Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Maros Gábor

Euklideszi terek jellemzése

BSc szakdolgozat

Témavezető:

Dr. Kovács Sándor

Numerikus Analízis Tanszék

Budapest, 2015

Tartalomjegyzék

Jelölések:

$\mathbb{K}$: komplex vagy valós számtest

$\mathcal{X}$: lineáris tér a $\mathbb{K}$ testre vonatkozóan

$(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$: euklideszi tér

$(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$: normált tér

$\dim \mathcal{X}$: $\mathcal{X}$ algebrai dimenziója

$S_{\mathcal{X}}$: $\{x \in \mathcal{X}; \|x\| = 1\}$

$B_{\mathcal{X}}$: $\{x \in \mathcal{X}; \|x\| \leq 1\}$

$\perp_I$: Isosceles-ortogonalitás

$\perp_B$: Birkhoff-ortogonalitás

$\perp_P$: pitagoraszi ortogonalitás

$\perp_{HH-I}$: $HH-I$-ortogonalitás

$\perp_{HH-P}$: $HH-P$-ortogonalitás

$[x,y]$: $\{tx + (1-t)y \ : \ t \in [0,1]\} \quad (x, y \in \mathcal{X})$

(x,y): $\{tx + (1-t)y \ : \ t \in (0,1)\} \quad (x, y \in \mathcal{X})$

1. Bevezetés

Ezen szakdolgozat célja, hogy bemutassa az euklideszi tereket jellemző tulajdonságokat. Számtalan olyan tulajdonság létezik, amely teljesül euklideszi terekben, azonban általános normált terekben nem. Ezen tulajdonságok közül mutatunk be olyanokat, amelyek teljesülése esetén a normált tér normája skaláris szorzatból származik. Ebben a fejezetben az euklideszi és normált terek tulajdonságait tekintjük át, majd a legalapvetőbb jellemző tételeket.

1.1. Definíció. *Adott $\mathcal{X}$ lineáris tér esetén azt mondjuk, hogy a*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{K}$$

leképezés skaláris szorzat, ha bármely $x, y, z \in \mathcal{X}$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ mellett az alábbi tulajdonságok teljesülnek:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ *és* $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
3. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
4. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

Ekkor az $(\mathcal{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ párt euklideszi térnek nevezzük.

1.1. Következmény. *A 2.,3. tulajdonságból következik hogy bármely $x, y, z \in \mathcal{X}$, ill. $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén*

$$\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle,$$

illetve 2. és 4. alapján

$$\langle x, y + z \rangle = \overline{\langle y + z, x \rangle} = \overline{\langle y, x \rangle} + \overline{\langle z, x \rangle} = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle.$$

1.2. Definíció. *Adott $\mathcal{X}$ lineáris tér esetén azt mondjuk, hogy a*

$$\| \cdot \| : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$$

leképezés norma, ha minden x,y $\in \mathcal{X}$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén a következők teljesülnek:

1. $\|x\| \geq 0$ *és* $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Ekkor $\|x\|$-t az x elem normájának az $(\mathcal{X}, \| \cdot \|)$ párt pedig normált térnek nevezzük.

1.1. Tétel. (Jordan-Neumann-tétel) *Ha* $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ *normált tér, úgy pontosan akkor adható meg olyan*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{K}$$

skaláris szorzat, amelyre

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \qquad (x \in \mathcal{X}),$$

ha teljesül a paralelogramma-szabály, azaz

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \qquad (x, y \in \mathcal{X}). \tag{1.1}$$

Bizonyítás:

1. lépés. Ha $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skaláris szorzat, akkor

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \qquad (x \in \mathcal{X}).$$

Ekkor tetszőleges $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle + \langle x-y, x-y \rangle = \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \\ &\quad + \langle y, y \rangle = \\ &= 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.\end{aligned}$$

2. lépés. A másik irány bizonyításához először azt mutatjuk meg, hogy $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ esetén a

$$p : \mathcal{X}^2 \to \mathbb{R}, \qquad p(x, y) := \frac{|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$$

leképezés skaláris szorzat.

1. Mivel bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$4p(x, x) = \|x+x\|^2 - \|x-x\|^2 = \|2x\|^2 = 4\|x\|^2 \geq 0,$$

ezért

$$p(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

2. Világos, hogy ha $x, y \in \mathcal{X}$, akkor

$$4p(y, x) = \|y+x\|^2 - \|y-x\|^2 = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4p(x, y).$$

3. Megmutatjuk hogy minden $x, y, z \in \mathcal{X}$ mellett

$$\phi(x, y, z) := 4(p(x + y, z) - p(x, z) - p(y, z)) = 0$$

Definíció alapján $\phi(x, y, z) =$

$$\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 - \|x+z\|^2 + \|x-z\|^2 - \|y+z\|^2 + \|y-z\|^2. \quad (1.2)$$

(1.1) miatt

$$\begin{aligned} \|x + y + z\|^2 &= 2(\|x + z\|^2 + \|y\|^2) - \|x + z - y\|^2, \\ \|x + y - z\|^2 &= 2(\|x - z\|^2 + \|y\|^2) - \|x - z - y\|^2, \end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= \|x - z - y\|^2 - \|x + z - y\|^2 + 2(\|x + z\|^2 - \|x - z\|^2) - \\ &\quad -\|x + z\|^2 + \|x - z\|^2 - \|y + z\|^2 + \|y - z\|^2 = \\ &= \|x - z - y\|^2 - \|x + z - y\|^2 + \|x + z\|^2 - \\ &\quad -\|x - z\|^2 - \|y + z\|^2 + \|y - z\|^2. \end{aligned}$$

Ezt összeadva (1.2) egyenlőséggel azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2\phi(x, y, z) &= (\|x + y + z\|^2 + \|x - z - y\|^2) - \\ &\quad -(\|x + y - z\|^2 + \|x + z - z\|^2) - 2(\|y + z\|^2 - \|y - z\|^2). \end{aligned}$$

Itt ismét (1.1) egyenlőséget használva kapjuk hogy

$$\|x+y+z\|^2 + \|x-z-y\|^2 = \|(y+z)+x\|^2 + \|(y+z)-x\|^2 = 2(\|y+z\|^2 + \|x\|^2),$$

$$\|x+y-z\|^2 + \|x+z-y\|^2 = \|(y-z)+x\|^2 + \|(y-z)-x\|^2 = 2(\|y-z\|^2 + \|x\|^2).$$

Ezen két egyenlőség alapján $2\phi(x, y, z) =$

$$2(\|y + z\|^2 - \|y - z\|^2) - 2(\|y + z\|^2 - \|y - z\|^2) = 0,$$

tehát $\phi(x, y, z) = 0$

4. Legyen

$$\rho_{x,y}(t) := 4p(tx, y) \qquad (t \in \mathbb{R},\ x, y \in \mathcal{X}),$$

ekkor

$$\rho_{x,y}(0) = \|y\|^2 - \|y\|^2 = 0,$$

illetve

$$\begin{aligned}\rho_{x,y}(-t) &= \|-tx+y\|^2 - \|-tx-y\|^2 = \|tx-y\|^2 - \|tx+y\|^2 = \\ &= -\rho_{x,y}(t).\end{aligned}$$

Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\rho_{x,y}(n) = n\rho_{x,y}(1).$$

Ezt n=0-ra beláttuk, ekkor 3. tulajdonság miatt

$$\begin{aligned}\rho_{x,y}(n+1) &= 4p(nx+x,y) = 4p(nx,y) + 4p(x,y) = \rho_{x,y}(n) + \rho_{x,y}(1) = \\ &= n\rho_{x,y}(1) + \rho_{x,y}(1) = (n+1)\rho_{x,y}(1).\end{aligned}$$

Ebből az előbbiek miatt az következik, hogy $x, y \in \mathcal{X}$, $j \in \mathbb{Z}$-re is igaz az állítás. Legyen $j, k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$

$$\rho_{x,y}\left(\frac{j}{k}\right) = 4p\left(\frac{jx}{k}, y\right) = \rho_{x/k,y}(j) = j\rho_{x/k,y}(1) = \frac{j}{k}\rho_{x/k,y}(k) = \frac{j}{k}\rho_{x,y}(1).$$

Ezzel megmutattuk hogy bármely $x, y \in \mathcal{X}$ és $r \in \mathbb{Q}$ esetén

$$\rho_{x,y}(r) = r\rho_{x,y}(1).$$

$\rho_{x,y} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ folytonos, hiszen az

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto tx \pm y \qquad \text{és az} \qquad \mathcal{X} \ni x \mapsto \|x\|$$

leképezések folytonosak. Ebből következik, hogy ha $t \in \mathbb{R}$ és $t_n \in \mathbb{Q}$ $(n \in \mathbb{N})$ olyan, hogy

$$\lim_{n\to\infty} t_n = t,$$

akkor

$$\rho_{x,y}(t) = \lim_{n\to\infty} \rho_{x,y}(t_n) = \lim_{n\to\infty} t_n\rho_{x,y}(1) = t\rho_{x,y}(1),$$

azaz

$$p(tx, y) = tp(x, y) \qquad (x, y \in \mathcal{X},\ t \in \mathbb{R}).$$

Ezek alapján $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén a p leképezés skaláris szorzat lesz.

A $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ esetben legyen

$$\langle x,y\rangle := p(x,y)+\imath p(x,\imath y) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}(\imath^k\|x+\imath^k y\|^2) \qquad (x,y\in\mathcal{X}).$$

Megmutatjuk, hogy $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skaláris szorzat.

1. Bármely $x\in\mathcal{X}$ esetén

$$\begin{aligned} 4\langle x,x\rangle &= \sum_{k=0}^{3}(\imath^k\|x+\imath^k x\|^2) = \|2x\|^2+\imath\|(1+\imath)x\|^2-\|x-x\|^2- \\ &\quad -\imath\|(1-\imath)x\|^2 = 4\|x\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

   így

$$\langle x,x\rangle = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x=0.$$

2. Bármely $x,y\in\mathcal{X}$ esetén

$$\begin{aligned} 4\langle x,y\rangle &= \|x+y\|^2+\imath\|x+\imath y\|^2-\|x-y\|^2-\imath\|x-\imath y\|^2 = \\ &= \|y+x\|^2+\imath\|\imath(-x+y)\|^2-\|y-x\|^2-\imath\|\imath(-x-y)\|^2 = \\ &= \|y+x\|^2-\imath\|y+\imath x\|^2-\|y-x\|^2+\imath\|y-\imath x\|^2 = \\ &= 4\overline{\langle y,x\rangle}. \end{aligned}$$

3. Az additivitás következik a valós eset additivitásából, hiszen ha $x,y,z\in\mathcal{X}$, akkor

$$\begin{aligned} \langle x+y,z\rangle &= p(x+y,z)+\imath p(x+y,\imath z) = p(x,z)+p(y,z)+\imath p(x,\imath z)+ \\ &\quad +\imath p(y,\imath z) = \\ &= p(x,z)+\imath p(x,\imath z)+p(y,z)+\imath p(y,\imath z) = \\ &= \langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle. \end{aligned}$$

4. A homogenitáshoz elég megmutatni, hogy

$$\langle \imath x,y\rangle = \imath\langle x,y\rangle \qquad (x,y\in\mathcal{X}),$$

   hiszen $a,b\in\mathbb{R}$ esetén

$$(\langle a+b\imath)x,y\rangle \equiv \langle ax,y\rangle+\langle b\imath x,y\rangle \qquad \text{és} \qquad \langle ax,y\rangle \equiv a\langle x,y\rangle$$

következik a valós esetből. Bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$\begin{aligned} 4\langle \imath x, y\rangle &= \|\imath x + y\|^2 + \imath\|\imath x + \imath y\|^2 - \|\imath x - y\|^2 - \imath\|\imath x - \imath y\|^2 = \\ &= \imath(-\imath\|\imath(x - \imath y)\|^2 + \|\imath(x + y)\|^2 + \imath\|\imath(x + \imath y)\|^2 - \|\imath(x - y)\|^2) = \\ &= \imath(\|x + y\|^2 + \imath\|x + \imath y\|^2 - \|x - y\|^2 - \imath\|x - \imath y\|^2) = 4\imath\langle x, y\rangle \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetben skaláris szorzat. ■

1.1. Megjegyzés. *Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér. Ekkor azt mondjuk, hogy $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ euklideszi tér, ha a normát egy skaláris szorzat generálja.*

1.2. Következmény. *A tételből következik, hogy egy vektortér pontosan akkor euklideszi tér, ha minden kétdimenziós altere is az. Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ euklideszi tér, tetszőleges $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{X}$ kétdimenziós altér esetén is teljesül a norma $\mathcal{P}$-re való megszorításával, hogy*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \qquad x, y \in \mathcal{P}.$$

Feltesszük, hogy minden $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{X}$ kétdimenziós altér euklideszi tér. Tetszőleges $x, y \in \mathcal{X}$ esetén létezik egy kétdimenziós $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{X}$ altér, amelyre $x, y \in \mathcal{P}$. Mivel $\mathcal{P}$ euklideszi tér, így bármely $x, y \in \mathcal{P}$ esetén teljesül a paralelogramma-szabály, vagyis ez minden $x, y \in \mathcal{X}$ esetén is igaz, azaz $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ valóban euklideszi tér.

1.2. Tétel. (Rakestraw) *Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, úgy pontosan akkor van olyan*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \to \mathbb{K}$$

skaláris szorzat, amelyre

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \qquad (x \in \mathcal{X}),$$

ha bármely

$$3 \le k \in \mathbb{N}, \qquad x_1, \ldots x_k \in \mathcal{X} \qquad \text{és} \qquad \alpha_1, \ldots \alpha_k \in \mathbb{R} : \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 0$$

esetén fennáll a

$$\left\| \sum_{l=1}^{k} \alpha_l x_l \right\|^2 = -\sum_{1 \le l < m \le k} \alpha_l \alpha_m \|x_l - x_m\|^2$$

egyenlőség.

Bizonyítás:

1. lépés Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ euklideszi tér, $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$, akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}\sum_{1\le l<m\le k} \alpha_l\alpha_m\|x_l - x_m\|^2 &= \sum_{1\le l<m\le k} \alpha_l\alpha_m\{\|x_l\|^2 - \langle x_l, x_m\rangle - \langle x_m, x_l\rangle + \|x_m\|^2\} = \\ &= \sum_{1\le l<m\le k} \alpha_l\alpha_m\{\|x_l\|^2 + \|x_m\|^2\} - \\ &\quad - \sum_{1\le l<m\le k} \alpha_l\alpha_m\{\langle x_l, x_m\rangle + \langle x_m, x_l\rangle\}.\end{aligned}$$

Világos, hogy

$$-\sum_{1\le l<m\le k} \alpha_l\alpha_m\{\|x_l\|^2 + \|x_m\|^2\} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^2\|x_j\|^2,$$

hiszen rögzített j-re a $\|x_j\|^2$ tag a $-\alpha_j\alpha_m$ együtthatójú $\|x_l\|^2$, illetve a $-\alpha_l\alpha_j$ együtthatójú $\|x_m\|^2$ tagok között pontosan akkor fordul elő, ha $m > j$, illetve $l < j$. Így $\|x_j\|^2$ együtthatója $\sum_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{k} -\alpha_j\alpha_i$, ami $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i = 0$ miatt α_j^2-tel egyenlő. Ezért

$$\begin{aligned}-\sum_{1\le l<m\le k} \alpha_l\alpha_m\|x_l - x_m\|^2 &= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^2\|x_j\|^2 + \sum_{1\le l<m\le k} \alpha_l\alpha_m\{\langle x_l, x_m\rangle + \langle x_m, x_l\rangle\} \\ &= \sum_{l,m=1}^{k} \alpha_l\alpha_m\langle x_l, x_m\rangle = \left\|\sum_{l=1}^{k}\alpha_l x_l\right\|^2.\end{aligned}$$

2. lépés Legyen

$$k := 3, \quad x_1 := x, \quad x_2 := y, \quad x_3 := 0, \quad \alpha_1 := 1, \quad \alpha_2 := 1, \quad \alpha_3 := -2,$$

ekkor

$$\|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x - y\|^2,$$

azaz teljesül az (1.1) egyenlőség. ■

2. Paralelogramma-egyenlőtlenségek és Loewner-ellipszisek

Ebben a fejezetben a Jordan-Neumann-tétel feltételénél enyhébb feltételt adunk meg, amely elégséges ahhoz, hogy egy normált tér normája skaláris szorzatból származzék. Először segédtételeket kell belátnunk.

2.1. Loewner-ellipszisek

2.3. Tétel. *Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $\dim \mathcal{X} = 2$. Azt mondjuk, hogy $S_{\mathcal{X}}$ ellipszis, ha a szokásos kétdimenziós skaláris szorzatra $e_1, e_2 \in \mathcal{X}$ ortonormált bázis, amelyre*

$$x := (x_1 e_1 + x_2 e_2) \qquad (x_1, x_2 \in \mathbb{R})$$

esetén $\|x\| = 1$ pontosan akkor, ha

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 = 1$$

valamely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén. Ha S_X ellipszis, akkor a norma skaláris szorzatból származik.

Bizonyítás: Feltesszük, hogy $S_{\mathcal{X}}$ ellipszis. Legyen $e_1, e_2 \in \mathcal{X}$ ortonormált bázis a szokásos skaláris szorzat szerint, ekkor $S_{\mathcal{X}}$ minden pontja egyértelműen felírható

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 \qquad (x_1, x_2 \in \mathbb{R})$$

alakban és

$$1 = \|x_1 e_1 + x_2 e_2\| = \frac{{x_1}^2}{a^2} + \frac{{x_2}^2}{b^2} \qquad (a, b \in \mathbb{R}).$$

Ekkor definiáljuk a skaláris szorzatot a következőképpen:

$$\langle x, y \rangle = \langle (x_1 e_1 + x_2 e_2), (y_1 e_1 + y_2 e_2) \rangle := \frac{x_1 y_1}{a^2} + \frac{x_2 y_2}{b^2}.$$

Az ellipszis pontjai lesznek az egy normájú pontok, és $\langle \cdot, \cdot \rangle$ valóban skaláris szorzat, hiszen

1. $x \in \mathcal{X}$ esetén
$$\langle x, x\rangle \geq 0$$
és
$$0 = \langle x, x\rangle = \frac{{x_1}^2}{a^2} + \frac{{x_2}^2}{b^2}$$
ami csak akkor lehetséges, ha
$$x_1 = x_2 = 0,$$
vagyis $x = 0$.

2. Nyilvánvaló, hogy
$$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \qquad x, y \in \mathcal{X}.$$

3. $\lambda \in \mathbb{R}$ és $x, y \in \mathcal{X}$ esetén
$$\langle \lambda x, y\rangle = \frac{\lambda x_1 y_1}{a^2} + \frac{\lambda x_2 y_2}{b^2} = \lambda\Big(\frac{x_1 y_1}{a^2} + \frac{x_2 y_2}{b^2}\Big) = \lambda\langle x, y\rangle.$$

4. $x, y, z \in \mathcal{X}$ esetén
$$\begin{aligned}\langle x + y, z\rangle &= \frac{(x_1 + y_1)z_1}{a^2} + \frac{(x_2 + y_2)z_2}{b^2} = \\ &= \frac{x_1 z_1}{a^2} + \frac{x_2 z_2}{b^2} + \frac{y_1 z_1}{a^2} + \frac{y_2 z_2}{b^2} = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle,\end{aligned}$$

tehát teljesülnek a skaláris szorzat tulajdonságai, vagyis $\langle \cdot, \cdot\rangle$ valóban skaláris szorzat. ■

2.1. Lemma. *Legyen $\mathcal{X} := \mathbb{R}^2$ és $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{X}$ konvex és szimmetrikus, azaz*
$$x \in \mathcal{C} \quad \Rightarrow \quad -x \in \mathcal{C}.$$
Ekkor egyértelműen létezik $\epsilon_0 \subseteq \mathcal{C}$ maximális területű ellipszis, illetve $\epsilon_1 \supseteq \mathcal{C}$ minimális területű ellipszis, és ezek $S_{\mathcal{X}}$-et legalább négy különböző pontban érintik.

2.1. Állítás. *$B_{\mathcal{X}}$ konvex és szimmetrikus.*

Bizonyítás: Ha $x, y \in B_{\mathcal{X}}$, akkor a háromszög-egyenlőtlenség miatt
$$\|tx + (1-t)y\| \leq t\|x\| + (1-t)\|y\| \leq 1 \qquad t \in (0, 1),$$
tehát $B_{\mathcal{X}}$ konvex.
Mivel $x \in B_{\mathcal{X}}$ és $\|x\| = \|-x\|$, így $-x \in B_{\mathcal{X}}$, azaz $B_{\mathcal{X}}$ szimmetrikus is. ■

2.2. Paralelogramma egyenlőtlenségek

2.2. Megjegyzés. *Ebben az alfejezetben $\sim$ jelölheti $\leq$ vagy $\geq$ relációkat.*

2.4. Tétel. (Day) *Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, ha minden $x, y \in S_{\mathcal{X}}$ esetén létezik $\lambda, \mu \in (0,1)$, amelyre*

$$\mu(1-\mu)\|\lambda x+(1-\lambda)y\|^2+\lambda(1-\lambda)\|\mu x-(1-\mu)y\|^2 \sim (\lambda+\mu-2\lambda\mu)(\lambda\mu+(1-\lambda)(1-\mu)),$$

akkor $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ euklideszi tér.

Bizonyítás: Feltesszük, hogy az állításunk teljesül. Az 1.2. következmény miatt elég, ha $\dim \mathcal{X} = 2$ esetében látjuk be. Ha $\sim$ most a $\geq$ relációt jelöli, legyen $\epsilon_0 \subseteq S_{\mathcal{X}}$ egy Loewner-ellipszis, így ϵ_0 $\mathbb{R}^2$-ben egy euklideszi normát generál 2.3. tétel szerint, amelyre $\|x\|_{\epsilon_0} \geq \|x\|$. Az ϵ_0 ellipszis $S_{\mathcal{X}}$-t legalább négy pontban érinti, ezért ha $\epsilon_0 \neq S_{\mathcal{X}}$, akkor létezik $u, v \in S_{\mathcal{X}} \bigcap \epsilon_0$, hogy $u \neq \pm v$ és a nyitott uv ív ϵ_0-ban nem tartalmazza $S_{\mathcal{X}}$ egy pontját sem. Ekkor

$$\|\lambda u + (1-\lambda)v\| < \|\lambda u + (1-\lambda)v\|_{\epsilon_0}$$

minden $\lambda \in (0,1)$ esetén, így

$$\begin{aligned}
&\mu(1-\mu)\|\lambda u + (1-\lambda)v\|^2 + \lambda(1-\lambda)\|\mu u - (1-\mu)v\|^2 < \\
&< \mu(1-\mu)\|\lambda u + (1-\lambda)v\|^2_{\epsilon_0} + \lambda(1-\lambda)\|\mu u - (1-\mu)v\|^2_{\epsilon_0} = \\
&= \mu(1-\mu)(\lambda^2\|u\|^2_{\epsilon_0} + 2\lambda(1-\lambda)\langle u, v\rangle + (1-\lambda)^2\|v\|^2_{\epsilon_0}) + \\
&\quad +\lambda(1-\lambda)(\mu^2\|u\|^2_{\epsilon_0} - 2\mu(1-\mu)\langle u, v\rangle + (1-\mu)^2\|v\|^2_{\epsilon_0}) = \\
&= (\lambda+\mu-2\lambda\mu)(\lambda\mu+(1-\lambda)(1-\mu)),
\end{aligned}$$

ami ellentmond az állításunknak, ezért $\epsilon_0 = S_{\mathcal{X}}$, vagyis 2.3. tételből következik, hogy $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ euklideszi tér. Ha $\sim$ a $\leq$ relációt jelöli, a bizonyítás analóg módon történik, ezúttal az $\epsilon_1 \supseteq S_{\mathcal{X}}$ Loewner-ellipszist véve. ■

2.5. Tétel. (Kasahara) *Ha van olyan $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$, amire minden $x, y \in S_{\mathcal{X}}$ esetén létezik $\lambda \in [\alpha, 1-\alpha]$, hogy*

$$\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2 + \|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 \sim 1,$$

akkor $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ euklideszi tér.

Bizonyítás: Azt bizonyítjuk, hogy ekkor teljesülni fog 2.4. tétel feltétele is. Valóban, $\mu := \frac{1}{2}$ választással

$$\mu(1-\mu)\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 + \lambda(1-\lambda)\|\mu x - (1-\mu)y\|^2 =$$

$$= \frac{(\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2)}{4} + \lambda(1-\lambda)\left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2 \sim \frac{1}{4} =$$

$$= (\lambda + \mu - 2\lambda\mu)(\lambda\mu + (1-\lambda)(1-\mu)). \quad \blacksquare$$

2.6. Tétel. *Adott* $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ *normált tér pontosan akkor euklideszi tér, ha*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \sim 4$$

minden $x, y \in S_{\mathcal{X}}$ *esetén*

Bizonyítás: Az egyenlőtlenségből következik, hogy teljesül 2.5. tétel feltétele $\alpha = \lambda = \frac{1}{2}$ esetén. Ha pedig $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ euklideszi tér, teljesül a paralelogramma-szabály $\|x\| = \|y\| = 1$ esetén is. $\blacksquare$

3. Jellemzés a norma deriválttal

Legyen $(\mathcal{X}, \|.\|)$ valós normált tér olyan, hogy $\dim\mathcal{X} \geq 2$. Tekintsük a $\rho'_+, \rho'_- : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ függvényeket, melyeket a következőképpen definiálunk

$$\rho'_\pm(x,y) := \lim_{t\to 0\pm} \frac{\|x+ty\|^2 - \|x\|^2}{2t}.$$

Ezeket a függvényeket norma deriváltnak hívjuk.

3.2. Lemma. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ konvex. Ekkor minden $x \in I$-re léteznek a bal- és jobboldali féloldali deriváltak, és*

$$f'_-(x) \leq f'_+(x)$$

3.2. Állítás. *A $\rho'_\pm$ függvények jól definiáltak.*

Bizonyítás: Rögzítjük $x, y \in \mathcal{X}$ vektorokat és legyen

$$f(t) = \|x+ty\|^2 \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Tetszőleges $s, t \in \mathbb{R}$ és $\alpha \in [0,1]$ esetén a háromszög-egyenlőtlenség és az $x \to x^2$ függvény konvexitása miatt

$$\|x + (\alpha t + (1-\alpha)s)y\|^2 = \|\alpha(x+ty) + (1-\alpha)(x+sy)\|^2 \leq$$
$$\leq (\alpha\|x+ty\| + (1-a)\|x+sy\|)^2 \leq \alpha\|x+ty\|^2 + (1-\alpha)\|x+sy\|^2$$

Tehát f konvex, ezért létezik mindkét féloldali derivált, azaz $\rho'_\pm$ függvények jól definiáltak. ■

3.3. Állítás. *Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ valós euklideszi tér, akkor ρ'_+ és ρ'_- is egybeesik a skaláris szorzattal.*

Bizonyítás:

$$\rho'_\pm(x,y) = \lim_{t\to 0\pm} \frac{\|x+ty\|^2 - \|x\|^2}{2t} = \lim_{t\to 0\pm} \frac{\langle x+ty, x+ty\rangle - \langle x,x\rangle}{2t} =$$

$$= \lim_{t\to 0\pm} \frac{2t\langle x,y\rangle + t^2\langle y,y\rangle}{2t} = \langle x,y\rangle. \quad ■$$

3.7. Tétel. *Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ legalább kétdimenziós valós normált tér, ekkor a következők teljesülnek:*

1. $\rho'_{\pm}(0, y) = \rho'_{\pm}(x, 0) = 0 \quad x, y \in \mathcal{X}$
2. $\rho'_{\pm}(x, x) = \|x\|^2 \quad x \in \mathcal{X}$
3. $\rho'_{\pm}(\alpha x, y) = \rho'_{\pm}(x, \alpha y) = \alpha\rho'_{\pm}(x, y) \quad x, y \in \mathcal{X} \quad \alpha > 0$
4. $\rho'_{\pm}(\alpha x, y) = \rho'_{\pm}(x, \alpha y) = \alpha\rho'_{\mp}(x, y) \qquad x, y \in \mathcal{X} \quad \alpha < 0$
5. $\rho'_{\pm}(x, \alpha x + y) = \alpha\|x\|^2 + \rho'_{\pm}(x, y) \quad x, y \in \mathcal{X} \quad \alpha \in \mathbb{R}$
6. $\rho'_{-}(x, y) \leq \rho'_{+}(x, y) \quad x, y \in \mathcal{X}$
7. $\rho'_{+}(x, y) = \rho'_{+}(y, x) \quad x, y \in \mathcal{X}$ *vagy* $\rho'_{-}(x, y) = \rho'_{-}(y, x) \quad x, y \in \mathcal{X}$ *akkor és csak akkor, ha* $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ *euklideszi tér*
8. $\rho'_{+}(x, y) = \rho'_{+}(y, x) \quad x, y \in S_{\mathcal{X}}$ *vagy* $\rho'_{-}(x, y) = \rho'_{-}(y, x) \quad x, y \in S_{\mathcal{X}}$ *akkor és csak akkor, ha* $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ *euklideszi tér.*

Bizonyítás:

1. $x = 0$ vagy $y = 0$ esetén

$$\rho'_{\pm}(0, y) = \lim_{t \to 0\pm} \frac{\|ty\|^2 - \|0\|^2}{2t} = 0$$

illetve

$$\rho'_{\pm}(x, 0) = \lim_{t \to 0\pm} \frac{\|x\|^2 - \|x\|^2}{2t} = 0.$$

2. $x = y$ esetén

$$\rho'_{\pm}(x, x) = \lim_{t \to 0\pm} \frac{\|x + tx\|^2 - \|x\|^2}{2t} = \lim_{t \to 0\pm} \frac{(t^2 + 2t)\|x\|^2}{2t} = \|x\|^2.$$

3. $\alpha > 0$ esetén

$$\rho'_{\pm}(\alpha x, y) = \lim_{t \to 0\pm} \frac{\|\alpha x + ty\|^2 - \|\alpha x\|^2}{2t} = \alpha \lim_{t \to 0\pm} \frac{\|x + \frac{t}{\alpha}x\|^2 - \|x\|^2}{2\frac{t}{\alpha}} =$$

$$= \alpha \lim_{s \to 0\pm} \frac{\|x + sy\|^2 - \|x\|^2}{2s} = \alpha\rho'_{\pm}(x, y) \quad s := \frac{t}{\alpha}$$

hasonlóan

$$\begin{aligned}\rho'_{\pm}(x,\alpha y) &= \lim_{t\to 0\pm}\frac{\|x+\alpha t y\|^2-\|x\|^2}{2t} = \\ &= \alpha\lim_{s\to 0\pm}\frac{\|x+sy\|^2-\|x\|^2}{2s} = \alpha\rho'_{\pm}(x,y) \quad s:=\alpha t.\end{aligned}$$

4. A bizonyítás ugyanúgy megy mint az előző pontban, itt $t\to 0+$ akkor és csak akkor, ha $s\to 0-$, illetve $t\to 0-$ akkor és csak akkor, ha $s\to 0+$.

5. Adott $x,y\in\mathcal{X}$ és $\alpha\in\mathbb{R}$. Ha t elég kicsi, akkor $1+\alpha t>0$ és

$$\begin{aligned}\rho'_{\pm}(x,\alpha x+y) &= \lim_{t\to 0\pm}\frac{\|x+t(\alpha x+y)\|^2-\|x\|^2}{2t} = \lim_{t\to 0\pm}\frac{\|(1+t\alpha)x+ty\|^2-\|x\|^2}{2t} = \\ &= \lim_{t\to 0\pm}\frac{(1+t\alpha)^2\big(\|x+\frac{t}{1+t\alpha}y\|^2-\|x\|^2\big)+(1+t\alpha)^2\|x\|^2-\|x\|^2}{2t} = \\ &= \lim_{t\to 0\pm}\frac{(1+t\alpha)\big(\|x+\frac{t}{1+t\alpha}y\|^2-\|x\|^2\big)}{2\frac{t}{1+t\alpha}} + \lim_{t\to 0\pm}\frac{(2\alpha t+\alpha^2t^2)\|x\|^2}{2t} = \\ &= \lim_{s\to 0\pm}\frac{(\frac{1}{1-\alpha s})(\|x+sy\|^2-\|x\|^2)}{2s}+\alpha\|x\|^2 = \rho'_{\pm}(x,y)+\alpha\|x\|^2 \\ & \quad s:=\frac{t}{1+\alpha t}.\end{aligned}$$

6. Mivel tetszőleges $x,y\in\mathcal{X}$ esetén

$$f(t)=\|x+ty\|^2 \quad : \quad I\to\mathbb{R}$$

konvex függvény, így 3.2. lemmából következik.

7. A 3.3. állításból következik, hogy elég megmutatni, az egyik irányt. Tegyük fel, hogy

$$\rho'_{+}(x,y)=\rho'_{+}(y,x) \qquad x,y\in\mathcal{X}.$$

Ebből következik, hogy

$$\rho'_{-}(x,y)=\rho'_{-}(y,x) \qquad x,y\in\mathcal{X},$$

hiszen

$$\rho'_-(x,y) = -\rho'_+(-x,y) = -\rho'_+(y,-x) = \rho'_-(y,x).$$

Legyen $\mathcal{X}$ egy tetszőleges kétdimenziós altere $\mathcal{P}$. Definiáljuk a $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{P}\times\mathcal{P}\to\mathbb{R}$ függvényt a következőképpen:

$$\langle x,y\rangle := \frac{\rho_+(x,y)+\rho_-(x,y)}{2}, \quad x,y\in\mathcal{P}.$$

Megmutatjuk, hogy $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skaláris szorzat $\mathcal{P}$-ben. Nyilvánvaló, hogy szimmetrikus, nemnegatív, $\langle x,x\rangle = 0$ esetén következik, hogy $x=0$ és pozitív homogén, így elég megmutatni, hogy mindkét változójában additív. Mivel szimmetrikus így ezt elég csak a második változóra megmutatni. Legyenek $x,y,z\in\mathcal{P}$ tetszőlegesek. Külön vizsgáljuk az esetet, ahol x,y lineárisan függnek egymástól, illetve függetlenek.

Feltesszük, hogy $y=\lambda x$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Így $\rho'_\pm$ tulajdonságaiból megkapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\langle x,y+z\rangle &= \langle x,\lambda x+z\rangle = \frac{\rho'_+(x,\lambda x+z)+\rho'_-(x,\lambda x+z)}{2} = \\
&= \lambda\|x\|^2 + \frac{\rho'_+(x,z)+\rho'_-(x,z)}{2} = \\
&= \langle x,\lambda x\rangle + \langle x,z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle.
\end{aligned}$$

Most legyenek x és y függetlenek, így $z=\alpha x+\beta y$ valamilyen $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ számokra.

Ekkor

$$
\begin{aligned}
\langle x, y+z\rangle &= \langle x, \alpha x + (1+\beta)y\rangle = \\
&= \frac{\rho'_+(x, \alpha x + (1+\beta)y) + \rho'_-(x, \alpha x + (1+\beta)y)}{2} = \\
&= \frac{\alpha\|x\|^2 + (1+\beta)\rho'_+(x,y) + \alpha\|x\|^2 + (1+\beta)\rho'_-(x,y)}{2} = \\
&= \frac{\rho'_+(x,y) + \rho'_-(x,y)}{2} + \frac{\alpha\|x\|^2 + \rho'_+(x,\beta y) + \alpha\|x\|^2 + \rho'_-(x,\beta y)}{2} = \\
&= \langle x, y\rangle + \frac{\rho'_+(x, \alpha x + \beta y) + \rho'_-(x, \alpha x + \beta y)}{2} = \\
&= \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle.
\end{aligned}
$$

Bebizonyítottuk, hogy $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skaláris szorzat $\mathcal{P}$-ben. Mivel $\mathcal{P}$-t tetszőleges kétdimenziós altérként választottuk, az 1.2. következmény miatt $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ is euklideszi tér lesz.

8. Feltesszük, hogy

$$\rho'_+(x,y) = \rho'_+(y,x) \qquad (x, y \in S_{\mathcal{X}}).$$

Tetszőleges $x, y \in \mathcal{X}\setminus\{0\}$ esetén, legyen

$$u := \frac{x}{\|x\|} \qquad v := \frac{y}{\|y\|}.$$

Ekkor teljesül, hogy

$$\rho'_+\Big(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\Big) = \rho'_+(u,v) = \rho'_+(v,u) = \rho'_+\Big(\frac{y}{\|y\|}, \frac{x}{\|x\|}\Big).$$

A 3. pontból következik, hogy

$$\rho'_+(x,y) = \rho'_+(y,x) \qquad (x, y \in \mathcal{X}).$$

Mivel $\rho'_+(x,0) = \rho'_+(0,x)$, így ez az egyenlőség teljesül minden $x, y \in \mathcal{X}$ esetén, tehát $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ euklideszi tér a 7. pont alapján. $\blacksquare$

3.8. Tétel. *Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér. Ha minden $x, y \in S_{\mathcal{X}}$ esetén*

$$\|x + ty\| = \|y + tx\| \qquad (t \in \mathbb{R})$$

akkor $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ euklideszi tér.

Bizonyítás: A feltétel teljesüléséből következik, hogy

$$\rho'_+(x, y) = \rho'_+(y, x) \qquad (x, y \in S_{\mathcal{X}}),$$

tehát teljesül 3.7. tétel 8. pontja, ezért $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ valóban euklideszi tér. ■

3.9. Tétel. (Lorch) *Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér esetén a következő két állítás ekvivalens:*

1. *ha $x, y \in \mathcal{X}$ és $\|x\| = \|y\|$, akkor $\|\alpha x + \alpha^{-1} y\| \geq \|x + y\|$ minden $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ esetén*

2. *$(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ euklideszi tér.*

Bizonyítás:

1. lépés Először azt mutatjuk meg, hogy ha

$$\|\alpha x + \alpha^{-1} y\| \geq \|x + y\| \qquad (\|x\| = \|y\|, \quad \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$$

fennáll, akkor csak akkor teljesül egyenlőséggel, ha $\alpha = \pm 1$. Tegyük fel, hogy $c \neq \pm 1$ esetén

$$\|cx + c^{-1} y\| = \|x + y\|.$$

Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$\left\| \frac{(1+c)}{2} x + \frac{(1+c^{-1})}{2} y \right\| \leq \frac{\|cx + c^{-1}y\| + \|x + y\|}{2} = \|x + y\|.$$

Feltehető, hogy $c > 0$. Legyen

$$z := \sqrt{\frac{(1+c) \cdot (1+c^{-1})}{4}}.$$

Ha $c \neq 1$, akkor $z > 1$, ezért

$$\left\| \frac{(1+c)}{2z} x + \frac{(1+c^{-1})}{2z} y \right\| < \|x + y\|,$$

azonban

$$\frac{(1+c)}{2z} \cdot \frac{(1+c^{-1})}{2z} = 1,$$

így ez ellentmondás, tehát az egyenlőség valóban csak $\alpha = \pm 1$ esetén áll fenn.

2. lépés Azt bizonyítjuk, ha teljesül a tétel 1. pontja, abból következik, hogy ha

$$\|\alpha x + \alpha^{-1} y\| \geq \|x + y\|$$

minden $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ esetén, akkor

$$\|x\| = \|y\|.$$

Tegyük fel, hogy az 1. pont teljesül, és valamely $u, v \in \mathcal{X}$ esetén

$$\|\alpha u + \alpha^{-1} v\| \geq \|u + v\|$$

minden $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ számra, de

$$\|u\| > \|v\|.$$

Ekkor

$$u' := \frac{\|v\| u}{\|u\|} \qquad c^2 := \frac{\|u\|}{\|v\|}$$

mellett

$$\|\alpha c^2 u' + \alpha^{-1} v\| \geq \|c^2 u' + v\|,$$

azaz

$$\|\alpha c u' + \alpha^{-1} c^{-1} v\| \geq \|c u' + c^{-1} v\|,$$

vagyis minden $\beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$\|\beta u' + \beta^{-1} v\| \geq \|c u' + c^{-1} v\|.$$

Mivel $\|u'\| = \|v\|$, így az 1. pontból következik, hogy

$$\|c u' + c^{-1} v\| = \|u' + v\|,$$

ami azonban csak akkor lehet, ha $c = \pm 1$, vagyis $c^2 = 1$, azaz $\|u\| = \|v\|$, ami ellentmondás, vagyis igaz az állításunk.

3. lépés Tegyük fel, hogy az 1. pont teljesül. Legyenek $x, y \in \mathcal{X}$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $\|x\| = \|y\|$ és $\alpha, \beta > 0$. Legyen

$$t := \alpha\beta + \alpha^{-1}\beta^{-1} \qquad s := \alpha\beta^{-1} + \alpha^{-1}\beta,$$

ekkor

$$ts = \alpha^2 + \alpha^{-2} + \beta^2 + \beta^{-2} \geq (\alpha + \alpha^{-1})^2.$$

Az 1. pontból következik, hogy

$$\begin{aligned}
\|\beta(\alpha x + \alpha^{-1} y) + \beta^{-1}(\alpha^{-1} x + \alpha y)\| &= \|tx + sy\| = \\
&= \sqrt{ts}\left\|\sqrt{\frac{t}{s}}x + \sqrt{\frac{s}{t}}y\right\| = \\
&\geq (\alpha + \alpha^{-1})\|x + y\| = \\
&= \|(\alpha x + \alpha^{-1} y) + (\alpha^{-1} x + \alpha y)\|,
\end{aligned}$$

amiből következik, hogy

$$\|\beta(\alpha x + \alpha^{-1} y) + \beta^{-1}(\alpha^{-1} x + \alpha y)\| \geq \|(\alpha x + \alpha^{-1} y) + (\alpha^{-1} x + \alpha y)\|$$

minden $\beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ esetén. Így a bizonyítás 2. lépéséből

$$\|\alpha x + \alpha^{-1} y\| = \|\alpha^{-1} x + \alpha y\| \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

következik, vagyis

$$\|sx + y\| = \|x + sy\| \qquad (s > 0).$$

Mivel $\|x\| = \| - x\|$, így

$$\| - sx + y\| = \|s(-x) + y\| = \| - x + sy\| = \|x - sy\| \qquad (s > 0).$$

Ez azt jelenti, hogy minden $s < 0$ esetén is teljesül az egyenlőség, ezért 3.8. tételből következik, hogy $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ euklideszi tér.

4. lépés Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ euklideszi tér, akkor $\|x\| = \|y\|$ esetében

$$\begin{aligned}
&\|\alpha x + \alpha^{-1} y\|^2 = \alpha^2\|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \alpha^{-2}\|y\|^2 \geq \\
&\geq \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 = \|x + y\|^2,
\end{aligned}$$

hiszen

$$\alpha\|x\| + \alpha^{-1}\|y\| = (\alpha + \alpha^{-1})\|x\| \geq 2\|x\| = \|x\| + \|y\|.$$

Tehát ha $\|x\| = \|y\|$, minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$\|\alpha x + \alpha^{-1} y\| \geq \|x + y\|. \quad \blacksquare$$

3.10. Tétel. (Gurarii-Sozonov) *Ha teljesül*

$$\left\|\frac{(x+y)}{2}\right\| \leq \|tx+(1-t)y\|$$

minden $x, y \in S_{\mathcal{X}}$, $t \in [0,1]$ *esetén, akkor* $(\mathcal{X}\|\cdot\|)$ *euklideszi tér.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy teljesül a feltétel. Legyenek $x, y \in S_{\mathcal{X}}$. Ekkor

$$\begin{aligned} \|\alpha x+\alpha^{-1}y\| &= (\alpha+\alpha^{-1})\left\|\frac{\alpha}{\alpha+\alpha^{-1}}x+\frac{\alpha^{-1}}{\alpha+\alpha^{-1}}y\right\| \geq \\ &\geq (\alpha+\alpha^{-1})\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \geq \\ &\geq \|x+y\| \end{aligned}$$

minden $\alpha > 0$ esetén. Így 3.9. tételből következik, hogy $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ euklideszi tér. ■

4. Jellemzés ortogonalitással

$(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér esetén akkor mondjuk, hogy x és y ortogonális, ha $\langle x, y\rangle = 0$ $(x \perp y)$. Az ortogonalitás fogalmát kiterjeszthetjük normált terekre úgy, hogy új féle ortogonalitást definiálunk. Azt vizsgáljuk, hogy az euklideszi ortogonalitásra jellemző tulajdonságok közül melyek teljesülnek a kiterjesztett ortogonalitásokra.

4.4. Állítás. *Az euklideszi ortogonalitásra, a következő tulajdnoságok teljesülnek:*

1. $x \perp x \Rightarrow x = 0$ *(nemdegenerált)*
2. $x \perp y \Rightarrow \lambda x \perp \mu y$ *minden* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *esetén (homogén)*
3. $x \perp y \Rightarrow y \perp x$ *(szimmetrikus)*
4. $x \perp y$ *és* $x \perp z$*, akkor* $x \perp (y + z)$ *(additív)*
5. *ha* $x \neq 0$*, akkor létezik* $\alpha \in \mathbb{R}$*, hogy* $x \perp (\alpha x + y)$ *(egzisztens)*
6. *ez az* α *egyértelmű (egyedi).*

4.3. Megjegyzés. *Ha az adott ortogonalitás nem szimmetrikus, külön kell vizsgálni a bal- és jobboldali additivitást, egzisztenciát illetve egyediséget.*

4.1. Isosceles-ortogonalitás

4.3. Definíció. *Adott* $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ *normált tér és* $x, y \in \mathcal{X}$ *esetén azt mondjuk, hogy* x *és* y *vektorok Isosceles-ortogonálisak, ha*

$$\|x + y\| = \|x - y\|.$$

4.4. Megjegyzés. *Az Isosceles-ortogonalitás szimmetrikus, egzisztens és pontosan akkor egyedi, ha* $\mathcal{X}$ *szigorúan konvex.*

4.5. Állítás. $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *euklideszi térben* $x \perp_I y$ *pontosan akkor, ha* $\langle x, y\rangle = 0$.

Bizonyítás: Tetszőleges $x, y \in \mathcal{X}$ Isosceles-ortogonális vektorok esetén

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 = \|x-y\|^2 + 4\langle x, y\rangle,$$

amiből következik, hogy

$$\langle x, y\rangle = 0.$$

Ha pedig $\langle x, y\rangle$=0, akkor

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x-y\|^2. \quad \blacksquare$$

4.11. Tétel. *Ha az Isosceles-ortogonalitás homogén, akkor $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ euklideszi tér.*

Bizonyítás: Adott $x, y \in S_{\mathcal{X}}$ esetén feltesszük, hogy $\perp_I$ homogén. Ekkor $(x+y) \perp_I (x-y)$. Így a feltevésünkből következik, hogy

$$\frac{(1+t)}{2}(x+y) \perp_I \frac{(1-t)}{2}(x-y),$$

vagyis

$$\left\|\frac{(1+t)}{2}(x+y) + \frac{(1-t)}{2}(x-y)\right\| = \left\|\frac{(1+t)}{2}(x+y) - \frac{(1-t)}{2}(x-y)\right\|,$$

azaz

$$\|x+ty\| = \|y+tx\| \quad (t \in \mathbb{R}),$$

tehát 3.8. tételből következik, hogy $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ euklideszi tér. $\blacksquare$

4.2. Birkhoff-ortogonalitás

4.4. Definíció. *Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $x, y \in \mathcal{X}$ esetén azt mondjuk, hogy x és y ortogonálisak Birkhoff értelemben, azaz $x \perp_B y$, ha*

$$\|x+ty\| \geq \|x\| \qquad (t \in \mathbb{R})$$

4.5. Megjegyzés. *A Birkhoff-ortogonalitás homogén, egzisztens.*

4.6. Állítás. *Ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, $x, y \in \mathcal{X}$ esetén $x \perp_B y$ pontosan akkor, ha $\langle x, y\rangle = 0$.*

Bizonyítás: Ha $\langle x, y\rangle = 0$, akkor

$$\|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + t^2\|y\|^2 \geq \|x\|^2.$$

Ha $\|x + ty\| \geq \|x\|$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén, akkor

$$\|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t\langle x, y\rangle + t^2\|y\|^2 \geq \|x\|^2$$

ami azt jelenti, hogy tetszőleges $x, y \in \mathcal{X}$ vektorokra

$$2t\langle x, y\rangle + t^2\|y\|^2 \geq 0.$$

A $t > 0$ esetben

$$2\langle x, y\rangle + t\|y\|^2 \geq 0,$$

ha vesszük a $t \to 0+$ határértéket

$$2\langle x, y\rangle \geq 0.$$

A $t < 0$ esetben

$$2\langle x, y\rangle + t\|y\|^2 \leq 0,$$

ekkor ha vesszük a $t \to 0-$ határértéket

$$2\langle x, y\rangle \leq 0.$$

Ebből következik, hogy

$$\langle x, y\rangle = 0. \quad \blacksquare$$

4.12. Tétel. *Adott* $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ *normált tér,* $\dim \mathcal{X} \geq 2$ *és* $x, y \in \mathcal{X}$ *ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

1. $x \perp_I y \Rightarrow x \perp_B y$
2. $x \perp_B y \Rightarrow x \perp_I y$
3. $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ *euklideszi tér.*

Bizonyítás:

1. lépés Feltesszük, hogy

$$x \perp_I y \Rightarrow x \perp_B y.$$

Ekkor legyen $x, y \in \mathcal{X}$ és $\|x\| = \|y\|$ esetén

$$u := x + y \qquad v := x - y.$$

Ekkor teljesül, hogy

$$\|u + v\| = \|u - v\|,$$

azaz $u \perp_I v$, vagyis a feltevésünk szerint

$$\|u + \lambda v\| \geq \|u\|,$$

$$\|x + y + \lambda(x - y)\| \geq \|x + y\|,$$

amiből következik, hogy

$$\left\| \frac{(1+\lambda)}{2} x + \frac{(1-\lambda)}{2} y \right\| \geq \left\| \frac{x+y}{2} \right\|$$

minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén, így $t := \frac{1+\lambda}{2}$ helyettesítéssel

$$\|tx + (1-t)y\| \geq \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

ezért 3.10. tételből következik, hogy $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ euklideszi tér.

2. lépés Feltesszük, hogy

$$x \perp_B y \Rightarrow x \perp_I y.$$

Legyen $u, v \in S_{\mathcal{X}}$ és $x \in (u, v)$ olyan, hogy

$$\|\lambda u + (1-\lambda)v\| \geq \|x\| \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Ekkor teljesül, hogy

$$\|x + \lambda(u - x)\| \geq \|x\| \qquad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

vagyis $x \perp_B (u - x)$, illetve

$$\|x + \alpha(v - x)\| \geq \|x\| \qquad (\alpha \in \mathbb{R}),$$

vagyis $x \perp_B (v-x)$. Tegyük fel, hogy

$$\|x\| < \left\| \frac{u+v}{2} \right\|.$$

Ekkor, ha $x \in (u, \frac{u+v}{2})$, akkor valamely $t \in (0,1)$ esetén

$$x = \frac{(1+t)}{2}u + \frac{(1-t)}{2}v.$$

Mivel $x \perp_B (u-x)$, így a feltevés szerint $x \perp_I (u-x)$, vagyis

$$1 = \|u\| = \|2x-u\|.$$

Azonban

$$2x - u = tu + (1-t)v,$$

vagyis $2x-u \in (u,v)$. Így a háromszög-egyenlőség miatt

$$\|\lambda u + (1-\lambda)v\| = 1 \qquad \lambda \in (0,1),$$

azaz

$$1 = \|x\| < \left\| \frac{u+v}{2} \right\| \leq 1,$$

ami ellentmondás. Ha $x \in (v, \frac{u+v}{2})$, szintén ellentmondásra jutunk, tehát

$$\|x\| = \left\| \frac{u+v}{2} \right\|.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\|\lambda u + (1-\lambda)v\| \geq \left\| \frac{u+v}{2} \right\| \qquad \lambda \in [0,1],$$

minden $u, v \in S_{\mathcal{X}}$ esetén, vagyis 3.10. tételből következik, hogy $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ euklideszi tér.

3. lépés Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ euklideszi tér, $\perp_I$ és $\perp_B$ ekvivalensek az euklideszi ortogonalitással.

■

4.3. Pitagoraszi ortogonalitás

4.5. Definíció. *Adott* $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ *normált tér, azt mondjuk, hogy* $x, y \in \mathcal{X}$ *ortogonálisak pitagoraszi értelemben, azaz* $x \perp_P y$*, ha*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

4.6. Megjegyzés. *A pitagoraszi ortogonalitás szimmetrikus, egzisztens.*

4.3. Lemma. *Adott* $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ *normált tér, ha* $\dim \mathcal{X} \geq 2$*, akkor minden* $x \in \mathcal{X}$ *és* $t \geq 0$ *esetén létezik olyan* $y \in \mathcal{X}$*, hogy* $\|y\| = t$ *és* $x \perp_P y$*.*

Bizonyítás: Vegyük a következő függvényt:

$$f(y) = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - t^2 \qquad y \in (t \cdot S_{\mathcal{X}}).$$

Az f folytonos $t \cdot S_{\mathcal{X}}$-en, ezért elég megmutatni, hogy léteznek olyan $y_1, y_2 \in t \cdot S_{\mathcal{X}}$ vektorok, amelyekre $f(y_1) \leq 0$ ill. $f(y_2) \geq 0$. Tetszőleges $x \in \mathcal{X}$ és $t \in \mathbb{R}$ esetén legyen $y_1 := -\dfrac{tx}{\|x\|}$. Ekkor

$$\begin{aligned} f(y_1) &= \left\| x - \frac{tx}{\|x\|} \right\|^2 - \|x\|^2 - t^2 = \left[\left(1 - \frac{t}{\|x\|}\right)^2 - 1 \right] \|x\|^2 - t^2 \\ &= \left(-\frac{2t}{\|x\|} + \frac{t^2}{\|x\|^2} \right) \|x\|^2 - t^2 = -2t\|x\| \leq 0. \end{aligned}$$

Most legyen $y_2 := \dfrac{tx}{\|x\|}$. Ekkor

$$\begin{aligned} f(y_2) &= \left\| x + \frac{tx}{\|x\|} \right\|^2 - \|x\|^2 - t^2 = \left[\left(1 + \frac{t}{\|x\|}\right)^2 - 1 \right] \|x\|^2 - t^2 \\ &= \left(\frac{2t}{\|x\|} + \frac{t^2}{\|x\|^2} \right) \|x\|^2 - t^2 = 2t\|x\| \geq 0. \end{aligned}$$

Ezek szerint van olyan $y \in t \cdot S_{\mathcal{X}}$, amelyre

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + t^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

azaz $x \perp_P y$ és $\|y\| = t$. ■

4.13. Tétel. *Ha $x, y \in \mathcal{X}$ esetén $x \perp_P y \Rightarrow x \perp_P -y$, akkor $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ euklideszi tér.*

Bizonyítás: Adottak $u, v \in S_{\mathcal{X}}$. Ha $\|u+v\| = \|u-v\| = 2$ lenne, akkor

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2 = 2 > 1 = \|u\|^2,$$

így

$$\frac{u+v}{2} \not\perp_P \frac{u-v}{2}.$$

Feltesszük, hogy

$$\|u-v\| = 2t < 2.$$

A 4.3. lemma alapján x legyen olyan, hogy

$$x \perp_P \frac{u-v}{2} \qquad \|x\| = \sqrt{(1-t^2)}.$$

Ekkor a tételünk szerint

$$\left\|x \pm \frac{(u-v)}{2}\right\|^2 = \|x\|^2 + t^2 = 1,$$

vagyis

$$x \pm \frac{1}{2}(u-v) \in S_{\mathcal{X}}.$$

Mivel

$$\frac{1}{2}(u+v) \pm \frac{1}{2}(u-v) \in S_{\mathcal{X}} \qquad \text{és} \qquad \|u-v\| < 2,$$

ez akkor és csak akkor lehetséges, ha

$$x = \pm\frac{(u+v)}{2}.$$

Ebből következik, hogy

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 = 1 - \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2.$$

Ugyanezt kapjuk, ha $\|u+v\| < 2$, vagyis ekkor teljesül, hogy

$$\|u+v\| + \|u-v\| = 4 \qquad u, v \in (S_{\mathcal{X}}),$$

azaz 2.6. tételből következik, hogy $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ euklideszi tér. ■

4.3. Következmény. *Ha a pitagoraszi ortogonalitás homogén, akkor* $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ *euklideszi tér.*

4.4. Lemma. *Ha* $\mathcal{X}$ *szigorúan konvex,* $x, y \in \mathcal{X}$, $y \neq 0$ *esetén a Birkhoff-ortogonalitás bal egyedi, azaz egyértelműen létezik* $\alpha \in \mathbb{R}$, *amelyre* $(x + \alpha y) \perp_B y$.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\alpha \neq \beta$ esetén $(x + \alpha y) \perp_B y$ és $(x + \beta y) \perp_B y$. Ekkor

$$\|x + (\alpha + \lambda)y\| \geq \|x + \alpha y\|,$$

$$\|x + (\beta + \lambda)y\| \geq \|x + \beta y\|$$

minden $\lambda \in \mathbb{R}$ számra, vagyis

$$\|x + ty\| \geq \|x + \alpha y\|,$$

$$\|x + ty\| \geq \|x + \beta y\|$$

minden $t \in \mathbb{R}$ számra. Ebből következik, hogy

$$\|x + \alpha y\| = \|x + \beta y\|,$$

így a szigorú konvexitásból

$$\left\|x + \frac{\alpha + \beta}{2} y\right\| < \frac{\|x + \alpha y\| + \|x + \beta y\|}{2} = \|x + \alpha y\|,$$

ami ellentmondás, tehát $\alpha = \beta$. ■

4.5. Lemma. *Adott* $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ *normált tér, ekkor a pitagoraszi ortogonalitás egyedi, azaz minden* $x, y \in \mathcal{X}$, $x \neq 0$ *esetén egyértelműen létezik* $\alpha \in R$, *hogy* $x \perp_P (\alpha x + y)$.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az állításunk nem igaz. Ekkor létezik $0 \neq x, y \in \mathcal{X}$ és $\alpha > 0$, hogy $x \perp_P y$ és $x \perp (\alpha x + y)$, azaz

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \qquad \|x + \alpha x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|\alpha x + y\|^2. \tag{4.3}$$

Legyen $g := \|y + tx\|^2$, (4.3) alapján

$$g(1) = \|x\|^2 + g(0), \qquad g(\alpha + 1) = \|x\|^2 + g(\alpha). \tag{4.4}$$

A g függvény 3.2. állítás alapján konvex. Először azt bizonyítjuk, hogy ha $0 < t < 1$ és s_1, s_2 olyanok, hogy $g(s_1) \neq g(s_2)$, akkor

$$g(ts_1 + (1-t)s_2) < tg(s_1) + (1-t)g(s_2). \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
g(ts_1 + (1-t)s_2) &= \|t(y + s_1x) + (1-t)(y + s_2x)\|^2 \leq \\
&\leq t^2\|y + s_1x\|^2 + (1-t)^2\|y + s_2x\|^2 + 2t(1-t)\|y + s_1x\|\|y + s_2x\| = \\
&= t\|y + s_1x\|^2 + (1-t)\|y + s_2x\|^2 + (t^2 - t)\cdot \\
&\quad \cdot(\|y + s_1x\|^2 + \|y + s_2x\|^2 - 2\|y + s_1x\|\|y + s_2x\|) = \\
&= tg(s_1) + (1-t)g(s_2) - t(1-t)(\|y + s_1x\| - \|y + s_2x\|)^2 \leq \\
&\leq tg(s_1) + (1-t)g(s_2),
\end{aligned}$$

ahol az egyenlőtlenség szigorú lesz, ha $g(s_1) \neq g(s_2)$.

Most tegyük fel, hogy $0 < \alpha < 1$, ekkor (4.3), (4.4) és (4.5) felhasználásával kapjuk, hogy

$$g(\alpha) < \alpha g(1) + (1-\alpha)g(0),$$

$$\begin{aligned}
g(1) &< \alpha g(\alpha) + (1-\alpha)g(\alpha+1) = \\
&= \alpha g(\alpha)(g(\alpha) + g(1) - g(0)),
\end{aligned}$$

amiből következik, hogy

$$\alpha g(1) + (1-\alpha)g(0) < g(\alpha),$$

ami ellentmondás.

Az $\alpha > 1$ esetben g konvexitásából és (4.4)-ből adódóan $g(0) \neq g(\alpha)$, $g(1) \neq g(\alpha+1)$ és (4.5) alapján

$$g(1) < \frac{\alpha-1}{\alpha}g(0) + \frac{1}{\alpha}g(\alpha),$$

és

$$\begin{aligned}
g(\alpha) &< \frac{g(1)}{\alpha} + \frac{\alpha-1}{\alpha}g(\alpha+1) = \\
&= \frac{g(1)}{\alpha} + \frac{\alpha-1}{\alpha}(g(\alpha) + g(1) - g(0)),
\end{aligned}$$

vagyis

$$\frac{\alpha-1}{\alpha}g(0) + \frac{1}{\alpha}g(\alpha) < g(1),$$

amely ellentmondás.

Az $\alpha = 1$ esetben pedig

$$g(2) = g(1) + \|x\|^2 = g(0) + 2\|x\|^2,$$

és

$$g(1) < \frac{1}{2}(g(0) + g(2)) = g(0) + \|x\|^2,$$

amely szintén ellentmondás, azaz minden esetben teljesül a megfogalmazott tétel. ■

4.14. Tétel. *Adott* $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ *normált tér és* $x, y \in \mathcal{X}$ *tetszőlegesek. Ha a következő állítások közül bármelyik teljesül, akkor* $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ *euklideszi tér.*

1. $x \perp_P y \Rightarrow x \perp_I y$
2. $x \perp_I y \Rightarrow x \perp_P y$
3. $x \perp_B y \Rightarrow x \perp_P y$
4. $x \perp_P y \Rightarrow x \perp_B y$.

Bizonyítás:

1. lépés Ha $x \perp_P y \Rightarrow x \perp_I y$, akkor

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2 = \|x - y\|^2$$

vagyis 4.13. tételből következik, hogy $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ euklideszi tér.

2. lépés Ha $x \perp_I y \Rightarrow x \perp_P y$, legyenek $u, v \in S_{\mathcal{X}}$ esetén

$$x := u + v \qquad y := u - v.$$

Ekkor $x \perp_I y$, vagyis

$$4 = \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2,$$

azaz 2.6. tételből következik, hogy $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ euklideszi tér.

3. lépés Ha $x \perp_B y$, akkor $x \perp_B -y$, vagyis

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2,$$

tehát $x \perp_I y$ is teljesül, ezért 4.12. tétel 2. pontjából következik, hogy $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ euklideszi tér.

4. lépés Azt mutatjuk meg, hogy

$$x \perp_P y \Rightarrow x \perp_B y$$

implikálja, hogy

$$x \perp_B y \Rightarrow x \perp_P y.$$

Ehhez először belátjuk, hogy

$$x \perp_P y \Rightarrow x \perp_B y$$

miatt $\mathcal{X}$ szigorúan konvex.

Tegyük fel, hogy nem szigorúan konvex, ekkor $x, y \in \mathcal{X}$ legyenek olyanok, hogy

$$x \neq y \qquad \text{és} \qquad \|x\| = \|y\| = \left\|\frac{(x+y)}{2}\right\| = 1,$$

de

$$x \not\perp_P \frac{x+y}{2}.$$

A 4.5. lemma miatt egyértelműen létezik $\alpha \neq 0$, hogy

$$\frac{x+y}{2} \perp_P \alpha\frac{(x+y)}{2} + x.$$

Ekkor

$$\left\|(\alpha+1)\frac{x+y}{2} + x\right\|^2 = 1 + \left\|\alpha\frac{x+y}{2} + x\right\|^2$$

ezért

$$\left\|\frac{x+y}{2} + t\alpha\frac{x+y}{2} + tx\right\| \geq \left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1,$$

minden $t \in \mathbb{R}$ esetén. Ha $t := -\frac{1}{\alpha}$, akkor ebből következik, hogy $|\alpha| \leq 1$. Most $t := -\frac{1}{\alpha+2}$ esetén, $|\frac{1}{\alpha+2}| \geq 1$, így $\alpha = -1$ lehet csak. Ez azt jelenti, hogy

$$1 = \left\|\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right\|^2 = \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = 1 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2.$$

Így $x = y$, ami ellentmondás, tehát $\mathcal{X}$ szigorúan konvex.

Most tegyük fel, hogy

$$x \perp_P y \Rightarrow x \perp_B y,$$

de

$$x \perp_B y \not\Rightarrow x \perp_P y.$$

Legyen $x, y \in \mathcal{X}$ olyanok, hogy $x \perp_B y$, de $x \not\perp_P y$. Ekkor egyértelműen létezik $\alpha \neq 0$, hogy

$$x + \alpha y \perp_P y,$$

a 4.5. lemma alapján, ezért

$$x + \alpha y \perp_B y,$$

ez azonban ellentmond a Birkhoff-ortogonalitás bal egyediségének 4.4. lemma alapján, mivel $\mathcal{X}$ szigorúan konvex, tehát valóban

$$x \perp_B y \Rightarrow x \perp_P y,$$

vagyis $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ euklideszi tér. ■

5. Hermite-Hadamard-féle ortogonalitás

5.1. p-HH norma

Először a Hermite-Hadamard-egyenlőtlenséget bizonyítjuk, amely segítségével normák egy új osztályát definiáljuk.

5.15. Tétel. *Ha $f : I \to \mathbb{R}$ konvex függvény, minden $a, b \in I$ és $a < b$ esetén*

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Bizonyítás: Rögzített $a, b \in I$ mellett legyen $u := ta + (1-t)b$, $v := (1-t)a + tb$. Ekkor f konvexitása miatt

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) &= f\Big(\frac{u+v}{2}\Big) \le \\ &\le \frac{1}{2}f(u) + \frac{1}{2}f(v) = \\ &= \frac{1}{2}(f(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb)). \end{aligned}$$

Integráljuk az egyenlőtlenséget t szerint a (0,1) intervallumon

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) &= \frac{1}{2}\Big(\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt + \int_0^1 f((1-t)a+tb)dt\Big) = \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \end{aligned}$$

A másik egyenlőtlenség bizonyításához

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx &= \int_0^1 f((1-t)a+tb)dt \le \\ &\le f(a)\int_0^1 (1-t)dt + f(b)\int_0^1 tdt = \\ &= \frac{f(a)+f(b)}{2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, a norma $\|\cdot\| : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ konvex függvény, így

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq \int_0^1 \|(1-t)x + ty\| \leq \frac{\|x\| + \|y\|}{2} \qquad (x, y \in \mathcal{X}).$$

5.6. Definíció. *Legyen $1 \leq p \leq \infty$ esetén a $\|(\cdot,\cdot)\|_{p-HH} : \mathcal{X}^2 \to \mathbb{R}$ leképezés a következő:*

$$\|(x,y)\|_{p-HH} := \Big(\int_0^1 \|(1-t)x + ty\|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}$$

Az integrál véges a Hermite-Hadamard-egyenlőtlenség miatt. $p = \infty$ esetén

$$\|(x,y)\|_{\infty-HH} = \|(x,y)\|_\infty.$$

5.16. Tétel. *A megadott $\|(\cdot,\cdot)\|_{p-HH} : \mathcal{X}^2 \to \mathbb{R}$ leképezés norma.*

Bizonyítás: A definícióból következik, hogy pozitív homogén. A háromszög-egyenlőtlenség következik a Minkowski-egyenlőtlenségből és nyilvánvalóan nem negatív. Tegyük fel, hogy $(x,y) = (0,0)$. Ekkor

$$\|(1-t)x + ty\| = 0 \qquad t \in [0,1],$$

így

$$\|(x,y)\|_{p-HH} = 0.$$

Ha $(x,y) \in \mathcal{X}^2$ olyan, hogy

$$\|(x,y)\|_{p-HH} = 0,$$

akkor

$$0 \leq \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq \Big(\int_0^1 \|(1-t)x + ty\|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}} = 0,$$

Tehát

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -y.$$

Így a következő igaz:

$$\Big(\int_0^1 \|(1-t)x + ty\|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\int_0^1 |2t-1|^p \|y\|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}} = \|y\|\Big(\frac{1}{p+1}\Big).$$

Mivel

$$\|(x,y)\|_{p-HH}=0 \qquad \frac{1}{p+1}\neq 0,$$

így

$$x=y=0,$$

vagyis $\|(\cdot,\cdot)\|_{p-HH}$ valóban norma. ■

5.2. HH-I ortogonalitás

Adott $(\mathcal{X},\|\cdot\|)$ normált tér, legyen $x,y\in\mathcal{X}$ olyan, hogy $(1-t)x\perp_I ty$ majdnem minden $t\in[0,1]$ esetén. Ekkor

$$\|(x,y)\|^2_{2-HH}=\int_0^1\|(1-t)x+ty\|^2dt=\int_0^1\|(1-t)x-ty\|^2dt. \tag{5.6}$$

5.7. Definíció. *Adott $(\mathcal{X},\|\cdot\|)$ normált tér és $x,y\in\mathcal{X}$. Azt mondjuk, hogy x és y $HH-I$ ortogonálisak azaz, $x\perp_{HH-I} y$, ha (5.6) teljesül.*

5.7. Állítás. *Ha $(\mathcal{X},\|\cdot\|)$ euklideszi tér, a $HH-I$ ortogononalitás ekvivalens az euklideszi ortogonalitással.*

Bizonyítás: Ha $\langle x,y\rangle$=0, akkor

$$\int_0^1\|(1-t)x+ty\|^2dt=\int_0^1(1-t)^2\|x\|^2+t^2\|y\|^2+2t(1-t)\langle x,y\rangle dt=\int_0^1\|(1-t)x-ty\|^2dt,$$

ha pedig teljesül (5.6)

$$\int_0^1(1-t)^2\|x\|^2+t^2\|y\|^2+2t(1-t)\langle x,y\rangle dt=\int_0^1(1-t)^2\|x\|^2+t^2\|y\|^2-2t(1-t)\langle x,y\rangle dt,$$

vagyis

$$\int_0^1 t(1-t)\langle x,y\rangle dt=\int_0^1 -t(1-t)\langle x,y\rangle dt,$$

$$\frac{1}{3}\langle x,y\rangle=-\frac{1}{3}\langle x,y\rangle,$$

tehát $\langle x,y\rangle=0$. ■

5.8. Állítás. *A $HH-I$ ortogonalitás nem ekvivalens az Isosceles-ortogonalitással.*

5.1. Példa. *Legyen* $(\mathcal{X}, \|\cdot\|) := (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{l_1})$. *Ekkor* $x = (2, -1)$ *és* $y = (1, 1)$ *esetén* $x \perp_I y$, *de* $x \not\perp_{HH-I} y$. *Másrészt ha* $x = (-\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{129}}{8}, 1)$ *és* $y = (-\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{129}}{8}, -2)$, *akkor* $x \perp_{HH-I} y$, *de* $x \not\perp_I y$.

5.9. Állítás. *A $HH-I$ ortogonalitás szimmetrikus, egzisztens és pontosan akkor egyedi, ha $\mathcal{X}$ szigorúan konvex.*

5.17. Tétel. *A $HH-I$ ortogonalitás pontosan akkor homogén, ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ euklideszi tér.*

Bizonyítás: Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$, euklideszi tér, a $HH-I$ ortogonalitás ekvivalens az euklideszi ortogonalitással, így homogén. Feltesszük, hogy a $HH-I$ ortogonalitás homogén, és legyen $x, y \in \mathcal{X}$, olyanok, hogy $\|x\| = \|y\|$. Minden $t \in (0,1)$-re legyen

$$A(t) := \frac{x+y}{1-t} \qquad B(t) := \frac{x-y}{t}.$$

Ekkor

$$\int_0^1 \|(1-t)A(t) + tB(t)\|^2 dt = \int_0^1 \|x+y+x-y\|^2 dt = 4\|x\|^2$$

és

$$\int_0^1 \|(1-t)A(t) - tB(t)\|^2 dt = \int_0^1 \|x+y-x+y\|^2 dt = 4\|y\|^2.$$

Mivel $\|x\| = \|y\|$, így az egyenlőségekből következik, hogy $A(t) \perp_{HH-I} B(t)$, minden $t \in (0,1)$ esetén. Feltettük, hogy a $HH-I$ ortogonalitás homogén, így minden $s \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{s+1}{2} A(t) \perp_{HH-I} \frac{s-1}{2} B(t),$$

azaz

$$\int_0^1 \left\|(1-t)\frac{s+1}{2}A(t) + t\frac{s-1}{2}B(t)\right\|^2 dt = \|sx+y\|^2,$$

illetve

$$\int_0^1 \left\|(1-t)\frac{s+1}{2}A(t) - t\frac{s-1}{2}B(t)\right\|^2 dt = \|x+sy\|^2,$$

vagyis

$$\|sx + y\| = \|x + sy\| \qquad s \in \mathcal{X},$$

ezért 3.8. tétel miatt $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ euklideszi tér. ■

5.3. HH-P ortogonalitás

Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, legyen $x, y \in \mathcal{X}$ olyan, hogy $(1-t)x \perp_P ty$ majdnem minden $t \in [0,1]$ esetén. Ekkor

$$\int_0^1 \|(1-t)x + ty\|^2 dt = \int_0^1 \|(1-t)x\|^2 + \|ty\|^2 dt = \frac{1}{3}(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{5.7}$$

5.8. Definíció. *Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér és $x, y \in \mathcal{X}$. Azt mondjuk, hogy x és y $HH-P$ ortogonálisak, azaz $x \perp_{HH-P} y$, ha (5.7) teljesül.*

5.10. Állítás. *Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ euklideszi tér, a $HH-P$ ortogonalitás ekvivalens az euklideszi ortogonalitással.*

Bizonyítás: Ha $x, y \in \mathcal{X}$ és $\langle x, y\rangle = 0$, akkor

$$\begin{aligned}\int_0^1 \|(1-t)x + ty\|^2 dt &= \int_0^1 \|(1-t)x\|^2 + \|ty\|^2 + 2t(1-t)\langle x, y\rangle dt = \\ &= \int_0^1 \|(1-t)x\|^2 + \|ty\|^2 dt = \frac{1}{3}(\|x\|^2 + \|y\|^2).\end{aligned}$$

Ha (5.7) teljesül, akkor

$$\begin{aligned}\int_0^1 \|(1-t)x + ty\|^2 dt &= \int_0^1 \|(1-t)x\|^2 + \|ty\|^2 + 2t(1-t)\langle x, y\rangle dt = \\ &= \int_0^1 \|(1-t)x\|^2 + \|ty\|^2,\end{aligned}$$

vagyis

$$0 = \int_0^1 2t(1-t)\langle x, y\rangle dt = \frac{1}{3}\langle x, y\rangle,$$

tehát $\langle x, y\rangle = 0$. ■

5.11. Állítás. *A $HH-P$ ortogonalitás nem ekvivalens a pitagoraszi ortogonalitással.*

5.2. Példa. *Legyen* $(\mathcal{X}, \|\cdot\|) := (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{l_1})$. *Ha* $x = (-3, 6)$ *és* $y = (8, 4)$, *akkor* $x \perp_P y$, *de* $x \not\perp_{HH-P} y$. *Másrészt ha* $x = (2, 1)$ *és* $y = (\frac{11}{2} - \frac{\sqrt{145}}{2}, 1)$, *akkor* $x \perp_{HH-P} y$, *de* $x \not\perp_P y$.

5.12. Állítás. *A $HH-P$ ortogonalitás szimmetrikus, egzisztens és egyedi.*

Bizonyítás: Az egzisztencia tulajdnoságot bizonyítjuk be, mivel ehhez szükség van a következő tétel belátásához.
Rögzítsük $x, y \in X$ vektorokat, $x \neq 0$ és legyen $f : \mathbb{R} \times (0, 1) \to \mathbb{R}$ függvény a következő:

$$f(a, t) := \|tx\|^2 + \|(1-t)(ax+y)\|^2 - \|(1-t)(ax+y) + tx\|^2, \tag{5.8}$$

és $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ legyen

$$F(a) := \int_0^1 f(a, t)dt.$$

Azt kell megmutatnunk, hogy $F(s) = 0$ valamely $s \in \mathbb{R}$ esetén. Mivel F folytonos, így Bolzano tétele miatt elég megmutatni, hogy létezik $a_1 \neq a_2$, hogy

$$F(a_1) < 0 \quad \textit{és} \quad F(a_2) > 0.$$

Legyen $a > 0$. Mivel $t \neq 1$, a következő igaz:

$$1 = -\frac{2t(1-t)a + t^2}{(1-t)^2a^2} + \Big(1 + \frac{t}{(1-t)a}\Big)^2.$$

$f(a, t)$-t a következőképpen fejezhetjük ki:

$$t^2\|x\|^2 - \frac{2t(1-t)a + t^2}{(1-t)^2a^2}\|(1-t)(ax+y)\|^2 +$$
$$+ \left\|((1-t)a + t)x + \Big((1-t) + \frac{t}{a}\Big)y\right\|^2 - \|((1-t)a + t)x + (1-t)y\|^2.$$

A két utolsó kifejezés átírásával, majd a háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával

$$\left(\left\|((1-t)a + t)x + \Big((1-t) + \frac{t}{a}\Big)y\right\| - \|((1-t)a + t)x + (1-t)y\|\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\left\|((1-t)a+t)x+\Big((1-t)+\frac{t}{a}\Big)y\right\|+\|((1-t)a+t)x+(1-t)y\|\right)\le$$

$$\le\frac{t}{a}\|y\|\left(2((1-t)a+t)\|x\|+\Big(2(1-t)+\frac{t}{a}\Big)\|y\|\right).$$

Ezért

$$\begin{aligned} f(a,t) &\le t^2\|x\|^2-(2t(1-t)a+t^2)\Big(\|x\|-\Big\|\frac{y}{a}\Big\|\Big)^2+ \\ &+\Big(2t(1-t)+\frac{2t^2}{a}\Big)\|x\|\|y\|+\Big(\frac{2t(1-t)}{a}+\frac{t^2}{a^2}\Big)\|y\|^2= \\ &= -2t(1-t)a\|x\|^2+\Big(6t(1-t)+\frac{4t^2}{a}\Big)\|x\|\|y\|. \end{aligned}$$

Ha ezt az egyenlőtlenséget integráljuk t szerint $(0,1)$-en

$$F(a)=\int_0^1 f(a,t)dt\le-\frac{1}{3}a\|x\|^2+\Big(1+\frac{4}{3a}\Big)\|x\|\|y\|.$$

Ha $a:=a_1$-et elég nagynak választjuk, mivel $x\neq 0$, megkapjuk, hogy

$$F(a_1)=\int_0^1 f(a_1,t)dt<0.$$

Most legyen ismét $a>0$ és

$$f(-a,t)=\|tx\|^2+\|(1-t)(ax-y)\|^2-\|(1-t)(ax-y)-tx\|^2.$$

Mivel $t\neq 1$, igaz a következő:

$$1=\frac{2t(1-t)a-t^2}{(1-t)^2a^2}+\Big(1-\frac{t}{(1-t)a}\Big)^2,$$

ezért $f(-a,t)$ kifejezhető a következőképpen:

$$\begin{aligned} &\|tx\|^2+\frac{2t(1-t)a-t^2}{(1-t)^2a^2}\|(1-t)(ax-y)\|^2+ \\ &+\left\|((1-t)a-t)-\Big(1-t-\frac{t}{a}\Big)y\right\|^2-\|((1-t)a-t)x-(1-t)y\|^2. \end{aligned}$$

Az utolsó két kifejezés átírásával, majd a háromszög-egyenlőtlenséggel

$$\left(\left\|((1-t)a-t)x-\Big(1-t-\frac{t}{a}\Big)y\right\|-\|((1-t)a-t)x-(1-t)y\|\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\left\|((1-t)a-t)x-\Big(1-t-\frac{t}{a}\Big)y\right\|+\|((1-t)a-t)x-(1-t)y\|\right)\geq$$

$$\geq-\frac{t}{a}\|y\|\left(2|(1-t)a-t|\cdot\|x\|+\Big(\Big|1-t-\frac{t}{a}\Big|+1-t\Big)\|y\|\right).$$

Ezért

$$\begin{aligned}
f(-a,t) &\geq \|tx\|^2+2t(1-t)a\left\|x-\frac{y}{a}\right\|^2-t^2\left\|x-\frac{y}{a}\right\|^2-\\
&\quad -\frac{t}{a}\|y\|\Big(2|(1-t)a-t|\cdot\|x\|+\Big(\Big|1-t-\frac{t}{a}\Big|+1-t\Big)\|y\|\Big)\geq\\
&\geq \|tx\|^2+2t(1-t)a\left\|x-\frac{y}{a}\right\|^2-t^2\Big(\|x\|+\Big\|\frac{y}{a}\Big\|\Big)^2-\\
&\quad -2\Big|(1-t)t-\frac{t^2}{a}\Big|\|x\|\|y\|-\Big(\Big|\frac{t(1-t)}{a}-\frac{t^2}{a^2}\Big|+\frac{(1-t)t}{a}\Big)\|y\|^2=\\
&= 2t(1-t)a\left\|x-\frac{y}{a}\right\|^2-\Big(2\Big|(1-t)t-\frac{t^2}{a}\Big|+\frac{2t^2}{|a|}\Big)\|x\|\|y\|-\\
&\quad -\Big(\Big|\frac{t(1-t)}{a}-\frac{t^2}{a^2}\Big|+\frac{(1-t)t}{a}+\frac{t^2}{a^2}\Big)\|y\|^2\geq\\
&\geq 2t(1-t)a\|x\|^2-\Big(2\Big|(1-t)t-\frac{t^2}{a}\Big|+\frac{2t^2}{a}+4t(1-t)\Big)\|x\|\|y\|-\\
&\quad -\Big(\Big|\frac{t(1-t)}{a}-\frac{t^2}{a^2}\Big|-\frac{(1-t)t}{a}+\frac{t^2}{a^2}\Big)\|y\|^2.
\end{aligned}$$

A kapott egyenlőtlenséget integráljuk t szerint $(0,1)$-en

$$\begin{aligned}
F(-a) &= \int_0^1 f(-a,t)dt\geq\frac{1}{3}a\|x\|^2-\Big(\frac{a^3+3a+2}{3a(a+1)^2}+\frac{2}{3a}+\frac{2}{3}\Big)\|x\|\|y\|-\\
&\quad -\Big(\frac{a^3+3a+2}{6a^2(a+1)^2}-\frac{1}{6a}+\frac{1}{3a^2}\Big)\|y\|^2.
\end{aligned}$$

Ha a elég nagy, akkor $-a:=a_2$ esetén $F(a_2,t)>0$. ■

5.18. Tétel. *A $HH-P$ ortogonalitás pontosan akkor homogén, ha $(\mathcal{X},\|\cdot\|)$ euklideszi tér.*

Bizonyítás: Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$, euklideszi tér, a $HH-P$ ortogonalitás ekvivalens az euklideszi ortogonalitással, így homogén. Feltesszük, hogy a $HH - P$ ortogonalitás homogén. Adottak $x, y \in \mathcal{X}$, az egzisztencia miatt létezik $a \in \mathbb{R}$, olyan, hogy

$$\int_0^1 \|(1-t)(ax+y)+tx\|^2 dt = \frac{1}{3}(\|ax+y\|^2 + \|x\|^2).$$

A homogenitás miatt minden $s \in \mathbb{R}$ esetén

$$\int_0^1 \|(1-t)(ax+y)+tsx\|^2 dt = \frac{1}{3}(\|ax+y\|^2 + \|sx\|^2). \tag{5.9}$$

Tegyük fel, hogy $t \in (0,1)$ és legyen $s := \frac{(1-t)(1-a)}{t}$, ekkor (5.9) baloldalából azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \|(1-t)(ax+y)+(1-t)(1-a)x\|^2 dt\\ &= \|x+y\|^2 \int_0^1 (1-t)^2 dt = \frac{1}{3}\|x+y\|^2.\end{aligned}$$

Ezután (5.9) jobboldalából pedig azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{3}\Big(\|ax+y\|^2 + \Big\|\frac{(1-t)(1-a)}{t}x\Big\|^2\Big) = \frac{1}{3}\Big(\|ax+y\|^2 + \frac{(1-t)^2(1-a)^2}{t^2}\|x\|^2\Big),$$

vagyis az új egyenlőség

$$\|x+y\|^2 = \|ax+y\|^2 + \frac{(1-t)^2(1-a)^2}{t^2}\|x\|^2.$$

Mivel $t \neq 0$ így

$$t^2\|x+y\|^2 = t^2\|ax+y\|^2 + (1-t)^2(1-a)^2\|x\|^2,$$

majd t szerint $(0,1)$ intervallumnom integráljuk

$$\|x+y\|^2 = \|ax+y\|^2 + (1-a)^2\|x\|^2. \tag{5.10}$$

Hasonlóan, ha $s := \frac{-(1-t)(1+a)}{t}$ minden $t \in (0,1)$-re, akkor (5.9) baloldala

$$\int_0^1 \|(1-t)(ax+y)-(1-t)(1+a)x\|^2 dt = \|x-y\|^2 \int_0^1 (1-t)^2 dt = \frac{1}{3}\|x-y\|^2,$$

a jobboldala pedig

$$\frac{1}{3}\Big(\|ax+y\|^2+\frac{(1-t)^2(1+a)^2}{t^2}\|x\|^2\Big),$$

vagyis

$$\|x-y\|=\|ax+y\|^2+\frac{(1-t)^2(1+a)^2}{t^2}\|x\|^2.$$

Mivel $t\neq 0$, ezért

$$t^2\|x-y\|^2=t^2\|ax+y\|^2+(1-t)^2(1+a)^2\|x\|^2.$$

Ha t szerint integráljuk $(0,1)$-en, akkor

$$\|x-y\|^2=\|ax+y\|^2(1+a)^2\|x\|^2. \tag{5.11}$$

Ha összeadjuk (5.10) és (5.11) egyenlőségeket, akkor

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|ax+y\|^2+(2+2a^2)\|x\|^2. \tag{5.12}$$

A homogenitás miatt

$$(ax+y)\perp_{HH-P}\frac{(1-t)}{t}ax$$

minden $t\in(0,1)$ esetén, azaz

$$\|y\|^2=\|(ax+y)\|^2+\frac{(1-t)^2a^2}{t^2}\|x\|^2.$$

Mivel $t\neq 0$, így

$$t^2\|y\|^2=t^2\|ax+y\|^2+(1-t)^2a^2\|x\|^2,$$

majd $(0,1)$-en integrálva

$$\|ax+y\|^2=\|y\|^2-a^2\|x\|^2.$$

Ezzel (5.12) alapján

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|y\|^2-a^2\|x\|^2)+(2+2a^2)\|x\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2,$$

vagyis teljesül a paralelogramma szabály, így $(\mathcal{X},\|\cdot\|)$ euklideszi tér. ■

6. Erősen h-konvex függvények euklideszi terekben

6.9. Definíció. *Adottak $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ valós normált tér, $D \subset \mathcal{X}$ konvex, $h : (0,1) \to (0,\infty)$ függvény és c pozitív konstans. Ekkor azt mondjuk, hogy $f : D \to \mathbb{R}$ függvény erősen h-konvex c modulussal, ha*

$$f(tx + (1-t)y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y) - ct(1-t)\|x-y\|^2 \tag{6.13}$$

minden $x, y \in D$ és $t \in (0,1)$ esetén. A c=0 esetben h-konvex függvényekről beszélünk.

6.6. Lemma. *Adottak $(\mathcal{X}\|\cdot\|)$ valós euklideszi tér, $D \subset \mathcal{X}$ konvex, függvény és $c > 0$. Feltesszük, hogy $h : (0,1) \to (0,\infty)$ függvényre teljesül, hogy*

$$h(t) \geq t, \quad t \in (0,1).$$

Ha $g : D \to \mathbb{R}$ h-konvex, akkor a $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) + c\|x\|^2$ erősen h-konvex c modulussal.

Bizonyítás: Ha g h-konvex, akkor

$$\begin{aligned}
&f(tx + (1-t)y) = \\
&= g(tx + (1-t)y) + c\|tx + (1-t)y\|^2 \leq \\
&\leq h(t)g(x) + h(1-t)g(y) + c\|tx + (1-t)y\|^2 = \\
&= h(t)f(x) + h(1-t)f(y) - ch(t)\|x\|^2 - ch(1-t)\|y\|^2 + c\|tx + (1-t)y\|^2 \leq \\
&\leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y) - ct\|x\|^2 - c(1-t)\|y\|^2 + \\
&\quad + c(t^2\|x\|^2 + 2t(1-t)\langle x, y\rangle + (1-t)^2\|y\|^2) = \\
&= h(t)f(x) + h(1-t)f(y) - ct(1-t)\|x-y\|^2,
\end{aligned}$$

azaz f erősen h-konvex c modulussal. ■

6.7. Lemma. *Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ valós euklideszi tér, $D \subseteq \mathcal{X}$ konvex és $c > 0$, és minden $t \in (0,1)$-re $h : (0,1) \to (0,\infty)$ esetén teljesül, hogy*

$$h(t) \leq t.$$

Ha $f : D \to \mathbb{R}$ erősen h-konvex c modulussal, akkor $g : D \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - c\|x\|^2$ h-konvex függvény.

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} g(tx+(1-t)y) &= f(tx+(1-t)y) - c\|tx+(1-t)\|^2 \le \\ &\le h(t)f(x)+h(1-t)f(y) - ct(1-t)\|x-y\|^2 - c\|tx+(1-t)y\|^2 = \\ &= h(t)f(x)+h(1-t)f(y) - c\Big(t(1-t)(\|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2) + \\ &\quad +t^2\|x\|^2 + 2t(1-t)\langle x,y\rangle + (1-t)^2\|y\|^2\Big) = \\ &= h(t)f(x)+h(1-t)f(y) - ct\|x\|^2 - c(1-t)\|y\|^2 \le \\ &\le h(t)f(x)+h(1-t)f(y) - ch(t)\|x\|^2 - ch(1-t)\|y\|^2 = \\ &= h(t)g(x)+h(1-t)g(y), \end{aligned}$$

vagyis g h-konvex függvény. ■

6.19. Tétel. *Adott* $(\mathcal{X}\|\cdot\|)$ *valós normált tér. Feltesszük, hogy* $h:(0,1)\to\mathbb{R}$ *olyan, hogy* $h(t)\ge t$ *és létezik olyan* $s\in(0,1)$*, hogy*

$$h(s)=s \quad \text{és} \quad h(1-s)=1-s.$$

Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

1. $(\mathcal{X},\|\cdot\|)$ euklideszi tér

2. minden $c>0$ és $g:D\to\mathbb{R}$ h-konvex függvény esetén, ahol $D\subset\mathcal{X}$ konvex, az

$$f = g + c\|\cdot\|^2$$

   függvény erősen h-konvex c modulussal

3. $\|\cdot\|^2:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ erősen h-konvex 1 modulussal.

Bizonyítás: 1. $\Rightarrow$ 2. következik 6.6. lemmából.
2. $\Rightarrow$ 3. bizonyításához legyen $g=0$. Ekkor g h-konvex, így $f=c\|\cdot\|^2$ erősen h-konvex c modulussal. Ebből következik, hogy $\|\cdot\|^2$ erősen h-konvex 1 modulussal.
3. $\Rightarrow$ 1. bizonyításához figyeljük meg, hogy mivel létezik $s\in(0,1)$, hogy $h(s)=s$ és $h(1-s)=1-s$, így

$$\|sx+(1-s)y\|^2 \le s\|x\|^2 + (1-s)\|y\|^2 - s(1-s)\|x-y\|^2$$

minden $x, y \in \mathcal{X}$ vektorra. Figyeljük meg, hogy így minden $x, y \in S_{\mathcal{X}}$ esetén teljesül 2.5. tétel feltétele, hiszen

$$\|sx + (1-s)y\|^2 + s(1-s)\|x-y\|^2 \leq s\|x\|^2 + (1-s)\|y\|^2 = 1,$$

tehát $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ euklideszi tér. ■

Abban az esteben, ha $h(t) = t$, átfogalmazhatjuk a tételt.

6.20. Tétel. *Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ valós normált tér. A következő feltételek ekvivalensek:*

1. *minden $c > 0$ és $f : D \to \mathbb{R}$ esetén f erősen konvex c modulussal, akkor és csak akkor, ha a*

   $$g = f - c\|\cdot\|^2$$

   függvény konvex

2. *létezik $c > 0$, hogy minden $f : D \to \mathbb{R}$ függvényre g konvex akkor és csak akkor, ha*

   $$f = g + c\|\cdot\|^2$$

   erősen konvex c modulussal

3. *$\|\cdot\|^2 : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ erősen konvex 1 modulussal*

4. *$(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ euklideszi tér.*

Bizonyítás: 6.6. és 6.7. lemmából, 6.19. tételből következik $h(t) = t$ esetén. ■

Hivatkozások

[1] Alsina, C., Sikorska, J., & Tomás, M.S.: *Norm derivatives and characterizations of inner product spaces*, Hackensack, NJ: World Scientific, (2010).

[2] Amir, D.: *Characterizations of inner product spaces*, Birkhäuser (1986).

[3] Barvinok, A.: *A course in convexity*, Vol. 54. American Mathematical Soc., (2002).

[4] Dragomir, S.S., Kikianty, E.: *Orthogonality connected with integral means and characterizations of inner product spaces*, J. Geom. 98 (2010), 33-49.

[5] Istratescu, V.I.: *Inner product structures: theory and applications*, Vol. 25. Springer Science & Business Media, (1987)

[6] Kapoor, O.P., Prasad, J.: *Orthogonality and characterizations of inner product spaces*, BULL. AUSTRAL. MATH. SOC. VOL. 19 (1978), 403-416.

[7] Kovács, S.: *Funkcionálanalízis feladatokban, egyetemi jegyzet*, (2013) ISBN: 978-963-284-445-9.
`http://numanal.inf.elte.hu/~alex/hu/anyag/PROGINF/FunkAnal/FunkAnalKS.pdf`

[8] Nikodem, K. & Páles, Zs.: *Characterizations of inner product spaces by strongly convex functions*, Banach J. Math. Anal. 5 (2010), no. 1, 83-87.

[9] Simon, P.: *Funkcionálanalízis az alkalmazott matematikában, egyetemi jegyzet*, (2010).
`http://numanal.inf.elte.hu/~simon/funk2elolappal.pdf`