításból a* (6.82) *rendszer exponenciálisan dichotóm a*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

projekcióval.

Irodalomjegyzék

[1] R. Johnson, F. Mantellini: *Non-Autonomous Differential Equations*, *in : Dynamical Systems*, *szerk.: J.W. Macki, P.Zecca*, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2000.

[2] Farkas M.: *Periodic Motions*, Berlin, Heidelberg and New York: Springer-Verlag, 1994.

[3] Lin Z., Lin X-Y.: *Linear Systems Exponential Dichotomy and Structure of Sets of Hyprbolic Points*, World Scientific, 2000.

[4] Coppel W. A.: *Dichotomies in Stability Theory*, *Lecture Notes in Mathematics*, **629** Springer-Verlag, 1978.

[5] Coppel W. A.: *Dichotomies and Reducibility*, *Journal of Differential Equations* **3** 500–521., 1967.

[6] Coppel W. A.: *Stability and Asymptotic Behaviour of Differential Equations*, *D. C. Heath and Company*, Boston 1965.

[7] Klaus J.: *Bifurcations from Homoclinic Orbits to a Saddle-Centre in Reversible Systems*, *(disszertáció)*, 2006.

[8] Muldowney J. S.: *Dichotomies and asymptotic behaviour for linear differential systems*, *Transactions of the AMS*, **283**(2), 465–484, 1984.

[9] R. J. Sacker, G. R. Sell: *Existens for Dichotomies and Invariant Splittings for Linear Differential Systems*, *Journal of Differential Equations*, **15**, 429 – 458, 1974.

[10] Ju N., Wiggings S.: *On Roughness of Exponential Dichotomy*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **262**, 39–49, 2001.

[11] R. Naulin, M. Pinto: *Admissible perturbations of exponential roughness*, *Nonlinear Anal.*, **31**, 559–571, 1998.

[12] T. Kato: *Perturbation theory for linear operators*, Springer Verlag, New York 1966.

[13] O. Mendez, N. al Hanna: *A note on the stability of exponential Dichotomy of Linear Differential Equtions*, *Annals. Computer Science Series*, **7**, 239–248, 2009.

[14] O. Mendez, L. H. Popescu: *On admissible perturbations for exponential dichotomy*, *Math. Anal. Appl.*, **337**, 425–430, 2008.

[15] L. H. Popescu: *Exponential dichotomy roughness on Banach spaces*, *Math. Anal. Appl.*, **314**, 436–454, 2006.

[16] R. E. Vinograd: *Exact Bounds for Exponential Dichotomy Roughness*, *I. Strong Dichotomy*, *Journal of Differential Equations*, **71**, 63–71, 1988.

[17] R. E. Vinograd: *Exact Bounds for Exponential Dichotomy Roughness*, *II. An Example of Attainability*, *Journal of Differential Equations*, **90**, 203–210, 1991.

[18] R. Naulin: *A remark on exponential dichotomies*, *Revista Colombiana Matemáticas*, **33**, 9–13, 1999.

[19] K. J. Palmer: *Exponential Dichotomy, Integral Separation and Diagonalizability of Linear Systems of Ordinary Differential Equations*, *Journal of Differential Equations*, **43**, 184–203, 1982.

[20] Ju. L. Daletskii, M.G. Krein: *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Spaces*, *American Mathematical Society*, **43**, 1974.

[21] J. L. Massera, J. J. Schäffer: *Linear Differetial Equations and Function Spaces*, *Journal of Differential Equations*, Academic Press. New York, 1966.

[22] G. Papaschinopoulos, J. Schinas: *Criteria for an exponential dichotomy of difference equations*, *Czechoslovak Mathematical Journal*, **35** No. 2, 295–299, 1985.

[23] G. Papaschinopoulos: *Dichotomies in Terms of Lyapunov Functions for Linear Difference Equations*, *Journal of Mathematical Analysis Applications* , **152**, 524–535, 1990.