Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Mezey Eörs Zsolt

Dinamikai rendszerekben levő káosz becslése

BSc Szakdolgozat

Alkalmazott Matematika

Témavezető:

Buczolich Zoltán

Analízis Tanszék

Budapest, 2015

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Buczolich Zoltánnak a téma ajánlását, és szakszerű kérdéseit, amivel segítette a szakdolgozat előrehaladását. Emellett hálás vagyok Lócsi Leventének a Matlab programmal kapcsolatos segítségekért. És persze családomnak az egyetemi évek alatt kapott támogatásért.

Tartalomjegyzék

0. fejezet

Bevezetés

Bemutatjuk a dinamikai rendszerek alapvető tulajdonságait, annak kaotikus viselkedését. Az egyik első feladat a Naprendszer stabilitásával kapcsolatosan került elő a XIX. század végén. Ekkor vizsgálták részletesebben a háromtest-problémát is. Azonban maga a káoszelmélet a XX. században bontakozott ki. Ekkor jelent meg többféle definíció is a "káosz"-ra, de ezek közül egyik sem általánosan elfogadott mindenki számára. Többnyire a megjósolhatatlan mozgással és instabilitással van kapcsolat. Nem elég ismerni a trajektóriákat egy pontban ahhoz, hogy meg tudjuk mondani, hogy mi történik a rendszer egy másik pontján. Ilyen például a kezdeti feltételekre való érzékenység. Legyen $f : X \to X$ leképezés. Vegyünk egy x pontot és egy tetszőleges környezetét. Ekkor létezik olyan y ebből a környezetből, hogy egy adott $\delta > 0$-hoz létezik egy olyan n, hogy $f^n(x)$ és $f^n(y)$ távolsága nagyobb mint δ. Egy másik nézet szerint a "káosz" a megjósolhatatlan és az átlagos viselkedésének egyfajta keverése, míg mások pedig a pozitív topologikus entrópiával kapcsolják össze.

Célunk, hogy minél pontosabban meg tudjuk becsülni egy dinamikai rendszerben lévő entrópiát, és ennek segítségével megtudjuk, hogy az adott rendszer mennyire bonyolult.

A szakdolgozatban megnézünk ezen definíciók közül néhányat. Kifejtjük pontosabban, hogy mi is a topologikus entrópia, majd Michael Misiurewicz egyik tételének segítségével, melyet a 3. fejezetben részletesen leírunk, megpróbálunk alsó becslést adni egy dinamikai rendszerben lévő káoszra. Itt egy optimalizálási feladatot fogunk használni, hogy az intervallumból megfelelően ki tudjunk majd választani részintervallumokat, melyek teljesítik a patkó feltételt, melyet részletesebben a 2. fejezetben tárgyalunk majd. A dolgozat végén pedig megpróbáljuk mindezt alkalmazni, melyhez a Matlab nevű programot fogjuk használni.

1. fejezet

Dinamikai rendszerek bemutatása

Bemutatjuk a diszkrét, és a folytonos idejű dinamikai rendszert is. Dinamikai rendszernek nevezünk egy állapottérrel leírt rendszert, amely az állapotainak időbeli változásaival foglalkozik, előre meghatározott, rögzített szabályok szerint, amelyek általában nem függenek az időtől. Nézzünk egy példát, de előtte még vezessünk be néhány jelölést, és mondjuk ki, mi is egy nyílt, és egy zárt fedés pontosan.

1.0.1. Definíció. *Legyen X egy topologikus tér. Egy véges fedés egy olyan $C = \{C_1, \ldots, C_p\}$ halmazrendszer, hogy $C_1 \cup \ldots \cup C_p = X$. Ha ezek a $\{C_1, \ldots, C_p\}$ halmazok nyílt halmazok, akkor azt mondjuk, hogy ez egy nyílt fedés.*

1.0.2. Definíció. *Egy topologikus teret vagy intervallumot kompaktnak nevezünk, ha minden nyílt fedéséből kiválasztható véges fedés.*

Egy topologikus dinamikai rendszert, (X, f)-et meghatározza az $f : X \to X$ folytonos leképezés, ahol X egy kompakt metrikus tér. Legyen d az ezen a téren értelmezett metrika. A rendszer időben való fejlődését az f leképezésünk iterálásával kapjuk. Az n-edik iteráltat jelölje f^n, ami tehát $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n-szer}$. Abban az esetben, ha $n = 0$, akkor f^0 legyen az identitás leképezés X-en.
Jelölje $\overline{U}$, az U halmaz lezártját, mely tartalmazza U elemeit, és U határpontjait, azaz $\overline{U} := \{x \in U \cup \partial U\}$.
Egy $x \in X$ pont trajektóriájának nevezzük azt a sorozatot, amit úgy kapunk, hogy az x pontra alkalmazzuk az f^n leképezést $n = \{0, 1, 2, \ldots\}$-re. Ezeket a pontokat nevezzük az x pont pályájának, és jelölje $\mathcal{O}_f(x) := \{f^n(x) | \, n \geq 0\}$.
Egy x pontot periodikusnak mondunk, ha létezik olyan $n \geq 1$ szám, amelyre $f^n(x) = x$.

x periódusának pedig a legkisebb olyan p -t nevezzük, melyre $f^p(x) = x$.
Legyen x egy p periódusú pont, ekkor a pályáját periodikus pályának hívjuk p periódussal.
Ha $f(x) = x$, akkor x-et fixpontnak nevezzük.
Szükségünk lesz még az ω-limeszhalmaz definiálására. Egy $x \in X$, ω-limeszhalmazának nevezzük x előre felvett értékei torlódási pontjait. Azaz,

$$\omega(x, f) := \bigcap_{n \geq 0} \overline{\{f^k(x) | \, k \geq n\}}.$$

Egy f leképezés ω-limeszhalmaza,

$$\omega(f) := \bigcup_{x \in X} \omega(x, f).$$

1.0.3. Példa. Van egy hangyabolyunk amit megfigyelünk, és tudjuk a boly számosságát a kezdeti időpontban, továbbá azt is tudjuk, hogy a hangyák népessége minden nap a háromszorosára nő. Jelölje n az n-edik napot, x_n pedig a boly számosságát az n-edik napon, és ekkor felírhatjuk azt a matematikai modellt rá, hogy $x_n = f(x_{n-1}) = 3 \cdot x_{n-1}$. Ha tudom a szabályszerűséget, akkor meg tudom határozni bármelyik nap a boly méretét. Így például, ha tudom, hogy a kezdeti időpontban 100 hangyánk volt, akkor meg tudom mondani, hogy a tizedik napon mennyien lesznek. Ekkor $x_0 = 100, n = 10$, és $x_{10} = f^{10}(x_0)$, vagyis $x_{10} = 3^{10} \cdot 100$.

1.0.4. Definíció. *Egy $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, folytonos függvényt diszkrét idejű dinamikai rendszernek nevezünk, melyet $f(k, x)$ alak helyett $f^k(x)$-el jelölünk, ha a következő két feltétel teljesül.*

i) Minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén $f^0(x) = x$,

ii) Minden $x \in \mathbb{R}^n$, és $k, l \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k(f^l(x)) = f^{k+l}(x)$.

Nézzük meg a folytonos idejű dinamikai rendszer definícióját is.

1.0.5. Definíció. *Egy $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, folytonosan differenciálható függvényt folytonos idejű dinamikai rendszernek nevezünk, melyet $f(t, x)$ alak helyett $f^t(x)$-el jelölünk, ha a következő két feltétel teljesül.*

i) Minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén $f^0(x) = x$, *ii) Minden $x \in \mathbb{R}^n$, és $t, s \in \mathbb{R}$ esetén $f^t(f^s(x)) = f^{t+s}(x)$.*

1.0.6. Definíció. *Legyen (X, f) egy dinamikai rendszer. Egy zárt $Y \subset X$ halmaz invariáns, ha $f(Y) \subset Y$, és erősen invariáns, ha $f(Y) = Y$.*

1.1. Intervallumleképezések

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor egy J intervallum lehet nyílt, zárt, vagy vegyesen egyik oldalról nyílt, a másik oldalról pedig zárt, vagyis J a következők valamelyike lehet: $\{[a, b], [a, b), (a, b], (a, b)\}$. J végpontjainak nevezzük az a és b pontokat. Ezt jelöljük ∂J-vel. J hosszát jelölje $|J|$, ami egyenlő $(b-a)$-val.

1.1.1. Definíció. *Egy intervallumot nem elfajulónak mondunk, ha egynél több pontból áll.*

Legyen két intervallumunk, J_1 és J_2. Azt mondjuk, hogy $J_1 < J_2$, ha minden $x \in J_1$, és minden $y \in J_2$-re, $x < y$, és $J_1 \leq J_2$, ha minden $x \in J_1$, és minden $y \in J_2$-re, $x \leq y$. Az első esetben a két intervallum diszjunkt, míg a második esetben a két intervallumnak lehet egy közös pontja.
Ha J egy intervallum, és $f : J \to \mathbb{R}$ egy folytonos leképezés, akkor $f(J)$ is egy intervallum lesz. Azt mondjuk, hogy $f : I \to \mathbb{R}$ egy intervallumleképezés, ha I egy nem elfajuló kompakt intervallum, f egy folytonos leképezés, és $f(I) \subset I$, azaz $f : I \to I$.
A szakdolgozat további részeiben csak intervallumleképezésekkel fogunk foglalkozni.

1.2. Tranzitivitás és keverés

Ebben a részben áttekintjük a dinamikai rendszerekre vonatkozó néhány alapdefiníciót. Megnézzük a tranzitivitás, és a keverés kapcsolatát.

1.2.1. Definíció. *(Tranzitivitás) Legyen (X, f) egy topologikus dinamikai rendszer. Egy f leképezést tranzitívnak nevezünk, ha minden $U, V \subseteq X$ nemüres nyílt halmazhoz létezik olyan $n \geq 0$, hogy $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ (vagy ezzel egy ekvivalens megfogalmazás, hogy $U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$). Az E tranzitív halmaz, ha $f|_E : E \to E$ tranzitív.*

1.2.2. Definíció. *(Teljes tranzitivitás) Legyen (X, f) egy topologikus dinamikai rendszer. Egy f leképezést teljesen tranzitívnak nevezünk, ha minden $n \geq 1$-re, f^n tranzitív.*

Most megnézünk egy másik definíciót, amiből következik egy f leképezés tranzitivitása. Szemléletesen azt mondjuk, hogy ha veszünk egy kezdeti U halmazt, ahhoz létezik egy olyan N küszöbindex, hogy f-et legalább N-szer alkalmazva erre az U halmazra, vagyis $f^{N+k}(U)$ tetszőlegesen nagyra kitágulhat X-en belül, ahol k tetszőleges pozitív egész.

1.2.3. Definíció. *(Keverés, és gyenge keverés) Legyen (X, f) egy topologikus dinamikai rendszer. Egy f leképezést topologikusan keverőnek nevezünk, ha minden $U, V \subseteq X$ nemüres nyílt halmazhoz létezik olyan $N \geq 0$, hogy minden $n \geq N$-re, $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Egy f leképezés topologikusan gyengén keverő, ha $f \times f : X \times X \to X \times X$ tranzitív.*

Láthattuk a keverés és a gyenge keverés általános definícióját. Nézzük meg abban az alakban amire nekünk most nagyobb szükségünk van. Mondjuk ki ehhez a következő állítást.

1.2.4. Állítás. *Egy $f : [a, b] \to [a, b]$ intervallumleképezés akkor és csak akkor topologikusan keverő, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz és minden nem elfajuló $J \subset [a, b]$ intervallumhoz létezik olyan N egész, hogy minden $n \geq N$-re, $f^n(J) \supset [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$.*

Bizonyítás. Ebben az állításban két irányt kell vizsgálnunk. Először tegyük fel, hogy f topologikusan keverő. Vegyünk két intervallumot. Legyen $U_1 := (a, a + \varepsilon)$, és $U_2 := (b - \varepsilon, b)$. Ha J egy nemüres nyílt intervallum, akkor f topologikusan keverő tulajdonsága miatt létezik olyan N_1, hogy minden $m_1 \geq N_1$-re $f^{m_1}(J) \cap U_1 \neq \emptyset$. Ugyanezen elv alapján létezik olyan N_2, hogy minden $m_2 \geq N_2$-re $f^{m_2}(J) \cap U_2 \neq \emptyset$. Legyen $n := \max\{N_1, N_2\}$. Ekkor teljesülni fog, hogy $f^n(J) \cap U_1 \neq \emptyset$ és az is, hogy $f^n(J) \cap U_2 \neq \emptyset$, ebből és a Bolzano-Darboux tételből következik, hogy $f^n(J) \supset [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$.
Most nézzük a másik irányt. Itt be kell látnunk, hogy ha minden $\varepsilon > 0$-ra és elegendően nagy n-re teljesül, hogy $f^n(J) \supset [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$, akkor f topologikusan keverő. Most itt azt tesszük fel, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz és minden $J \subset [a, b]$ nem elfajuló intervallumhoz létezik olyan N egész, hogy minden $n \geq N$-re teljesül a feltétel. Legyen U, V két nemüres nyílt halmaz $[a, b]$-ben. Alkalmasan megválasztunk két nemüres nyílt részintervallumot J-t és K-t úgy, hogy $J \subset U$ és $K \subset V$, továbbá nem lehet K végpontja sem a, sem b. Ekkor létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy $K \subset [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$. A feltételünk miatt létezik olyan N, hogy minden $n \geq N$-re teljesül, hogy $f^n(J) \supset [a + \varepsilon, b - \varepsilon] \supset K$. Ebből már következik, hogy $f^n(J) \cap K$ nem lehet üres, vagyis $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. És pont ezt akartuk belátni. $\square$

1.2.5. Lemma. *Ha $f : I \to I$ egy tranzitív intervallumleképezés, akkor a periodikus pontok halmaza sűrű I-ben.*

1.2.6. Megjegyzés. Ennek a lemmát most nem látjuk be, de a következő állítás bizonyításánál szükségünk lesz erre a tulajdonságra.

1.2.7. Állítás. *Legyen $f : I \to I$ egy intervallumleképezés. Ha f teljesen tranzitív, akkor f topologikusan keverő.*

Bizonyítás. Legyen $I = [a, b]$ és J egy nem elfajuló részintervalluma, és $\varepsilon > 0$. Ekkor 1.2.5 Lemma miatt léteznek x, x_1, x_2 periodikus pontok úgy, hogy $x \in J$, $x_1 \in (a, a+\varepsilon)$, és $x_2 \in (b-\varepsilon, b)$. Továbbá tudjuk x_1-et és x_2-t úgy választani, hogy a pályájuk benne van (a, b)-ben. Legyen $i = \{1, 2\}$-re,

$$y_i := \min\{f^n(x_i) | n \geq 0\}, \text{ és } z_i := \max\{f^n(x_i) | n \geq 0\}.$$

Ennél fogva $y_1 \in (a, x_1] \subset (a, a+\varepsilon)$, $z_2 \in [x_2, b) \subset (b-\varepsilon, b)$ és $y_2, z_1 \in (a, b)$. Legyen k a közös többszöröse x, x_1 és x_2 periódusainak. Rögzítsük $g = f^k$-t, és

$$K := \bigcap_{n=0}^{+\infty} g^n(J).$$

Mivel x egy fixpont a g leképezésre nézve, így minden $n \geq 0$-ra $g^n(J)$ tartalmazza x-et. Ebből következik, hogy K is egy intervallum. Mivel f teljesen tranzitív, ezért g tranzitív, ennél fogva K sűrű $[a, b]$-ben, és ekkor $K \supset (a, b)$. Ennek következtében $y_1, y_2, z_1, z_2 \in K$. Majd $i = \{1, 2\}$-re legyenek p_i és q_i olyan nemnegatív egészek, hogy $y_i \in g^{p_i}(J)$ és $z_i \in g^{q_i}(J)$. Legyen $N := \max\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$. Mivel y_1, y_2, z_1, z_2 fixpontjai g-nek, így $g^N(J)$ tartalmazza őket, és ekkor az összefüggőség miatt minden $i = \{1, 2\}$-re $[y_i, z_i] \subset g^N(J) = f^{Nk}(J)$. Továbbá y_i és z_i definíciója alapján $[y_i, z_i]$ tartalmazza x_i teljes pályáját, így minden $n \geq kN$-re $[y_1, z_1] \cup [y_2, z_2] \subset f^n(J)$. Mivel $y_1 < a + \varepsilon$, $z_2 > b - \varepsilon$ és $f^n(J)$ összefüggő, ebből következik, hogy minden $n \geq kN$-re $[a-\varepsilon, b+\varepsilon] \subset f^n(J)$, amiből következik, hogy f topologikusan keverő. $\square$

Vezessük be a kritikus pont fogalmát.

1.2.8. Definíció. *Legyen $f : I \to I$ egy intervallumleképezés. Egy $x \in X$-et f kritikus pontjának hívunk, amennyiben nem létezik x-nek olyan környezete, melyen f szigorúan monoton lenne.*

Egy ilyen f intervallumleképezést szakaszonként monotonnak mondunk egy I intervallumon, amennyiben I-nek létezik olyan véges felosztása, hogy mindegyik részintervallumon

f monoton.

Nézzük meg egy $f : I \to I$ intervallumleképezés még egy tulajdonságát.

1.2.9. Definíció. *Legyen $f : I \to I$ egy intervallumleképezés, és $\lambda > 1$. Egy ilyen f leképezést λ-tágulónak nevezünk, amennyiben minden olyan $[x, y]$ részintervallumra ahol f monoton, igaz, hogy $|f(y) - f(x)| \geq \lambda|x - y|$.*

Most nézzünk meg két lemmát.

1.2.10. Lemma. *Legyen N egy pozitív egész szám, és $f : I \to I$ egy λ-táguló intervallumleképezés, ahol $\lambda > N$. Ekkor minden nem elfajuló J részintervallumhoz létezik olyan $n \geq 0$ egész, hogy $f^n(J)$ tartalmaz legalább N különböző kritikus pontot, melyek az f^n leképezés kritikus pontjai.*

1.2.11. Megjegyzés. Ezt a lemmát most bizonyítás nélkül elfogadjuk.

1.2.12. Lemma. *Legyen $f : I \to I$ egy intervallumleképezés, és $\lambda > 1$. Legyenek $a, b \in I$ olyanok, hogy $a < b$. Tegyük fel, hogy $f(a) = a$, és hogy minden $x \in [a, b]$-re $f(x) - f(a) \geq \lambda(x - a)$. Ekkor minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $n \geq 0$, hogy $f^n(a, a + \varepsilon) \supset [a, b]$.*

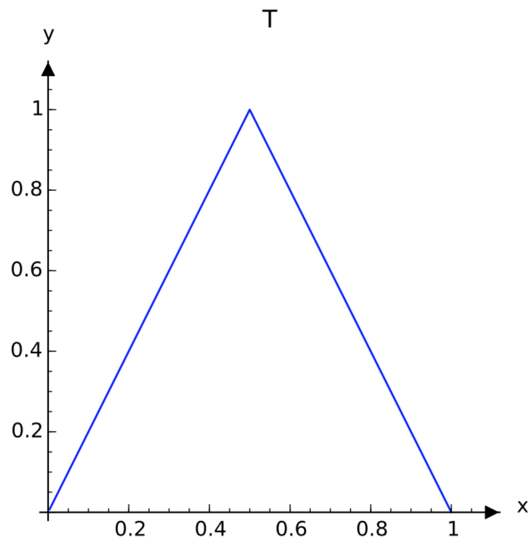
Bizonyítás. Legyen $\varepsilon \geq 0$. Ha $\varepsilon \geq b - a$, akkor $f^0([a, a + \varepsilon]) \supset [a, b]$. Tegyük fel, hogy $a + \varepsilon \leq b$. Ekkor $f(a + \varepsilon) - a = f(a + \varepsilon) - f(a) \geq \lambda\varepsilon$ a feltételezés szerint, és $f([a, a + \varepsilon]) \supset [a, a + \lambda\varepsilon]$ az összefüggőség miatt. n szerinti indukcióval egyszerűen következik, hogy $f^n([a, a+\varepsilon]) \supset [a, a+\lambda^n\varepsilon]$, amíg $a+\lambda^{n-1}\varepsilon \leq b$. Mivel $\lambda > 1$, ezért létezik olyan $n \geq 1$ egész, hogy $a + \lambda^{n-1}\varepsilon \leq b \leq a + \lambda^n\varepsilon$. Ebben az esetben $f^n([a, a + \varepsilon]) \supset [a, b]$. □

Nézzünk egy egyszerű példát topologikusan keverő intervallumleképezésre, majd utána mutatunk egy olyan f leképezést, amely tranzitív, de nem keverő.

1.2.13. Példa. A leképezésünk legyen szakaszonként lineáris és a meredeksége abszolút értékben állandó. Rögzítunk egy $p \geqslant 2$ egészt, és $T_p : [0, 1] \to [0, 1]$ a következő:

$$\forall k \in [0, \tfrac{p-1}{2}], \forall x \in [\tfrac{2k}{p}, \tfrac{2k+1}{p}], \;\; T_p(x) := px - 2k,$$
$$\forall k \in [0, \tfrac{p-2}{2}], \forall x \in [\tfrac{2k+1}{p}, \tfrac{2k+2}{p}], \;\; T_p(x) := -px + 2k + 2.$$

T_p-nek minden intervallumon $\pm p$ a meredeksége. Ezt a leképezést $p = 2$ esetben sátorleképezésnek hívjuk. Legyen J egy nem elfajuló intervallum $[0, 1]$-en. Ha egy nem elfajuló



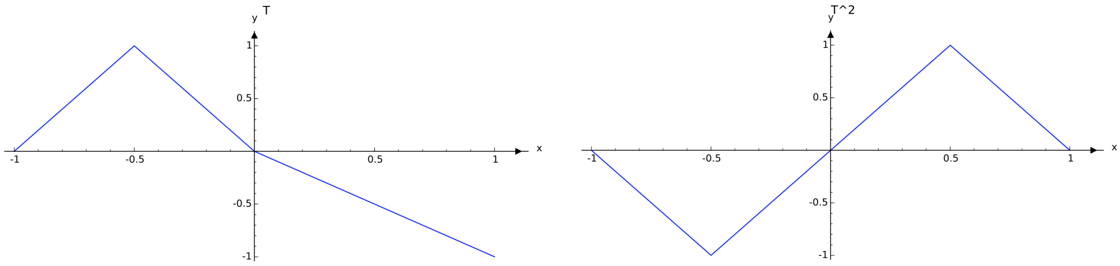
1.1. ábra. Sátorleképezés, $p = 2$

intervallumra alkalmazzuk T_p-t, akkor a kép is, és minden $n \geq 0$-ra, $T_p^n(J)$ is egy nem elfajuló intervallum. Ekkor a 1.2.10 Lemma alapján létezik olyan n egész, hogy $T_p^n(J)$ tartalmaz $p-1$ különböző kritikus pontot. Ha $p \geq 3$, akkor $T_p^n(J)$ tartalmaz legalább egy kritikus pontot, aminek a képe a 0. Ha $p = 2$-re $T_p^n(J)$-nek egyetlen kritikus pontja van 0.5-ben. és $T_p^2(0.5) = T_p(1) = 0$. Mindkét esetben $T_p^{n+1}(J)$ egy nem elfajuló intervallum, amely tartalmazza a 0-át. Ekkor alkalmazzuk a 1.2.12 Lemmát $a = 0$-ra, $b = \frac{1}{p}$-re, amiből következik, hogy létezik olyan $m \geq$ egész, hogy $T_p^{n+m+2}(J) \supset [0, \frac{1}{p}]$-nek, amiből pedig következik, hogy $T_p^{n+m+3}(J) \supset [0,1]$-nek, és ekkor minden $k \geq m+n+3$-ra, $T_p^k(J) = [0,1]$. Ebben az esetben T_p topologikusan keverő.

1.2.14. Példa. Most nézzünk egy olyan f leképezést, amely tranzitív, de nem keverő. Az I intervallum legyen a $[-1,1]$, a leképezésünk pedig most legyen a következő:

$$T(x) = \begin{cases} 2x+2, & \text{ha } x \in \text{[-1, -0.5]}, \\ -2x, & \text{ha } x \in \text{[-0.5, 0]}, \\ -x, & \text{ha } x \in \text{[0, 1]}. \end{cases}$$

Vegyünk két részintervallumot. Legyen $J := [-1,0]$, és $K := [0,1]$. Ekkor $T(J) = K$, és $T(K) = J$, amiből következik, hogy T nem lehet topologikusan keverő. Most nézzük meg, hogy ez a leképezés miért lesz tranzitív. Ha megnézzük $T^2|_K$-t, akkor egy speciális



1.2. ábra. T leképezés első, és második iteráltja.

leképezést kapunk, egy úgynevezett sátorleképezést. Ez szakaszonként lineáris, és a meredeksége abszolút értékben konstans. Erről a leképezésről tudjuk, hogy topologikusan keverő, mivel minden nem elfajuló $U \subset K$ részintervallumhoz létezik olyan $n > 0$, hogy $T^{2n}(U) = K$. $T^2|_J$-ről is belátható ugyanez, ugyanis $T^2|_K$ és $T^2|_J$ hasonló, csak egymás (-1)-szeresei. Tehát, ha U egy nemüres nyílt halmaz, akkor két eset lehetséges.

i) $U \cap J$ tartalmaz egy nem elfajuló intervallumot, és ekkor létezik olyan $n > 0$, hogy $T^{2n}(U) \supset J$, vagy

ii) $U \cap K$ tartalmaz egy nem elfajuló intervallumot, és ekkor létezik olyan $n > 0$, hogy $T^{2n}(U) \supset K$.

Mindkét esetben létezik olyan $n > 0$, hogy $T^n(U) \cup T^{n+1}(U) = [-1, 1]$, amiből következik, hogy T tranzitív.

Említettük a kezdeti feltételekre való érzékenységet. Nézzük meg, hogy ez hogyan kapcsolódik egy f tranzitív intervallum leképezéshez. Mondjunk ki egy definíciót az érzékenységre.

1.2.15. Definíció. *(instabil pont, és érzékenység a kezdeti feltételekre) Legyen (X, f) egy topologikus dinamikai rendszer, és jelölje d a távolságfüggvényt X-ben. Legyen $\varepsilon > 0$. Egy $x \in X$ pontot ε-instabilnak mondunk, ha vesszük x bármilyen K környezetét, és létezik olyan $y \in K$, és $n \geq 0$, hogy $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \varepsilon$. Az ε-instabil pontok halmazát jelölje $K_\varepsilon(f)$. Egy x pontot egyszerűen instabilnak mondunk, ha létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy x ε-instabil. Egy f leképezés ε-érzékeny a kezdeti feltételekre, ha $K_\varepsilon(f) = X$. Ha létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy f ε-érzékeny, akkor egyszerűen azt mondjuk, hogy f érzékeny a kezdeti feltételekre.*

Bebizonyították, hogy egy tranzitív intervallum leképezésnél, minden x pont ε-instabil valamilyen ε-ra x-től függően. Most mondjunk ki egy másik állítást amikor minden ponthoz ugyanazt az ε-t választjuk.

1.2.16. Állítás. *Legyen $f : I \to I$ egy tranzitív intervallumleképezés. Ha ε-t úgy választjuk, hogy $\varepsilon \in (0, |I|/4)$, akkor f ε-érzékeny a kezdeti feltételekre.*

1.2.17. Megjegyzés. Ezen állítást most nem bizonyítjuk jelen szakdolgozat keretei között.

2. fejezet

Topologikus entrópia, és a Patkó

2.1. Topologikus entrópia

A topologikus entrópia a dinamikai rendszerben lévő periodikus pályák számáról ad információt. Egy pozitív topologikus entrópiájú dinamikai rendszerben minél hosszabb periódusú pályákat keresünk, annál többet fogunk találni.
A topologikus entrópiát többféleképpen is definiálhatjuk. Nézzünk meg közülük egy olyan definíciót, amikor nyílt fedéseket használunk. Az első fejezetben már 1.0.1-ben definiáltuk egy halmaz nyílt fedését, most egészítsük ki néhány tulajdonsággal, majd mondjuk ki a definíciót.

Vezessünk be néhány jelölést. Legyen $C = \{C_1, \dots, C_p\}$ és $D = \{D_1, \dots, D_q\}$ két fedés. A C és D közös finomítása legyen

$$C \vee D := \{C_i \cap D_j | \, i \in [1,p],\, j \in [1,q],\, C_i \cap D_j \neq \emptyset\}.$$

Azt mondjuk, hogy D finomabb C-nél, ha D minden eleme benne van C egy elemében. Ezt jelölje $C \prec D$. Jelölje $N(C)$ a minimális számosságú, C elemeiből álló részfedést, amit úgy definiálunk, hogy

$$N(C) := \min\{n | \, \exists i_1, \dots, i_n \in [1,p],\, X = C_{i_1} \cup \dots \cup C_{i_n}\}.$$

Ekkor minden $n \geq 1$-re vezessük be azt a jelölést, hogy

$$N_n(C,f) := N\Big(C \vee f^{-1}(C) \vee \dots \vee f^{-(n-1)}(C)\Big).$$

Jegyezzük meg, hogy $N(C) \leq \#C$. Mondjunk ki egy lemmát, amit majd fel fogunk használni a későbbiekben.

2.1.1. Lemma. *Legyen* (a_n) *egy szubadditív sorozat, azaz teljesül rá a "háromszög-egyenlőtlenség", vagyis minden* $n \geq 1$*-re és minden* $k \geq 1$*-re teljesül, hogy* $a_{n+k} \leq a_n + a_k$*. Ekkor létezik a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} a_n$*, és ez egyenlő az* $\inf\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n} a_n$*-nel.*

Bizonyítás. Azt tudjuk, hogy

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} a_n \geq \inf_{n\geq 1} \frac{1}{n} a_n. \tag{2.1}$$

Legyen k egy pozitív egész, ekkor minden n pozitív egészhez léteznek q, r olyan egészek, hogy $n = qk + r$, ahol $r \in [0, k-1]$. A szubadditivitásból következik, hogy $a_n \leq qa_k + a_r$, és ennek következtében kapjuk, hogy $\limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} a_n \leq \frac{1}{k} a_k$. Így,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} a_n \leq \inf_{k\geq 1} \frac{1}{k} a_k. \tag{2.2}$$

Így (2.1)-ből, és (2.2)-ből következik az állítás. □

Most már 2.1.1 Lemmát felhasználva definiálhatjuk a topologikus entrópiát a fedések segítségével.

2.1.2. Definíció. *(C fedéshez tartozó topologikus entrópia) Legyen* $C = \{C_1, \ldots C_p\}$ *egy fedés. Jelölje egy* C *általi fedés topologikus entrópiáját* $h_{top}(C, f)$*, és ez legyen a következő:*

$$h_{top}(C, f) := \lim_{n\to+\infty} \frac{\log\, N_n(C, f)}{n} = \inf_{n\geq 1} \frac{\log\, N_n(C, f)}{n}.$$

Most pedig nézzük meg, hogy mit értünk egy leképezés topologikus entrópiáján, amikor már nem adjuk meg a fedést hozzá.

2.1.3. Definíció. *(topologikus entrópia) Legyen* (X, f) *egy topologikus dinamikai rendszer. Ekkor*

$$h_{top}(f) := \sup\{h_{top}(\mathcal{U}, f) | \mathcal{U} \text{ egy véges nyílt fedése } X\text{-nek}\}.$$

Nézzük meg, hogy két különböző fedés esetén, hogyan változik egy f leképezés topologikus entrópiája, a következő lemma segítségével.

2.1.4. Lemma. *Legyen* (X, f) *egy topologikus dinamikai rendszer. Ha a* D *fedés finomabb* C*-nél, azaz* $C \prec D$*, akkor* $h_{top}(C, f) \leq h_{top}(D, f)$*.*

Bizonyítás. A definíció segítségével ez a lemma könnyedén belátható. Beírjuk h_{top} helyére a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\log N_n(C,f)}{n}$-t. Kihasználjuk a logaritmus tulajdonságait, hogy leegyszerűsítsük a bizonyítandó állítást. A limesz $n \to +\infty$ nem rontja el a dolgot, ezért ennek elhagyásával tovább egyszerűsíthetjük a képletet, és mivel a logaritmus alapja nagyobb, mint 1, ezért a következő egyenlethez jutunk.

$$0 < \frac{N_n(C,f)}{N_n(D,f)} \leq 1$$

$N(D)$ definíciója alapján D-nek vesszük azt az n számú részfedését, amik uniója kiadja X-et. Tudjuk, hogy $C \prec D$, vagyis D minden eleme benne van C egy elemében. Ha vesszük C azon részfedéseit, amelyek tartalmazzák $D_1, \ldots, D_n$-et, akkor ezen részfedések uniója is kiadja X-et. Mivel lehet, hogy egy C_j részfedés egyszerre több D_i-t is tartalmaz, ezért C-ből is elég legfeljebb n részfedést kiválasztani. Ekkor $N_n(C,f) \leq N_n(D,f)$, amiből már következik az állítás. $\square$

Nézzünk meg néhány tulajdonságot, amit a topologikus entrópia kielégít. Ehhez mondjunk ki egy állítást.

2.1.5. Állítás. *Legyen (X,f) egy topologikus dinamikai rendszer. Ekkor a következő tulajdonságok teljesülnek:*

i) minden $n \geq 1$ egészre $h_{top}(f^n) = nh_{top}(f)$

ii) ha Y egy invariáns részhalmaza X-nek, akkor $h_{top}(f|_Y) \leq h_{top}(f)$

iii) ha (Y,g) topologikus dinamikai rendszer konjugált (X,f)-fel, akkor $h_{top}(f) = h_{top}(g)$.

2.1.6. Megjegyzés. Ezen állítás bizonyítását jelen szakdolgozat keretei között most nem tárgyaljuk.

2.2. Patkó

A topologikus entrópiát szeretnénk valahogy majd becsülni, és ehhez kellenek nekünk különféle eszközök. A következő fejezetben tárgyalt Misiurewicz tétel kimondja, hogy a patkó létezése szükséges a pozitív entrópiához. Ehhez tudnunk kell, hogy mi is az a patkó, és hogy ez hogyan fog majd segíteni nekünk.

Lássuk a patkó formális definícióját.

2.2.1. Definíció. *Legyen $f : I \to I$ egy intervallumleképezés. Ha J_1,...,J_n zárt, nem elfajuló, egymásba nem nyúló intervallumok, akkor minden $i \in \{1, \dots, n\}$-re, $J_1 \cup \dots \cup J_n \subset f(J_i)$, akkor $(J_1, \dots, J_n)$-et n-patkónak hívjuk. Ha az intervallumokra az teljesül, hogy $J_i \cap J_j = \emptyset$, akkor $(J_1, \dots, J_n)$-et szigorú n-patkónak nevezzük.*

2.2.2. Megjegyzés. $n = 2$ esetben egyszerűen patkónak hívjuk.

2.2.3. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy $f : I \to I$ intervallumleképezés rendelkezik a patkó tulajdonsággal, ha léteznek olyan $(J_1, \dots, J_n) \subset I$ részintervallumok, melyek egy n-patkót alkotnak.*

2.2.4. Állítás. *Legyen $f : I \to I$ egy intervallumleképezés, mely rendelkezik a patkó tulajdonsággal. Ekkor f-nek vannak periodikus pontjai minden periódussal. Azaz minden $k \in \mathbb{Z}$-hez létezik $x \in I$, hogy $f^k(x) = x$.*

2.2.5. Állítás. *Ha $f : I \to I$ egy p-patkójú intervallum leképezés, akkor $h_{top}(f) \geq \log p$.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy f-nek szigorú $(J_1, \dots, J_p)$ p-patkója van. Ekkor léteznek olyan $U_1, \dots, U_p$ diszjunkt halmazok I-ben, hogy minden $i \in [1, p]$-re $J_i \subset U_i$. Legyen $U_{p+1} := I \setminus \bigcup_{i=1}^{p} J_i$. Ekkor $\mathcal{U} := (U_1, \dots, U_p, U_{p+1})$ egy nyílt fedése I-nek, és minden $i \in [1, p]$-re, $U_{p+1} \cap J_i = \emptyset$. Legyen $n \geq 1$, ekkor minden $(i_0, \dots, i_{n-1}) \in [1, p]^n$-re legyen

$$J_{i_0,\dots,i_{n-1}} := \{x \in I | \forall k \in [0, n-1], f^k(x) \in J_{i_k}\}.$$

Mivel $(J_1, \dots, J_p)$ egy p-patkó, ezért $J_{i_0,\dots,i_{n-1}}$ nemüres, mert tudjuk, hogy ha $J_0, \dots, J_n$ olyan nemüres részintervallumai I-nek, hogy minden $i \in [1, n]$-re $J_i \subset f(J_{i-1})$, akkor létezik egy olyan $K \subset J_0$ részintervallum, hogy $f^n(K) = J_n$, $f^n(\partial K) = \partial J_n$ és $f^i(K) \subset J_i$ minden $i \in [0, n]$-re. Továbbá ez benne van $\mathcal{U}^n$ egy elemében, ahol $\mathcal{U}^n = U_{i_0} \cap f^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap f^{-(n-1)}(U_{i_{n-1}})$. Ekkor minden $n \geq 1$ egészre $N_n(\mathcal{U}, f) \geq p^n$, és így

$$h_{top}(f) \geq h_{top}(\mathcal{U}, f) = \lim_{n \to +\infty} \frac{N_n(\mathcal{U}, f)}{n} \geq \log p.$$

Most nézzük az általános esetet, és tegyük fel, hogy f-nek van egy p-patkója. Legyen $n \geq 1$, és ekkor f^n-nek van egy p^n-patkója. Számozzuk ezt a p^n darab intervallumot balról jobbra, és tekintsük csak a páratlan indexűeket. Ennek következtében kapunk egy szigorú $\lceil \frac{p^n}{2} \rceil$-patkót. Ekkor alkalmazva a bizonyítás első felét f^n-re kapjuk, hogy

$$h_{top}(f^n) \geq \log\left(\frac{p^n}{2}\right).$$

Ennek következtében a 2.1.5-ös állítás alapján tudjuk, hogy $h_{top}(f) = \frac{1}{n} h_{top}(f^n)$, és így $h_{top}(f) \geq \log p - \frac{\log 2}{n}$. Végül n-el tartva a végtelenhez kapjuk, hogy $h_{top}(f) \geq \log p$. $\square$

3. fejezet

Misiurewicz tétel

A Misiurewicz tétel kimondja, hogy a patkó létezése szükséges a pozitív entrópiához. Ez a tétel igaz minden folytonos intervallumleképezésre.

3.0.6. Tétel. (Misiurewicz tétel) *Legyen $f : I \to I$ egy pozitív topologikus entrópiájú intervallumleképezés, vagyis $h_{top}(f) > 0$. Minden $\lambda < h_{top}(f)$-re, és minden N-re léteznek $(J_1, \ldots, J_p)$ részintervallumok, és egy pozitív egész $n > N$ olyan, hogy a $(J_1, \ldots, J_p)$ felosztás egy szigorú p-patkója f^n-nek és igaz a következő becslés $\frac{\log(p)}{n} \geq \lambda$.*

A bizonyításához először mondjunk ki pár lemmát, amit majd a bizonyítás során felhasználunk.

3.0.7. Lemma. *Legyen (a_n) és (b_n) két pozitív számokból álló sorozat. Ekkor,*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log(a_n + b_n) = \max\left\{ \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log\, a_n, \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log\, b_n \right\}. \tag{3.1}$$

Bizonyítás. (Lemma 3.0.7)
Legyen,

$$L := \max\left\{ \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log\, a_n, \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log\, b_n \right\}.$$

Nyilvánvaló, hogy $a_n + b_n \geq a_n$ és $a_n + b_n \geq b_n$, amiből következik, hogy

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log\,(a_n + b_n) \geq L.$$

Fordítva pedig minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan n_0 egész, hogy minden $n \geq n_0$-ra, $a_n \leq e^{(L+\varepsilon)}$ és $b_n \leq e^{(L+\varepsilon)}$. Ebből következik, hogy

$$\forall n \geq n_0,\ \frac{1}{n} \log\,(a_n + b_n) \leq L + \varepsilon + \frac{\log\, 2}{n}.$$

Innen már következik az állítás, ha először $n \to +\infty$, majd ε-nal tartunk 0-hoz. $\square$

3.0.8. Lemma. *Legyen* (a_n) *és* (b_n) *két valós számsorozat. Ekkor,*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{k=1}^{n-1} \exp(a_k + b_{n-k}) \leq \max\left\{ \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n}, \limsup_{n\to+\infty} \frac{b_n}{n} \right\} \tag{3.2}$$

Bizonyítás. (Lemma 3.0.8)
Legyen

$$L := \max\left\{ \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n}, \limsup_{n\to+\infty} \frac{b_n}{n} \right\}.$$

Feltehetjük, hogy L véges, egyébként az állítás nyilvánvaló. Ekkor minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan n_0 egész, hogy

$$\forall n > n_0,\ \frac{a_n}{n} \leq L + \varepsilon,\ \frac{b_n}{n} \leq L + \varepsilon. \tag{3.3}$$

Legyen $M := \max\{0, \frac{a_n}{n}, \frac{b_n}{n} \,|\, n \in [1, n_0 - 1]\}$. Ezenkívül legyen n és k két olyan egész, hogy $n \geq 2n_0$ és $k \in [1,\, n-1]$. Szükségképpen a követezők közül az egyik teljesül. Vagy $k \geq n_0$, vagy $n - k \geq n_0$. Emiatt három esetet külön kell vizsgálnunk.

i) Ha $k \geq n_0$, és $n - k \geq n_0$ akkor (3.3) alapján:
$a_k + b_{n-k} \leq k(L+\varepsilon) + (n-k)(L+\varepsilon) = n(L+\varepsilon)$,

ii) Ha $k \geq n_0$, és $n - k < n_0$ akkor (3.3) alapján:
$a_k + b_{n-k} \leq k(L+\varepsilon) + (n-k)M \leq n(L+\varepsilon) + n_0 M$,

iii) Ha $k < n_0$, és $n - k \geq n_0$ akkor (3.3) alapján:
$a_k + b_{n-k} \leq kM + (n-k)(L+\varepsilon) \leq n_0 M + n(L+\varepsilon)$.

Mindhárom esetben felírhatjuk azt a becslést, hogy $a_k + b_{n-k} \leq n_0 M + n(L+\varepsilon)$ és ennek következtében

$$\forall n \geq 2n_0\text{-ra},\ \frac{1}{n} \log \sum_{k=1}^{n-1} \exp\left(a_k + b_{n-k}\right) \leq \frac{1}{n} \log(n-1) + L + \varepsilon + \frac{n_0 M}{n}.$$

Először vesszük a limsup-ot, ha $n \to +\infty$, majd ε-nal tartunk 0-hoz, akkor kapjuk a következő egyenletet, amivel már megkapjuk az állítást.

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{k=1}^{n-1} \exp(a_k + b_{n-k}) \leq L.$$

□

3.0.9. Lemma. *Legyen (a_n) egy valós számsorozat, és α, $\beta \in \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy létezik olyan $C > 0$, hogy minden $n \geq 1$-re, $a_{n+1} \leq a_n + C$, és hogy*

$$0 < \alpha < \beta < \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n}. \tag{3.4}$$

Ekkor minden N egészhez, létezik olyan $n \geq N$, hogy $a_n \geq \beta n$, és $a_{n+1} \geq a_n + \alpha$.

Bizonyítás. (Lemma 3.0.9)
Indirekt tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, vagyis létezik N, hogy

$$\forall n \geq N,\ a_n \geq \beta n \Rightarrow a_{n+1} < a_n + \alpha. \tag{3.5}$$

Ha minden $n \geq N$-re, $a_n \geq \beta n$, akkor minden $n \geq 1$-re, $a_n + N < a_N + \alpha n$ a (3.5) alapján, amiből következik, hogy

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} \leq \alpha.$$

De ez ellentmond (3.4)-nek. Ennek következtében létezik olyan $n \geq N$ egész, hogy $a_n < \beta n$. Legyen $N_0 := \min\{n \geq N | a_n < \beta n\}$. Feltehetjük, hogy $a_p < \beta p$ teljesül bizonyos $p \geq N$ egészre, és az r legyen olyan pozitív egész, hogy minden $n \in [p+1, p+r]$-re, $a_n \geq \beta n$. Meg fogjuk mutatni, hogy r korlátozva van egy p-től független konstanssal. (3.5) alapján tudjuk, hogy $a_{p+r} \leq a_{p+1} + \alpha(r-1)$. Mivel $a_{p+1} \leq a_p + C$ és $a_p < \beta p$, tudjuk, hogy

$$\beta(p+r) \leq a_{p+r} \leq \beta p + C + \alpha(r-1). \tag{3.6}$$

Ebből következik, hogy $\beta r \leq C + \alpha(r-1)$, tehát $r \leq M$, ha

$$M := \frac{C-\alpha}{\beta-\alpha}.$$

Vegyük észre, hogy $M > 0$, mert $a_n \leq a_1 + (n-1)C$ minden $n \geq 1$ -re és ezért $\limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} \leq C$, amiből következik, hogy $C - \alpha > 0$, és ekkor a feltétel miatt $\beta - \alpha > 0$ is igaz.
Legyen n egy olyan egész, hogy $n > N_0 + M$. Ekkor két esetet különböztetünk meg.

i) Ha $a_n \geq \beta n$, és minden $i \in [p+1, n]$-re $a_i \geq \beta i$. Ekkor (3.6) alapján, azt kapjuk, hogy

$$a_n \leq \beta p + C + \alpha M \leq \beta n + C + \alpha M.$$

ii) Ha $a_n < \beta n$, akkor az egyenlőtlenség $a_n \leq \beta n + C + \alpha M$ triviálisan teljesül.

Mivel az $a_n \leq \beta n + C + \alpha M$ egyenlőtlenség teljesül mindkét esetben így azt kapjuk, hogy

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{a_n}{n} \leq \beta.$$

De ez ellentmond (3.4)-nek, amiből következik az állítás helyessége. □

3.0.10. Lemma. *Legyen $f : I \to I$ egy intervallumleképezés, és $n \geq 1$. Ekkor*

i) Legyenek $J_0, \ldots, J_n$, az I olyan nemüres részintervallumai, hogy minden $i \in [1, n]$-re $J_i \subset f(J_{i-1})$. Ekkor létezik egy olyan $K \subset J_0$ részintervallum, hogy $f^n(K) = J_n$, $f^n(\partial K) = \partial J_n$ és $f^i(K) \subset J_i$ minden $i \in [0, n]$-re. Ha $J_0, \ldots, J_n$ zárt intervallumok, akkor K is választható zártnak.

ii) Legyenek $(J_0, \ldots, J_n)$ olyan intervallumok, hogy minden $i \in [1, n]$-re $f(J_{i-1})$ lefedi J_i-t, és $J_0 \subset J_n$. Ekkor létezik olyan $x \in J_0$, hogy $f_n(x) = x$, és minden $i \in [0, n-1]$-re $f^i(x) \in J_i$.

iii) Tegyük fel, hogy minden $i \in [1, p]$-re $[J_0^i, \ldots, J_n^i)$ olyan intervallumok, hogy minden $l \in [1, n]$-re $f(J_{l-1}^i)$ lefedi J_l^i-t. Minden $i, j \in [1, p]$, $i \neq j$ index párra létezik olyan $k \in [0, n]$, hogy J_k^i és J_k^j belseje különböző. Ekkor léteznek olyan $K_1, \ldots, K_p$ zárt, páronként diszjunkt belsővel lévő részintervallumok, hogy

$$\forall i \in [1, p]\text{-re } f^n(K_i) = J_n^i,\ f^n(\partial K_i) = \partial J_n^i, \text{ és}$$

$$\forall k \in [0, n]\text{-re és } \forall i \in [1, p]\text{-re } f^k(K_i) \subset J_k^i.$$

3.0.11. Megjegyzés. Ennek a lemmának a bizonyítását most nem tárgyaljuk, de a következő bizonyítás során fel fogjuk használni.

És akkor most lássuk a tétel bizonyítását.

Bizonyítás. (Tétel 3.0.6)

Először lássuk be a tételt egy extra feltétellel, amikor feltesszük, hogy $\log(3) < h_{top}(f))$, és $\log(3) < \lambda < h_{top}(f)$. Legyen $\lambda' \in (\lambda, h_{top}(f))$. A topologikus entrópia definíciója alapján létezik egy olyan $\mathcal{U}$ véges nyílt fedés, hogy $h_{top}(\mathcal{U}, f) > \lambda'$. Válasszunk egy olyan $\mathcal{P}$ felosztást, amely tartalmaz véges sok diszjunkt nem elfajuló intervallumot, amely finomabb $\mathcal{U}$-nál. Ekkor $h_{top}(\mathcal{P}, f) \geq h_{top}(\mathcal{U}, f)$ a 2.1.4 Lemma alapján, továbbá $h_{top}(\mathcal{P}, f) > \lambda'$. Tudjuk, hogy $N(\mathcal{P}^n) = \#(\mathcal{P}^n)$, mert $\mathcal{P}^n$ egy felosztás, vagyis

$$h_{top}(\mathcal{P}, f) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \#(\mathcal{P}^n).$$

Ha $\mathcal{Q}$ az I részhalmazok egy családja, akkor legyen minden $n \geq 1$-re és minden $A \in \mathcal{Q}$-ra,

$$\mathcal{Q}^n := \left\{ (A_0, \dots, A_{n-1}) | \, \forall i \in [0, n-1], A_i \in \mathcal{Q} \text{ és } \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A_i) \neq \emptyset \right\}$$

$$\text{és } \mathcal{Q}^n|A := \{(A_0, \dots, A_{n-1}) \in \mathcal{Q}^n | A_0 = A\}.$$

Tudjuk, hogy $\#(\mathcal{P}^n) = \sum\limits_{A\in\mathcal{P}} \#(\mathcal{P}^n|A)$. A 3.0.7 Lemma alapján létezik olyan $A \in \mathcal{P}$, hogy

$$h_{top}(\mathcal{P}, f) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \#(\mathcal{P}^n|A). \tag{3.7}$$

Legyen $\mathcal{F}$ az $A \in \mathcal{P}$-nek olyan családja, amely kielégíti (3.7)-et. Ekkor azt állítjuk:

$$\forall A \in \mathcal{F}, h_{top}(\mathcal{P}, f) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \#(\mathcal{F}^n|A). \tag{3.8}$$

Bizonyítás. (3.8)

A $\geq$ irány egyértelmű. Így nézzük a másik irányt. Rögzítsünk egy $A \in \mathcal{F}$-et. Legyen $(A_0, \dots, A_{n-1}) \in \mathcal{P}^n|A$ és legyen $k \in [1, n]$ a legnagyobb olyan egész, hogy minden $i \in [0, k-1]$-ra, $A_i \in \mathcal{F}$. Ekkor minden $(A_0, \dots, A_{k-1}) \in \mathcal{F}^k|A$, és ha $k < n$, $(A_k, \dots, A_{n-1}) \in \mathcal{F}^{n-k}|B$ valamely $B \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{F}$-re. Ekkor

$$\#(\mathcal{P}^n|A) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \#(\mathcal{F}^k|A) \cdot \sum_{B\in\mathcal{P}\setminus\mathcal{F}} \#(\mathcal{P}^{n-k}|B). \tag{3.9}$$

Definiáljuk a következőt:

$$\forall n \geq 1, a_n := \log \#(\mathcal{F}^n|A) \text{ és } b_n := \log \sum_{B\in\mathcal{P}\setminus\mathcal{F}} \#(\mathcal{P}^n|B).$$

Ekkor átírhatjuk (3.9)-et:

$$\#(\mathcal{P}^n|A) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \exp(a_k + b_{n-k}).$$

Ezt behelyettesítve (3.7)-be, láthatjuk, hogy

$$h_{top}(\mathcal{P}, f) \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{k=1}^{n-1} \exp(a_k + b_{n-k}) \right).$$

A 3.0.8 Lemma alapján,

$$h_{top}(\mathcal{P}, f) \leq \max \left\{ \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n}, \limsup_{n\to+\infty} \frac{b_n}{n} \right\}. \tag{3.10}$$

$\mathcal{F}$ definíciója szerint kapjuk, hogy

$$\forall B \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{F}\text{-re}, \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \#(\mathcal{P}^n|B) < h_{top}(\mathcal{P}, f),$$

és így a 3.0.7 Lemma miatt $\limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{b_n}{n} < h_{top}(\mathcal{P}, f)$. Végül (3.10)-ből látjuk, hogy $h_{top}(\mathcal{P}, f) \leq \limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n}$. Ebből már következik (3.8) bizonyítása. $\square$

Most visszatérünk a tétel bizonyításához. Legyen $A_0, \dots, A_{n-1} \in \mathcal{F}$. Legyen $A'_0 := A_0$ és minden $i \in [1, n-1]$-re, $A'_i := A_i \cap f(A'_{i-1})$. Azt állítjuk, hogy

$$A'_{n-1} = f^{n-1}(\{x_0|\forall i \in [1, n-1], f^i(x_0) \in A_i\}) = f^{n-1}\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A_i) \right). \tag{3.11}$$

Továbbá, $x_{n-1} \in A'_{n-1}$

$\Leftrightarrow \exists x_{n-2} \in A'_{n-2}$, $f(x_{n-2}) = x_{n-1} \in A'_{n-1}$

$\Leftrightarrow \exists x_{n-3} \in A'_{n-3}$, $f(x_{n-3}) = x_{n-2} \in A'_{n-2}$ és $f^2(x_{n-3}) = f(x_{n-2}) = x_{n-1}$

$\vdots$

$\Leftrightarrow \exists x_0 \in A'_0$, $f(x_0) = x_1 \in A'_1$, $f^2(x_0) = x_2 \in A_2$, $\dots$, $f^{n-1}(x_0) = x_{n-1} \in A_{n-1}$. Ekkor (3.11) igaz, amiből következik $\mathcal{F}$ definíciója alapján:

$$(A_0, \dots, A_{n-1}) \in \mathcal{F}^n \Leftrightarrow A'_{n-1} \neq \emptyset. \tag{3.12}$$

Ha $A'_{n-1} \neq \emptyset$, akkor minden $i \in [1, n-1]$-re, A'_i nem üres, és $A'_i \subset f(A'_{i-1})$. Így a 3.0.10 Lemma alapján minden $(A_0, \dots, A_{n-1}) \in \mathcal{F}^n$-re, létezik egy olyan nemüres $J_{A_0,\dots,A_{n-1}}$ intervallum, hogy

$$f^{n-1}(J_{A_0,\dots,A_{n-1}}) = A'_{n-1}, \tag{3.13}$$

$$\forall i \in [0, n-1],\ f^i(J_{A_0,\dots,A_{n-1}}) \subset A'_i \subset A_i. \tag{3.14}$$

Továbbá, minden $(J_{A_0,\dots,A_{n-1}})_{(A_0,\dots,A_{n-1})\in\mathcal{F}^n}$ intervallum diszjunkt. Ha $(A_0,\dots,A_{n-1}) \in \mathcal{F}^n$, és $A_n \in \mathcal{F}$, akkor $f^n(J_{A_0,\dots,A_{n-1}}) \cap A_n = f(A'_{n-1}) \cap A_n = A'_n$, és emiatt (3.12) alapján,

$$f^n(J_{A_0,\dots,A_{n-1}}) \cap A_n \neq \emptyset \Leftrightarrow (J_{A_0,\dots,A_{n-1}}) \in \mathcal{F}^{n+1}.$$

Ennek következtében,

$$\#(\mathcal{F}^{n+1}|A) = \sum_{(J_{A_0,\dots,A_{n-1}})\in\mathcal{F}^n, A_0=A_n} \#\{B \in \mathcal{F} | f^n(J_{A_0,\dots,A_{n-1}}) \cap B \neq \emptyset\}. \tag{3.15}$$

Minden $A, B \in \mathcal{F}$-re legyen:

$$c(A,B,n) := \#\{(A_0,\dots,A_{n-1}) \in \mathcal{F}^n | A_0 = A,\ f^n(J_{A_0,\dots,A_{n-1}}) \supset B\}.$$

Szükségünk lesz a következő eredményre:

$$\forall A,B,C \in \mathcal{F},\ \forall n,m \geq 1,\ c(A,B,n)c(B,C,m) \leq c(A,C,n+m). \tag{3.16}$$

Bizonyítás. (3.16)
Minden $A, B \in \mathcal{F}$, és minden $n \geq 1$-re legyen

$$\mathcal{C}(A,B,n) := \{(A_0,\dots,A_{n-1}) \in \mathcal{F}^n | A_0 = A,\ f^n(J_{A_0,\dots,A_{n-1}}) \supset B\}.$$

Legyen $(A_0,\dots,A_{n-1}) \in \mathcal{C}(A,B,n)$, és $(B_0,\dots,B_{m-1}) \in \mathcal{C}(B,C,m)$. Mutassuk meg, hogy $(A_0,\dots,A_{n-1},B_0,\dots,B_{m-1}) \in \mathcal{C}(A,C,n+m)$. Definícióból tudjuk, hogy $f^n(J_{A_0,\dots,A_{n-1}}) \supset B$, és (3.14) miatt $J_{B_0,\dots,B_{n-1}} \subset B_0 = B$. Ebből a 3.0.10 Lemma (i) része alapján kapjuk, hogy létezik olyan $K \subset J_{A_0,\dots,A_{n-1}}$ nemüres részintervallum, hogy $f^n(K) = J_{B_0,\dots,B_{n-1}}$. Továbbá, (3.14) alapján ez az intervallum kielégíti a következőt: minden $i \in [0, n-1]$-re $f^i(K) \subset A_i$, és minden $j \in [0, m-1]$-re $f^{n-1+j}(K) = f^j(J_{B_0,\dots,B_{m-1}}) \subset B_j$. Tehát,

$$K \subset \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A_i) \cap \bigcap_{i=n}^{n+m-1} f^{-i}(B_{i-n}).$$

Ebből az alábbiak következnek. Először is, $(A_0,\dots,A_{n-1},B_0,\dots,B_{m-1}) \in \mathcal{F}^{n+m}$ (3.11), és (3.12) alapján, felhasználva, hogy $K \neq \emptyset$. Másodszor, (3.13), és (3.11) miatt a $f^{n+m-1}(K)$ halmaz benne van $f^{m+n-1}(J_{B_0,\dots,B_{m-1}})$-ben. Ekkor $f^{n+m}(K) = f^m(J_{B_0,\dots,B_{m-1}})$, és tudjuk, hogy $f^{n+m}(K) \supset C$, $\mathcal{C}(B,C,m)$ definíciója alapján, és ekkor $f^{n+m}(J_{A_0,\dots,A_{n-1},B_0,\dots,B_{m-1}})$ tartalmazza C-t. Tehát $(A_0,\dots,A_{n-1},B_0,\dots,B_{m-1}) \in \mathcal{C}(A,C,n+m)$. Ebből már következik (3.16). □

Rögzítsünk egy $A \in \mathcal{F}$-et. Ekkor,

$$\sum_{B\in\mathcal{F}} c(A,B,n) = \#\{((A_0,\ldots,A_{n-1}),B) \in \mathcal{F}^n \times \mathcal{F} \,|\, A_0 = A,\; f^n(J_{A_0,\ldots,A_{n-1}}) \supset B\} =$$

$$= \sum_{(A_0,\ldots,A_{n-1})\in\mathcal{F}^n, A_0=A} \#\{B \in \mathcal{F} | f^n(J_{A_0,\ldots,A_{n-1}}) \supset B\}.$$

Legyen $(A_0,\ldots,A_{n-1}) \in \mathcal{F}^n$. Ha $f^n(J_{A_0,\ldots,A_{n-1}})$ metsz $\mathcal{F}$-ből k intervallumot, akkor $f^n(J_{A_0,\ldots,A_{n-1}})$ tartalmaz közülük legalább $k-2$-t, ugyanis $f^n(J_{A_0,\ldots,A_{n-1}})$ egy összefüggő intervallum. Ennek következtében,

$$\sum_{B\in\mathcal{F}} c(A,B,n) \geq \sum_{(A_0,\ldots,A_{n-1})\in\mathcal{F}^n, A_0=A} (\#\{B \in \mathcal{F} |\, f^n(J_{A_0,\ldots,A_{n-1}}) \cap B \neq \emptyset\} - 2).$$

Felhasználva ezt az egyenlőtlenséget, és a (3.15)-öt, kapjuk:

$$\sum_{B\in\mathcal{F}} c(A,B,n) \geq \#(\mathcal{F}^{n+1}|\, A) - 2\#(\mathcal{F}^n|\, A). \tag{3.17}$$

Legyen $a'_n := \log\#(\mathcal{F}|\, A)$ minden $n \geq 1$-re. (3.8) alapján tudjuk,

$$\lambda < h_{top}(\mathcal{P}, f) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{a'_n}{n}.$$

Továbbá, minden $n \geq 1$-re, $a'_{n+1} \leq a'_n + \log\#\mathcal{F}$. Ekkor alkalmazzuk 3.0.9 Lemmát $\alpha = \log(3)$-mal, $\beta = \lambda'$-val és $C = \log\#\mathcal{F}$-fel, és így kapjuk a következőt minden N-re.

$$\exists n \geq N,\; \#(\mathcal{F}^n|\, A) > e^{\lambda' n} \text{ és } \#(\mathcal{F}^{n+1}|\, A) \geq 3\#(\mathcal{F}^n|\, A). \tag{3.18}$$

Minden n-re, ami kielégíti (3.18)-at, felhasználhatjuk ezeket az egyenlőtlenségeket (3.17)-ben és ekkor kapjuk,

$$\sum_{B\in\mathcal{F}} c(A,B,n) \geq 3\#(\mathcal{F}^n|\, A) - 2\#(\mathcal{F}^n|\, A) = \#(\mathcal{F}^n|\, A) \geq e^{\lambda' n}.$$

Ennek következtében

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{B\in\mathcal{F}} c(A,B,n) \geq \lambda'.$$

A 3.0.7 Lemma alapján minden $A \in \mathcal{F}$-hez létezik olyan $B = \varphi(A) \in \mathcal{F}$, hogy

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log c(A,\varphi(A),n) \geq \lambda' > \lambda.$$

Mivel $\mathcal{F}$ véges, ezért $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ leképezésnek van periodikus pontja, azaz létezik olyan $A_0 \in \mathcal{F}$, és olyan $p \in \mathbb{N}$, hogy $\varphi^p(A_0) = A_0$. Felhasználva az előbbi egyenlőtlenséget $A = \varphi^i(A_0)$-al, ahol $i = 0, \ldots, p-1$, kapjuk

$$\forall i \in [0, p-1],\ \forall N_i \geq 1,\ \exists n_i \geq N_i,\ c(\varphi^i(A_0), \varphi^{i+1}(A_0), n_i) \geq e^{n_i \lambda}. \tag{3.19}$$

Minden $i \in [0, p-1]$-re legyen N_i egy pozitív egész, és $n_i \geq N_i$ amely teljesíti (3.19)-et. Legyen $n := \sum\limits_{i=0}^{p-1} n_i$, és $k := c(A_0, A_0, n)$. (3.16) és (3.19) alapján,

$$k = c(A_0, A_0, n) \geq \prod_{i=0}^{p-1} c(\varphi^i(A_0), \varphi^{i+1}(A_0), n_i)$$

$$\geq \prod_{i=0}^{p-1} e^{n_i \lambda} = e^{n\lambda}.$$

$c(A_0, A_0, n)$ definíciója szerint ez azt jelenti, hogy létezik k olyan diszjunkt $J_1, \ldots, J_k \subset A_0$ intervallum, hogy minden $i \in [1, k]$-ra, $f^n(J_i) \supset A_0$. Ekkor $(\overline{J_1}, \ldots, \overline{J_k})$ egy k-patkója f^n-nek, és $\frac{1}{n} \log k \geq \lambda$.

Ebből következik a tétel állítása általános alakban is a következő módon. Tegyük fel, hogy $h_{top}(f) > 0$, és legyen $0 < \lambda < h_{top}(f)$. Válasszuk λ''-t úgy, hogy $\in (\lambda, h_{top}(f))$, majd válasszunk olyan q egészet, hogy $q\lambda'' > \log 3$, és $q(\lambda'' - \lambda) \geq \log 2$ teljesüljön. Ekkor 2.1.5 állítás alapján $h_{top}(f^q) = q h_{top}(f) > q\lambda''$. Ekkor mielőtt alkalmazzuk f^q-t, kapjuk, hogy minden N egészhez létezik $n \geq N$, $k \geq 1$, egy $(J_1, \ldots, J_k)$ k-patkó f^{nq}-hoz, hogy $\frac{1}{n} \log k \geq q\lambda''$. Rendezzük úgy ezeket az intervallumokat, hogy $J_1 \leq J_2 \leq \cdots \leq J_k$, és legyen $k' := \lceil \frac{k}{2} \rceil$. Így a páratlan indexű J_i-k páronként diszjunktak, melyek k'-patkót adnak f^{nq}-val, és kapjuk:

$$\frac{\log k'}{qn} \geq \frac{\log k - \log 2}{qn} \geq \lambda'' - \frac{\log 2}{qn} \geq \lambda.$$

Ezzel beláttuk a tételt. $\square$

4. fejezet

Program

A program segítségével szeretnénk találni I-nek olyan $J_1, \ldots, J_n$ részintervallumait melyekre teljesül a patkó tulajdonság, vagyis hogy minden részintervallum képe lefedi a részintervallumok unióját. A program során kihasználjuk, hogy az $f : I \to I$ intervallumleképezés folytonos, és hogy egy H intervallum képe szintén intervallum lesz, vagyis $f(H)$ szintén intervallum. Fogalmazzuk át a feladatunkat egy optimalizálási problémává. Például, vegyük azt az esetet, hogy két ilyen J_1, J_2 intervallumot keresünk. Egész pontosan a két intevallum végpontjait keressük. Ezeket sorra jelöljük (x_1, x_2, x_3, x_4)-el. Ekkor a feltételeink a következők lesznek.

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4, \tag{4.1}$$

$$i = \{1, 3\}\text{-re: } f(x_i) \le x_1 \text{ és } i = \{2, 4\}\text{-re: } f(x_i) \ge x_4. \tag{4.2}$$

Az első (4.1) feltétellel azt biztosítjuk, hogy az intervallumok diszjunktak és ne elfajulóak legyenek. A második (4.2) feltétellel pedig biztosítjuk, hogy a részintervallumok képe biztosan lefedje az összes részintervallum unióját. Ezt kell nekünk átfogalmaznunk egy optimalizálási problémává. Ezt pedig úgy csináljuk, hogy veszünk egy célfüggvényt, amit szeretnénk minimalizálni. Vegyük a következőt:

$$\max\{0, f(x_1) - x_1\} + \max\{0, f(x_3) - x_1\} + \max\{0, x_4 - f(x_2)\} + \max\{0, x_4 - f(x_4)\}.$$

Ezzel átírtuk a (4.2) feltételt. Még át kell írnunk a (4.1)-t.

$$\max\{0, x_i - x_j\},$$

ahol $i, j = \{1, 2, 3, 4\}$, $i \ne j$, és $i < j$. Majd az összes feltételt összegezzük és ez lesz a célfüggvényünk, amit minimalizálni akarunk. Azt szeretnénk, ha a végeredmény 0 lenne, ugyanis akkor találtunk optimális megoldást, vagyis olyan (x_1, x_2, x_3, x_4)-et, amik eleget tesznek a feltételeinknek. Ellenkező esetben valamelyik feltétel nem teljesül, és így nem találtunk megfelelő intervallumokat. A max függvény azért kell, hogy a minimum érték ne lehessen negatív, vagy ne fordulhasson elő az az eset, amikor nem teljesülnek a feltételek, és az összegben negatív előjeles összegek is megjelennek, azaz az összeg szintén lehet 0, de sérülnek a feltételek. Az optimalizálás előtt megadjuk, hogy f hanyadik iteráltját vizsgáljuk, majd keresünk benne 2-patkót, 3-patkót, és így tovább. Amíg ez a minimum érték 0, addig mehetünk tovább, és kereshetünk nagyobb p-patkót. Ha már 3-patkót keresünk, akkor bevezetünk két újabb változót, amik a harmadik intervallum végpontjait reprezentálják, és ugyanezen módszer alapján egy p-patkó kereséséhez $2p$ pontra van szükségünk. Ebben a programban most az $f = ax(1 - x)$ leképezést fogjuk vizsgálni. Mivel numerikus programot használunk, így numerikus számolási hibák előfordulhatnak, ahogy egyre magasabb iteráltat vizsgálunk, és egyre több intervallumot keresünk. Lássuk a kódot.

Először megírjuk azt a függvényt, amely előállítja a leképezés iteráljait. A két bemeneti érték az n, amivel megadjuk, hogy hanyadik iteráltat szeretnénk megkapni, az x pedig, hogy melyik pontban vagyunk kíváncsiak a leképezés értékére.

```
function e = fitfv(n,x)

t=x;
for i=1:n
    e=t.*4.*(1-t);
    t=e;
end
```

Itt megírjuk azt a függvényt, amivel biztosítjuk, hogy a pontjaink egymás után kövessék egymást, vagyis hogy az intervallumaink diszjunktak legyenek.

```
function s = egymasutan(v)

s = 0;
n = length(v);
for i = 1:n-1
    for j = i+1:n
```

```
        s = s + max(0,v(i)-v(j));
    end
end
```

Itt pedig azt a függvényt, amivel biztosítjuk, hogy az egyes intervallumok képei lefedjék az összes intervallum unióját.

```
function t = tulnyul(it,v)

t = 0;
n = length(v);
for i = 1:n
    if mod(i,2) == 0
        t = t +  max(0,v(n)-fitfv(it,v(i)));
    else
        t = t + max(0,fitfv(it,v(i))-v(1));
    end
end
```

Most pedig nézzük magát a programot, ami megkeresi az intervallumokat, melyek teljesítik a patkó tulajdonságot, majd kiírja az intervallumok határait, és kirajzolja ezeket, amikor a program a legtöbb ilyen intervallumot találja.

```
function [h,e] = programs(it)

int = 1;
e=0;
while e == 0
    int = int + 1;
    for j=1:100+((int-1)*20)
        v1=sort(rand(1,2*int));
        F = @(v)(egymasutan(v)+tulnyul(it,v));
        [h,e] = fminsearch(F,v1);
        if e == 0
            disp(h)
```

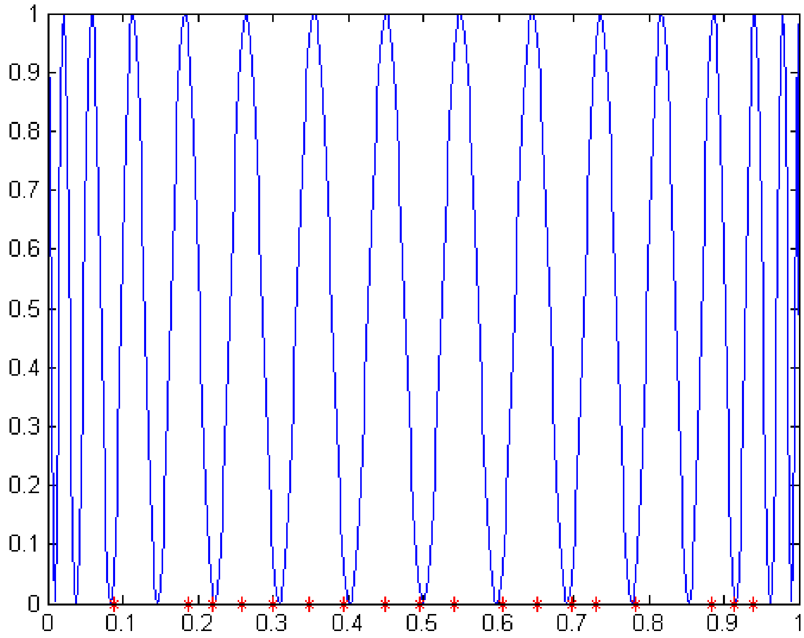
```
            disp(e)
            break
        end
    end
    if e == 0
        xa = linspace(0,1,500);
        ya = fitfv(it,xa);
        plot(xa,ya)
        hold on
        for k = 1:int
            plot([h(2*k-1),h(2*k)],[0,0],'r')
        end
for k = 1:2*int
            plot(h(k),0,'*r')
        end
        hold off
    end
end
disp('Az intervallumok szama:')
disp(int-1)
```

Nézzünk meg néhány példát, és nézzük meg miket is kapunk.

4.0.12. Példa. Legyen $a = 4$ és vegyük az 5-ödik iterált. Ekkor kapunk intervallumokat $2, 3, \ldots$ patkókra, egészen addig, amíg nem teljesülnek a feltételek. Ebben az esetben a programunk 9 ilyen intervallumot talált. Leírunk néhány megoldást, amit találtunk.
3 patkó: $[0.0091, 0.1046], [0.1465, 0.4329], [0.5995, 0.6342]$
4 patkó: $[0.0847, 0.2565], [0.3155, 0.4484], [0.6015, 0.7438], [0.8561, 0.8813]$
$\vdots$
8 patkó: $[0.0405, 0.0624], [0.1480, 0.1873], [0.2274, 0.3616], [0.4015, 0.4580], [0.5052, 0.5503], [0.6908, 0.7333], [0.7830, 0.8229], [0.8579, 0.9444]$
9 patkó: $[0.0894, 0.1880], [0.2200, 0.2596], [0.3001, 0.3483], [0.3944, 0.4491], [0.4960, 0.5415], [0.6056, 0.6521], [0.6975, 0.7307], [0.7839, 0.8837], [0.9149, 0.9400]$

A program által kirajzolt grafikont a (4.1)-es ábrán láthatjuk.

Így kapjuk a becslést a 2.2.5 állítás alapján, hogy $h_{top}(f^5) \geq \log 9$. Majd felhasználva a 2.1.5 állítást, a becslést tudjuk alkalmazni az f leképezésre, és így a következő eredményhez jutunk: $h_{top}(f) \geq \frac{\log 9}{5}$.



4.1. ábra. A program által kirajzolt eredmény $a = 4$-re.

4.0.13. Példa. Legyen $a = 3.95$ és vegyük az 5-ödik iterált. Ekkor a programunk 7 ilyen intervallumot talált. Leírunk néhány megoldást, amit találtunk.

2 patkó: $[0.0905, 0.1801], [0.9134, 0.9370]$

3 patkó: $[0.3144, 0.3655], [0.4315, 0.6412], [0.7833, 0.8725]$

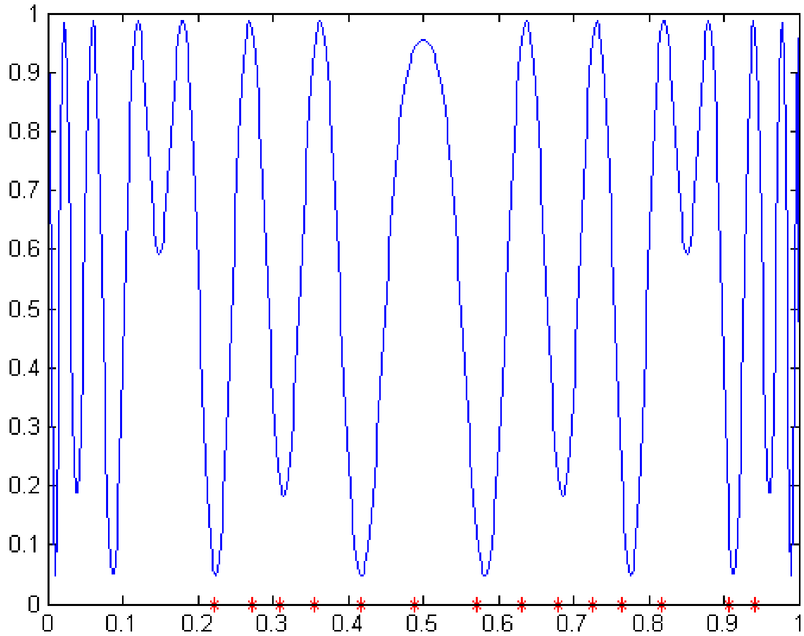
$\vdots$

6 patkó: $[0.0843, 0.1255], [0.2288, 0.3637], [0.4142, 0.5014], [0.5750, 0.6371], [0.7812, 0.8807], [0.9113, 0.9385]$

7 patkó: $[0.2221, 0.2715], [0.3093, 0.3563], [0.4170, 0.4890], [0.5710, 0.6304], [0.6800, 0.7257], [0.7653, 0.8167], [0.9076, 0.9409]$

A program által kirajzolt grafikont a (4.2)-es ábrán láthatjuk.

Az előző példához hasonlóan a következő becsléshez jutunk: $h_{top}(f) \geq \frac{\log 7}{5}$.



4.2. ábra. A program által kirajzolt eredmény $a = 3.95$-re.

Irodalomjegyzék

[1] Sylvie Ruette, *Chaos for continuous interval maps a survey of relationship between the various kinds of chaos*, http://www.math.u-psud.fr/~ruette/articles/chaos-int.pdf.

[2] Tibor Csendes, Barnabás M. Garay, Balázs Bánhelyi, *A verified optimization technique to locate chaotic regions of Hénon systems*, 2005, http://www.inf.u-szeged.hu/~csendes/henon.pdf.

[3] Simon Péter, *Differenciálegyenletek és dinamikai rendszerek*, 2012, http://www.cs.elte.hu/~simonp/DinRJegyz/dinrendjegyzet.pdf.

[4] Kathleen T. Alligood Tim D. Sauer James A. Yorke, *CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems*, Springer, 2000.

[5] Király Tamás, Papp Olga, *Jegyzet az Operációkutatás II című tárgyhoz*, http://www.cs.elte.hu/~tkiraly/students/opkut2_jegyzet.pdf.