# Késleltetett differenciálegyenletek

N. Labancz

2014. május 24.

# Tartalomjegyzék

# 1. fejezet

# Bevezetés

## 1.1. A közönséges differenciálegyenletek

Mit nevezünk egyenletnek? Ez talán nem a legjobb kérdés, amivel ebben a témakörben kezdhetnénk, hiszen mindenkinek van egy intuitív kép/elképzelés a fejében, mit is gondol az "egyenlet" szó alatt. Nagy valószínűséggel gondol mindenki ilyenkor a jobb és bal oldal mennyiségi megegyezőségére, így az egyenlet definiálása nem oly célszerű. Nem precízen megfogalmazva a differenciálegyenlet alatt olyan egyenletet értünk, melyben függvények és deriváltak szzerepelnek a jobb illetve bal oldalon, közöttük az = jellel.

Sokkal jobb kérdés, hogy mit nevezünk egy differenciál egyenlet megoldásának.

**1.1.1.** Definíció. *Legyen $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ tartomány, $f(t, x(t))$ D-n értelme-*

*zett, folytonos függvény. Ekkor az*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f(t, x(t))$$

*egyenlet megoldása az* $x(t) : I \to \mathbf{R}^n$ *függvény, ha*

*i.* $x(t)$ *differenciálható* $I$*-n,*

*ii.* $(t, x(t)) \in D$*, ha* $t \in I$*,*

*iii.* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f(t, x(t))$*, ha* $t \in I$*.*

Válasszunk tetszőleges $(t_0, p_0) \in D$ pontot. Az

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f(t, x(t))$$

$$x(t_0) = p_0$$

Cauchy-probléma, az $x(t_0) = p_0$ kezdeti feltétel. Azon $(t_0, p_0) \in D$ pontokat, melyekre $t_0 \in I$, $x(t_0) = p_0$ teljesül, a Cauchy-probléma megoldásának nevezzük.

**1.1.2.** Tétel. *Legyen* $f(t, x(t))$ *folytonos a* $D$ *tartományon, és* $(t_0, p_0) \in D$ *tetszőleges. Ekkor az*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f(t, x(t))$$

$$x(t_0) = p_0$$

*kezdeti érték problémának mindíg létezik megoldása.*

Előfordulha, hogy ez a megoldás nem egyértelmű. Tekintsük az alábbi Cauchy-feladatot.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \sqrt{|x(t)|}$$

$$x(1) = 0$$

Egyértelműen látszik, hogy az $x(t) \equiv 0$ megoldása a fenti Cauch-feladatnak, továbbá az

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t \leq 1 \\ \frac{(t-1)^2}{2} & \text{ha } t > 1 \end{cases}$$

szintén kielégíti a fentit, így muntattunk két különböző megoldását a fenti problémának.

**1.1.3.** DEFINÍCIÓ. *Az $f(t, x(t))$ függvény a $D$ tartományon második változójában Lipschitz-tulajdonságú, ha $D$ minden pontjának létezik olyan $K$ környezete, és $L > 0 \in \mathbf{R}$, hogy*

$$|f(t_1, p_1) - f(t_2, p_2)| \leq L|p_1 - p_2|$$

$$(t_i, p_i) \in K$$

Ennek teljesülésének ellenőrzése általában nehéz feladatnak bizonyul, de lent megadunk egy szükséges feltételt, mely alapján könnyen eldönthető a fenti tulajdonság.

**1.1.4.** ÁLLÍTÁS. *Tegyük fel, hogy $f(t, x(t))$ olyan függvény, melyre létezik a*

$$\frac{\partial}{\partial x(t)} f(t, x(t))$$

*parciális derivált, mely folytonos a $D$ tartományon. Ekkor $f(t, x(t))$ második változójában Lipschitz-tulajdonságú.*

BIZONYÍTÁS. A fenti feltételek teljesülése esetén tudjuk, hogy bármely $(t^*, p^*) \in D$ pontnak létezik olyan $K \subset D$ környezete és $L > 0 \in \mathbf{R}$, melyre $(t, p) \in K$ esetén

$$|\partial_2 f(t, p)| < L$$

Lagrange-féle középértéktételét alkalmazva, bámely $(t, p_1), (t, p_2) \in K$ esetén

$$\frac{f(t,p_1) - f(t,p_2)}{(p_1 - p_2)} = \partial_2 f(t,p)$$

ahol $p \in (p_1, p_2)$, így $(t,p) \in K$. Felhasználva, hogy $|\partial_2 f(t,p)| < L$, kapjuk a

$$|f(t,p_1) - f(t,p_2)| \leq L|p_1 - p_2|$$

egyenlőtlenséget, így teljesül a Lipschitz tulajdonság.

**1.1.5.** Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f(t, x(t))$ függvény a $D$ tartományon folytonos, és ott teljesíti a Lipschitz-tulajdonságot. Ekkor bármely $(t_0, p_0) \in D$ pontra a Cauchy-féle feladatnak egyértelműen létezik megoldása.*

## 1.2. A késleltetett differenciálegyenletek

A késleltetett differenciálegyenletek alatt olyan differenciálegyenleteket értünk, melyek argumentumában valamilyen konstans, vagy időfüggő késleltetés jelenik meg. A való életben a legtöbb probléma ilyen késleltetett differenciálegyenletekre vezethető vissza, hiszen a bilológiából ismert populáció dinamika, vagy éppen a fertőzések terjedése ilyen egyenletekkel vizsgálható, írható le.

Az általános, n-ed rendű késleltetett diffferenciálegyenllet a következő alakban írható fel.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f(t, x(t-\vartheta_1), x(t-\vartheta_2), \ldots, x(t-\vartheta_n)), \text{ ahol } \vartheta_{i+1} > \vartheta_i \geq 0$$

$$x(t) = \varphi(t), \text{ ahol } t \in [t_0 - \vartheta_n, t_0]$$

Jegyezzük meg, hogy a késleltetés nem csak konstans tagból állhat, hanem $\vartheta_i = \vartheta_i(t)$ formalizmus is elképzelhető.

### 1.2.1. Egzisztencia és unicitás [1]

**1.2.1.** TÉTEL. *Legyen $D \subset [t_0, t_0+\beta] \times \mathbf{R}^n$ konvex tartomány, $f \in \mathcal{C}(D, \mathbf{R})$, továbbá*

$$\varphi(t) : [t_0 - \vartheta_n] \to D$$

*Tegyük fel, hogy $\vartheta_1 \neq 0$. Ekkor a késleltetett differenciálegyenletnek egyértelműen létezik megoldása a $[t_0, t_0+\alpha)$ intervallumon, ahol $\alpha \in (0, \beta]$. Továbbá, ha $\alpha < \beta$, akkor $t \to \alpha$ esetén $x(t)$ megközelíti $D$ határát. $\vartheta_1 = 0$ esetén, ha a késleltetett differenciálegyenletnek létezik megoldása, a megoldás egyértelmű.*

BIZONYÍTÁS. Egy konstruktív bizonyítást adunk, így azt két esetre bontjuk.
(1) eset. Tegyük fel, hogy $\vartheta_1 \geq 0$. Ekkor minden $i \in \{1, \ldots, n\}$-re $t_0 \leq t \leq \vartheta_1 + t_0$ esetén

$$x(t - \vartheta_i) = \varphi(t - \vartheta_i),$$

így kaptunk egy explicit kifejezést $f(t)$-re, azaz

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f(t, \varphi(t - \vartheta_1), \varphi(t - \vartheta_2), \ldots, \varphi(t - \vartheta_n))$$

$$x(0) = \varphi(0)$$

Következő lépésben integráljuk a fenti egyenletet $(0, t)$ intervallumon, ahol $t < \vartheta_1$.

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}x(u)\,\mathrm{d}u = \varphi(0) + \int_{t_0}^{t} f(u, \varphi(u - \vartheta_1), \ldots, \varphi(u - \vartheta_n))\,\mathrm{d}u$$

Ez $t \in [t_0, \vartheta_1]$ esetén egyértelműen meghatározza $x(t)$-t. Ezek után folytathatjuk a fenti eljárást a $[t_0 + \vartheta_1, t_0 + \min\{\beta, 2\vartheta_1\}]$ intervallumon, míg el nem érjük $\beta$-t.
(2) eset. $\vartheta_1 = 0$ és $t \in [t_0, t_0 + \vartheta_2]$ esetén,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f(t, \varphi(t), \varphi(t-\vartheta_2), \ldots, \varphi(t-\vartheta_n)) = f(t, x(t), \varphi(t-\vartheta_2), \ldots, \varphi(t-\vartheta_n))$$

$$x(0) = \varphi(0)$$

Az eredeti feltevésünk szerint, ha $f$ második változójában Lipschitz-tulajdonságú, akkor legfeljebb egy megoldás létezik.

**1.2.2.** TÉTEL (GRONWALL-EGYENLŐTLENSÉG). *Legyen* $\xi(\cdot)$, $\psi(\cdot) \in \mathcal{C}\big((a,b), \mathbf{R}^{>0}\big)$, *melyekre*

$$\xi(t) \leq C + \int_a^t \xi(x)\psi(x)\mathrm{d}x,$$

*ahol* $C > 0$ *konstans. Ekkor*

$$\xi(t) \leq C\exp\left(\int_a^t \psi(x)\mathrm{d}x\right)$$

BIZONYÍTÁS. Vezessük be a következő jelöléseket.

$$\Xi(t) = C + \int_a^t \xi(x)\psi(x)\mathrm{d}x$$

$$\Psi(t) = \int_a^t \psi(x)\mathrm{d}x$$

Ekkor teljesül, hogy

$$\Xi(a) = C,\ \Psi(a) = 0 \text{ és } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi(t) = \psi(t).$$

Ekkor a feltételünk nem lesz más, mint

$$\xi(t) \leq \Xi(t)$$

Ezt deriválva, $\exp\big(-\Psi(t)\big)$-vel szorozva, illetve ismét deriválva kapjuk a bal oldalra, hogy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\Xi(t)\exp\big(-\Psi(t)\big)\Big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Xi(t)\exp\big(-\Psi(t)\big) - \Xi(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi(t)\exp\big(-\Psi(t)\big),$$

ami $\leq 0$. A bal oldalt integrálva $a$ és $t$ között,

$$0 > \int_a^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Xi(x)\exp\big(-\Psi(t)\big)\mathrm{d}x > \Xi(t)\exp\big(-\Psi(t)\big) - K,$$

amiből már követekzik tételünk állítása.

**1.2.3.** TÉTEL. *Legyen $f$ folytonos a $[t_0, t_0+\beta) \times D^n$-en. Tegyük fel, hogy $f$ kielégíti az erős Lipschitz-tulajdonságot $K$ konstanssal, vagyis*

$$|f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) - f(t, \hat{x_1}, \hat{x_2}, \dots, \hat{x_n})| \leq K \max_{i \leq j \leq n} |x_j - \hat{x_j}|.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = f\big(t, x(t-\vartheta_1), x(t-\vartheta_2), \dots, x(t-\vartheta_n)\big)$$

*Tegyük fel, hogy $x_1(t)$ és $x_2(t)$ megoldásai a fenti egyenletnek. Legyenek a megfelelő kezdeti függvények $\Phi_i(t)$, melyekre*

$$x_i(t) = \Phi_i(t), \text{ ha } t \in [t_0 - r, t_0]$$

*Ekkor*

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq \sup_{x \in [t_0 - r, t_0]} |\Phi_1(x) - \Phi_2(x)|, \text{ ahol } t \in [t_0, t_0 + \beta]$$

BIZONYÍTÁS. Jelölje $\nu(t) = \sup_{x \in [t_0 - r, t_0]} |x_1(x) - x_2(x)|$ függvényt. Továbbá

$$x_i(t) = \Phi(0) + \int_{t_0}^{t} f\big(x, \Phi_i(x-\vartheta_1), \dots, \Phi_i(x-\vartheta_n)\big)\mathrm{d}x.$$

Ekkor

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq |\Phi_1(t) - \Phi_2(t)| + \int_{t_0}^{t} \left| \sum_{i \in \{1,2\}} (-1)^{i-1} f\big(x, \Phi_i(x-\vartheta_1), \dots, \Phi_i(x-\vartheta_n)\big) \right| \mathrm{d}x.$$

Mivel $f$ kielégíti az erős Lipschitz-feltételt, ezért az integrál felülről becsülhető $K \int_{t_0}^{t} \max_{1 \leq j \leq n} |\Phi_1(x-\vartheta_j) - \Phi_2(x-\vartheta_j)|$-vel, vagyis

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq |\Phi_1(t) - \Phi_2(t)| + K \int_{t_0}^{t} \max_{1 \leq j \leq n} |\Phi_1(x-\vartheta_j) - \Phi_2(x-\vartheta_j)|$$

$$\leq \nu(t_0) + K \int_{t_0}^{t} \nu(x)\mathrm{d}x$$

Ezek után alkalmazva a fenti 1.2.2 tételt, kapjuk

$$\nu(t) \leq \nu(t_0) \exp\left( \int_{t_0}^{t} \nu(x)\mathrm{d}x \right),$$

amiből következik állításunk.

# 2. fejezet

# Stabilitás

## 2.1. Bevezetés

Legyen az autonóm rendszerünk a következő.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f(x(t-\vartheta)) \tag{2.1}$$

**2.1.1.** DEFINÍCIÓ. *A $\xi \in D$ pontot a 2.1 egyenlet egyensúlyi pontjának nevezzük, ha*

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)\right|_{t=\xi} = 0$$

Mint láthatjuk, az egyensúlyi pont független a $\vartheta$ késleltetéstől.

**2.1.2.** DEFINÍCIÓ. *[3] Tegyük fel, hogy $\xi$ egyensúlyi pontja a 2.1 rendszernek. A $\xi$ pontot stabilnak nevezzük, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta > 0$ szám, melyre minden olyan $\varphi \in \mathcal{C}([t_0, t_0 + r], \mathbf{R}^n)$ függvényre, melyre $|\varphi| < \delta$*

*és $t \in [t_0, t_0 + r]$ esetén*

$$|x(t;\varphi)| < \varepsilon.$$

*A $\xi$ pontot aszimptotikusan stabilnak nevezzük, ha stabil, továbbá létezik $\delta > 0$ szám, melyre $|\varphi| < \delta$ esetén*

$$\lim_{t\to\infty} x(t;\varphi) = 0.$$

*A $\xi$ pontot lokális attraktornak nevezzük, ha létezik $\alpha$-nak $U$ környezete, melyre*

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(x(t,U),\alpha) = 0$$

**2.1.3.** MEGJEGYZÉS. *A fenti definícióból következik, hogy egy egyensúlyi pont aszimptotikusan stabil akkor és csak akkor, ha lokális attraktor.*

Most tekintsük az $A \in \mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{n\times n})$ folytonos függvényt. Korlátozzuk vizsgálatunkat az autonóm késleltetett differenciál egyenletekre, vagyis olyan rendszerekre, mely közvetlenül nem függ az időtől. Ezzel nem teszünk nagy megkötést, hisz gondoljunk bele, hogy az eredeti differenciálegyenlet-rendszerünkhöz hozzá veszünk egy, az időre vonatkozó differenciálegyenletet, az eredetileg időfüggő egyenletünket autonóm rendszerré alakítottuk.

Tudjuk, hogy a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = A(t)x(t)$$

lineáris differenciálegyenlet stabilitása ekvivalens az $x(t) \equiv 0$ megoldás stabilitásával.

Most legyen $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, független $t$-től. Ekkor a fent leírtak szerint elegendő az azonosan 0 megoldás stabilitását vizsgálni, melyet az $A$ mátrix sajátértékének valós részének előjele befolyástol.

**2.1.4.** Tétel.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = Ax(t)$$

*differenciálegyenlet stabil, akkor és csak akkor, ha minden* $\lambda \in \mathbf{C}$ *komplex számra, mely az* $A$ *mátrix sajátértéke,* $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$*. Továbbá, ha* $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$*, akkor* $m(\lambda) = 1$*, ahol* $m : \mathbf{C} \to \mathbf{Z}$ $\lambda$ *multiplicitása a minimálpolinomban.*

Vizsgálatunkat folytassuk abban az esetben, amikor $x(t)$ argumentumában késleltetést feltételezünk. Ekkor $\vartheta$ késleltetést átparaméterezve, $t \to t/\vartheta$ kapjuk a következő késleltetett differenciálegyenletet.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = ax(t-1) \tag{2.2}$$

A 2.2 linearitásából adódóan keressük a megoldást az

$$x(t) = \rho e^{\lambda t}$$

alakban. Ezt helyettesítve 2.2-be, kapjuk

$$\lambda \rho e^{\lambda t} = a\rho e^{\lambda(t-1)} \tag{2.3}$$

$$a\rho e^{\lambda(t-1)} = a\rho e^{\lambda t} e^{-\lambda}$$

2.3-t egyszerűsítve, nullára rendezve kapjuk a

$$\lambda - ae^{-\lambda} = 0 \tag{2.4}$$

összefüggést, mely alapján definiálhatjuk az állandó együtthatós késleltetett lineári differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletét.

**2.1.5.** Definíció.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i x(t-\vartheta_i) \tag{2.5}$$

*késleltetett differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletén a*

$$\det\left(\lambda I - \sum_{i=1}^{n} A_j e^{-\lambda\vartheta_i}\right) = 0 \tag{2.6}$$

*egyenletet értjük.*

A következőkben tekintsük 2.2 már felírt karakterisztikus egyenletének gyökeit. A lehetséges gyököket bontsuk két csoportra.

Elsőként tekintsük, amikor $\lambda \in \mathbf{R}$. Ekkor a 2.4 megoldásaként kapjuk

$$a = \lambda e^{\lambda}.$$

Ezt vizsgálva láthatjuk, hogy egyetlen pozitív gyök létezik, ha $a > 0$, és két különböző negatív gyök $a \in (0, -e^{-1})$ esetén. Ha $a = -e^{-1}$, akkor 2.4-nek egyetlen gyöke létezik, $\lambda = -1$, melyre $m(\lambda) = 2$. $a < -e^{-1}$ esetén nincs valós gyöke 2.4-nek.

Most vizsgáljuk a $\lambda \in \mathbf{C}$ esetet. Ekkor $\lambda$-t $\lambda = \mathrm{Re}(\lambda) + i\mathrm{Im}(\lambda)$ alakban írva 2.4-be, majd külön választva a valós, illetve képzetes részt, két egyenletet kapunk.

$$\mathrm{Re}(\lambda) - ae^{-\mathrm{Re}(\lambda)}\cos(\mathrm{Im}(\lambda)) = 0 \tag{2.7}$$

$$\mathrm{Im}(\lambda) + ae^{-\mathrm{Re}(\lambda)}\sin(\mathrm{Im}(\lambda)) = 0 \tag{2.8}$$

Rendezve az egyenletet, kapjuk a következő összefüggést.

$$\cot(\mathrm{Im}(\lambda)) = -\frac{\mathrm{Re}(\lambda)}{\mathrm{Im}(\lambda)} \tag{2.9}$$

Láthatjuk, hogy 2.9 független $a$ paraméter értékétől.

Összefoglalva, közönséges differenciálegyenletek esetén a Routh-Hurwitz kritérium segítségével számítás nélkül eldönthető a rendszer stabilitása. Késleltetett differenciál egyenletek esetén ennél bonyolultabb ennnek a problémának az eldöntése. Hisz láthatjuk, a 2.6 transzcendens, vagyis gyökeinek száma nem véges.

**2.1.6.** ÁLLÍTÁS. *Bármely állandó együtthatós késleltetett lineáris differenciál egyenlet-rendszer karakterisztikus egyenletének végtelen számú gyöke létezik, melyre* $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.

BIZONYÍTÁS. Indirekt tegyük fel, hogy a karakterisztikus egyenletnek legfeljebb véges sok gyöke létezik, melyre $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$. Vagyis létezik pozitív $\kappa$, mely torlódási pontja a $\mathrm{Re}(\lambda)$-nak. Ez ellentmondás, hisz a gyökök nem torlódhatnak, leszámítva a $\mathrm{Re}(\lambda) = -\infty$ pontot ($|\lambda| \to \infty$ esetén $\mathrm{Re}(\lambda) \to -\infty$).

**2.1.7.** TÉTEL. *Tekintsük a következő késleltetett differenciál egyenlet rendszert.*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = A_1 x(t-\vartheta) - A_2 x(t) \tag{2.10}$$

*Tegyük fel, hogy* $|A_1| < A_2$. *Ekkor a fenti rendszer minden megoldása tart nullához, midőn* $t \to \infty$.

BIZONYÍTÁS. A fenti rendszer megoldásaként tekintsük az $e^{\lambda t}$, majd írjuk fel a karakterisztikus egyenletet.

$$\lambda = A_1 e^{-\lambda\vartheta} - A_2$$

Tekintsük $\lambda \in \mathbf{C}$ számot a következő alakban.

$$\lambda = \mathrm{Re}(\lambda) + i\mathrm{Im}(\lambda)$$

Ezt az alakot felhasznál, helyettesítve az egyenletbe,

$$\mathrm{Re}(\lambda) + i\mathrm{Im}(\lambda) = A_1 e^{-\mathrm{Re}(\lambda)\vartheta} e^{-i\mathrm{Im}(\lambda)\vartheta} - A_2$$

$$A_1 e^{-\mathrm{Re}(\lambda)\vartheta} e^{-i\mathrm{Im}(\lambda)\vartheta} - A_2 = A_1 e^{-\mathrm{Re}(\lambda)\vartheta}\big(\cos(\mathrm{Im}(\lambda)\vartheta) - i\sin(\mathrm{Im}(\lambda)\vartheta)\big) - A_2$$

Tekintsük az egyenlet valós részét.

$$\mathrm{Re}(\lambda) + A_2 = A_1 e^{-\mathrm{Re}(\lambda)\vartheta}\cos(\mathrm{Im}(\lambda)\vartheta)$$

Mivel bármely $\varrho \in \mathbf{R}$ számra a karakterisztikus egyenletnek legfeljebb véges számú gyöke létezik, melyre $\mathrm{Re}(\lambda) \geq \varrho$, speciálisan $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$ esetén

$$A_2 \leq \mathrm{Re}(\lambda) + A_2 =$$

$$= A_1 e^{-\mathrm{Re}(\lambda)\vartheta}\cos(\mathrm{Im}(\lambda)\vartheta) \leq A_1 e^{-\mathrm{Re}(\lambda)\vartheta} \leq A_1,$$

ami ellentmondás a felételünknek, miszerint $|A_1| < A_2$.

Ezek után tekintsük azt az esetet, amikor $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$. $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ esetén a karakterisztikus egyenlet bármely megoldásához létezik $M > 0$ és $\gamma > 0$, hogy a késleltetett differenciál egyenlet egyes $\varphi \in \mathcal{C}([t_0 - r, t_0], \mathbf{R})$ megoldásaira

$$\sup_{t\in[t_0-r,t_0]} |x(t;\varphi)| \leq M \sup_{t\in[t_0-r,t_0]} |\varphi| e^{-\gamma(t-t_0)}$$

A fenti eredményt felhasználva kapjuk, hogy

$$|x(t)| \leq Me^{-\gamma t}.$$

Így látjuk, hogy minden megoldásnak 0-hoz kell tartania, miközben $t \to \infty$.

**2.1.8.** Megjegyzés. *A* $\big(\mathcal{C}([t_0 - r, t_0], \mathbf{R}), ||\cdot||\big)$ *teljes normált tér, vagyis Banach-tér, a*

$$||\phi|| = \sup_{t\in[t_0-r,t_0]} |\phi(t)|$$

*normával.*

Másrészről, ha 0 nem stabil, akkor az azt jelenti, hogy van olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy minden $\delta \in (0, \varepsilon)$-ra létezik $\varphi$ függvény, melyre $||\varphi|| < \delta$, továbbá létezik $T > 0$, hogy

$$|x(T, \varphi)| = \varepsilon,$$

és $|x(t - \vartheta, \varphi)| < \varepsilon$, minden $\vartheta \in (0, r]$.

A jelen fejezetben leírtak alapján megállapíthatjuk, hogy a lineáris rendszer stabilitásában fontos szerepet játszanak a karakterisztikus egyenlet gyökei. Ha létezik olyan $\lambda$ gyöke a karakterisztikus egyenletnek, melynek valós része pozitív, az rendszerünk nem stabil. Aszimptotikus stabilitás szükséges és elégséges feltétele, hogy az összes $\lambda$-ra $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.

## 2.2. Sturm sorozatok

Mint láthattuk a differenciálegyenletek stabilitásának vizsgálatát jelentősen megnehezítik, ha késleltetett differenciálegyenletekről van szó. Vagyis az $\dot{x}(t) = f(t, x(t - \vartheta))$ rendszer stabilitásának meghatározó tényezője $\vartheta$ értéke. A stabil egyensúlyi állapot instabillá válhat, ha $\vartheta$ értékét növeljük, vagyis a karakterisztikus egyenlet gyökeinek valós része ennek következtében változhat. Ebben a fejezetben ennek megfelelően egy új módszert elemzünk, mely a Sturm sorozatok oldaláról közelíti meg a problémát.

**2.2.1.** Definíció. *Sturm-láncnak nevezzük polinomok $\{P_i(x)\}_{i=0}^{m}$ véges csökkenő sorozatát, melyre $P_0(x)$ olyan polinom, melynek nincsenek többszörös gyökei, valamint, ha $\xi$ valamely $i \in \{1, \ldots, m-1\}$-re gyöke $P_i(x)$-nek, akkor $P_{i-1}(\xi) \neq 0$ valamint $P_{i+1}(\xi) \neq 0$, $P_{i-1}(\xi)$ előjele ellentétes $P_{i+1}(\xi)$ előjelével.*

*Továbbá minden $x_1$, $x_2$-re*

$$\frac{P_m(x_1)}{|P_m(x_1)|} = \frac{P_m(x_2)}{|P_m(x_2)|} \neq 0.$$

Hogyan készíthetünk ilyen Sturm-láncokat. A következő tétel egy ilyen metódust mutat, melynek ereménye a fenti feltételeket kielégítő polinomok sorozata.

**2.2.2.** TÉTEL. *Legyen $P(x)$ egy polinom, melynek nincsenek többszörös gyökei. Ekkor a $\{P_i(x)\}_{i=0}^m$ Sturm-lánc, ha*

$$P(x) = P_0(x)$$

$$P_1(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P_0(x)$$

$$P_k(x) = P_{k-1}(x)Q_{k-2}(x) - P_{k-2}(x)$$

*Az eljárást addig folytatjuk, míg $P_m(x)Q_m(x) - P_{m-1}(x) = 0$.*

**2.2.3.** TÉTEL. *Legyen $P(x) = P_0(x)$ tetszőleges négyzet-mentes, továbbá $(a, b)$ olyan intervallum, melyre minden $i \in \{1, \ldots, m-1\}$-re*

$$P_i(a) \neq 0 \text{ és } P_i(b) \neq 0,$$

*$\{P_i(x)\}_{i=0}^m$ a megfelelő Sturm-lánc. Minden $c$ konstans számra jelölje $\Sigma(c)$ az előjelek váltakozásának számát $\{P_i(c)\}_{i=0}^m$ sorozatában. Ekkor $P(x)$-nek $\Sigma(a) - \Sigma(b)$ különböző gyöke van az $(a, b)$ interallumon.*

BIZONYÍTÁS. Először vegyük érszre, hogy ha $\xi$ gyöke $P(x)$-nek, akkor $\xi$ kellően kis $\varepsilon > 0$ sugarú környezetében minden $0 < \delta < \varepsilon$ esetén $P(\xi + \delta)$ és $P(\xi - \delta)$ különböző előjelű. Ennek magyarázata, hogy $P(x) = (x - \xi)G(x)$

felbontás esetén $G(\xi) \neq 0$, hiszen a feltevésünk szerint $P(x)$ négyzet-mentes, $G(x)$-nek $\xi$ nem gyöke, így annak közelében előjele állandó.
Most megmutatjuk, hogy $\Sigma$ értéke nem változik, ha létezik $\xi$ gyöke valamely közbenső polinomnak.

Tegyük fel, hogy valamely $i \geq 1$-re $P_i(x)$-nek létezik egy $\xi$ gyöke. A definícióból adódik, hogy $P_{i-1}(\xi)$ és $P_{i+1}(\xi)$ egyik értéke sem nulla, továbbá ellentétes előjelűek, így ezeknek a függvényeknek $\xi$ nem gyöke, az előjel váltás csak eltolódik, de $\Sigma$ értéke nem változik. Ha $P_i(x)$ előjele pozitívból negatívba vált, $P_{i-1}(x)$ és $P_{i+1}(x)$ előjelétől függően a "minta" a következőképp alakul.

$$(-++) \rightarrow (--+), \text{ vagy } (+--) \rightarrow (++-).$$

Hasonlóképp $P_i(x)$ negatívból pozitívba váltása esetén

$$(--+) \rightarrow (-++), \text{ vagy } (+--) \rightarrow (++-).$$

Bármely esetbe az előjelek összes változása nem változik, így $\Sigma$ értéke ebben az esetben is változatlan marad.
Végül legyen $P_0(x)$ gyöke $\xi$. Ha ez pozitívból negatívba vált, akkor tudjuk, hogy $\xi$ egy kis környezetében deriváltja negatív. Így a "minta" a következőlépp alakul: $(+-) \rightarrow (--)$, így $\Sigma$ értéke csökken. Negatívból pozitívba váltás esetén szintén hasonló a helyzet, melynek következtében $\Sigma$ értéke ismét csökken. Így láthatjuk, hogy $\Sigma(a) - \Sigma(b)$ valóban a gyökök teljes száma az $(a, b)$ intervallumon.

### 2.2.1. A kritikus késleltetés létezése [4]

$\vartheta$ jelölje a késleltetés "hosszát". Ekkor a késleltetett differenciálegyenletünk transzcendens egyenletét a következő alakba írhatjuk.

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j + e^{-\lambda\vartheta} \sum_{j=0}^{m} b_j \lambda^j = 0$$

$\vartheta = 0$ eseté a polinomunk minden gyökére $\mathrm{Re}(\xi) < 0$. $\vartheta$ növelésével változnak a gyökök is, vagyis létezik $\vartheta$ egy olyan értéke, melyre $\mathrm{Re}(\xi) > 0$. Ha ez igaz, akkor létezik olyan is, amikor $\xi$ tisztán képzetes részből áll.

Először keressük ezt a tisztán képzetes gyököt ($i\zeta$, $\zeta \in \mathbf{R}$).

$$P_1(i\zeta) = \sum_{j=0}^{n} a_j \zeta^j, \; P_2(i\zeta) = \sum_{j=0}^{m} b_j \zeta^j$$

$$P_1(i\zeta) + e^{-i\zeta\vartheta} P_2(i\zeta) = 0$$

Írjuk ki $P_1$ és $P_2$ polinomok képzetes és valós részét, valamint alkalmazzuk az ismert trigonometrikus alakot.

$$R_1(\zeta) + iI_1(\zeta) + \big(R_2(\zeta) + iI_2(\zeta)\big)\big(\cos(\zeta\vartheta) - i\sin(\zeta\vartheta)\big) = 0$$

$$R_1(\zeta) + R_2(\zeta)\cos(\zeta\vartheta) + I_2(\zeta)\sin(\zeta\vartheta) + i\big(I_1(\zeta) - R_2(\zeta)\sin(\zeta\vartheta) + I_2\cos(\zeta\vartheta)\big) = 0 \tag{2.11}$$

2.11 akkor és csak akkor teljesül, ha a képzetes és valós rész nulla, vagyis

$$R_1(\zeta) + R_2(\zeta)\cos(\zeta\vartheta) + I_2(\zeta)\sin(\zeta\vartheta) = 0 \tag{2.12}$$

$$I_1(\zeta) - R_2(\zeta)\sin(\zeta\vartheta) + I_2\cos(\zeta\vartheta) = 0 \tag{2.13}$$

teljesül. Négyzetre emelve, a trigonometrikus tagokat, illetve $\vartheta$-t eliminálva, rendezve az egyenletet kapjuk, hogy

$$R_1(\zeta)^2 + I_1(\zeta)^2 = R_2(\zeta)^2 + I_2(\zeta)^2 \tag{2.14}$$

Vezessünk be egy új változót, melyre $\tilde{\zeta} = \zeta^2$. Ezt alaklmazva a 2.14 polinomegyenletünket a

$$\Lambda(\tilde{\zeta}) = 0$$

alakba írhatjuk, ahol $\Lambda$ szinté egy polinom. Ha $\Lambda$ minden valós gyöke negatív, akkor az abból származtatott megoldás nem elégítheti ki egyszerre 2.12 és 2.13-t. Ezzel szembern, ha $\Lambda$-nak létezik egy pozitív, valós gyöke, akkor létezik a $\vartheta$ késleltetésnek megelelő $\zeta = \pm\sqrt{\tilde{\zeta}}$, mely egyszerre megoldása 2.12 és 2.13-nek. Vagyis megmutattuk, hogy létezik a kritikus késleltetés, melyet jelölje $\hat{\vartheta}$, továbbá megtaláltuk hozzá a megfelelő pontot, mely tisztán képzetes, $i\hat{\zeta}$.

**2.2.4.** LEMMA. *Legyen $i\hat{\zeta}$ és $\hat{\vartheta}$ megoldása a*

$$P_1(\zeta) + e^{-\zeta\vartheta} P_2(\zeta) = 0 \tag{2.15}$$

*karakterisztikus egyenletnek. Ekkor*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\mathrm{Re}(\zeta)\bigg|_{\zeta=i\hat{\zeta},\ \vartheta=\hat{\vartheta}} > 0$$

*akkor és csak akkor, ha*

$$R_1(\hat{\zeta})\dot{R}_1(\hat{\zeta}) + I_1(\hat{\zeta})\dot{I}_1(\hat{\zeta}) \neq R_2(\hat{\zeta})\dot{R}_2(\hat{\zeta}) + I_2(\hat{\zeta})\dot{I}_2(\hat{\zeta}) \tag{2.16}$$

BIZONYÍTÁS. Tekintsük a 2.15 karakterisztikus egyenletet. Az exponenciális és polinomiális tagokat külön oldalra rendezve

$$e^{-\zeta\vartheta} = -\frac{P_1(\zeta)}{P_2(\zeta)},$$

$$-\zeta\vartheta = \mathbf{log} - \frac{P_1(\zeta)}{P_2(\zeta)},$$

majd a megfelelő változó szerint deriválva a tagokat, kapjuk

$$-\zeta - \vartheta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\zeta = \frac{\dot{P}_1(\zeta)P_2(\zeta) - P_1(\zeta)\dot{P}_2(\zeta)}{P_1(\zeta)P_2(\zeta)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\zeta,$$

ahol $\dot{P}_i(\zeta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}P_i(\zeta)$. $\zeta = i\hat{\zeta}$, $\vartheta = \hat{\vartheta}$ használva

$$-i\hat{\zeta} - \hat{\vartheta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\zeta = \frac{\dot{P}_1(i\hat{\zeta})P_2(i\hat{\zeta}) - P_1(i\hat{\zeta})\dot{P}_2(i\hat{\zeta})}{P_1(i\hat{\zeta})P_2(i\hat{\zeta})} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\zeta.$$

Vegyük észre, hogy $i\hat{\zeta} \in 0+i\mathbf{R}$, $\hat{\vartheta} \in \mathbf{R}$, így $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\zeta \in 0+i\mathbf{R}$ akkor és csak akkor, ha

$$\frac{\dot{P}_1(i\hat{\zeta})P_2(i\hat{\zeta}) - P_1(i\hat{\zeta})\dot{P}_2(i\hat{\zeta})}{P_1(i\hat{\zeta})P_2(i\hat{\zeta})} \in \mathbf{R},$$

ami akkor fordul elő, ha a számláló és nevező egymás valódi többszörösei.

$$\frac{\dot{P}_1(i\hat{\zeta})P_2(i\hat{\zeta}) - P_1(i\hat{\zeta})\dot{P}_2(i\hat{\zeta})}{P_1(i\hat{\zeta})P_2(i\hat{\zeta})} =$$

$$= \frac{\big(\dot{I}_1(\hat{\zeta}) - i\dot{R}_1(\hat{\zeta})\big)\big(R_2(\hat{\zeta}) + iI_2(\hat{\zeta})\big) - \big(\dot{I}_2(\hat{\zeta}) - i\dot{R}_2(\hat{\zeta})\big)\big(R_1(\hat{\zeta}) + iI_1(\hat{\zeta})\big)}{\big(R_1(\hat{\zeta}) + iI_1(\hat{\zeta})\big)\big(R_2(\hat{\zeta}) + iI_2(\hat{\zeta})\big)}$$

A képzetes és valós részeket rendezve kapjuk, hogy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\mathrm{Re}(\zeta)\bigg|_{\zeta=i\hat{\zeta},\ \vartheta=\hat{\vartheta}} = 0$$

akkor és csak akkor, ha

$$\frac{\dot{I}_1(\hat{\zeta})R_2(\hat{\zeta}) + \dot{R}_1(\hat{\zeta})I_2(\hat{\zeta}) - \dot{I}_2(\hat{\zeta})R_1(\hat{\zeta}) - \dot{R}_2(\hat{\zeta})I_1(\hat{\zeta})}{R_1(\hat{\zeta})R_2(\hat{\zeta}) - I_1(\hat{\zeta})I_2(\hat{\zeta})} =$$

$$= \frac{\dot{I}_1(\hat{\zeta})I_2(\hat{\zeta}) + \dot{R}_1(\hat{\zeta})R_2(\hat{\zeta}) + R_1(\hat{\zeta})\dot{R}_2(\hat{\zeta}) - I_1(\hat{\zeta})\dot{I}_2(\hat{\zeta})}{R_1(\hat{\zeta})I_2(\hat{\zeta}) - R_2(\hat{\zeta})I_1(\hat{\zeta})}.$$

Rendezve

$$R_1(\hat{\zeta})\dot{R}_1(\hat{\zeta})\big(R_2^2(\hat{\zeta}) + I_2^2(\hat{\zeta})\big) + I_1(\hat{\zeta})\dot{I}_1(\hat{\zeta})\big(R_2^2(\hat{\zeta}) + I_2^2(\hat{\zeta})\big) =$$

$$= R_2(\hat{\zeta})\dot{R}_2(\hat{\zeta})\big(R_1^2(\hat{\zeta}) + I_1^2(\hat{\zeta})\big) + I_2(\hat{\zeta})\dot{I}_2(\hat{\zeta})\big(R_1^2(\hat{\zeta}) + I_1^2(\hat{\zeta})\big).$$

Mivel $R_1^2(\hat{\zeta}) + I_1^2(\hat{\zeta}) = R_2^2(\hat{\zeta}) + I_2^2(\hat{\zeta}) \neq 0$, így

$$R_1(\hat{\zeta})\dot{R}_1(\hat{\zeta}) + I_1(\hat{\zeta})\dot{I}_1(\hat{\zeta}) = R_2(\hat{\zeta})\dot{R}_2(\hat{\zeta}) + I_2(\hat{\zeta})\dot{I}_2(\hat{\zeta})$$

Ez szükséges és elégséges feltétele, hogy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\mathrm{Re}(\zeta)\bigg|_{\zeta=i\hat{\zeta},\ \vartheta=\hat{\vartheta}} = 0.$$

Vagyis a derivált nem egyenlő 0-val, ha 2.16 teljesül.

**2.2.5.** LEMMA. *Legyen adva a következő differenciál egyenlet rendszer.*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f\big(x(t), x(t-\vartheta)\big),$$

*melynek $\hat{x}$ stabil egyensúlyi állapota $\vartheta = 0$ esetén. Legyen az ehhez tartozó, megfelelő karakterisztikus egyenlet*

$$\sum_{j=0}^{n} a_j\lambda^j + e^{-\lambda\vartheta}\sum_{j=0}^{m} b_j\lambda^j = 0.$$

*Ekkor létezik $\hat{\vartheta} > 0$, melyre $\hat{x}$ stabilitása nem változik akkor és csak akkor, ha $\Lambda(t)$-nek $\hat{\zeta}$ pozitív valós gyöke, melyre*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda(t)\bigg|_{t=\hat{\zeta}} \neq 0$$

## 2.3. Razumikhin tétele

Közönséges differenciálegyenletek esetében Lyapunov-függvények segtségével vizsgálhatjuk egyensúlyi pontok stabilitását. Mindezek előtt definiálljuk, és mondjuk ki Lyapunov stabilitási tételét [5].

Legyen $\xi$ az autonóm rendszerünk egyensúlyi pontja, $V$ olyan $\mathbf{R}^n$-be képező, folytonosan differenciálható függvény, mely értelmezve van $\xi$ pont egy $U$ nyílt környezetében. Az ilyen függvényeket nevezük Lyapunov-függvényeknek.

**2.3.1.** DEFINÍCIÓ. *Legyen $U \subset D$ nyílt halmaz, $V \in \mathcal{C}^1(U, \mathbf{R})$ függvény. A $V$ függvény $f$ vektormező menti deriváltja*

$$L_f V = \langle \dot{V}, f \rangle$$

Most mondjuk ki Lyapunv-stabilitási tételét.

**2.3.2.** TÉTEL (LYAPUNOV STABILITÁSI TÉTELE). *Ha a $\xi$ egyensúlyi ponthoz létezik $V$ Lyapunov-függvény, melyre*

$$V(\xi) < V(\psi),\ \textit{minden}\ \psi \in U \setminus \{\xi\}\ \textit{pontra.}$$

$$L_f V(\psi) \leq 0,\ \textit{minden}\ \psi \in U \setminus \{\xi\}\ \textit{pontra.}$$

*Ekkor $\xi$ stabil egyensúlyi pont. Továbbá, ha $L_f V(\psi) < 0$, minden $\psi \in U \setminus \{\xi\}$ pontra, ekkor $\xi$ aszimptotikusan stabil pont.*

**2.3.3.** TÉTEL (LYAPUNOV INSTABILITÁSI TÉTELE). *Ha a $\xi$ egyensúlyi ponthoz létezik $V$ Lyapunov-függvény, melyre $\xi$ nem lokális minimuma a $V$ Lyapunov-függvénynek, valamint*

$$L_f V(\psi) < 0,\ \textit{minden}\ \psi \in U \setminus \{\xi\}\ \textit{pontra,}$$

*ekkor $\xi$ instabil egyensúlyi pont.*

Razumikhin ezt az eredményt ültette át a késleltetett differenciálegyenletek környezetébe, azáltal, hogy újra–definiálta a Lyapunov-függvényeket, és ezt alkalmazta $\mathbf{R}^n$-en. [3]

Első lépésben definiáljuk a Lyapunov-függvényt, majd próbáljuk meg azt $\mathbf{R}^n$-en ismét definiálni.

Tegyük fel, hogy $V \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ függvény, $x(t, \varphi)$ megoldása a 2.1-nek. Most definiáljuk a $V\big(x(t,\varphi)\big)$ függvényt, $\varphi(0)$ mentén.

$$\dot{V}\big(\varphi(0)\big) = \frac{\partial V\big(\varphi(0)\big)}{\partial x} f(\varphi) \tag{2.17}$$

Annak illusztrálására, hogy bemutassuk, milyen körülmények befolyásolják a stabilitást, tekintsük a lenti egyenletet.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = -A_1 x(t) - A_2 x(t - \vartheta), \tag{2.18}$$

ahol $A_1 > 0$ és $A_2$ konstans számok. Válasszuk $V : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt a következő képp.

$$V(x) = \frac{x^2}{2}$$

Ekkor $V$ pozitív definit, továbbá

$$\dot{V}\big(x(t,\varphi)\big) = -A_1 x^2(t) - A_2 x(t) x(t - \vartheta). \tag{2.19}$$

Ahogy az a 2.1.7 tételben is láttuk, 0 stabil, ha $|A_2| \le A_1$, $A_1 > 0$. Továbbá a példából az is látszik, hogy 2.18 nem aszimptotiusan stabil, ha $A_1 + A_2 = 0$, mert 0 sajátérték.

**2.3.4.** Tétel (Razumikhin). *Tegyük fel, hogy $u$, $v$, $w \in \mathcal{C}\big([0,\infty), [0,\infty)\big)$ nem csökkenő függvények, $u(s)$, $v(s)$ $s > 0$ esetén pozitív.*

$$u(0) = v(0) = 0,$$

*$v$ szigorúan növekszik. Ha létezik $V \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, melyre $x \in \mathrm{R}^n$ esetén*

$$u(|x|) \leq V(x) \leq v(|x|),$$

*és $\dot{V}\big(\varphi(0)\big) \leq w(|\varphi(0)|)$, ha $s \in [-\vartheta, 0]$ esetén $V\big(\varphi(s)\big) \leq V\big(\varphi(0)\big)$, akkor a 0 pont stabil.*

*Továbbá, ha létezik $p(s)$ nemcsökkenő folytonos függvény, mely $s > 0$ esetén $p(s) > s$ úgy, hogy*

$$\dot{V}\big(\varphi(0)\big) \leq w(|\varphi(0)|),$$

*ha $V\big(\varphi(s)\big) \leq p\big(V\big(\varphi(0)\big)\big)$ $(s \in [-\vartheta, 0])$, ekkor 0 aszimptotikusan stabil.*

Fontos megemlítenünk Krasovskii eredményét is, aki Razumikhin-nel egy időben, szintén a Lyapunov-függvények irányában kezdett vizsgálódni stabilitás tekintetében.

**2.3.5.** Tétel (Krasovskii). *Tegyük fel, hogy $u$, $v$, $w \in \mathcal{C}\big([0, \infty), [0, \infty)\big)$ nemnegatív, nem csökkenő függvények, $u(s)$, $v(s)$ $s > 0$ esetén pozitív, $u(0) = v(0) = 0$. Ha létezik $V : \mathcal{C}([t_0, t_0 + r], \mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$ funkcionál, melyre*

$$u(|\varphi(0)|) \leq V(\varphi) \leq v(|\varphi(0)|),\ \varphi \in \mathcal{C}([t_0, t_0 + r], \mathbf{R}^n),$$

*továbbá*

$$\dot{V}(\varphi) = \limsup_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(V\big(x_t(\cdot, \varphi)\big) - V(\varphi)\big) \leq -w(|\varphi(0)|).$$

*Ekkor 0 stabil. Továbbá, ha $s > 0$ esetén $w(s) > 0$, ekkor 0 aszimptotikusan stabil.*

Alkalmazzuk Krasovskii eredményét a 2.18-re.

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi^2(0) + \mu \int_{-\vartheta}^{0} \varphi(u)\mathrm{d}u,$$

ahol $\mu$ pozitív konstans. Egyszerű számítással adódik, hogy

$$\dot{V}(\varphi) = -(A_1 - \mu)\varphi^2(0) - A_2\varphi(0)\varphi(-\vartheta) - \mu\varphi^2(-\vartheta) \tag{2.20}$$

Láthatuk, hogy a 2.20 jobb oldala $\varphi(0)$ és $\varphi(-\vartheta)$ kvadratikus alakja. Pozitív szemidefinit kvadratikus alak esetén 2.18 stabil, pozitív definit kvadratikus alak esetén aszimptotikusan stabil. Határozzuk meg a paramétereket ennek megfelelően. Tudjuk, hog bármely kvadratikus alak a lenti alakba írható.

$$\bar{\varphi} M \bar{\varphi}^T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\varphi_i\varphi_j$$

Ezek alapján jelölje a 2.20 kvadratikus alakhoz tartozó kvadratikus mátrixot

$$M = \begin{pmatrix} -(A_1 - \mu) & \frac{-A_2}{2} \\ \frac{-A_2}{2} & -\mu \end{pmatrix}.$$

Algebrából ismert [2], hogy egy szimmetrikus, bilineáris függvényhez tartozó $M \in \mathbf{R}^{n \times n}$ mátrix pozitív definit akkor és csak akkor, ha minden $k \leq n$-re $M$ bal felső sarkában lévő $k$-rendű aldetermináns pozitív. Ezen állítás alapján felírhatjuk $M$ 1- és 2-rendű aldeterminánsait, melyet rendre jelöljön $\Delta_i(M)$.

$$\Delta_1(M) = -(A_1 - \mu)$$

$$\Delta_2(M) = (A_1 - \mu)\mu - \frac{A_2}{4}$$

A fenti állítás szerint 2.20 pozitív definit, ha $M$ pozitív definit, ami ekvivalens $\Delta_1(M)$ és $\Delta_2(M)$ értékek pozitivitásával.

$$\Delta_1(M) > 0, \text{ ha } A_1 > \mu > 0,$$

$$\Delta_2(M) > 0, \text{ ha } 4(A_1 - \mu)\mu > A_2^2.$$

Továbbá $\mu = A_1/2$ választással $(A_1, A_2)$ intervallum a legnagyobb lesz, melyre teljesülnek a kívánt feltételek. Levonva a végső következtetést, 2.20 aszimptotikusan stabil, ha $A_1 > |A_2|$, így Razumikhin eredményét felhasználva ugyan arra az eredményre jutottunk, mint az elején.

**2.3.6.** MEGJEGYZÉS. *2.20 stabilitására kapunk feltételeket, ha a szigorú egyenlőtlenség helyett enyhítünk azon, és a nemnegativitást követeljük meg.*

# 3. fejezet

# Egy példa

## 3.1. A logisztikus egyenlet

Jelölje $N(t)$ a populáció változását az idő függvényében. Egyszerű esetben, ha semmi sincs befolyással azt, a szaporulat a populáció létszáma aráyos. Ekkor a következő fomulával írhatjuk le a rendszert (a szaporodás időskáláját folytonosnak tekintve).

$$N(t' + \Delta t') = N(t') + \varrho N(t'),$$

ahol $\varrho$ a növekedési ráta. $\Delta t' \to 0$ esetén, $\varrho$ megfelelő átskálázásával a következő differenciál egyenltetet kapjuk.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'} N(t') = \varrho N(t'),$$

melynek megoldása $N(t') = e^{\varrho t'}$.

Figyelembe véve, hogy az erőforrások korlátossága szintén befolyással bír a teljes prpuláióra, azt egy, a szaporulat létszámától függő szorzóval korrigálhatjuk.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}N(t') = \varrho N(t')\Omega_{N(t')}$$

Logikus feltételezni, hogy $\Omega_{N(t')}$ $N(t')$-ben lineáris, kis populáció esetén nem befolyásolja az eredeti egyenletet, maximális szaporulat esetén nem engedi tovább azt.

$$\lim_{s\to 0}\Omega_{N(s)} = 1$$

$$\lim_{s\to\infty}\Omega_{N(s)} = 0$$

A fenti feltételeknek megfeleő

$$\Omega_{N(t')} = 1 - \frac{N(t')}{K}$$

Visszatérve az eredeti differenciálegyenletre, az $x(t') = \frac{N(t')}{K}$ helyettesítéssel,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}x(t') = \varrho x(t')(1 - x(t')),$$

melynek megoldása a kezdeti $x(0)$-tól függő szigmoid görbe.

$$x(t') = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x(0)} - 1\right)e^{-\varrho t'}}$$

A valóságott jobban közelítő modellt kaphatunk, ha a növekedés függvényében késleltetést feltételezünk. Ennek megfelelően korrigáljuk egyenletünket.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}N(t') = \varrho N(t')\left(1 - \frac{N(t'-\vartheta)}{K}\right)$$

A $t = \frac{t'}{\vartheta}$ helyettesítéssel, az egyenletünk a következőképp alakul.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}N(t') = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N(t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \frac{1}{\vartheta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \alpha x(t)(1 - x(t-1)),$$

ahol $\alpha = \varrho\vartheta$.

Vizsgáljuk a késleltetett logisztikus egyenlet lineáris stabilitását. Jelölje a rendszer egyensúlyi pontját az $\hat{x} = 1$. Ennek satbilitására vagyunk kíváncsiak. Vezessünk be egy kis $\Delta(t)$ perturbációt, és vizsgáljuk meg, hogy a rendszerünk vissza tér-e az egyensúlyi állapotba.

$$x(t) = \Delta(t) + 1$$

Ezt írjuk az egyenletünkbe.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta(t) = \alpha(\Delta(t) + 1)(1 - \Delta(t-1) + 1) =$$

$$= -\alpha(\Delta(t) + 1)\Delta(t-1)$$

Kis perturbáció esetén $\Delta(t) + 1 \approx 1$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta(t) \approx -\alpha\Delta(t-1)$$

Tudjuk, hogy a triviális megoldás stabil, ha $-\alpha \in (-\pi/2, 0)$, így $\alpha \in (0, \pi/2)$ esetén $\hat{\Delta} = 0$ stabil, ami azt jelenti, hogy kis perturbáció esetén $\hat{x} = 1$ stabil egyensúlyi állapot $\alpha \in (0, \pi/2)$ esetén. $\alpha = \pi/2$ esetén a complex sajátérték már metszi a képzetes tengelyt, vagyis annak valós része negatívból pozitívba vált, $\alpha = \pi/2$ Hopf bifurkációs pont.

# Irodalomjegyzék

[1] Bruce E. Shapiro, Ph.D.: The Computable Differential Equation

[2] Freud Róbert: Lineáris algebra

[3] Arino, O., Hbid, M.L., Dads, E. Ait (Eds.): Delay Differential Equations and Applications

[4] Jonathan Forde, Patrick Nelson: Applications of Sturm sequences to bifurcation analysis of delay differential equation models

[5] Dr. Simon L. Péter: Differenciál egyenletek című előadása

[6] Thomas Erneux: Applied Delay Differential Equations