Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Fazekas Karen Krisztina

Ramanujan

Matematika Bsc szakdolgozat

Témavezető:

Dr. Freud Róbert
Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2015

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Freud Róbertnek, hogy elvállalta a konzulensi teendőket, mindig rendelkezésemre állt, és megjegyzéseivel a tökéletességre ösztönzött.

Köszönettel tartozom még családomnak, barátomnak, barátaimnak a lelki támogatásért, hogy hozzájárultak a munkám sikerességéhez, és főleg Csanády Bálintnak a LaTeX-ban nyújtott segítségéért.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Szakdolgozatom kiindulási pontját egy indiai matematikus, Ramanujan munkássága adta, ezen belül is Hardynak a róla szóló előadásai, a *Tizenkét előadás, aminek a témáját az élete és a munkássága ajánlotta*[1]. Dolgozatom célja az volt, hogy Ramanujan érdemekben bővelkedő munkásságát és egyedi gondolkodásmódját néhány példán keresztül bemutassam. Az életrajzi összefoglalóban életének olyan elemeit mutattam meg, amelyek szerepet játszhattak a munkamódszerének a kialakulásában. Ez Hardy előadásai[1] és a *Prímszámok zenéje*[2] alapján készült.

A Partíciószámok első részében a *Nagy pillanatok a matematika történetében*[3] és a *Számelmélet*[4] alapján foglaltam össze a partíciószámokkal kapcsolatos alapfogalmakat és vizsgálati módszereket néhány általam megoldott feladat és példa mellett. A második részben a [3] által alkalmazott analízises ötlet felhasználásával oldottam meg egy másik példát, illetve ugyanezt számelméleti eszközökkel is, majd összevetettem a két eredményt.

A Kerek számok című fejezetben Hardy és a *Számelmélet* alapján dolgoztam, összevegyítve Hardy leírási módját a valószínűségszámítási gondolatokkal, kibővítve plusz lépésekkel és példákkal. A negyedik fejezetben szintén az előző két könyvet használtam, kiegészítve saját megfontolással és feladatmegoldással.

Az utolsó fejezetben folytattam a Partíciószámok c. fejezetben elkezdett hatványsoros irányvonalat, és beláttam a $p(7m+5) \equiv 0 \pmod 7$ kongruenciát. Hardy könyvében a $p(5m+4) \equiv 0 \pmod 5$ kongruencia bizonyítása szerepelt, és ez alapján készítettem el a dolgozatban ismertetettet. A fejezet folytatása némi kitekintés Ramanujan további kongruenciáira és a Rogers-Ramanujan formulák kombinatorikai vonatkozására.

1. fejezet

Életrajzi összefoglaló

Srinivasa Ramanujan 1887. december 22-én született, egy Erode nevű indiai kisvárosban, meglehetősen szegény családban. Matematikában való tehetsége már 10 évesen megmutatkozott, többek között a trigonometria tanulmányainak kezdetén felfedezte a $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ azonosságot. Mélységesen csalódott volt, amikor megtudta, hogy Euler erre már jóval előtte rájött. Azonban tizenhat éves koráig semmilyen komolyabb matematikával foglalkozó könyvet nem látott, csak Carl *A tiszta és alkalmazott matematika elemi eredményeinek áttekintése* című művét. Ennek az lett az egyik következménye, hogy Ramanujan életének egy jelentős részét tételek újrafelfedezésével töltötte. A másik problémát meg az jelentette, hogy ebben a könyvben a tételek bizonyítás nélkül szerepeltek, így Ramanujan nem kapott pontos képet arról, hogyan kell precízen leírni egy bizonyítást. Élete végéig küzdött azzal a problémával, hogy ő megelégedett annyival, ha valamilyen heurisztikus gondolatsorral önmagát meg tudta győzni, és nem törődött a részletekkel. Ezen kívül innen eredhet Ramanujan vonzódása a „szép" formulákhoz, amire remek példát láthatunk a Partíciószámok című fejezetben.

Ösztöndíjjal jutott be egy nagyon jó college-ba (ami a mai középiskolának felel meg), de a nem matematikával foglalkozó tárgyain sorra megbukott, és végül sem ezt, sem egy másik iskolát nem tudott befejezni. Már ekkor is a híressé vált noteszébe jegyezte le felfedezéseit, természetesen magyarázat és bizonyítás nélkül. Mivel 1909-ben megházasodott (felesége ekkor volt 9 éves), ezért állandó állás után kellett néznie. Hosszas keresgélés után végül egy kikötőben lett hivatalnok, nem túl nagy fizetésért. Sorra küldte a jegyzeteit az indiai professzoroknak, akik nem értettek belőle egy szót se, többek között a téma újszerűsége és Ramanujan hiányos leírói stílusa miatt.

Mikor kifogyott az indiai matematikusokból, Ramanujan úgy döntött, hogy az angolokkal folytatja. Végül 1913-ban sikerült Hardyhoz eljuttatni egy levelet, melyben kb. 120 képlet volt felsorolva az eredményeiről, és segítséget kért a publikálásukhoz, ha Hardy lát benne fantáziát. A levélben szerepelt az az állítás is, hogy

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... = -\frac{1}{12},$$

amiről egy laikus is rögtön tudja, hogy képtelenség. A vegyes helyességű felhozatal ellenére Hardy rájött, hogy zseniális elmével van dolga, és pár levélváltás után kiharcoltak neki egy fizetésemelést, majd kérték, hogy küldje el a formulák bizonyítását is. Miután Ramanujan rávilágított arra, hogy azok meglehetősen vázlatosak, rá akarták venni, hogy menjen Angliába dolgozni.

Ismert viszont, hogy Ramanujan neveltetéséből adódóan vallásos volt, így ódzkodott az utazástól, mivel ez a kasztjából való kirekesztést is jelenthette. Vallásossága miatt élete végéig ragaszkodott a vegetáriánus étrendhez, és meggyőződése volt, hogy egy Namagiri nevű házi istenségtől kapja az ihletet. Végül ugyanez a házi istenség adott engedélyt arra is, hogy Angliába menjen, ahol már minden adott volt ahhoz, hogy nyugodtan dolgozzon. A napjait az előadások látogatása, a munka és a Hardyval való eszmecsere töltötte ki. A szerény koszt és az angliai időjárás miatt 1917-ben tüdővészt kapott, mély depresszió kínozta, így 1919-ben hazautazott. Igyekeztek neki egy indiai professzori állást találni, de 1920-ban felülkerekedett rajta a betegsége.

Az újrafelfedezésekkel töltött hosszas idő és korai halála ellenére is nagyon termékeny matematikus volt, kb. 3-4 ezer tétel őrzi a nevét. Ramanujan intuíciója és a nyugati analízis kombinációja nagyon sikeresnek bizonyult, Hardyval való közös munkáját jól szemlélteti a Kerek számok című fejezetben említett Hardy-Ramanujan tétel. Angliába jövetele után is csak óvatosan formálták a munkamódszereit, mert attól féltek, hogy elvész az a képessége, ami miatt ilyen jól megsejti a tételeit, azonban pár év elteltével már meg tudta mondani, hogy be tud-e valamit bizonyítani, vagy sem. Hardy állítása szerint ő többet tanult Ramanujantól, mint Ramanujan őtőle. Ezek alapján talán érthető a kijelentés, miszerint kortársai Eulerhez és Jacobihoz hasonlították.

Littlewood, szintén angol matematikus, azt mondta Ramanujanról, hogy neki minden szám személyes jó barátja. Ezt szemlélteti a következő történet is, aminek más változata is él a köztudatban. Hardy éppen Ramanujant látogatta meg, amikor betegen feküdt a kórházban, és beszélgetés közben megemlítette, hogy az 1729-es taxival érkezett, ami egy meglehetősen unalmas szám. Ramanujan erre azt válaszolta, hogy ez egyáltalán nem unalmas, hiszen ez az első olyan szám, ami felírható mint két-két különböző köbszám összege:

$$1729 = 10^3 + 9^3 = 1^3 + 12^3.$$

Hardy megkérdezte, tud-e bizonyítást adni arra, hogy tényleg ez a legkisebb, mire Ramanujan azt felelte, hogy nem tud mondani ellenpéldát, és azt gondolja, az első ilyen tulajdonságú számnak „elég nagynak” kell lennie. Ezt a megállapítását később megtalálták egy korábbi feljegyzésében. Azt hihetnénk ezek alapján, hogy Ramanujan jó fejszámoló volt, ellenben beszámolók alapján úgy végezte a műveleteket, mint az iskolás gyerekek.

Újrafelfedezései között szerepelnek az Érdekességek című fejezetben említett Rogers-Ramanujan azonosságok, a Prímszámtétel, illetve a Négyzetszámokkal való előállítás című fejezetben említett Két-, illetve Három-négyzetszám tétel. Az utóbbinál azonban meg kell jegyeznünk, hogy azt könnyebb megsejteni, mint bizonyítani, és az utóbbival Ramanujan nem rendelkezett. Érdekesség az is, hogy hiányos függvényanalízis tudása ellenére félreismerhetetlenül megtalálható korai jegyzetei között a Riemann-féle zéta függvény is, bár a vele kapcsolatos bizonyítások helytelenek voltak.

Hardy szavaival zárnám az életrajzot: "Egy matematikust nem lehet megítélni a hibái vagy az újrafelfedezései alapján, csakis az eredeti és tényleges eredményei szerint", és szerencsénkre Ramanujan ebben bővelkedett.

2. fejezet

Partíciószámok

2.1. Definíciók és vizsgálati módszerek

Ramanujan egyik legnagyobb érdeme az, hogy Hardyval közösen megalkották a partíciószámok képletét. Ez, furcsa módon, egy hibás állítása kapcsán jött létre, amit a Hardynak írt első levelében említett meg, és végül Angliában sikerült részletesen kitárgyalniuk. Ez a levél, amit már a bevezetőben is említettem, körülbelül 120 képletet tartalmazott, köztük olyanokat, amelyeket mások már korábban beláttak, olyanokat, amelyeket eddig még senki, és olyanokat, amelyek helytelen voltak. Ez a képlet is az egyik helytelen formula volt, ami mutatja Ramanujan korlátait, de a belátására alkalmazott újszerű gondolat alkalmas volt a képlet megalkotására.

Ez is remek példa volt arra, hogy Ramanujan ötletei és a fejlett nyugati analízis kombinációja jelentős eredményekre vezetett. Először szükség lesz arra, hogy néhány fogalmat és gondolatot definiáljunk.

2.1.1. Definíció. *Az n pozitív egész partícióin az n-nek pozitív egészek összegeként történő különböző előállításait értjük, ahol azonosnak tekintjük a csak az összeadandók sorrendjében különböző előállításokat. Itt lehet az összeg egytagú is.*

Az n partícióinak számát $p(n)$-nel jelöljük. Tehát a 4 partíciói a következők:

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1. \tag{2.1}$$

Eszerint a példa alapján $p(4) = 5$. Érdemes megjegyezni, hogy a $p(0) = 1$ definíció van általánosan érvényben.

A partíciószámok vizsgálatát néha érdemes úgy tekinteni, hogy a partíciószámok egy megfelelően megválasztott egyenlet megoldásai. Ennek a megértéséhez tekintsük az alábbi pénzkifizetési problémát: egy n értékű összeget hányféleképpen lehet kifizetni 5, 10, 20, 50, 100 és 200 forintos érmék segítségével. Ha a szükséges érmék számát rendre x_1, x_2, $\ldots$, x_6 jelöli, ahol x_i-k nemnegatív egész számok, akkor a kifizetések az alábbi egyenlet megoldásai:

$$5x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 50x_4 + 100x_5 + 200x_6 = n \tag{2.2}$$

Ezt a feladatot általánosíthatjuk adott $b_1, b_2, \ldots, b_k$ különböző, pozitív egész számokra a pénzérmék helyett. Ekkor a

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + ... + b_kx_k = n \tag{2.3}$$

egyenletet vizsgáljuk. Tekintsük n-t változónak, és jelöljük a fenti egyenlet megoldásainak a számát $P_k(n)$-nel, ami természetesen függ a b_i-ktől is.

A feladat egy érdekes átfogalmazása Eulertől származik Ehhez alkalmaznunk kell a mértani sor összegképletét minden b_i-re:

$$\frac{1}{1-x^{b_i}} = 1 + x^{1\cdot b_i} + x^{2\cdot b_i} + ... + x^{k\cdot b_i} + ... \tag{2.4}$$

ahol $|x^{b_i}| < 1$. Ekkor

$$g(x) = \frac{1}{(1-x^{b_1})(1-x^{b_2})...(1-x^{b_k})} \tag{2.5}$$

esetén (2.4) alkalmazásával azt kapjuk, hogy $g(x)$ előáll, mint

$$x^{b_1x_1+...+b_kx_k} \tag{2.6}$$

alakú számok lineáris kombinációja. A szorzást úgy végeztük el, ahogy több tagot több taggal szokás, ami helyes, mert itt abszolút konvergens sorokról van szó. Ez azért átfogalmazása az előző példának, mert ha azt nézzük, hogy rögzített n mellett hányféleképpen kapunk x^n-t, akkor a $P_k(n)$ számok jó együtthatók lesznek. Ebből következik, hogy

$$1 + P_k(1)x + P_k(2)x^2 + ... + P_k(n)x^n + ... = g(x) = \frac{1}{(1-x^{b_1})...(1-x^{b_k})} \tag{2.7}$$

A $g(x)$ függvényt szokás $P_k(n)$ *generátorfüggvényének* nevezni. A precíz definíció így hangzik:

2.1.2. Definíció. *Az $f(x)$ függvény generátorfüggvényén az*

$$F(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\cdot x^n$$

hatványsort értjük.

A generátorfüggvény nem minden esetben konvergens, és nem minden esetben könnyű meghatározni, de a pénzkifizetési probléma és $|x| < \frac{1}{2}$ esetén $F(x)$ létezik és abszolút konvergens.

Az előző példát nézzük speciálisan a b_1=1, b_2=2, ..., b_k=k esetre:

$$1 + P_k(1)x + P_k(2)x^2 + ... + P_k(n)x^n + ... = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)...(1-x^k)} \tag{2.8}$$

Ha nem az első k egészet engedjük meg, hanem minden pozitív egészet, akkor a felbontás megegyezik a partíciókkal. (Természetesen továbbra is mindenhol feltesszük, hogy $|x| < 1$, a végtelen szorzatot pedig határértékkel értelmezzük):

$$1 + p(1)x + p(2)x^2 + ... + p(n)x^n + ... = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)...(1-x^k)...} \tag{2.9}$$

Ha $f(n)$ jelöli azt, hogy n-nek hány olyan partíciója van, amelyek csak páratlan számokból álló összegek, akkor

$$F(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + ...)(1 + x^3 + x^6 + ...)... = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)...}$$

Ha $f(n)$ jelöli n különböző számokból álló partícióit, akkor

$$F(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)...$$

Ha pedig n különböző, páratlan számokból álló partícióit keressük, akkor

$$F(x) = (1+x)(1+x^3)(1+x^5)...$$

Ha az a kérdés, hogy az $n-N$ számnak keressük azokat a partícióit, amelyek minden tagja legfeljebb m, akkor

$$F(x) = \frac{x^N}{(1-x)(1-x^2)...(1-x^m)}$$

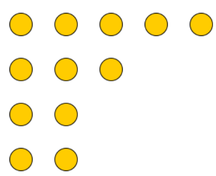
mivel ha n-nek keresnénk ilyen feltételek mellett a partícióit, akkor a generátorfüggvénye

$$F(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)...(1-x^m)}$$

lenne, és ezt x^N-nel szorozva kapjuk $n-N$-nek a partícióit.

A generátorfüggvény mellett a partíciószámok kezelésében hasznos kombinatorikai eszköz a pontséma, ahol az $n = c_1 + c_2 + ... + c_k$ felbontást pontokkal ábrázoljuk (a $c_1 \geq c_2 \geq ... \geq c_k$ feltétel mellett), hogy az első sorában c_1 db pont található, a második sorában c_2 db stb.

Például a lenti ábrán $12 = 5+3+2+2$ felbontását látjuk. A definícióból egyértelmű, hogy a sorok hossza föntről lefele monoton csökken. Azt a felbontást, amit az oszloponkénti leolvasással kapunk, a *konjugáltjának* nevezzük. A lenti példán ez a $12 = 4+4+2+1+1$ partíciót jelenti. A kétféle leolvasás ötlete hasznos néhány tétel bizonyításánál.



2.1.1. Tétel. *Ha $f_r(n)$ és $g_r(n)$ az n olyan partícióinak a száma, ahol az összeadandók száma, illetve a partíciók maximuma r, akkor $f_r(n) = g_r(n)$.*

Bizonyítás: Vegyük azokat a pontsémákat, amelyeknek pontosan r db sora van, tehát r db összeadandóból állnak. Ha ezeket oszloponként olvassuk le, akkor olyan sémákat kapunk, amelyeknek a maximuma r. Ha mindegyik ilyet megszámoljuk, akkor adódik az egyenlőség. $\square$

2.1.2. Tétel. *Az n szám pontosan r tagú partícióinak a száma megegyezik $n-r$ legfeljebb r tagú partícióinak a számával.*

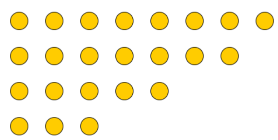
Bizonyítás: Egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésre van szükségünk.
($\Rightarrow$) n pontosan r tagú partíciójának r sora van, tehát az első oszlop biztosan r tagú, de lehet, hogy több ilyen is van. Ha kihúzom az első oszlopot, akkor $n-r$ egy olyan partícióját kapjuk, aminek legfeljebb r sora van, és ez $n-r$-nek egy legfeljebb r tagú partíciója.
($\Leftarrow$) Vesszük $n-r$-nek egy legfeljebb r tagból álló partícióját és elé írunk egy r-es oszlopot, és így n-nek kapjuk egy pontosan r tagú partícióját, mivel nagyobb nem lehet, r hosszúságú pedig van. □

2.1.3. Tétel. *Jelölje $s(n)$, illetve $t(n)$ az n pozitív egész azon partícióinak a számát, ahol minden összeadandó különböző, és a tagok száma páros, illetve páratlan. Ekkor*

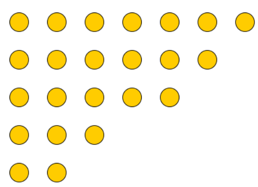
$$s(n) - t(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{ha } n = \frac{1}{2}(3k^2 \pm k); \\ 0 & \text{különben.} \end{cases} \tag{2.10}$$

Bizonyítás: Jó lenne kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létrehozni n páros és páratlan sok különböző tagból álló partíciói között, de a tétel kimondásából is látszik, hogy ez csak abban az esetekben lehetséges, amikor $s(n)=t(n)$. Tehát létre kell hozni egy „majdnem” kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést.

Ha n csupa különböző komponensből álló felbontását vesszük, az olyan sémákat eredményez, amelynél a sorokban szereplő pontok száma szigorúan csökken. Például a lenti ábrán a $23 = 8 + 7 + 5 + 3$ felbontást láthatjuk

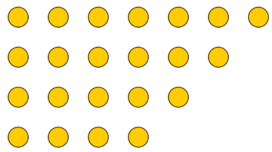


A séma élének nevezzük a séma jobb felső sarkából induló, maximális, 45 fokos szögben haladó, „ÉK-DNY” irányú pontsort. A fenti ábrán ez a pontsor 2 db pontból áll. Legyen A az a transzformáció, amely egy séma élét áthelyezi a séma alá új sornak, azzal a feltétellel, hogy ez a művelet nem rontja el a séma alakját (tehát hogy csupa különböző összeadandókból áll, és hogy monoton csökkennek a sorok hosszai). Definiáljuk a B transzformációt olyanformán, hogy az utolsó sort a séma éle mellé rakja, ha az nem rontja el a séma alakját.

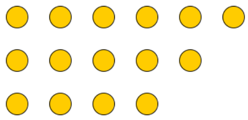


Az előbbi példánkon elvégezve az A-t, a fenti sémát kapjuk, azonban a B nem végezhető el. Általában A és B közül pontosan az egyik végezhető el, néhány kivételtől eltekintve, amikor egyik sem. Ezt a következőekben látjuk be.

Legyen a a séma utolsó sorának elemszáma, b pedig az él elemszáma. Ha $a \leq b$, akkor A nem végezhető el, és B igen, kivéve ha $a = b$ és az él és az utolsó sor „összeér”, mint az az alábbi ábrán is látszik.



Ha $a > b$, akkor B nem végezhető el, és A igen, kivéve ha $a = b + 1$ és az él és az utolsó sor „összeér”.



Természetes, hogy A és B egymás inverzei, hiszen egymás után elvégezve őket az eredeti állapotot nyerjük vissza. Igaz az is, hogy A és B eggyel növeli, illetve csökkenti a sorok számát, így a keletkező partícióban az összeadandók paritása ellentétes lesz a kezdőállapothoz képest. Ebből a kettőből következik, hogy A és B kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít a páros és páratlan számú összeadandókból álló partíciók között, kivéve a két kivételes esetet. Ebből következik, hogy $s(n) - t(n) = 0$, kivéve a két kivételes esetet, amikor ± 1 (1, ha a kivételes partícióban az összeadandók száma páros, és -1, a másik esetben).

Ha az első kivételes esetben a „rossz” partíció k db összeadandóból áll (azaz k db sorból áll), akkor

$$n = (2k-1) + (2k-2) + ... + k = \frac{(3k-1)k}{2} \tag{2.11}$$

Hasonlóan a második kivételes esetben, ha a „rossz” partíció itt is k db összeadandóból áll, akkor

$$n = 2k + (2k-1) + ... + (k+1) = \frac{(3k+1)k}{2} \tag{2.12}$$

Be kell még látni, hogy egy számnak csak egy rossz partíciója lehet. Adott n-re (2.11) és (2.12) egyszerre ugyanazzal az indexszel nem teljesülhet, de különbözővel se, mivel

$$\frac{(3k-1)k}{2} < \frac{(3k+1)k}{2} \tag{2.13}$$

Azonban abban az esetben, ha a bal oldalt k helyett $k+1$-re vesszük, akkor az egyenlőtlenség megfordul, tehát az egyenlőség egyetlen pozitív egész k-ra sem teljesülhet. $\square$

Ennek a tételnek van következménye a partíciószámokra nézve is. Ehhez alkalmazunk kell a fejezet elején említett, (2.9)-cel jelölt formulát, majd vezessük be a $Q(x)$ jelölést.

$$1 + p(1)x + p(2)x^2 + ... + p(n)x^n + ... = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)...(1-x^k)...} = \frac{1}{Q(x)}$$

A továbbiakban ezt a $Q(x)$ függvényt akarjuk hatványsor alakra hozni, azaz:

$$Q(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_kx^k + ... \tag{2.14}$$

megfelelő együtthatókkal. Ha $Q(x)$ helyett először az

$$(1+x)(1+x^2)...(1+x^k)...$$

hatványsorba fejtését vizsgálnánk, akkor azt kapnánk, hogy n együtthatója annyiszor 1, ahányszor előállítható n mint különböző pozitív egészek összege. Ha ezzel a gondolatmenettel vizsgáljuk $Q(x)$-et, akkor $a_n := a(n) = s(n) - t(n)$. Itt $s(n)$ (illetve $t(n)$) ugyanaz jelenti, amit az előző tételben. A $t(n)$ negatív előjele a páratlan db negatív szám szorzata miatt adódik.

A bizonyítás következményeként adódik az Euler azonosság ezen alakja

$$Q(x) = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)... = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k x^{\frac{3k^2+k}{2}}. \tag{2.15}$$

Ekkor a legutóbb bizonyított tétel miatt az a_n-ek a legtöbb helyen 0-k, a kivételes esetektől eltekintve. A (2.9) és (2.14) formulákból következik, hogy

$$(1+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...)(1+p(1)x+p(2)x^2+...+p(n)x^n+...) = 1. \tag{2.16}$$

Az $n \geq 1$ esetre a jobb oldalon x^n együtthatója 0, a bal oldalon viszont

$$p(n) + p(n-1)a_1 + p(n-2)a_2 + ... + p(1)a_{n-1} + a_n.$$

Mivel a hatványsorbafejtés egyértelmű, a két érték megegyezik. Átrendezve pedig egy rekurzív képletet kapunk $p(n)$-re, ami nagyon jól használható, mert sokkal kevesebb a műveletigénye, hiszen az a_n-ek nagy része 0.

$$p(n) = -p(n-1)a_1 - p(n-2)a_2 + ... - p(1)a_{n-1} - a_n =$$

$$= p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) + p(n-7) + ...$$

Ennek a képletnek a segítségével számolták ki $p(200)$-t, ami akkoriban hatalmas eredménynek számított, de a mai korban sem kell lebecsülni ennek a képletnek a hasznosságát.

$$p(200) = 3\,972\,999\,029\,388.$$

A fenti tétel például olyan kérdésekre is választ ad, hogy melyek azok a számok, amelyek páratlan sokféleképpen állnak elő különböző pozitív egészek összegeként. Ez a kérdés átfogalmazható arra, hogy melyek azok a számok, amelyeknek páratlan az olyan partíciószáma, ahol a partíciók különböző tagokból állnak (jelöljük ezt $f(n)$-nel). Ha az $s(n) = t(n)$ eset áll fenn, akkor

$$f(n) = s(n) + t(n) = 2s(n),$$

tehát ekkor ez a partíciószám páros. Ha az $s(n) = t(n) \pm 1$ eset áll fenn (azaz $n = \frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$), akkor

$$f(n) = s(n) + t(n) = 2s(n) \pm 1,$$

ami mindig páratlan. Tehát a válasz, hogy $n = \frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$ esetén lesz páratlan ez a típusú partíciószám.

2.2. Konkrét egyenlet megoldása hatványsorokkal

Érdemes fontolóra venni azt a kérdést, mennyire hasznos a feladat Euler-féle átfogalmazása, azaz mennyit nyerünk vele. Ennek a megvizsgálásához vegyük a (2.3) diofantikus egyenletet a

$$k = 3, \qquad b_1 = 2, \qquad b_2 = 3, \qquad b_3 = 4$$

esetben. Ekkor (2.3) és (2.7) a következőre módosul

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = n, \tag{2.17}$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_3(n)x^n = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

A parciális törtekre bontást Maple-lel elvégezve kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1-x}{1+x^2} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{(1+x)^2} + \tag{2.18}$$

$$+\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{(1-x)^3} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{59}{288}\cdot\frac{1}{1-x} + \frac{7}{32}\cdot\frac{1}{1+x} + \frac{1}{9}\cdot\frac{2+x}{1+x+x^2},$$

amelyeknek könnyen megalkotható a hatványsora. Mivel az $|x| < 1$ eset áll fenn, ezért alkalmazhatjuk a mértani sor összegképletét, miszerint:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^k + ... \tag{2.19}$$

Mivel $|x| < 1$, x helyett $(-x)$-et véve is érvényes a feltétel, ezért alkalmazhatjuk a képletet, tehát:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^k x^k + ... \tag{2.20}$$

Továbbra is (2.19)-ből kiindulva, és úgy végezve a szorzást, ahogy több tagot több taggal szokás (ami az abszolút konvergencia miatt megtehető), levezethető, hogy

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + ... + (k+1)x^k + ... \tag{2.21}$$

Binomiális együtthatókra átírva kapjuk azt az eredményt, hogy

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \binom{1}{1} + \binom{2}{1}x + \binom{3}{1}x^2 + ... + \binom{k+1}{1}x^k + ... \tag{2.22}$$

Hasonlóan kijön az az eredmény, hogy

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \binom{2}{2} + \binom{3}{2}x + ... + \binom{k+2}{2}x^k + ... \tag{2.23}$$

A (2.21) képletet x helyett $-x$-et alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1-(-x))^2} = 1 - 2x + 3x^2 + ... + (-1)^k(k+1)x^k + ... \tag{2.24}$$

A (2.18) bizonyításához szükségünk van még a

$$\frac{2+x}{1+x+x^2}$$

hatványsorára. Ehhez meghatározzuk $1+x+x^2$ két gyökét, amik komplexek, majd elvégezzük a parciális törtekre bontást. Mindkét törtet, hogy alkalmazhassuk a mértani sor összegképletét, egyszerűsítjük a nevezővel.

$$\frac{2+x}{1+x+x^2} = \frac{2+x}{(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2})(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2})} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}}{x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}} + \frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}}{x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}} = \frac{1}{1+\frac{x}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}}} + \frac{1}{1+\frac{x}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}}}$$

Mivel $|x| < 1$ és

$$\left|\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1, \tag{2.25}$$

ebből következik, hogy

$$\left|\frac{x}{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}}\right| < \frac{1}{1} = 1,$$

tehát használhatjuk a mértani sor összegképletét (esetünkben praktikusabb a (2.20)). Azaz

$$\frac{2+x}{1+x+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left(\frac{x}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left(\frac{x}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}}\right)^k =$$

A könnyebb számolás miatt gyöktelenítve a nevezőt, összevonva a két szummát, majd $(-1)^k$-nal beszorozva kapjuk azt az eredményt, hogy

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left(x \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left(x \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)\right)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot x^k \cdot \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^k\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x^k \cdot \left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^k + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^k\right). \tag{2.26}$$

A hatványozás elvégzéséhez szükségünk van a számok trigonometrikus alakjára (felhasználva (2.25)-öt)

$$-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{2\pi}{3}) \text{ és } -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\frac{4\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{4\pi}{3}),$$

majd a Moivre formulát használjuk fel. Visszahelyettesítve (2.26)-ba azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \cdot \left(\cos(k \cdot \frac{2\pi}{3}) + i \cdot \sin(k \cdot \frac{2\pi}{3}) + \cos(k \cdot \frac{4\pi}{3}) + i \cdot \sin(k \cdot \frac{4\pi}{3})\right).$$

Kihasználva, hogy $(-2\pi)/3 = 4\pi/3 \pmod{2\pi}$, és az, hogy a $\cos(x)$ páros, a $\sin(x)$ pedig páratlan függvény, kapjuk azt az eredményt, hogy

$$\frac{2+x}{1+x+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} 2 \cdot x^k \cdot \cos(k \cdot \frac{2\pi}{3}) = 2 \cdot \cos(0 \cdot \frac{2\pi}{3}) + 2 \cdot \cos(1 \cdot \frac{2\pi}{3}) \cdot x + ... \quad (2.27)$$

Az utolsó hiányzó hatványsor a (2.18)-hoz az

$$\frac{1-x}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-x}{1+x^2}$$

A (2.20) egyenletből kiindulva, és x helyett x^2-et helyettesítve kapjuk, hogy

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + ... + (-1)^k x^{2k} + ... \quad (2.28)$$

A (2.28)-at $-x$-szel megszorozva:

$$\frac{-x}{1+x^2} = -x + x^3 - x^5 + x^7 + ... + (-1)^{k+1} x^{2k+1} + ... \quad (2.29)$$

A fenti két egyenletet összegezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{1-x}{1+x^2} = 1 - x - x^2 + x^3 + x^4 - ... + (-1)^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} x^k + ... \quad (2.30)$$

Ezzel (2.18) minden komponensének hatványsora megvan. Az összegre bontás miatt és a (2.19), (2.20), (2.22), (2.23), (2.24), (2.27), (2.30) egyenleteket felhasználva kapjuk, hogy

$$P_3(n) = \frac{1}{8} \cdot (-1)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} + \frac{1}{16} \cdot (-1)^n (n+1) +$$

$$+ \frac{1}{24} \cdot \binom{n+2}{2} + \frac{1}{8} \cdot (n+1) + \frac{59}{288} + \frac{7(-1)^n}{32} + \frac{2}{9} \cdot \cos(\frac{2n\pi}{3}). \quad (2.31)$$

Mivel előzőleg megállapítottuk, hogy $P_3(n)$-ek is megfelelő együtthatók, ezért a hatványsorbafejtés egyértelműsége miatt a két érték megegyezik, ami egy meglehetősen meglepő eredmény, mert például az sem triviális, hogy a jobb oldal miért mindig egész szám. Ez is egy jó példa a Ramanujan-szerűen szép formulára, főleg hogy van benne egy periodikus tag is.

Általában azonban az ilyen feladatokat nem így szokás megoldani. Adott n-re tekinthetjük (2.17)-et, mint egy diofantikus egyenletet, aminek keressük a nemnegatív x_i-kre a megoldásait. Kezdetben foglalkozzunk a

$$2x_1 + 4x_3 = k, \qquad x_1, x_3 \geq 0, \qquad x_1, x_3 \in \mathbb{Z}, \quad (2.32)$$

egyenlet megoldásaival, rögzített k mellett. Könnyű meggondolni, hogy csak akkor létezik ennek megoldása, ha k páros szám, és minden nemnegatív, páros k-ra létezik megoldás (például ha $k/2$ db 2-est veszünk, és 0 darab 4-est). Innentől feltesszük, hogy k rögzített és páros. Az átláthatóság kedvéért a megoldásokat rendezett párba írjuk, tehát (a_1, b_1) azt jelenti, hogy

$$2a_1 + 4b_1 = k, \qquad a_1, b_1 \geq 0, \qquad a_1, b_1 \in \mathbb{Z},$$

Ha tudjuk k megoldásait (jelöljük ezeket (a_i, b_i)-vel), akkor $k+2$ megoldásainak egy része $(a_i + 1, b_i)$ alakú. Csak akkor keletkezhet „másféle" megoldás, ha $k+2$ osztható 4-gyel, hiszen ekkor $(0, (k+2)/4)$ is megoldás lesz. Ebből következik, hogy k-ról $k+2$-re lépve vagy 1-gyel nő a megoldások száma, vagy ugyanannyi marad.

Mivel $k = 0$-ra és $k = 2$-re a megoldások száma 1, onnantól pedig 4-esével nő 1-gyel, ezért megállapítható, hogy adott k-ra a (2.32) egyenlet megoldásainak száma (jelöljük ezt d_k-val)

$$d_k := \begin{cases} \lfloor \frac{k}{4} \rfloor + 1 & \text{ha } k \text{ páros;} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Átrendezve a (2.17) egyenletet, azt kapjuk, hogy

$$2x_1 + 4x_3 = n - 3x_2,$$

ahol bármely x_2-re tudjuk a megoldást. Mivel a jobb oldalon nem szeretnénk negatív számot kapni, ezért x_2-nek 0 és $\lfloor n/3 \rfloor$ között kell lennie.

Ez alapján vegyük az összes lehetséges x_2-re a megoldások számát, és ezeket összegezve kapjuk az eredeti (2.17) egyenlet megoldásainak számát, ami a következő:

$$\sum_{x_2=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} d_{n-3x_2} = \sum_{x_2=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{n - 3x_2}{4} \right\rfloor + 1 \right) \cdot \chi \left\{ \text{ha } n - 3x_2 \text{ páros} \right\}, \tag{2.33}$$

ahol χ a karakterisztikus függvényt jelöli (ami 1-et vesz fel, ha igaz az állítás, és 0-t, ha nem).

Ezt a formulát lehet tovább folytatni aszerint, hogy n milyen maradékot ad 4-gyel osztva. Például $n = 4s + 1$ esetben a szummában 0-tól s-ig egy számtani sorozattól eltekintve minden szám szerepel. Jelöljük az első s szám összegét S-sel.

Ebben az esetben a hiányzó részsorozat az

$$\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - 2, \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - 5, ...$$

Ennek a karakterizációja, ha m a sorozat elemszámát jelöli:

$$a_1 = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - 2, \quad d = -3, \quad m = \left\lceil \frac{a_1}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{\lfloor n/4 \rfloor - 2}{3} \right\rceil$$

Az összege

$$S_m = \frac{[2a_1 + (m-1)d]m}{2} = a_1 \cdot \left\lceil \frac{a_1}{3} \right\rceil - \frac{3}{2} \left(\left\lceil \frac{a_1}{3} \right\rceil \right)^2 + \frac{3}{2} \left\lceil \frac{a_1}{3} \right\rceil$$

Tehát a sorozat összege

$$S - S_m = \frac{(a_1 + 2)(a_1 + 3)}{2} - \left(a_1 \cdot \left\lceil \frac{a_1}{3} \right\rceil - \frac{3}{2} \left(\left\lceil \frac{a_1}{3} \right\rceil \right)^2 + \frac{3}{2} \left\lceil \frac{a_1}{3} \right\rceil \right)$$

Ezt nagyságrendileg becsülve (tehát nem törődve a felső és alsó egészrészekkel és a_1-et $n/4$-ként kezelve) kapjuk, hogy

$$S - S_m \approx \frac{a_1^2}{2} + \frac{5a_1}{2} + 3 - \left(\frac{a_1^2}{3} - \frac{a_1^2}{6} + \frac{a_1}{2}\right) =$$

$$= \frac{a_1^2}{3} + 2 \cdot a_1 + 3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{n^2}{16} + \frac{n}{2} + 3 \sim \frac{n^2}{48},$$

ahol $f \sim g$ az aszimptotikus egyenlőséget jelöli. Nagyságrendileg tényleg működik a formula, hiszen a különbségünk a következőképp állt elő:

$$n \sum_{i=1}^{n/4} i - 3 \sum_{i=1}^{n/12} i \sim \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n}{4}\right)^2 - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{n}{12}\right)^2 = n^2 \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{96}\right) = \frac{n^2}{48}$$

Ehhez hasonlóan megalkotható a formula a többi maradékosztályra is, de ettől itt most eltekintünk.

A (2.33) jelentős mértékben más formula, de ugyanazt az eredményt adja, mint a (2.31). Ezt most egy konkrét példára le is ellenőrizzük. Legyen ebben az esetben $n = 13$. Ekkor a fenti formula alapján

$$\sum_{x_2=0}^{4} \left(\left\lfloor \frac{13 - 3x_2}{4} \right\rfloor + 1\right) \cdot \chi \left\{\text{ha } 13 - 3x_2 \text{ páros}\right\} =$$

$$= \left(\left\lfloor \frac{13 - 3 \cdot 1}{4} \right\rfloor + 1\right) + \left(\left\lfloor \frac{13 - 3 \cdot 3}{4} \right\rfloor + 1\right) = 2 + 1 + 1 + 1 = 5.$$

A (2.31) formula pedig szintén ezt az eredményt adja, hiszen

$$P_3(13) = \frac{1}{8} \cdot (-1)^{\lfloor \frac{13+1}{2} \rfloor} + \frac{1}{16} \cdot (-1)^{13}(13+1) + \frac{1}{24} \cdot \binom{13+2}{2} + \frac{1}{8} \cdot (13+1) +$$

$$+ \frac{59}{288} + \frac{7(-1)^{13}}{32} + \frac{2}{9} \cdot \cos(\frac{13 \cdot 2\pi}{3}) = -\frac{1}{8} - \frac{7}{8} + \frac{105}{24} + \frac{14}{8} + \frac{59}{288} - \frac{7}{32} - \frac{1}{9} = 5.$$

Azonban érdemes megjegyezni, hogy nagyobb számokra a hatványsoros módszerrel adott képlet jóval kevesebb műveletigénnyel rendelkezik.

3. fejezet

Kerek számok

Ebben a témakörben Hardy és Ramanujan egy nevezetes tételét szeretnénk kimondani. Ez a tétel a kerek számok témakörébe tartozik, és Turán Pál adott rá egy egyszerű bizonyítást. Ehhez szükséges azonban néhány előkészület, amit a következőkben teszünk meg.

Általában egy számot *kereknek* nevezhetünk, ha a prímfelbontásában a prímek a „nagyságához képest" kicsi számok. Példának okáért a $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ egy kerek szám, és köznyelvi megfogalmazás alapján az $1024 = 2^{10}$ még nála is „kerekebb". Hardyt és Ramanujant is érdekelte, hogy mi a matematikai magyarázata annak, hogy a kerek számok meglehetősen ritkák. Elsőre ez a kijelentés kicsit ellentmondásosnak tűnhet, hiszen a számok fele osztható kettővel, a harmada hárommal, az ötöde öttel stb., és mégis az teljesül, hogy egy számnak vannak nagy prímosztói.

Két olyan függvényt vezetünk most be, amelyek valamilyen mértékben azt jellemzik, hogy egy szám mennyire tekinthető összetettnek. Be fogjuk látni, hogy esetünkben ezek között nincs nagy különbség. Vegyük adott n-re a prímfelbontását:

$$n = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_\nu^{a_\nu} = \prod_{i=1}^{\nu} p_i^{a_i},$$

ahol $p_1 < \ldots < p_\nu$ prímtényezők. Ekkor legyen $\omega(n) := \nu$, tehát n különböző prímfaktorainak a száma. Hasonlóképpen definiálhatjuk a másik függvényt:

$$\Omega(n) := \sum_{i=1}^{\nu} a_i,$$

tehát $\Omega(n)$-nel jelöljük azz n prímfelbontásában a prímek számát multiplicitással számolva. Egyértelmű, hogy a legkisebb n, amire $\omega(n) = \nu$, éppen

$$n = 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p_\nu,$$

ahol p_ν a ν-edik prímszámot jelöli. Még egy alapdefinícióra szükségünk van a továbbiakban.

3.0.1. Definíció. *Legyen f egy számelméleti függvény (azaz pozitív egészeken értelmezett komplex értékű függvény) és $F(n) := f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$. Az f függvény átlagértékfüggvényén (vagy középértékfüggvényén) az $F(n)/n$ függvényt értjük.*

Azt fogjuk belátni, hogy $\omega(n)$ és $\Omega(n)$ átlagértéke $\log\log(n)$. Először az $\omega(n)$ függvénnyel foglalkozunk.

$$\sum_{k\le n}\omega(k)=\sum_{k\le n}\sum_{p|k}1=\sum_{p\le n}\sum_{pm\le n}1$$

Az első egyenlőség az $\omega(k)$ definíciója miatt teljesül, majd a két szummát felcserélve kapjuk a fenti eredményt, ahol p olyan prím és m olyan pozitív egész, amelyek kielégítik az egyenlőtlenséget. Hiszen először adott k-ra (ahol $k\le n$) néztük meg a prímosztóit, és ez ugyanaz, mintha adott $p\le n$ prímre néznénk meg, hogy hány olyan m van, amire $pm\le n$. A fenti feltételt átalakíthatjuk úgy, hogy ne legyen szükségünk m-re, ugyanis ha minden megfelelő m és p pár ér 1-et, akkor egy adott p-re pontosan n/p alsó egészrész db jó m található.

$$\sum_{k\le n}\omega(k)=\sum_{p\le n}\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor=\sum_{p\le n}\frac{n}{p}-\sum_{p\le n}\left(\frac{n}{p}-\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor\right)=n\sum_{p\le n}\frac{1}{p}+O(n). \tag{3.1}$$

Mivel $0\le a-\lfloor a\rfloor<1$ minden a-ra, így az alsó egészrész elhagyásával maximum 1 hiba keletkezik, a szummában pedig maximum n tag van. A továbbiakban a hibát $O(n)$-nel jelöljük. Jelen esetben ez azt jelenti, hogy a „hiba” nagyságrendje n-es, azaz n-nel elosztva az értéke korlátos. Ismert tétel, hogy

$$\sum_{p\le n}\frac{1}{p}=\log\log(n)+O(1). \tag{3.2}$$

Ebből következik, hogy

$$\sum_{k\le n}\omega(k)=n\cdot\log\log(n)+O(n). \tag{3.3}$$

Beírva a definíciót, majd összevonva a két szummát $\Omega(k)$ esetében is, arra jutunk, hogy

$$\sum_{k\le n}\Omega(k)=\sum_{k\le n}\sum_{p^a|k}1=\sum_{p^am\le n}1.$$

Majd ugyanazokat a megfontolásokat téve, mint az előbb, kapjuk azt az eredményt, hogy

$$\sum_{k\le n}\Omega(k)=\sum_{p^a\le n}\left\lfloor\frac{n}{p^a}\right\rfloor=\sum_{p\le n}\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{p^2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{p^3}\right\rfloor+...$$

Itt viszont kicsit módosul a gondolatmenet. Ha a magasabb rendű tagok nem lennének ott, akkor visszakapnánk az $\omega(k)$-ra tett becslésünket, ezért belátjuk, hogy a „maradék” nagysága „nem túl nagy”. A második lépésben felhasználva a mértani sor összegképletét megkapjuk, hogy nem keletkezik $O(n)$-nél nagyobb hiba. Felhasználható, hiszen $|p|>1$ minden p-re, így $|1/p|<1$ biztosan teljesül.

$$\sum_{p\le n}\left(\left\lfloor\frac{n}{p^2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{p^3}\right\rfloor+...\right)<n\cdot\sum_{p\le n}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+...\right)=n\cdot\sum_{p\le n}\frac{1}{p(p-1)}=O(n).$$

Tudjuk, hogy $\sum 1/(p^2-p)<\sum 1/n^2<\infty$ tagonként, tehát konvergens, így n-szer megszorozva $O(n)$-es hibát kapunk. Erre a függvényre is kijött az, hogy

$$\sum_{k\le n}\Omega(k)=\sum_{p\le n}\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor+\sum_{p\le n}\left\lfloor\frac{n}{p^2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{p^3}\right\rfloor+...=n\cdot\log\log(n)+O(n).$$

Tehát bebizonyítottuk azt, hogy

$$\sum_{k\leq n}\omega(k)\sim n\cdot\log\log(n),\qquad \sum_{k\leq n}\Omega(k)\sim n\cdot\log\log(n),$$

ahol $f\sim g$ azt jelenti, hogy f/g tart 1-hez, azaz aszimptotikusan egyenlőek. Szükségünk van arra az állításra, hogy

$$\log\log(2)+...+\log\log(n)\sim n\cdot\log\log(n),\tag{3.4}$$

ami ekvivalens azzal, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=2}^{n}\log\log(i)}{n\cdot\log\log(n)}=1.$$

A fenti állítást rendőrelvvel fogjuk igazolni. Felső becslést könnyű adni, ha minden tagot $\log\log(n)$-nel fölülről becsülünk, és hozzáadunk még egyszer $\log\log(n)$-et, mivel a számlálóban csak $n-1$ db tag van, a tört 1-et ad. Az alsó becsléshez felhasználjuk majd, hogy

$$\log\log(\sqrt{n})=\log(\frac{1}{2}\cdot\log(n))=\log(\frac{1}{2})+\log\log(n)=\log\log(n)-\log(2).\tag{3.5}$$

A szummában a $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ utáni tagokat $\log\log(n)-\log(2)$-vel, a $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ előtti tagokat pedig 0-val becsüljük. Ezt követően átalakítjuk a szummát, elhagyjuk az alsó egészrészt, és leosztunk tagonként.

$$\frac{\sum_{i=2}^{n}\log\log(i)}{n\cdot\log\log(n)}\geq\frac{\sum_{i=\lfloor\sqrt{n}\rfloor}^{n}\log\log(i)}{n\cdot\log\log(n)}\geq\frac{\sum_{i=\lfloor\sqrt{n}\rfloor}^{n}(\log\log(n)-\log(2))}{n\cdot\log\log(n)}=$$

$$=\frac{(n-\lfloor\sqrt{n}\rfloor)(\log\log(n)-\log(2))}{n\cdot\log\log(n)}\geq$$

$$\geq\frac{n\cdot\log\log(n)-\sqrt{n}\cdot\log\log(n)-n\log(2)+\sqrt{n}\log(2)}{n\cdot\log\log(n)}=$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{\log(2)}{\log\log(n)}+\frac{\log(2)}{\sqrt{n}\cdot\log\log(n)}\to 1\text{ ha }n\to\infty.$$

Így (3.4) alapján természetes azt mondani, hogy $\omega(n)$ és $\Omega(n)$ átlagos nagyságrendje is $\log\log(n)$. Ez még nem jelenti azt, hogy $\omega(n)$ (vagy $\Omega(n)$) feltétlenül $\log\log(n)$ körüli értéket vesz fel. Vegyünk erre egy szemléletes példát. Legyen

$$g(n):=\begin{cases}n & \text{ha } n \text{ köbszám;}\\ 0 & \text{különben.}\end{cases}$$

Ekkor

$$G(n):=\sum_{i=1}^{n}g(i)=\sum_{j\leq\sqrt[3]{n}}j^3\sim\frac{n^{4/3}}{4},$$

mivel az első k darab köbszám összege egyenlő a k-adik háromszögszám négyzetével. Ebből következik hogy $G(n)$ átlagértéke $n^{1/3}$-os nagyságrendű. A $g(n)$ időnként n, legtöbbször pedig 0.

Hardy és Ramanujan tétele azt fejezi ki, hogy ezzel az extrém példával szemben $\omega(n)$ és $\Omega(n)$ majdnem mindig $\log\log(n)$ körül értéket vesz fel. Belátható, hogy ebből a szempontból sincs nagy különbség a két függvény között, ezért ezentúl a könnyebbség miatt $\omega(n)$-et fogjuk vizsgálni. Mi a tétel egy lokális változatát fogjuk bizonyítani, ami azt jelenti, hogy adott k-ra nem a $\omega(k)$ és $\log\log(k)$ különbségét vizsgáljuk, hanem a $\omega(k) - \log\log(n)$-et. Ezt megtehetjük, mert a $\log\log(n)$ egy nagyon lassan növő függvény, és ez nem jelent sok „hibát".

Precízen a tétel a következőképp szól:

3.0.1. Tétel (Hardy-Ramanujan). *Bármely $\epsilon > 0$-hoz létezik olyan (az ϵ-tól függő) C, hogy tetszőleges $n \geq 3$ esetén az 1, 2, ... , n számok között legalább $(1-\epsilon)n$ darab olyan k található, amelyre*

$$|\omega(k) - \log\log(n)| < C\sqrt{\log\log(n)}.$$

Ennek a tételnek valószínűségszámítási tartalma is van, hiszen tekinthetünk úgy ω-ra, mint valószínűségi változóra, ami egyenlő valószínűséggel vesz fel $\omega(1), ..., \omega(n)$ értékeket. Ekkor az eddigi meggondolásaink alapján ennek a várható értéke kb. $\log\log(n)$. A leírás könnyebbítése miatt vezessük be a $\mu = \log\log(n)$ jelölést. Valószínűségszámítási fogalmakkal kifejezve azt kell vizsgálnunk, hogy az ω valószínűségi változó milyen valószínűséggel tér el a várható értékétől (azaz μ-től), majd belátjuk, hogy ez az eltérés „nem lehet túl nagy", azaz kicsi a szórása.

Ezek alapján a továbbiakban a szórásnégyzet nagyságát akarjuk meghatározni, azaz a

$$\sum_{k \leq n} \{\omega(k) - \mu\}^2$$

kifejezés átlagértékét. Valószínűségi szempontból az $n \cdot D(n)^2$-nek felelne meg. Elvégezve a négyzetre emelést azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k \leq n} \{\omega(k) - \mu\}^2 = \sum_{k \leq n} \{\omega(k)\}^2 - 2 \cdot \mu \cdot \sum_{k \leq n} \omega(k) + \mu^2 \cdot \sum_{k \leq n} 1, \tag{3.6}$$

amiben az utolsó két tagra vannak már becsléseink. Tehát a tétel bizonyításához szükségünk van még a:

$$\sum_{k \leq n} \{\omega(k)\}^2$$

becslésére is. Ehhez írjuk be kétszer az $\omega(k)$ definícióját, majd alakítsuk át aszerint, hogy a p és q prímek egyenlőek-e

$$\sum_{k \leq n} \{\omega(k)\}^2 = \sum_{k \leq n} \left(\sum_{p|k} 1 \right) \left(\sum_{q|k} 1 \right) = \sum_{k \leq n} \left(\sum_{p|k} 1 + \sum_{pq|k,\, p \neq q} 1 \right) =$$

Ennek a kettébontásnak az is előnye, hogy a $p = q$ esetben keletkező szummára már van becslésünk. A $p \neq q$ esetben pedig azt kell megfontolni, hogy adott k-ra ha $p|k$ és $q|k$, akkor $pq|k$, tehát létezik egy pozitív egész l, hogy $pql = k$. Megcserélve a két szummát, azaz felcserélve az összegzés sorrendjét, kapjuk azt, hogy

$$= \sum_{k \leq n} \sum_{p|k} 1 + \sum_{k \leq n} \sum_{pq|k,\, p \neq q} 1 = \sum_{p \leq n} \sum_{pm \leq n} 1 + \sum_{pq \leq n,\, p \neq q} \sum_{pql \leq n} 1 =$$

ahol m, l olyan pozitív egészek, amelyek kielégítik az egyenlőtlenséget. Az összes „jó” l-re 1-et számolva kapjuk a fenti átfogalmazást. Majd felhasználjuk azt a sokszor alkalmazott gondolatot, hogy ilyen „jó” l-ből (illetve m-ből) pont n/pq (illetve n/p) alsó egészrész db van.

$$= \sum_{p \le n} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \sum_{pq \le n,\, q \ne p} \left\lfloor \frac{n}{pq} \right\rfloor$$

Összefoglalva

$$\sum_{k \le n} \{\omega(k)\}^2 = \sum_{pq \le n,\, q \ne p} \left\lfloor \frac{n}{pq} \right\rfloor + \sum_{p \le n} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor . \tag{3.7}$$

Most meg szeretnénk becsülni (3.7) nagyságrendjét. Az ehhez hiányzó szumma becslésénél megállapítható, hogy

$$\sum_{pq \le n,\, q \ne p} \left\lfloor \frac{n}{pq} \right\rfloor = n \cdot \sum_{pq \le n,\, q \ne p} \frac{1}{pq} + O(n) = n \cdot \sum_{pq \le n} \frac{1}{pq} + O(n).$$

Az első egyenlőség azért teljesül, mert az alsó egészrész elhagyásával maximum 1 hiba keletkezik, és a szummában legfeljebb n tag van. A $q \ne p$ feltételt elhagyhatjuk, mert a prímek négyzetének reciprok összege konvergens, ugyanis

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty \qquad \text{és} \qquad \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p^2} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

tagonként. A $\sum 1/pq$ tagot azonban alulról és felülről is tudjuk becsülni

$$\left(\sum_{p \le \sqrt{n}} \frac{1}{p} \right)^2 \le \sum_{pq \le n} \frac{1}{pq} \le \left(\sum_{p \le n} \frac{1}{p} \right)^2$$

Az első egyenlőtlenség azért igaz, mert ha $p \le \sqrt{n}$ és $q \le \sqrt{n}$, akkor abból az következik, hogy $pq \le n$. A második pedig azért igaz, mert ha $pq \le n$, akkor $p \le n$ és $q \le n$ is teljesül.

A (3.2) miatt a jobb szélsőről tudjuk, hogy

$$\{\log\log(n) + O(1)\}^2 = \{\log\log(n)\}^2 + O(\log\log(n)),$$

nagyságrendű, de a (3.5)-ös megállapítás miatt ugyanez igaz a bal szélsőre is. Emiatt a középső kifejezés is szükségszerűen $\{\log\log(n)\}^2 + O(\log\log(n))$ nagyságrendű.

Ebből következik, hogy

$$\sum_{pq \le n,\, q \ne p} \left\lfloor \frac{n}{pq} \right\rfloor = n \cdot \{\log\log(n)\}^2 + O(n \cdot \log\log(n)). \tag{3.8}$$

Behelyettesítve (3.7)-be (3.3)-at és (3.8)-at kapjuk, hogy

$$\sum_{k \le n} \{\omega(k)\}^2 = n \cdot \{\log\log(n)\}^2 + O(n \log\log(n)) = n \cdot \{\mu\}^2 + O(n\mu), \tag{3.9}$$

és ezzel befejeztük a (3.7)-es képlet becslését.

Összefoglalva a (3.6)-os képlet becslését (felhasználva (3.9)-et és (3.3)-at), a következő végeredményhez jutunk:

$$\sum_{k\le n}\{\omega(k)-\mu\}^2 = n\cdot\{\mu^2+O(\mu)\}-2\cdot\mu\cdot n\{\mu+O(1)\}+\mu^2\{n+O(1)\} = O(n\mu) \tag{3.10}$$

Visszatérve a valószínűségszámítási gondolathoz, a fenti képlet egy becslés a szórásnégyzet nagyságára. Most jön az az elején említett gondolat, hogy nem lehet túl sok olyan tag, ami „túl nagy”, azaz esetünkben kívül esne a szórás konstansszorosán. Ennek belátásához tegyük fel, hogy van δn db olyan k, ami kisebb n-nél és

$$|\omega(k)-\mu| > \chi(n).$$

Ebből az következne, hogy

$$\sum_{k\le n}\{\omega(k)-\mu\}^2 = \delta n\chi(n)^2,$$

ami ellentmond (3.10)-nek, ha $\chi(n) > c\cdot\sqrt{\mu}$, alkalmas c-vel. Ebből következik, hogy nem lehet túlságosan sok tag, ami eltér az átlagértéktől, ami bizonyítja a tételünket.

A bizonyítás eredeti szerzője Turán Pál, akit ezen bizonyítása miatt a valószínűségi számelmélet elindítójánaként tartanak számon. Ennek az az oka, hogy a bizonyítás módja megegyezik a Csebisev egyenlőtlenség bizonyításának a gondolatával, annak ellenére, hogy ezt csak később elemezték ki.

4. fejezet

Négyzetszámokkal való előállítás

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk meg, hogy egy adott n szám hányféleképpen állítható elő mint adott k darab négyzetszám összege. Jelöljük ezt a számot $r_k(n)$-nel. Ramanujan szintén alkotott ebben a témakörben, és ebben az esetben is felmerül az a kérdés, hogy Ramanujan Angliában szerzett-e ismereteket a témáról, vagy magától fedezte fel őket. Akárhogy is történt, Ramanujan tételei így is, úgy is helytállóak.

Egyszerűbb esetekre már Ramanujan előtt is léteztek eredmények, Jacobi oldotta meg ezeket a $k = 2, 4, 6, 8$ esetre. Legelőször a $k = 2$ bizonyítását nézzük, azaz annak a diofantikus egyenlet megoldásainak a számát akarjuk megadni, hogy

$$x^2 + y^2 = n, \qquad x, y \in \mathbb{Z}, \tag{4.1}$$

ahol számít sorrend és az előjel is. Ehhez a témához azonban szükséges még néhány definíció.

4.1.1. Definíció. *Gauss-egésznek azt a $z = a + bi$ komplex számot nevezzük, ahol a és b egészek.*

A Gauss-egészek struktúrája nagyon szép, a komplex számok összeadására és szorzására nézve kommutatív, egységelemes, nullosztómentes gyűrűt alkotnak. Az összes egység az 1, a -1, az i és a $-i$. Az is teljesül, hogy egy Gauss-egész pontosan akkor Gauss-prím, ha Gauss-felbonthatatlan, valamint a Gauss-egészek körében is igaz a számelmélet alaptétele.

4.1.1. Tétel (A számelmélet alaptétele). *Minden 0-tól és egységektől különböző Gauss-egész felbontható véges sok Gauss-prím szorzatára, és ez a felbontás a tényezők sorrendjétől és egységszeresektől eltekintve egyértelmű.*

A következő tételre is szükségünk lesz:

4.1.2. Tétel. *Minden Gauss-prím a következő módon áll elő (ϵ tetszőleges egység)*

- *$\epsilon(1 + i)$;*
- *ϵq, ahol q pozitív $4k - l$ alakú prímszám;*

- *u, ahol $|u|^2$ egy $4k+1$ alakú prímszám. Minden ilyen prímszámhoz egységszerestől eltekintve két Gauss-prím tartozik, amelyek egymás konjugáltjai, de nem egymás egységszeresei.*

Adott n egész számra általában a kanonikus alakot úgy is felírhatjuk, hogy

$$n = 2^a \cdot p_1^{b_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{b_k} \cdot q_1^{c_1} \cdot \ldots \cdot q_l^{c_l}, \tag{4.2}$$

ahol p_i-k $4k+1$, a q_j-k pedig $4k-1$ alakú prímek, a kitevők pedig nemnegatív egészek. A Gauss-egészek körében is létezik kanonikus alak fogalom, ami egységtől és sorrendtől eltekintve egyértelmű. A 4.1.2 Tétel miatt n egyik ilyen kanonikus alakja

$$n = (-i)^a (1+i)^{2a} \cdot z_1^{b_1} \overline{z_1}^{b_1} \cdot \ldots \cdot z_k^{b_k} \overline{z_k}^{b_k} \cdot q_1^{c_1} \cdot \ldots \cdot q_l^{c_l}, \tag{4.3}$$

mivel $-i \cdot (1+i)^2 = -i \cdot (1+2i-1) = 2$ és $z_i \overline{z_j} = p_j$, ahol z_j Gauss-prím. Ez praktikus lesz a következő tétel bizonyításánál.

4.1.3. Tétel (Két-négyzetszám tétel). *A* (4.1) *egyenlet akkor és csak akkor oldható meg, ha* (4.2)*-ben $\forall i$-re c_i páros, és*

$$r_2(n) = 4 \prod_{j=1}^{k} (b_j + 1).$$

Bizonyítás: A bizonyítás alapötlete az, hogy a (4.1)-et

$$(x+iy)(x-iy) = n$$

alakba hozzuk, ahol $x+iy$ és $x-iy$ is Gauss-egész, amelyek egymás konjugáltjai. A gondolatmenet a következő: felírjuk n és $x+iy$ kanonikus alakját (felhasználjuk, hogy $x+iy$ osztja n-et) konjugáljuk, összeszorozzuk $x+iy$-t és $x-iy$-t, és megnézzük milyen feltételek mellett jöhet ki n. Az eredmény pedig az lesz, mint amit kimondtunk a tételben.

A bizonyítás alatt végig feltesszük, hogy egyik prím sem egységszerese a másiknak. Mivel $x+iy$ osztója n-nek (felhasználva a számelmélet alaptételét Gauss-egészekre), ezért $x+iy$ kanonikus alakja a következőképpen néz ki:

$$x + iy = \epsilon (1+i)^{a'} \cdot z_1^{b_1'} \overline{z_1}^{b_1''} \cdot \ldots \cdot z_k^{b_k'} \overline{z_k}^{b_k''} \cdot q_1^{c_1'} \cdot \ldots \cdot q_l^{c_l'},$$

ahol ϵ egység, és minden kitevő legfeljebb akkora, mint (4.3)-ban. Ezt konjugálva kapjuk azt az eredményt, hogy

$$x - iy = \overline{\epsilon} (1-i)^{a'} \cdot z_1^{b_1''} \overline{z_1}^{b_1'} \cdot \ldots \cdot z_k^{b_k''} \overline{z_k}^{b_k'} \cdot q_1^{c_1'} \cdot \ldots \cdot q_l^{c_l'},$$

Az utóbbit még tudjuk átalakítani, mivel $(1-i)^{a'} = ((-i)(i+1))^{a'} = (-i)^{a'}(1+i)^{a'}$, és így kanonikus alakba hoztuk.

Összeszorozva a két fenti számot kapjuk azt, hogy

$$n = (x+ix)(x-iy) = \epsilon\overline{\epsilon}(-i)^{a'}(1+i)^{2a'} \cdot$$

$$\cdot z_1^{b_1'+b_1''} \overline{z_1}^{b_1''+b_1'} \cdot \ldots \cdot z_k^{b_k'+b_k''} \overline{z_k}^{b_k''+b_k'} \cdot q_1^{2c_1'} \cdot \ldots \cdot q_l^{2c_l'}$$

és ennek az eredménynek kell egyenlőnek lennie a (4.3)-beli felbontással.

Ebből következik, hogy ez csak az $a' = a$, $b'_j + b''_j = b_j$ és a $2c'_j = c_j$ feltételek mellett teljesülhet. Ez pontosan azt jelenti, hogy minden c_j kitevő páros, ami a tétel első állítása. A ϵ, b'_j-k és b''_j-k azonban „szabad" paraméterek, amik a megoldások számát befolyásolják.

Mivel ϵ megválasztására 4 opció van, b'_j a $0, ..., b_j$ értékek között mozog, b''_j pedig b'_j kiválasztása után egyértelmű, ezért az egyenlet megoldásainak a száma $4 \cdot \prod_{j=1}^{k}(b_j + 1)$-gyel egyenlő. □

Létezik másik bizonyítás is ugyanerre a tételre, ami hasonlít a Partíciószámok című fejezetben használt hatványsoros előállításokra. Ez a bizonyítás felhasználja a Jacobi-theta függvényt:

$$\vartheta(x) = 1 + 2x + 2x^4 + ... = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^{m^2}$$

Ekkor $\vartheta(x)^2$-ről belátható, hogy előáll mint:

$$\vartheta(x)^2 = (1+2x+2x^4+...)(1+2x+2x^4+...) = 1+4x+4x^2+4x^4+8x^5+4x^8+... =$$

$$= 1 + 4(x + x^2 + x^4 + ...) = 1 + 4\left(\frac{x}{1-x} - \frac{x^3}{1-x^3} + \frac{x^5}{1-x^5} - ...\right) \quad (4.4)$$

De $\vartheta(x)^2$-re igaz az is, hogy x^n együtthatója pontosan annyi, ahányféleképpen előállítható n, mint két négyzetszám összege. A fenti formulát átírhatjuk úgy, hogy

$$\vartheta(x)^2 = 1 + 4\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{x^{2i+1}}{1-x^{2i+1}} = 1 + 4\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^i x^{(2i+1)j} =$$

$$= 1 + 4\sum_{d=1,\, 2\nmid d}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{\frac{d-1}{2}} x^{dj} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 4 \sum_{d|n,\, 2\nmid d}(-1)^{\frac{d-1}{2}} x^n.$$

Az utolsó előtti egyenlőségnél átírtuk úgy a szummát, hogy d csak a páratlan számokat fussa be, az utolsó egyenlőségnél pedig megfordítottuk az összegzés sorrendjét. A legutolsó formulából már látszik, hogy x^n együtthatója (ahol $n \neq 0$), azaz a (4.1)-es feladat megoldásainak a száma

$$r_2(n) = 4\sum_{d|n,\, 2\nmid d}(-1)^{\frac{d-1}{2}} = 4 \cdot (d_{4m+1} - d_{4m-1}),$$

ahol d_{4m+1} (illetve d_{4m-1}) n-nek a $4m + 1$ (illetve $4m - 1$) alakú osztóinak a számát jelenti.

Ez ugyanaz az eredmény, mint amit az előzőleg kaptunk. Legyenek ugyanis n kanonikus alakjában p_i-k $4k + 1$, a q_j-k pedig $4k - 1$ alakú prímek, és minden q_i páros hatványon szerepel. Ahhoz az osztóhoz, amiben a q_1 a $2s - 1$-ediken szerepel, hozzápárosítjuk azt, amiben a q_1 a $2s$-ediken szerepel. Ezután minden olyan osztóhoz, amiben q_2 a páratlan hatványon szerepel, q_1 pedig nincs benne, rendeljük hozzá azt az osztót, ami csak abban különbözik, hogy q_2 az eggyel nagyobb hatványon szerepel. Hasonlóan folytatjuk minden q_i-re. Ekkor minden $4k + 1$ alakú osztóhoz hozzárendeltünk egy $4k - 1$ alakú osztót. Ezért a fenti különbségben azok az osztók maradnak, amikben nem szerepel $4k-1$ alakú prím, ezeknek a száma pedig a Két-négyzetszám tételben kapott eredmény.

Ramanujan egyik nagy eredménye az volt, hogy elemi bizonyítást talált a (4.4)-es formulára. A $k=3$, $k=4$ esetre is léteznek tételeink:

4.1.4. Tétel (Három-négyzetszám tétel). *Egy n pozitív egész pontosan akkor áll elő három négyzetszám összegeként, ha nem $n=4^k(8m+7)$ alakú.*

4.1.5. Tétel (Négy-négyzetszám tétel). *Minden n pozitív egész előáll négy négyzetszám összegeként, a megoldások száma pedig:*

$$r_4(n) = \begin{cases} 8\sum_{d|n} d & \text{ha } n \text{ páratlan;} \\ 24\sum_{d|n,\, 2\nmid d} d & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

Ebből következik, hogy minden 4-nél magasabb k-ra is igaz, hogy n előáll, mint k db négyzetszám összege, azonban a megoldások száma azonban még mindig érdekes kérdés. A $k=4$ esetre létezik a 2-höz hasonló hatványsoros előállítás is, ahol a Jacobi-theta függvény 4. hatványának segítségével dolgozunk.

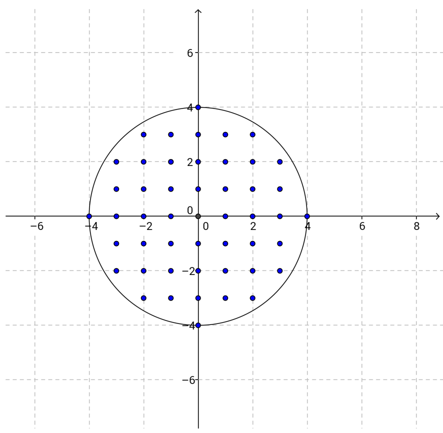
Érdekes kérdés lehet még a (4.1) kapcsán, hogy mennyi az $r_2(n)$ függvény átlagértéke. Ehhez egy geometriai megoldást adunk, ahol úgy tekintünk az egyenletre, mint egy $\sqrt{n}$ sugarú, origó középpontú körre.

Ekkor $r_2(n)$ megadja azt is, hogy hány rácspont (azaz egész koordinátájú pont) található a $\sqrt{n}$ sugarú körön. Ekkor $\sum_{i=1}^{n} r_2(i)$ becsülhető az összes olyan rácspont számával, ami a körön belül található, azaz olyan x-et és y-t keresünk, amire

$$x^2+y^2 \leq n, \quad x,y \in \mathbb{Z}.$$

A rácspontok számát úgy becsüljük, hogy egységnégyzetet rajzolunk a pontok köré, és az így kialakult síkidom területét becsüljük.

Ez körülbelül akkora, mint a $\sqrt{n}$ sugarú kör területe, a hibák nagysága pedig a $[\sqrt{n}-0,5; \sqrt{n}+0,5]$ sugarú körgyűrű területe, hiszen ez a köré- és belé írható kör különbsége.



4.1. ábra. Az n=16 eset

$$\pi \cdot ((\sqrt{n}+0,5)^2 - (\sqrt{n}-0,5)^2) = 2\pi\sqrt{n} = O(\sqrt{n})$$

Ebből következik, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} r_2(i) = \pi \cdot n + O(\sqrt{n}).$$

Azaz megkaptuk az átlagértékre azt, hogy

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} r_2(i)}{n} = \pi + O(\frac{1}{\sqrt{n}}) \implies \frac{\sum_{i=1}^{n} r_2(i)}{n} \sim \pi.$$

4.2. Waring-problémakör

Waring-problémakörnek nevezzük azt az általa megfogalmazott sejtést, hogy ha k tetszőleges pozitív egész, akkor létezik hozzá egy $g = g(k)$ szám, amire teljesül, hogy minden n előáll, mint g db nemnegatív egész k-adik hatványa. Azaz létezik $x_1, ..., x_g \in \mathbb{N}$, hogy
$$n = x_1^k + x_2^k + ... + x_g^k.$$
Természetesen $g(k)$ nem függ n-től. Az előbbiek alapján $g(2) = 4$. Waringnak a sejtését ugyan Hilbert igazolta 1909-ben, de megoldatlan probléma maradt a $g(k)$ pontos értéke. Ebben a témakörben alkotott Ramanujan, Hardy és Littlewood segítségével. Itt is nagyon jól megmutatkozik, hogy Ramanujan újszerű gondolkozásmódja hatásosnak volt klasszikus számelméleti problémákkal szemben.

A hatványsoros előállításoknál sokszor használt gondolatot alkalmazva, vették a következő függvényt
$$h(x) = 1 + x^{1^k} + x^{2^k} + ... + x^{m^k},$$
majd a $h(x)^b$-t, ahol b tetszőleges pozitív egész. Ekkor ha $h(x)^b$ minden együtthatója pozitív, az pontosan azt jelenti, hogy minden szám előáll, mint b db k-adik hatvány összege. Ebből következik, hogy $g(k) \leq b$. Itt alkalmazták Ramanujan ötletét, és ezzel nyerték az első explicit korlátot, tehát azt, hogy elég nagy n esetén
$$g(k) \leq (k-2) \cdot 2^{k-1} + 5, \ \ \forall k \geq 2.$$
A másik irányban könnyen adódik a következő tétel:

4.2.1. Tétel.
$$g(k) \geq 2^k + \left\lfloor \left(\frac{3}{2}\right)^k \right\rfloor - 2$$

Bizonyítás: A bizonyításhoz minden k-hoz találni fogunk egy olyan k-tól függő n-et, amihez pont ennyi k-hatvány szükséges. Legyen n a legnagyobb olyan $c2^k - 1$ szám, ami kisebb, mint 3^k. Megállapítható, hogy ekkor c nem lehet nagyobb, mint $\lfloor (3/2)^k \rfloor$.

Ekkor n előállításhoz csak az 1^k és 2^k tagok használhatóak. Az olyan összeállítás, ami a lehető legkevesebb tagot használja fel, az $c-1$ db 2^k és $2^k - 1$ db 1-es összegéből áll, azaz
$$n = c \cdot 2^k - 1 = (c-1)2^k + 2^k - 1.$$
Mivel $c - 1 + 2^k - 1 = 2^k + c - 2$, ezért ebből következik, hogy
$$g(k) \geq 2^k + c - 2.$$
Beírva c becslését, kapjuk azt, hogy
$$g(k) \geq 2^k + \left\lfloor \left(\frac{3}{2}\right)^k \right\rfloor - 2.$$
□

Ennek az egyenlőtlenségnek az a különlegessége, hogy általában egyenlőség teljesül, és csaknem biztos, hogy nincsenek kivételek. Például k helyére 2-t írva megkapjuk a korábban említett 4 eredményt.

5. fejezet

Érdekességek

5.1. Ramanujan kongruenciák

Ramanujan korában még nagyon keveset tudtak a partíciószámokról, például az is nyitott kérdés volt, hogy a $p(n)$ mikor páros, vagy mikor páratlan. Akkoriban a partíciószámok táblázata a 200. tagig bezárólag készült el egy bizonyos McMahon őrnagynak köszönhetően. Ezt a táblázatot szemlélve, Ramanujantól megszokott módon, intuitívan sejtette meg a következő tételben szereplő kongruenciákat. Ezek is olyan tételek voltak, amelyeknek a fő nehézsége a kitalálásuk volt, de a bizonyításuk is sok meggondolást igényelt.

Legelőször a következő kongruenciákat publikálta:

$$p(5m+4) \equiv 0 \pmod 5 \tag{5.1}$$

$$p(7m+5) \equiv 0 \pmod 7 \tag{5.2}$$

$$p(11m+6) \equiv 0 \pmod{11} \tag{5.3}$$

Tehát az $5m+4$, $7m+6$ és $11m+6$ alakú számok partíciója osztható 5-tel, 7-tel, illetve 11-gyel. Először vegyük az (5.2)-es formula bizonyítását. Hardy Ramanujanról szóló előadásában az (5.1)-es formula levezetése szerepel, ami alapján készítettem el a szakdolgozatomban ismertetett bizonxítást.

Bizonyítás: Már korábban megállapítottuk, hogy a partíciószámok generátorfüggvénye

$$1 + p(1)x + p(2)x^2 + ... + p(k)x^k + ... = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)...(1-x^k)...} \tag{5.4}$$

Mi ebben a hatványsorban vizsgáljuk a $7m+5$ alakú számok partícióját, de a bizonyítás szempontjából egyszerűbb az x^{7m+7} alakú számokkal dolgozni. Ha x^2-tel végig szorozunk, kapjuk, hogy

$$F(x) = x^2 + p(1)x^3 + p(2)x^4 + ... + p(k)x^{k+2} + ... = \frac{x^2}{(1-x)...(1-x^k)...} \tag{5.5}$$

ahol az x^{7m+7} együtthatója $p(7m+5)$. Az $F(x)$-et tovább alakítjuk a vizsgálat könnyítése végett két (Ramanujan zsenialitását sejtető) ötlettel. Először is elvégezzük az alábbi átalakítást:

$$\frac{x^2}{(1-x)...(1-x^k)...} = ((1-x)...(1-x^k)...)^6 \frac{x^2}{((1-x)...(1-x^k)...)^7} \tag{5.6}$$

Majd az alábbi három szorzatra bontjuk:

$$x^2((1-x)...(1-x^k)...)^6 \cdot \frac{(1-x^7)(1-x^{14})...}{((1-x)...(1-x^k)...)^7} \cdot \frac{1}{(1-x^7)(1-x^{14})...} \tag{5.7}$$

Ezt a három tényezőt vizsgáljuk a következőkben, legelőször a második szorzótényezőt. Az $(1-x)^{-n}$ függvény binomiális sorát megkapjuk úgy, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k}(-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)(-n-1)\cdot ... \cdot(-n-k+1)}{k!} \cdot (-1)^k x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n)(n+1)\cdot ... \cdot(n+k-1)}{k!} \cdot x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k.$$

Ezért ezt $n = 7$-re alkalmazva megkapjuk azt, hogy

$$\frac{1}{(1-x)^7} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{6+k}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{6+k}{6} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(6+k)\cdot ... \cdot(1+k)}{6!} \cdot x^k. \tag{5.8}$$

Itt minden együttható osztható 7-tel, kivéve az 1, x^7, x^{14}, ... alakúakat, amik 1 maradékot adnak. A nevezőben ugyanis hat egymást követő szám szorzata van, ami a $k = 7i$ esetekben nem tartalmaz 7-tel osztható számot, viszont a 0-n kívül minden más maradékosztályt igen. Ez alapján

$$\frac{1}{(1-x)^7} \equiv \frac{1}{1-x^7} \pmod 7 \tag{5.9}$$

Tehát a két hatványsor tagonként megegyezik $\mathbb{Z}_7$ felett, mivel a jobb oldal egy mértani sor x^7 kvócienssel. Átszorzással kapjuk azt az eredményt, hogy

$$\frac{1-x^7}{(1-x)^7} \equiv 1 \pmod 7 \tag{5.10}$$

Ezt alkalmazva x-re, x^2-re, x^3-re stb. kapjuk azt, hogy

$$\frac{(1-x^7)(1-x^{14})...}{((1-x)...(1-x^k)...)^7} = \frac{(1-x^7)...(1-x^{7k})...}{(1-x)^7...(1-x^k)^7...} \equiv 1 \pmod 7 \tag{5.11}$$

Végezetül vizsgáljuk meg a legutolsó szorzótényezőt. Erről megállapíthatjuk, hogy

$$\frac{1}{(1-x^7)(1-x^{14})...} = (1+x^7+x^{14}+...)(1+x^{14}+x^{28}+...)... = \sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^{7n}, \tag{5.12}$$

mert a bal oldal azt az $f(m)$ függvényt generálja, amely azt fejezi ki egy adott m-re, hogy m hányféleképpen fejezhető ki 7-tel osztható számok összegeként. Mivel csak 7-tel osztható számok állíthatók elő 7-tel osztható számok összegeként, ezért $7n = m$ esetén n egész, és x^{7n} együtthatója $p(n)$.

Most vizsgáljuk az első szorzótényezőt, ami legyen $G(x)$. Ehhez szükségünk lesz a Jacobi formulára, aminek a bizonyítását most nem részletezzük.

$$\{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)...\}^3 = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k(2k+1)x^{\frac{k^2+k}{2}} \tag{5.13}$$

Átalakítva a $G(x)$-et és felhasználva a Jacobi formulát a következő eredményhez jutunk:

$$G(x) = x^2\{(1-x)(1-x^2)...\}^6 = x^2(\{(1-x)(1-x^2)...\}^3)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^{i+j}(2j+1)(2i+1)x^{2+\frac{i^2+i}{2}+\frac{j^2+j}{2}} \tag{5.14}$$

Az (5.14) egyenletben az x^{7m+7} alakú tagok együtthatóit kell vizsgálnunk, ugyanis a második szorzótényező 1, a harmadik pedig csak x^{7k} alakú számokból áll, tehát ahhoz, hogy a szorzatban a 7-tel osztható kitevőjű számokat kapjuk, itt is olyanokat kell venni. Feltettük tehát, hogy

$$2 + \frac{i^2+i}{2} + \frac{j^2+j}{2}$$

osztható 7-tel. Szorozva 8-cal, és elvégezve a teljes négyzetté alakítást, kapjuk azt, hogy

$$(2j+1)^2 + (2i+1)^2 = 8\left(2 + \frac{i^2+i}{2} + \frac{j^2+j}{2}\right) - 14.$$

Mivel a jobb oldal oszható 7-tel, ezért a bal oldal is. Felhasználva azt, hogy

$$(2i+1)^2 \equiv 0, 1, 2, 4 \pmod 7,$$

két ilyen szám összegeként csak úgy jöhet ki 7-tel osztható, ha mindkettő osztható 7-tel (azaz mindkettő 0-val kongruens (mod 7)). Ekkor az (5.14) egyenletben $(2i+1)(2j+1)$ is osztható 7-tel (sőt 49-cel is), ami az x^{7m+7} alakú számok együtthatója.

A három szorzótényező ismeretében az $F(x)$ együtthatója az x^{7m+7} alakú számoknál (az m-hez megfelelő i-re és j-re)

$$(-1)^{i+j}(2j+1)(2i+1)\cdot 1\cdot p(m+1).$$

Az első tényezőről most állapítottuk meg, hogy osztható 7-tel. A legelején tett megfontolás alapján ha az $F(x)$ függvényben az x^{7m+7} alakú számok együtthatója osztható 7-tel, akkor $p(7m+5)$ is. □

Ramanujan később kimondott ennél kicsit többet is. Az 5^2 és 7^2 modulusokra bebizonyította, hogy

$$p(25m+24) \equiv 0 \pmod{5^2} \tag{5.15}$$

$$p(49m+47) \equiv 0 \pmod{7^2} \tag{5.16}$$

Ramanujan azt sejtette, hogy valami hasonló működik 5^a, 7^b és 11^c modulusokra is, ez azonban vegyes eredményeket hozott. A sejtése az volt, hogy $\delta{=}5^a\cdot 7^b\cdot 11^c$ és

$$24n \equiv 1 \pmod \delta$$

esetén

$$p(\delta\cdot m+n) \equiv 0 \pmod \delta$$

minden m-re. Ez tartalmazza az (5.1)-es, (5.2)-es, (5.3)-as, (5.15)-ös és az (5.16)-os kongruenciákat is. Például az (5.1)-es esetében $\delta{=}5$, $n{=}4$, ekkor

$$24\cdot 4 = 96 \equiv 1 \pmod 5$$

is teljesül. Később már δ=7^3 esetén találtak ellenpéldát. Ugyanakkor Krecmar belátta, hogy

$$p(125m + 99) \equiv 0 \pmod{5^3}$$

és Watson is bizonyított egy állítást általános 5^a modulusra.

Ugyanabban a publikációban, ahol a kongruenciákról ír, Ramanujan közölt két azonosságot is, bizonyítás nélkül.

$$p(4) + p(9)x + p(14)x^2 + ... = 5 \cdot \frac{\{(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{15})...\}^5}{\{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)...\}^6} \tag{5.17}$$

$$p(5) + p(12)x + p(19)x^2 + ... = 7 \cdot \frac{\{(1-x^7)(1-x^{14})(1-x^{21})...\}^3}{\{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)...\}^4} +$$
$$+ 49x \cdot \frac{\{(1-x^7)(1-x^{14})(1-x^{21})...\}^6}{\{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)...\}^7} \tag{5.18}$$

Ha ezekre az azonosságokra gondolunk, akkor képünk lehet arról, hogy Ramanujan hogyan sejthette meg intuitívan az (5.1) és (5.2) kongruenciákat. Az (5.17) és (5.18) egyenlet bizonyítását Ramanujan később sem közölte, később Mordell és Darling belátta őket.

5.2. Rogers-Ramanujan azonosságok

Ramanujan munkássága kapcsán említésre méltók még a Rogers-Ramanujan azonosságok. Ezeket eredetileg a Leonard James Rogers névre hallgató matematikus publikálta és bizonyította be 1894-ben, ám ez nem sok figyelmet kapott. Később Ramanujan maga is felfedezte őket 1913-ban, de bizonyítása nem volt rá. Amikor 1917-ben régi matematikai kiadványok között kutatott, akkor talált rá Rogers munkájára, majd közös munkába kezdtek, és sikerült egy egyszerűbb bizonyítást találniuk. Ugyanekkor Schur is elkezdett foglalkozni az azonosságokkal, miután felfedezte ezeknek egy egyszerű kombinatorikai interpretációját. Jelenleg több bizonyítás is létezik, de egyik sem egyszerű, és újszerű ötleteken alapszik. A két azonosság a következőképpen néz ki:

$$1 + \frac{x}{1-x} + \frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)} + ... + \frac{x^{m^2}}{(1-x)(1-x^2)...(1-x^m)} + ... =$$
$$\frac{1}{(1-x)(1-x^6)...(1-x^{5m+1})...(1-x^4)(1-x^9)...(1-x^{5m+4})...} \tag{5.19}$$

és

$$1 + \frac{x^2}{1-x} + \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)} + ... + \frac{x^{m(m+1)}}{(1-x)(1-x^2)...(1-x^m)} + ... =$$
$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^7)...(1-x^{5m+2})...(1-x^3)(1-x^8)...(1-x^{5m+3})...}$$

Ezek is Ramanujan-szerűen szép formulák, hiszen az azonosságok egyáltalán nem triviálisak. A bal oldal és a jobb oldal viszonya is érdekes, hiszen a jobb oldal annak az $f(n)$-nek a generálófüggvénye, ami minden n-re megadja azt, hogy n-nek hány olyan partíciója van, ami $5m+1$ és $5m+4$ (illetve $5m+2$ és $5m+3$) alakú számokból áll.

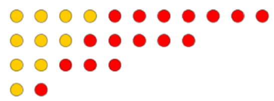
Az (5.19) formula bal oldala pedig azt adja meg, hogy adott n-re hány olyan partíció van, amelynek a tagjai között a minimális különbség 2. Ennek vizsgálatához először tekintsük az

$$\frac{x^{m^2}}{(1-x)(1-x^2)...(1-x^m)}$$

kifejezést. Ez megadja azt, hogy $n-m^2$-nek hány olyan partíciója van, aminek minden tagja legfeljebb m. Ismeretes, hogy minden m^2-re igaz, hogy

$$m^2 = 1+3+5+...+(2m-1).$$

Vegyük ezért $n-m^2$-nek egy olyan partícióját, ami legfeljebb m tagból áll, és a pontsémájához soronként illesszük hozzá m^2 felbontásából a tagokat, mint ahogy az alábbi ábrán látszik.



Ekkor n-nek egy olyan felbontását, kapjuk, aminek a tagjai között a minimális különbség 2. Ha az összes lehetséges m-re vesszük az ilyen partíciókat, akkor az (5.19) egyenlet jobb oldalát kapjuk, tehát n-nek az összes olyan partícióját, aminek a tagjai között a minimális különbség 2. Ez tehát egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés.

Irodalomjegyzék

[1] G. H. Hardy, *Twelve lectures on subjects suggested by his life and work*, Cambridge university press, 1940.

[2] Marcus du Sautoy, *A prímszámok zenéje*, Park Könyvkiadó, 2014.

[3] Turán Pál, *Egy különös életút, Ramanujan, 7. fejezet*, In: Freud Róbert (szerk.), *Nagy pillanatok a matematika történetében*, Gondolat Kiadó, 1981.

[4] Freud Róbert-Gyarmati Edit, *Számelmélet*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2000.