

# Konzisztens digitális szakaszok vizsgálata és vizualizációja

Szakedolgozat

Írta: Pallagi János Márton

Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Pálvölgyi Dömötör

Számítógéptudományi Tanszék

ELTE TTK



Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2015

Köszönettel tartozom Pálvölgyi Dömötörnek a rengeteg segédanyagért, jó tanácsért és motivációért, valamint édesapámnak, Pallagi Jánosnak a kitartó támogatásért.

# Tartalomjegyzék

<b>1. Konzisztens digitális szakaszok rendszere</b>	<b>3</b>
<b>2. Digitális szakaszok létrehozása a <math>\mathbb{Z}</math> teljes rendezéséből</b>	<b>6</b>
2.1. Általános konstrukció . . . . .	6
2.2. Digitális szakaszok kis Hausdorff-távolsággal . . . . .	9
<b>3. CDS-ek karakterizációja <math>\mathbb{Z}^2</math>-ben</b>	<b>15</b>
<b>4. Szoftveres megvalósítás és vizualizáció</b>	<b>22</b>
4.1. Szoftver funkcionalitás . . . . .	22
4.2. Technikai megvalósítás . . . . .	25
4.3. További fejlesztési lehetőségek . . . . .	26

# Bevezetés

A digitális geometria egyik legfontosabb feladata, hogy az euklideszi objektumokat minél pontosabban reprezentálja a digitális térben. Egy pontos reprezentációtól nem csak azt várjuk, hogy megjelenésében hasonlítson az euklideszi megfelelőjéhez, hanem szeretnénk, hogy „viselkedésében” is másolja azt. Ez a sík esetében azt jelenti, hogy a képpontoknak megfelelő  $\mathbb{Z}^2$  rács részhalmazai mennyire jól közelítik az adott objektumot. Kézenfekvő ezt a problémát megvizsgálni a sík egyik legalapvetőbb objektumára, a szakaszokra.

Így jutunk el a feltett axiómák [3] alapján a konzisztens digitális szakaszok fogalmáig. Természetesen a további feltételeknek ára van, látni fogjuk, hogy már néhány természetesen adódó feltétel mellett is jelentősen megnőhet a digitális szakasz távolsága az euklideszi megfelelőjétől. A dolgozat fő témájaként a 2. fejezetben ismertetésre kerül [2] alapján egy konstrukció, amivel a digitális szakaszok (a Hausdorff távolság alapján) optimálisan közel lesznek az euklideszi párjukhoz. Megfigyeljük az egész számokon értelmezett különböző szigorú teljes rendezések és a konzisztens digitális szakaszok rendszereinek szoros kapcsolatát, majd a 3. fejezetben [1] alapján ismertetésre kerül a digitális szakaszok rendszereinek karakterizációja szigorú teljes rendezések segítségével. Végezetül a 4. fejezetben bemutatásra kerül egy vizualizációs program, aminek legfőbb funkciója a 2. fejezetben szereplő algoritmus alapján létrehozott digitális szakaszok kirajzolása.

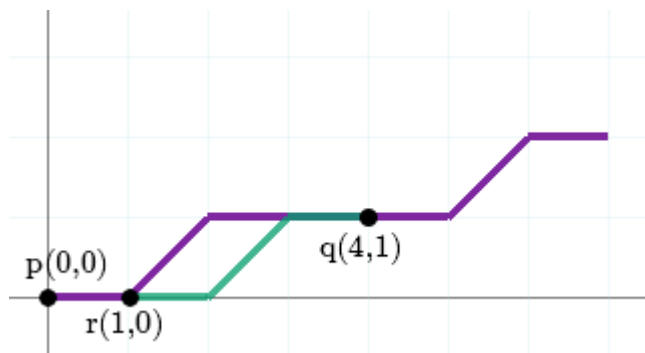
# 1. fejezet

## Konzisztens digitális szakaszok rendszere

Célunk, hogy a  $\mathbb{Z}^2$  minden  $p$  és  $q$  rácspontjára definiáljuk az  $S(p, q)$  digitális szakaszt. Ehhez először írjuk fel [3] alapján az alábbi axiómákat, melyek az euklideszi geometrián alapuló elvárásainkból természetesen adódnak.

- (S1) **Rácsvonal tulajdonság:** Minden  $p, q \in \mathbb{Z}^2$ -re az  $S(p, q)$  olyan csúcsok halmaza, amely a négyzetrácson egy  $p$  és  $q$  közötti út elemei.
- (S2) **Szimmetria:** Minden  $p, q \in \mathbb{Z}^2$ -re  $S(p, q) = S(q, p)$  teljesül.
- (S3) **Részszakasz tulajdonság:** Minden  $p, q \in \mathbb{Z}^2$ -re és minden  $r \in S(p, q)$ -ra teljesül, hogy  $S(p, r) \subseteq S(p, q)$ .
- (S4) **Meghosszabbíthatóság:** Minden  $p, q \in \mathbb{Z}^2$ -re létezik olyan  $r \in \mathbb{Z}^2$ , hogy  $r \notin S(p, q)$  és  $S(p, q) \subseteq S(p, r)$ .
- (S5) **Monotonitás:** Ha  $p, q \in \mathbb{Z}^2$  első vagy második koordinátája megegyezik, azaz a  $\mathbb{Z}^2$  rács egy függőleges vagy vízszintes vonalán helyezkednek el, akkor a teljes  $S(p, q)$  szakasz ezen a vonalon van.

*Megjegyzés.* A számítógép által rajzolt egyenesek megsértik az (S1) és az (S3) feltételeket. Az egyenes vonal pontjai  $p$  és  $q$  között, ha feltesszük, hogy  $p_x \leq q_x$  és  $m = \left\lfloor \frac{q_y - p_y}{q_x - p_x} \right\rfloor < 1$  a  $\{(x, \lfloor (x - p_x)m + p_y + 0.5 \rfloor) : p_x \leq x \leq q_x\}$  halmaz elemei. Ez már (S1)-et sem teljesíti, bár egy apró módosítással el tudnánk érni, hogy a pontok közötti utak a rácsvonalakat kövessék. Nagyobb problémát jelent, hogy nem teljesül (S3) sem. Vegyük például a  $p = (0, 0)$ ,  $q = (7, 2)$  pontokat. Ekkor az  $r = (1, 0)$  és



1.1. ábra. Az (S3) tulajdonságot nem teljesíti a számítógép által szokásos módon rajzolt szakasz

$s = (4, 1)$  pontok elemei ennek az egyszerű digitális szakasznak, de a köztük lévő részzszakaszt az nem tartalmazza.

*Megjegyzés.* Bár az (S1)-(S4) tulajdonságok természetesen illeszkednek az egyenesről alkotott képünkbe, önmagukban nem elegendők. Az (S5) tulajdonság szükségességét jól illusztrálja a következő példa: vegyünk a  $\mathcal{C}$  spirált a  $\mathbb{Z}^2$  tetszőleges pontja körül. Mivel  $\mathcal{C}$  a rács összes pontját tartalmazza, ezért definiálhatjuk  $S(p, q)$ -t a  $\mathcal{C}$  spirál  $p$  és  $q$  közötti részeként.

Digitális szakaszok egy olyan rendszerét, amire teljesülnek az (S1)-(S5) tulajdonságok, *konzisztens digitális szakaszok rendszerének (CDS)* hívjuk. Egyszerűen beláthatóak minden CDS-re az alábbi következmények.

**1.1. Következmény.** *Ha a  $p$ -n és  $q$ -n át haladó euklideszi egyenes meredeksége nemnegatív, akkor az  $S(p, q)$  bármely két pontján át haladó euklideszi egyenes meredeksége is nemnegatív. Ugyanez igaz analóg módon a nempozitív meredekség esetén.*

**1.2. Következmény.** *A  $\mathbb{Z}^2$  tetszőleges  $p$  és  $q$  pontjára az általuk kifeszített, rácsvonalakkal párhuzamos oldalú téglalap tartalmazza  $S(p, q)$  összes pontját.*

**1.3. Következmény.** *Ha két digitális szakasz metszete tartalmazza  $p$ -t és  $q$ -t, akkor a metszet tartalmazza  $S(p, q)$  összes pontját.*

Egy egyszerű példa a CDS-re, az a rendszer, ahol minden  $p$  és  $q$  közötti digitális szakasz az általuk kifeszített rácsvonalakkal párhuzamos oldalú téglalap két szomszédos oldalának rácspontjaiból áll. Például  $p = (p_x, p_y)$  és  $q = (q_x, q_y)$  esetén, ha  $p_y \leq q_y$ , akkor  $S(p, q) = S(q, p) = \{(x, p_y) : \min\{p_x, q_x\} \leq x \leq \max\{p_x, q_x\}\} \cup \{(q_x, y) : \min\{p_y, q_y\} \leq y \leq \max\{p_y, q_y\}\}$ . Ha  $p_y > q_y$  a két pont felcserélésével az előző módon definiáljuk  $S(p, q)$ -t. Könnyen belátható, hogy az így nyert digitális szakaszok

rendszere egy CDS-t alkot, de szemmel láthatóan nem hasonlítanak az euklideszi szakaszokra.

Adódik, hogy a digitális szakasz közelségét az euklideszi párjához a két halmaz egy távolságával mérjük. Ehhez tekintsük a kettejük *Hausdorff-távolságát*. Minden  $x, y \in \mathbb{R}^2$  és  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  esetén a szokásos euklideszi távolság két pont között  $d(x, y) = |x - y|$  és pont és halmaz között  $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$ . Ekkor  $A$  és  $B$  halmazokra jelölje a Hausdorff-távolságukat  $H(A, B)$ , így

$$H(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A) \right\}$$

Megmutatjuk, hogy létezik olyan CDS, amelyre egy euklideszi szakasz és annak digitalizált változatának Hausdorff-távolsága elfogadhatóan kicsi, azaz egy olyan CDS, amelyre igaz az alábbi tulajdonság.

**(H) Kis Hausdorff-távolság:** Minden  $p, q \in \mathbb{Z}^2$ -re teljesül, hogy  $H(\overline{pq}, S(p, q)) = O(\log d(p, q))$

Ahol fentebb és a továbbiakban a  $\log$  a 2 alapú logaritmust jelöli,  $\overline{pq}$  pedig a  $p$  és  $q$  pontot összekötő euklideszi szakaszt.

Látható, hogy a fenti egyszerű CDS-re egy  $d$  hosszú szakasz és annak digitális párja közötti távolság akár  $d/2$ -t is elérheti. A kérdésre, hogy egy ügyesebb konstrukcióval milyen távolságot remélhetünk az alább két tétel ad választ, melyből az elsőt [3] alapján [5] következményeként bizonyítás nélkül kimondjuk, a másodikat pedig, a dolgozat fő témájaként a következő fejezetben részletesen vizsgáljuk és bizonyítjuk.

**1. Tétel** ([3]). *Létezik egy konstans  $c > 0$ , hogy minden CDS-re bármely  $\ell > 0$  esetén létezik  $p, q \in \mathbb{Z}^2$ , hogy  $d(p, q) > \ell$ , melyre  $H(\overline{pq}, S(p, q)) > c \log d(p, q)$ .*

**2. Tétel** ([2]). *Létezik olyan CDS, amire teljesül a (H) kis Hausdorff-távolság.*

Megjegyezzük, hogy az **1. Tétel** miatt egy ilyen CDS konstans szorzóig bezárólag optimális a Hausdorff-távolságra nézve. A következő fejezetekben részletezésre kerül egy eljárás, ami az egész számok szigorú teljes rendezései és a CDS-ek kapcsolatára épül. Ennek következményeként sikerül definiálni egy CDS-t, ami igazolja a **2. Tételt**.

## 2. fejezet

# Digitális szakaszok létrehozása a $\mathbb{Z}$ teljes rendezéséből

### 2.1. Általános konstrukció

Legyen  $\prec$  egy szigorú teljes rendezés  $\mathbb{Z}$ -n. Ennek alapján fogjuk definiálni az  $\mathcal{S}_\prec$  CDS-t.

Legyen  $p = (p_x, p_y), q = (q_x, q_y)$ . Mivel az **(S2)** tulajdonság alapján  $S(p, q) = S(q, p)$ , ezért  $q_x < p_x$  esetén felcserélhetjük  $p$ -t és  $q$ -t. Így a továbbiakban feltesszük, hogy  $p_x \leq q_x$ .

Ha  $p_y \leq q_y$ , akkor definiáljuk  $S(p, q)$  a következőképpen. A  $p$  pontból indulva a rácspontokon csak jobbra vagy felfelé lépkedünk, amíg el nem érjük  $q$ -t. Figyeljük meg, hogy a koordináták összege minden ilyen lépésben pontosan 1-el nő. Pontosan  $q_y + p_y$  lépést teszünk felfele, és  $q_x - p_x$  lépést jobbra. Definiáljuk a  $p$  és  $q$  pontok *szakasz intervallumát* a  $[p_x + p_y, q_x + q_y - 1]$  rendezéseként  $\prec$  szerint. Lépünk felfele, ha a koordináták összege az intervallum felső  $q_y - p_y$  eleme között van, ellenkező esetben lépünk jobbra.

Ha  $p_y > q_y$ , akkor definiáljuk  $\mathcal{S}_\prec(p, q)$ -t az  $\mathcal{S}_\prec((-q_x, q_y), (-p_x, p_y))$   $y$  tengelyre vett tükrözéseként.

**3. Tétel** ([2]). *Az így definiált  $\mathcal{S}_\prec$  egy CDS.*

*Bizonyítás.* Ha  $\mathcal{S}_\prec$  teljesíti az **(S1)**-**(S5)** tulajdonságokat, akkor CDS.

**(S1)** Mivel jobbra és felfele lépkedünk, ezért a tulajdonság a definícióból következik.

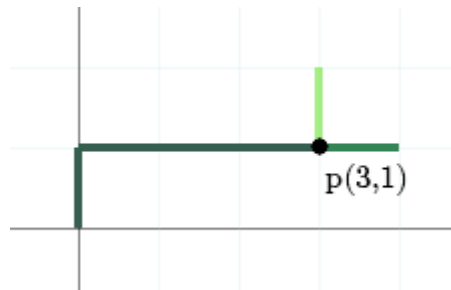


(S2) Ha  $p_x \neq q_x$ , akkor a konstrukcióból egyenesen következik a tulajdonság. Ha  $p_x = q_x$ , akkor a két pont egy függőleges vonalon van, azaz a konstrukció alapján  $S(p, q)$  és  $S(q, p)$  is a két pont közötti összes pontot tartalmazza, tehát megegyeznek.

(S3) Indirekt tegyük fel, hogy a  $p = (p_x, p_y)$ ,  $q = (q_x, q_y)$  és  $r = (r_x, r_y) \in S_{\prec}(p, q)$  pontokra  $S_{\prec}(p, r) \not\subseteq S_{\prec}(p, q)$ . Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy  $\overline{pq}$  meredekség nemnegatív. Vegyük az alábbi két esetet.

1. *Eset.* Ha  $p_x \leq q_x$  és  $p_y \leq q_y$ , akkor  $p_x \leq r_x$  és  $p_y \leq r_y$ . Ekkor a feltevésünk szerint  $S_{\prec}(p, r) \not\subseteq S_{\prec}(p, q)$ , ezért a két szakasz valamely  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  pont után elválnak, majd először egy  $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$  pontban ismét találkozik. Az egyik szakasz  $(a, b)$ -ben felfele megy, és  $(c, d)$ -be balról érkezik, így a konstrukció miatt  $c + d - 1 \prec a + b$ . A másik  $(a, b)$ -ből jobbra megy, és  $(c, d)$ -be alulról érkezik, így  $a + b \prec c + d - 1$  ellentmondás.

2. *Eset.* Ha  $q_x \leq p_x$  és  $p_y \leq q_y$ , akkor  $q_x \leq r_x$  és  $q_y \leq r_y$ . A feltevésünk miatt  $S_{\prec}(q, r)$  és  $S_{\prec}(q, p)$  valamely  $(a, b)$  pontban elválnak, és  $(c, d)$  pontban először találkozik. A fentivel megegyező érveléssel itt is ellentmondásra jutunk, így az (S3) teljesül.



2.1. ábra.  $p = (3, 1)$  esetén  $3 \prec 1 \prec 2 \prec 4 \prec 0$  rendezéssel a sugár szétválnak  $p$ -ben

(S4) Legyen  $p = (p_x, p_y)$ ,  $q = (q_x, q_y)$  és az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel, hogy  $p_x < q_x$  és  $p_y < q_y$ . Tekintsük az alábbi két esetet.

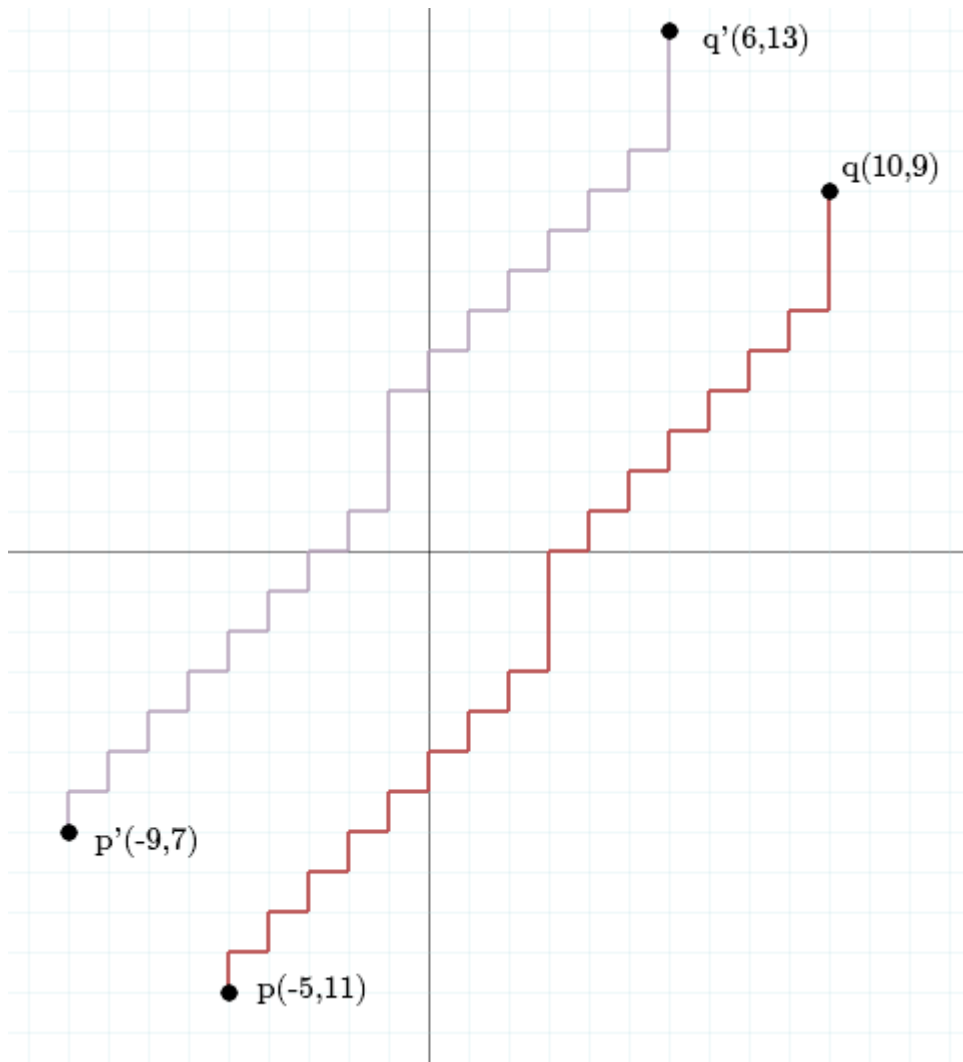
1. *Eset.* Ha a  $q_x + q_y$  benne van a  $\prec$  szerint rendezett  $[p_x + p_y, q_x + q_y]$  legnagyobb  $q_y - p_y + 1$  darab eleme között, akkor a konstrukciónk szerint a szakaszt meghosszabbíthatjuk felfele, így  $S_{\prec}((p_x, p_y), (q_x, q_y)) \in S_{\prec}((p_x, p_y), (q_x, q_y + 1))$ .

2. *Eset.* Ha a  $q_x + q_y$  nincs benne a  $\prec$  szerint rendezett  $[p_x + p_y, q_x + q_y]$  legnagyobb  $q_y - p_y$  darab eleme között, akkor meghosszabbíthatjuk a szakaszt jobbra, vagyis  $S_{\prec}((p_x, p_y), (q_x, q_y)) \in S_{\prec}((p_x, p_y), (q_x + 1, q_y))$ .

Megjegyezzük, hogy amennyiben a  $q_x + q_y$  pontosan a  $(q_y - p_y + 1)$ -ik legnagyobb elem, akkor mindkettő eset teljesül, ekkor a  $p$  pontból kiinduló sugarak szétválnak a  $q$  pontban (vagyis mindkét irányban meghosszabbítható a szakasz, lásd 2.1. ábra).

(S5) Az (S5) tulajdonság a konstrukcióból egyenesen következik.

□

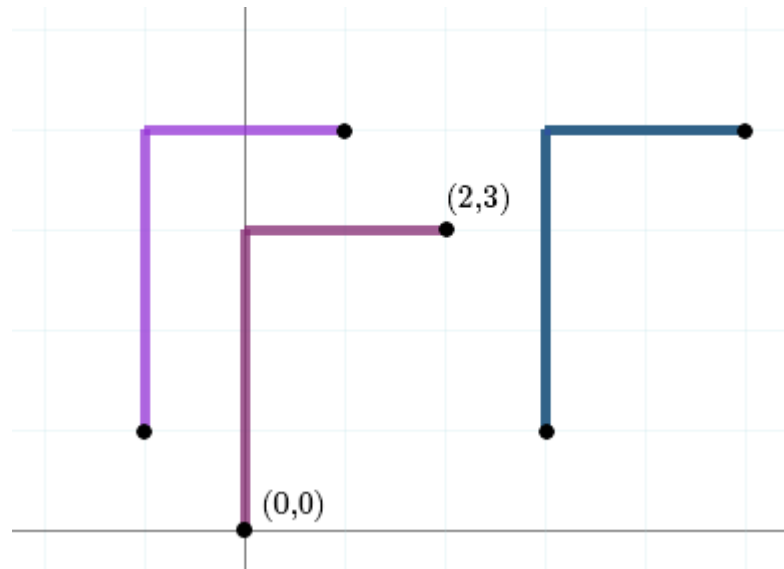


2.2. ábra. Eltolási invariancia a  $(t,-t)$  vektorra nézve

*Megfigyelés.* A konstrukció következményeként megfigyelhető, hogy azok a szakaszok, melyek euklideszi párjának meredeksége nemnegatív, invariánsak az  $x = -y$  egyenes menti eltolásra (lásd 2.2. ábra). Azaz tetszőleges  $t \in \mathbb{Z}$  esetén

$$S_{\prec}((p_x + t, p_y - t), (q_x + t, q_y - t)) = S_{\prec}((p_x, p_y), (q_x, q_y)) + (t, -t)$$

Bár előnyös lenne, ha szakaszaink bármelyik irányba eltolhatóak lennének, könnyen belátható, hogy ez a tulajdonság csak abban az egyszerű esetben teljesül, amikor a szakaszok a rácsvonalakkal párhuzamos,  $p$  és  $q$  által kifeszített téglalap oldalaiból állnak, vagyis amikor rendezésként az egész számok természetes sorrendjét vesszük, vagy annak inverzét (lásd 2.3.ábra).



2.3. ábra. Néhány digitális szakasz az egyik legegyszerűbb  $CDS$ -ben, amely az egész számok fordított sorrendjén alapul. Figyeljük meg, hogy invariáns az eltolásra.

## 2.2. Digitális szakaszok kis Hausdorff-távolsággal

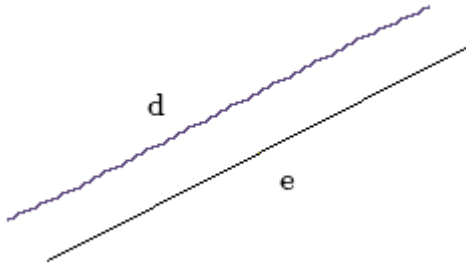
Legyen  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Ekkor jelölje  $|k|_\ell$  azt, hogy  $k$  hányszor osztható  $\ell$ -el, azaz

$$|k|_\ell = \max\{i : \ell^i | k\}$$

Definíció szerint legyen  $|0|_\ell = \infty$ , vagyis minden  $k \neq 0$ -ra  $|k|_\ell < |0|_\ell$  (észrevehetjük, hogy az így definiált  $|k|_\ell$  prím  $\ell$  esetén éppen a  $k$  szám  $p$ -adikus rendje [4]). Defináljuk a  $\prec$  szigorú teljes rendezést  $\mathbb{Z}$ -n.  $a \prec b$  pontosan akkor, ha létezik  $i \geq 0$ , amire  $|a - i| < |b - i|$  úgy, hogy minden  $j \in \{0, \dots, i - 1\}$ -re  $|a - j| = |b - j|$ . Vagyis két szám közül az a kisebb  $\prec$  szerint, amelyiket a 2 nagyobb hatványa osztja. Ha ez a szám ugyanakkora, akkor egyesével csökkentjük a számokat amíg valamelyikben a kettő nagyobb hatványa nem szerepel. Például

$$-1 \prec 7 \prec -5 \prec 3 \prec -3 \prec 5 \prec -7 \prec 1 \prec -2 \prec 6 \prec -6 \prec 2 \prec -4 \prec 4 \prec 0$$

A továbbiakban bizonyítjuk, hogy az előző rész alapján ennek a teljes rendezésnek a segítségével nyert  $\mathcal{S}_\prec$  rendszer egy CDS, ami kielégíti a **(H)** tulajdonságot.



2.4. ábra.  $d$ -vel jelölve a fenti konstrukcióval nyert konzisztens digitális szakasz,  $e$ -vel jelölve pedig a számítógép által szokásos módon rajzolt szakasz

Emlékeztetőül jegyezzük meg,  $v, w \in \mathbb{R}^2$  és  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  esetén  $d(v, w) = |v - w|$ , és  $d(v, A) = \inf_{a \in A} d(v, a)$  jelöli a szokásos euklideszi távolságot a síkon két pont, valamint pont és halmaz között.  $\overline{pqrs}$  jelölje a  $\overline{pq}$ ,  $\overline{qr}$  és  $\overline{rs}$  euklideszi szakaszok unióját.

*Megfigyelés.* Tetszőleges  $p, q \in \mathbb{Z}^2$  esetén

$$H(S_\prec(p, q), \overline{pq}) = \max\{d(r, \overline{pq}) : r \in S_\prec(p, q)\}$$

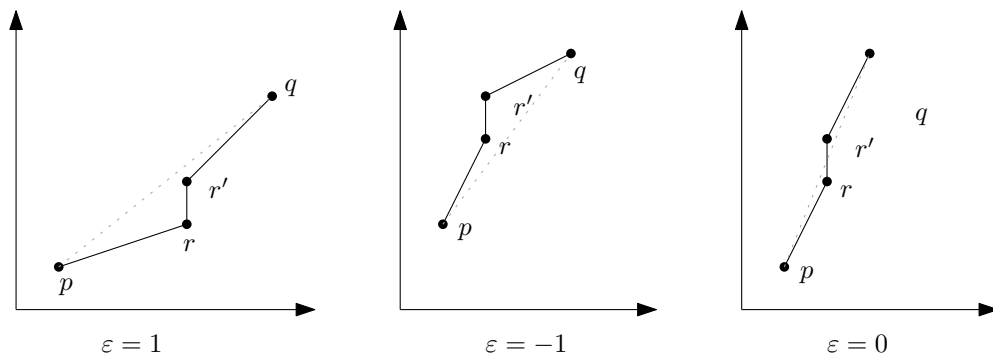
Először bebizonyítunk három állítást, amelyeket a **2. Tétel** bizonyítása során fogjuk használni.

**2.1. Lemma.** *Tetszőleges  $p, q \in \mathbb{Z}^2$  és  $r, s \in S_\prec(p, q)$  esetén igaz, hogy*

$$H(\overline{rs}, S_\prec(r, s)) \leq 2H(\overline{pq}, S_\prec(p, q))$$

*Bizonyítás.* Mivel minden  $v \in S_\prec(p, q)$ -ra  $d(v, \overline{pq}) \leq H(\overline{pq}, S_\prec(p, q)) := h$ , ezért  $d(r, \overline{pq}) \leq h$  és  $d(s, \overline{pq}) \leq h$ . Így  $H(\overline{pqrs}, pq) \leq \max\{d(s, \overline{pq}), d(r, \overline{pq})\} \leq h$ . Legyen  $t \in S_\prec(r, s)$  tetszőleges, valamint  $S_\prec(r, s) \subseteq S_\prec(p, q)$  a részzakasz tulajdonság miatt. Legyen  $v \in \overline{pq}$  az a pont, ahol a  $\overline{pq}$  szakasz távolsága  $t$ -től realizálódik, azaz  $d(t, v) = d(t, \overline{pq}) \leq h$ . A háromszög-egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy  $d(t, \overline{pqrs}) \leq d(t, v) + d(v, \overline{pqrs}) \leq 2h$ . Az 1.1 és 1.2 megjegyzések miatt  $d(t, \overline{rs}) = d(t, \overline{pqrs}) \leq 2h$ . Mivel  $t$ -t tetszőleges pontnak választhattuk, így  $H(S_\prec(r, s), \overline{rs}) \leq 2h$ .  $\square$

**2.2. Lemma.** *Legyen  $p, q, r, r' \in \mathbb{Z}^2$ , melyekre  $\varepsilon \in \{0, 1, -1\}$ ,  $r'_x = r_x$  és  $r'_y = r_y + 1$  esetén  $r_x - p_x = q_x - r'_x + \varepsilon$ ,  $r_y - p_y = q_y - r'_y - \varepsilon$ . Ekkor  $H(\overline{pq}, \overline{prr'q}) \leq c = \sqrt{5}/2$ .*



2.5. ábra. Példa a 2.2. Lemmában szereplő felállásra.

*Bizonyítás.* Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy  $p = (0, 0)$ ,  $q_x \geq 0$  és  $q_y \geq 0$ . Ekkor

$$H(\overline{pq}, \overline{pr r'q}) = \max d(r, \overline{pq}), d(r', \overline{pq})$$

Ekkor felhasználva, hogy  $r_x = \frac{q_x + \varepsilon}{2}$  és  $r_y = \frac{q_y - \varepsilon - 1}{2}$

$$\begin{aligned} d(r, \overline{pq}) &= \left| \frac{q_y r_x - q_x r_y}{\sqrt{q_x^2 + q_y^2}} \right| \\ &= \left| \frac{q_y \frac{q_x + \varepsilon}{2} - q_x \frac{q_y - \varepsilon - 1}{2}}{\sqrt{q_x^2 + q_y^2}} \right| \\ &= \left| \frac{q_y \varepsilon + q_x \varepsilon + q_x}{2\sqrt{q_x^2 + q_y^2}} \right| \end{aligned}$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$d(r', \overline{pq}) = \left| \frac{q_y \varepsilon + q_x \varepsilon - q_x}{2\sqrt{q_x^2 + q_y^2}} \right|$$

Legyen  $\psi := \frac{q_x}{q_y}$ , ekkor  $\varepsilon$  értékétől függetlenül

$$\begin{aligned} H(\overline{pq}, \overline{pr r'q}) &\leq \frac{q_y + 2\psi}{2\sqrt{\psi^2 q_y^2 + q_y^2}} \\ &= \frac{\psi + \frac{1}{2}}{\sqrt{\psi^2 + 1}} \\ &\leq \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Mivel

$$\begin{aligned} f(\psi) &= \frac{\psi + \frac{1}{2}}{\sqrt{\psi^2 + 1}} \\ f'(\psi) &= \frac{1 - \frac{1}{2}\psi}{(\psi^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Vagyis  $f(\psi)$ -nek globális maximuma van a  $\psi = 2$ -ben. □

**2.3. Lemma.** Legyen  $I = \{x \in \mathbb{Z} \mid A \leq x < B\}$  olyan egész számokból álló intervallum, amire teljesülnek az alábbi feltételek:

- Számossága valamilyen  $k$ -ra  $B - A = 2^{k+1} - 1$
- Jelölje  $M = \frac{A+B-1}{2}$ -t. Ekkor teljesüljön, hogy  $|M|_2 \geq k$  és minden  $x \in I, x \neq M$  esetén  $|x|_2 < k$ .

Legyen az  $I$  elemeinek  $\prec$  szerinti növekvő rendezése  $x_1 \prec x_2 \prec x_3 \prec \dots \prec x_{2^{k+1}-1}$ . Ekkor az intervallum első és második feléből lévő elemek váltakozva követik egymást, vagyis ha  $x_i < M$ , akkor  $x_{i+1} \geq M$ .

*Példa.* Legyen  $I = \{x \in \mathbb{Z} \mid 5 \leq x < 12\}$ ,  $M = 8$ , ekkor

$$\mathbf{7} \prec 11 \prec \mathbf{5} \prec 9 \prec \mathbf{6} \prec 10 \prec \mathbf{8}$$

*Bizonyítás.* Indirekt tegyük fel, hogy van olyan  $1 \leq i < 2^{k+1} - 1$  index, amire  $x_i < M$  és  $x_{i+1} < M$ . Figyeljük meg, hogy  $|x|_2 < k$  esetén  $|x + 2^k|_2 = |x|_2$ .

Ha  $|A - 1|_2 < |M|_2$ , akkor  $x_i \prec x_{i+1}$ , hiszen  $j \in \{0, 1, \dots, x_i - A\}$  esetén  $|x_i - j|_2 = |x_i + 2^k - j|_2$ , és  $j = x_i - A + 1$  esetén  $|x_i - j|_2 = |A - 1|_2 < |M|_2 = |x_i + 2^k - j|$ . Ellenben  $x_i + 2^k \prec x_{i+1}$ , hiszen mivel  $x_i \prec x_{i+1}$ , ezért létezik  $j^* \in \{0, 1, \dots, x_i - A\}$ , hogy  $|x_i + 2^k - j^*|_2 = |x_i - j^*|_2 < |x_{i+1} - j^*|_2$ , úgy, hogy minden  $j < j^*$  esetén  $|x_i + 2^k - j|_2 = |x_i - j|_2 = |x_{i+1} - j|_2$ . Ekkor  $x_i \prec x_i + 2^k \prec x_{i+1}$  ellentmondás, hiszen az  $I$  egész számokból álló intervallum  $\prec$  szerinti rendezésében nincs  $x_i$  és  $x_{i+1}$  között elem.

Ha  $|A - 1|_2 > |M|_2$ , akkor hasonló gondolatmenet alapján az  $x_i \prec x_{i+1} + 2^k \prec x_{i+1}$  ellentmondásra jutunk.

Figyeljük meg, hogy egyenlőség nem állhat fenn, hiszen  $|A - 1|_2 = |M|_2$  esetén kettejük számtani közepére  $|\frac{A-1+M}{2}|_2 \geq |M|_2 \geq k$ , ami a feltevésünk szerint ( $x \in I \setminus \{M\}$  esetén  $|x|_2 < k$ ) nem lehetséges.

A fentiek szerint  $x_i < M$  esetén  $x_{i+1} \geq M$ . Mivel az  $I \setminus \{M\}$  elemeinek pontosan a fele kisebb, mint  $M$ , így a skatulya elvből adódóan minden  $x_i > M$  esetén az ezt követő elemre  $x_{i+1} \leq M$  is igaz.

□

A fentiek segítségével most bizonyítjuk a **2. Tételt**, vagyis megmutatjuk, hogy az  $S_{\prec}$  CDS teljesíti a **(H)** tulajdonságot.

*Bizonyítás.* Legyen  $p, q \in \mathbb{Z}^2$ . Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy  $p_x < p_y$  és  $p_y < q_y$ . Megmutatjuk, hogy  $c = \frac{\sqrt{5}}{2}$  esetén

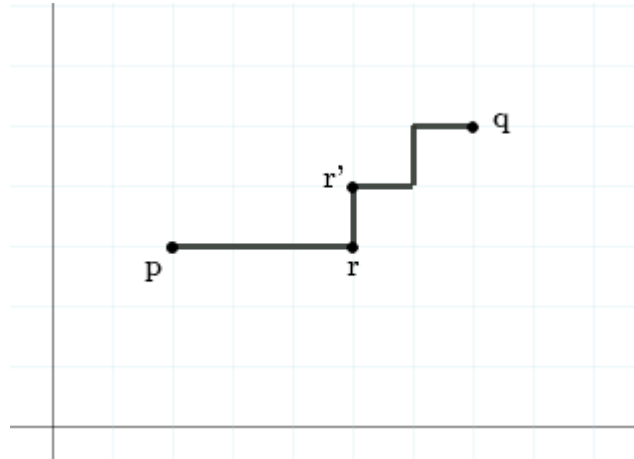
$$H(\overline{pq}, S(p, q)) \leq 2c \log(q_x + q_y - p_x - p_y) = O(\log d(p, q))$$

Legyen  $r \in S_{\prec}(p, q)$  az a pont, amire  $r_x + r_y \succ s$  minden  $s \in [p_x + p_y, q_x + q_y)$ ,  $s \neq r_x + r_y$  esetén. Jelölje  $s' \in [p_x + p_y, q_x + q_y)$  a szakasz intervallum második legnagyobb elemét  $\prec$  szerint. Ekkor definiáljuk a  $k := |s'|_2 + 1$  számot.

Hosszabbítsuk meg az  $S_{\prec}(p, q)$  szakaszt ameddig tudjuk, úgy, hogy  $k$  értéke ne változzon, azaz legyen  $|p_x + p_y - 1|_2 \geq k$  és  $|q_x + q_y|_2 \geq k$ . A 2.1.Lemma alapján tudjuk, hogy egy ilyen meghosszabbítással a Hausdorff-távolság legfeljebb felével csökkent. Az így kapott szakasz intervallum  $2^{k+1} - 1$  elemet tartalmaz, és a középső elem épp  $r_x + r_y$ . Az ilyen tulajdonságú szakaszokat nevezzük *normálnak*.

A bizonyítást  $k$  alapján indukció szerint végezzük. Megmutatjuk, hogy minden normált digitális szakaszra  $H(\overline{pq}, S_{\prec}(p, q)) \leq ck$ , ahol  $c = \frac{\sqrt{5}}{2}$ . Ez be is bizonyítaná az állítást, hiszen  $2^{k+1} = q_x + q_y - p_x - p_y + 1$ , így  $k + 1 = \log(q_x + q_y - p_x - p_y + 1)$ . Ekkor a 2.1.Lemma alapján a kezdeti digitális szakasz esetén a távolság legfeljebb  $2ck = 2c(\log(q_x + q_y - p_x - p_y + 1) - 1) \leq 2c(\log(q_x + q_y + p_x + p_y))$ . Itt felhasználtuk, hogy  $\mathbb{Z} \ni a > 1$  esetén  $\log(a + 1) - 1 \leq \log(a)$ .

Abban az esetben, amikor  $k=1$ , a szakasz intervallum 3 elemből áll, ekkor az összes lehetséges  $S_{\prec}(p, q)$ -ra ellenőrizhető, hogy  $H(\overline{pq}, S_{\prec}(p, q)) \leq \frac{2\sqrt{5}}{5} < \frac{\sqrt{5}}{2} = c$ .



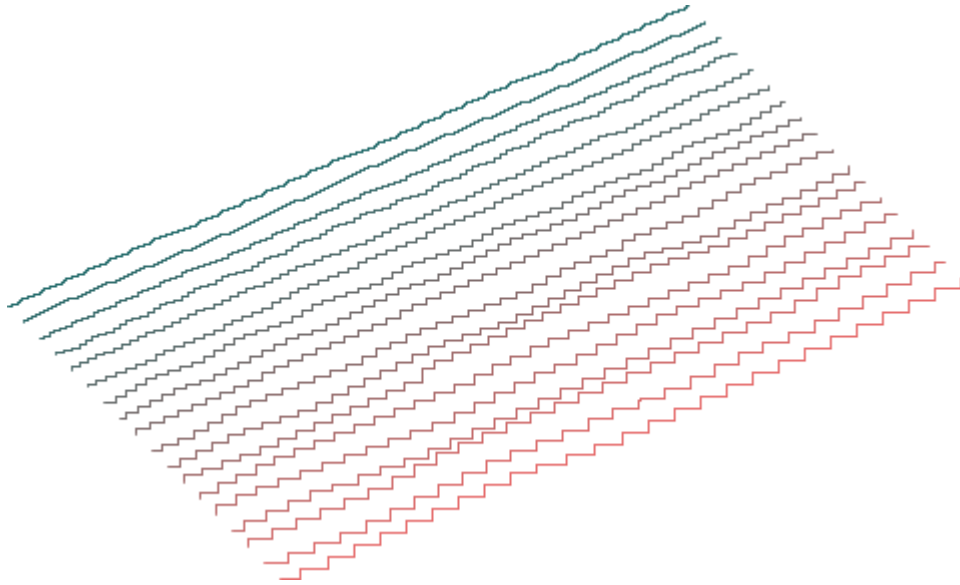
2.6. ábra.  $p = (2, 3), q = (7, 5)$  esetén a rendezett szakasz intervallum  $7 \prec 11 \prec 5 \prec 9 \prec 6 \prec 10 \prec 8$ . Látható, hogy  $r_x + r_y = 8$  a rendezésben a legnagyobb elem. A  $p, r, r', q$  pontok teljesítik a 2.2.Lemma feltételeit, ezért  $H(\overline{pq}, \overline{prr'q}) < c$

$k > 1$  esetén felbontjuk a szakaszt két normált részz szakaszra, majd használjuk az indukciós feltevésünket. Mivel  $r$  a legnagyobb elem a szakasz intervallumban, ezért

az  $S_{\prec}(p, q)$  szakasz  $r$ -ben biztosan felfele megy. Legyen ekkor  $r' = (r_x, r_y + 1)$ . Így  $S_{\prec}(p, q) = S_{\prec}(p, r) \cup S_{\prec}(r', q)$ . Vegyük észre, hogy a szakasz intervallum elemeit  $\prec$  szerint csökkenő sorrendben nézve az  $r$  utáni elemek felváltva szerepelnek a bal és jobb oldali részzszakasz intervallumokban. Azaz a 2.3. Lemma feltételei teljesülnek  $A = p_x + p_y$  és  $B = q_x + q_y$  választással. Így a  $q_y - p_y$  legnagyobb elemből az első az  $r_x + r_y$ , a továbbiakra pedig legfeljebb egy különbséggel az elemek fele a  $[p_x + p_y, r_x + r_y)$  intervallumból, másik fele pedig az  $[r'_x + r'_y, q_x + q_y)$  intervallumból származik. Vagyis teljesülnek a 2.2.Lemma feltételei a  $p, q, r, r'$  pontokra, így  $H(\overline{pq}, \overline{pr'r'q}) \leq c$ . Mivel  $S_{\prec}(p, r)$  és  $S_{\prec}(r', q)$  is normáltak, így az indukciós feltevés szerint  $H(\overline{pr}, S_{\prec}(p, r)) \leq c(k - 1)$  és  $H(\overline{r'q}, S_{\prec}(r', q)) \leq c(k - 1)$ . Ekkor  $H(\overline{pr'r'q}, S_{\prec}(p, q)) = \max\{H(\overline{pr}, S_{\prec}(p, r)), H(\overline{r'q}, S_{\prec}(r', q))\} \leq c(k - 1)$ . A háromszög egyenlőtlenség alapján tehát

$$H(\overline{pq}, S_{\prec}(p, q)) \leq H(\overline{pq}, \overline{pr'r'q}) + H(\overline{pr'r'q}, S_{\prec}(p, q)) \leq ck$$

□



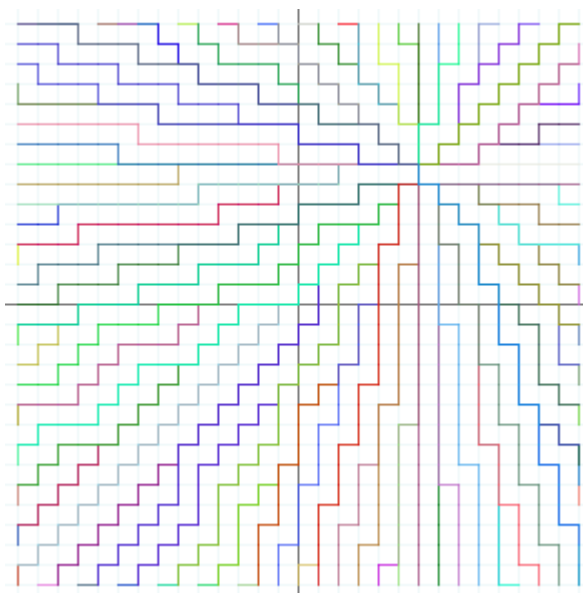
2.7. ábra. Párhuzamos digitális szakaszok két távoli pont között, különböző  $\ell = 2 \dots 20$  értékekre.



## 3. fejezet

# CDS-ek karakterizációja $\mathbb{Z}^2$ -ben

Az előző fejezetekben láthattuk, hogy szoros kapcsolat van különböző *CDS*-ek és a teljes rendezések között. Láthattuk, hogy minden egész számokon értelmezett teljes rendezéssel létre tudunk hozni egy *CDS*-t. Például az egész számokon megszo-  
kott természetes rendezéssel a pontok által kifeszített rács-téglalap oldalait követték a szakaszok, míg a 2.2 részben definiált rendezéssel kapott *CDS* (a Hausdorff távol-  
ságra nézve) az euklideszi szakaszokhoz volt közel, de a konstrukcióban tetszőleges  $\ell > 1$  egész számot választva is különböző *CDS*-ekhez jutunk.



3.1. ábra. Egy *CDR* a  $p = (6, 7)$  középponttal A hozzá tartozó teljes rendezés éppen a 2.2. részben tárgyalt.

Adódik tehát, hogy megvizsgáljuk ezt a kapcsolatot a másik oldalról, vagyis vegyünk tetszőleges *CDS*-eket, és keressünk közöttük összefüggést. Ehhez először

megvizsgáljuk az egy pontból kiinduló konzisztens digitális szakaszokat, ezeket nevezzük a pontból kiinduló sugaraknak, összességüket pedig *CDR*-nek. Az 1.1. Megjegyzésből adódik, hogy egy nemnegatív meredekségű szakasz mindig konzisztens lesz egy nempozitív meredekségűvel. Vagyis ha veszünk egy *CDR*-t a nempozitív meredekségű szakaszokra, egy másikat pedig a nemnegatívakra, a kettejük uniója automatikusan egy *CDR* lesz. Ezért a továbbiakban elegendő lesz az általánosság megszorítása nélkül a nemnegatív meredekségű szakaszokkal foglalkozni. Bizonyítás nélkül kimondjuk [2] alapján a következő tételt *CDR*-ekre, ami segítségünkre lesz a *CDR*-ek karakterizációjánál.

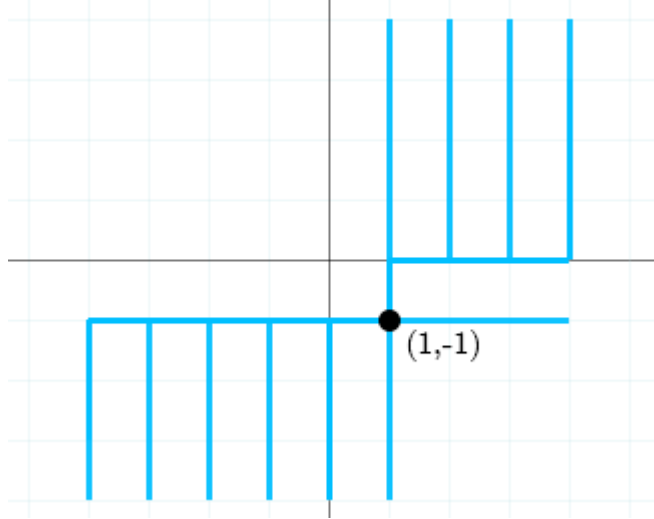
**3.1. Tétel ([2]).** *Minden  $CDR$  és bármely  $p = (p_x, p_y) \in \mathbb{Z}^2$  pont esetén létezik egy  $(-\infty, p_x + p_x - 1]$  és  $[p_x + p_y, \infty)$  intervallumon külön-külön értelmezett  $\prec_p$  teljes rendezés úgy, hogy a nemnegatív meredekségű sugarak a 2.1. konstrukció alapján a  $\prec_p$  rendezésből származnak.*

Megjegyezzük, hogy a tétel bizonyítása a következőképpen definiált  $\prec_p$  teljes rendezésen alapszik. Amennyiben az  $\mathcal{S}$  egy nemnegatív meredekségű  $p$  kezdőpontú szakasza jobbra megy az  $(x, D - x)$  ponton, és felfele megy az  $(x', E - x')$  ponton, akkor  $D \prec_p E$ . Erről a  $\prec_p$ -ről kell megmutatni, hogy aszimmetrikus, irreflexív, tranzitív és teljes.

Azaz a 2.1. részben tárgyalt konstrukció alapján tudjuk, hogy egy tetszőleges  $\mathbb{Z}$ -n értelmezett teljes rendezés segítségével létre tudjuk hozni a  $p$ -ből kiinduló konzisztens digitális szakaszokat mind a négy síknegyedben, valamint a fentiek alapján egy  $p$  pont valamelyik síknegyedében lévő sugarakhoz létezik egy teljes rendezés, ami ezeket generálja. Ezzel karakterizáltuk a *CDR*-eket.

Adódna tehát, hogy a *CDR*-eket egy, az összes pont által használt közös teljes rendezéssel karakterizáljuk, vannak azonban olyan esetek, amikor különböző pontokhoz különböző teljes rendezéseket rendelünk és mégis *CDR*-t kapunk. Vegyük például a [2]-ben szereplő *waterline példát*, amelyet a következőképpen definiálunk. Az  $x$ -tengely fölött először jobbra tartunk, aztán felfele. Az  $x$ -tengely alatt először felfele tartunk, utána jobbra. Amennyiben át kell haladnunk az  $x$ -tengelyen, először felfele megyünk hozzá, aztán végigkövetjük, majd ismét felfegyünk. Könnyen látható, hogy ez a konstrukció teljesíti az (S1)-(S5) axiómákat.

Látható az is, hogy nincs egyetlen olyan teljes rendezés, amivel megkapnánk ezeket a szakaszokat bármely kezdőpontra. Vegyük például a  $p = (1, -1)$  és a  $p' = (-1, 1)$  pontokat. Ekkor a  $\{0, 1\}$  halmaz rendezései különbözőek, azaz  $1 \prec_p 0$ ,



3.2. ábra. Az  $(1, -1)$  pontból származó sugarak a waterline példában.

viszont  $0 \prec_p 1$ . Így nem létezhet egyetlen teljes rendezés minden pontra. A probléma tehát a következő, keressük meg a szükséges és elégséges feltételeket, amiket a teljes rendezéseknek teljesítenie kell egy  $CDS$ -ben.

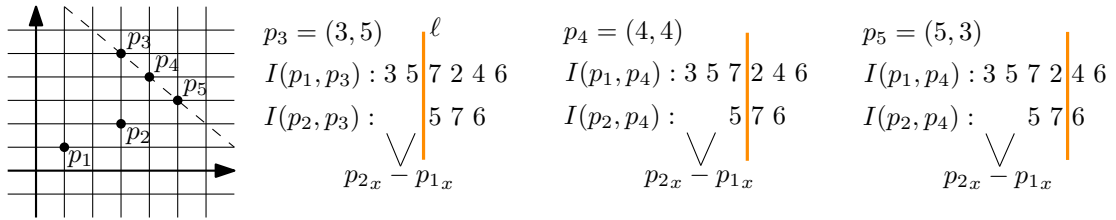
Jelölje a  $p$  pont jobb felső, bal felső, bal alsó és jobb alsó síknegyedét rendre  $Q_p^1, Q_p^2, Q_p^3, Q_p^4$ . A fentiek alapján a  $CDR$ -ek karakterizációjából tudjuk, hogy létezik  $Q_p^1$ -hez és  $Q_p^3$ -hoz tartozó teljes rendezés. Jelölje ezeket  $\prec_p^1$  és  $\prec_p^3$ .

Az előzőekhez hasonlóan az általánosság megszorítása nélkül elegendő a nemnegatív meredekségű  $S(p, q)$  szakaszokkal foglalkozni. A karakterizációhoz megadjuk a szükséges és elégséges feltételeket, amiket a  $\prec_p^1$  rendezésnek teljesítenie kell minden  $p \in \mathbb{Z}^2$  pontra. Ehhez először nézzük meg a kapcsolatot az első és a harmadik negyedbe tartozó sugarak között. Bár a feltételek csak az első negyedhez tartozó rendezésre vonatkoznak, a feltétel szükségességét az fogja megmutatni, hogy amennyiben nem teljesül, van olyan  $q \in Q_p^1$  pont, hogy  $\prec_q^3$  bármilyen választásával a generált szakaszok megsértenék az  $(S3)$  feltételt.

Tegyük fel, hogy van egy  $\prec_{p_1}^1$  teljes rendezésünk egy  $p_1 \in \mathbb{Z}^2$  pontra. Legyen  $p_2 \in Q_{p_1}^1$ . Ekkor a szimmetria  $(S2)$  tulajdonság alapján  $S(p_2, p_1) = S(p_1, p_2)$  egyenlőségnek teljesülnie kell. Most lássuk, hogyan kell definiálni a  $\prec_{p_2}^3$  rendezést ehhez. Azok az egész számok, amiken az  $S(p_2, p_1)$  vízszintesen halad szükségszerűen kisebbek  $\prec_{p_2}^3$  szerint azoknál, amiken függőlegesen, különben az egyenlőség nem teljesülne. Ezek alapján azt mondjuk, hogy azok a számok, amelyeken  $S(p_2, p_1)$  függőlegesen halad, *prioritást* élveznek azokkal szemben, amelyeken vízszintesen. Így ha tetszőleges  $a$  és  $b$  egész számokra  $a$  prioritást élvez  $b$ -vel szemben, akkor  $(b+1) \prec_{p_2}^3 (a+1)$ .

Most tegyük fel, hogy három pontunk van,  $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{Z}^2$ , úgy, hogy  $p_1, p_2 \in Q_{p_3}^3$ . Ekkor a fentiek alapján az  $S(p_1, p_3)$  és az  $S(p_2, p_3)$  segítségével is elkészíthetjük  $\prec_{p_3}^3$  prioritásait. Jelölje az  $I(p, q)$  a  $p$  és  $q$  pont szakasz intervallumát, azaz  $I(p, q) = [p_x + p_y, q_x + q_y)_{\prec_p}$ . Legyen  $a$  és  $b$  két egész szám az  $I(p_1, p_3) \cap I(p_2, p_3)$  intervallumból. Ha  $a$  prioritást élvez  $b$ -vel szemben a  $\prec_{p_1}^1$  szerint, és  $b$  prioritást élvez  $a$ -val szemben a  $\prec_{p_2}^1$  szerint, akkor hívjuk ezt *ellentétes prioritásnak*. Látható, hogy amennyiben van ilyen ellentétes prioritás, akkor bárhogyan is definiáljuk  $\prec_{p_3}^3$ -at, az ellentmond  $(S2)$ -nek. Ugyanis ha a  $\prec_{p_3}^3$  olyan, hogy  $(b+1) \prec_{p_3}^3 (a+1)$ , akkor ez azt jelentené, hogy  $S(p_3, p_2) \neq S(p_2, p_3)$ , ha pedig  $(a+1) \prec_{p_3}^3 (b+1)$ , akkor  $S(p_3, p_1) \neq S(p_3, p_1)$ , azaz mindenképpen sérül az  $(S2)$  tulajdonság. Azaz úgy kell definiálni a  $\prec_{p_1}^1$  és a  $\prec_{p_2}^1$  rendezéseket, hogy bármilyen  $p_3 \in Q_{p_1}^1 \cap Q_{p_2}^1$  esetén ne legyenek ellentétes prioritások.

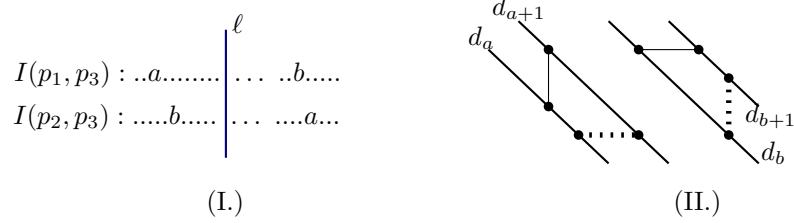
Az ellentétes prioritások szemléltetéséhez készítsünk egy ábrát az intervallumokról a következőképpen. Az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel, hogy  $p_{1x} \leq p_{2x}$ . Vegyünk egy  $p_3 \in Q_{p_1}^1 \cap Q_{p_2}^1$  pontot és az erre adódó  $I(p_1, p_3)$  és  $I(p_2, p_3)$  intervallumot. Írjuk egymás alá ezt a két intervallumot úgy, hogy az  $I(p_2, p_3)$  intervallumot eltoljuk  $(p_{2x} - p_{1x})$ -el. Figyeljük meg, hogy  $I(p_1, p_3)$  és  $I(p_2, p_3)$  elemei egész számok rendre  $\prec_{p_1}$  és  $\prec_{p_2}$  szerint rendezve. Az ilyen módon történő ábrázolásnak nagy előnye, hogy egyetlen vonallal két részre oszthatjuk mindkét intervallumot úgy, hogy a vonaltól balra lévő elemek a vízszintes, a vonaltól jobbra lévő elemek a függőleges mozgást jelölik. Nevezzük ezt a vonalat *osztó vonalnak*.



3.3. ábra. Ellentétes prioritások szemléltetése a  $p_1 = (1, 1), p_2 = (3, 2), p_3 = (3, 5), p_4 = (4, 4), p_5 = (5, 3)$  pontokra. Figyeljük meg, hogy  $p_3, p_4, p_5$  helyzete hogyan befolyásolja az osztó vonal pozícióját.

Legyen ekkor  $a$  és  $b$  két egész szám az  $I(p_1, p_3) \cap I(p_2, p_3)$  intervallumban, és ábrázoljuk ezeket a fenti módon. Ekkor ha létezik olyan  $\ell$  osztó vonal, ami úgy bontja két részre az intervallumokat, hogy  $I(p_1, p_3)$  esetén  $a$  az  $\ell$  bal oldalán,  $b$  a jobb oldalán van,  $I(p_2, p_3)$  esetén pedig  $b$  az  $\ell$  bal oldalán,  $a$  pedig a jobb oldalán van. Ekkor az  $\{a, b\}$ -t nevezzük *hibás párnak*, az  $\ell$ -re pedig azt mondjuk, hogy *kettéosztja* a hibás párt. Ezek alapján azt mondjuk, hogy a  $\prec_{p_1}^1$  és  $\prec_{p_2}^1$  rendezésekben rossz pár

van, ha található olyan  $C$  egész szám, amire  $C \geq (p_{1x} + p_{1y})$  és  $C \geq (p_{2x} + p_{2y})$  úgy, hogy a  $[p_{1x} + p_{1y}, C]_{\prec_{p_1}^1}$  és a  $[p_{2x} + p_{2y}, C]_{\prec_{p_2}^1}$  intervallumokat a fenti módon ábrázolva található egy hibás pár.



3.4. ábra. (I.) Egy  $\{a, b\}$  hibás pár, és az ezt kettéosztó  $\ell$  vonal. (II.) Ellentétes prioritások szemléltetése (ahol  $d_k$  az  $x + y = k$  egyenest jelöli)

Ezek alapján kimondhatjuk a következő lemmát.

**3.2. Lemma.** *Ha a  $\prec_{p_1}^1$  és a  $\prec_{p_2}^1$  rendelkezik hibás párral, akkor létezik egy  $p_3 \in Q_{p_1}^1 \cap Q_{p_2}^1$ , amire a  $I(p_1, p_3)$  és a  $I(p_2, p_3)$  szakasz intervallumokban található hibás pár, és a  $p_3$ -hoz tartozó osztó vonal kettéosztja ezt a hibás párt.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy  $\prec_{p_1}^1$  és a  $\prec_{p_2}^1$  rendelkezik hibás párral. Legyen  $C$  olyan egész szám, amire  $C \geq (p_{1x} + p_{1y})$  és  $C \geq (p_{2x} + p_{2y})$ , valamint a  $[p_{1x} + p_{1y}, C]_{\prec_{p_1}^1}$  és a  $[p_{2x} + p_{2y}, C]_{\prec_{p_2}^1}$  szakasz intervallumokban van hibás pár a fenti ábrázolás szerint. Jelölje ezt a hibás párt  $\{a, b\}$ , és jelölje a hibás párt osztó vonalat  $\ell$ . Legyen  $p_3$  olyan pont, amire  $p_{3x} + p_{3y} = C$ . Megmutatjuk, hogy ekkor  $p_3 \in Q_{p_1}^1 \cap Q_{p_2}^1$ .

Az  $\{a, b\}$  hibás pár esetén az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy  $a$  az  $\ell$  bal oldalán,  $b$  pedig a jobb oldalán szerepel az  $I(p_1, p_3)$  intervallumban. Ez azt jelenti, hogy van legalább egy vízszintes, és legalább egy függőleges lépés  $p_1$ -től  $p_3$ -ba, vagyis az 1.1. Következmény alapján  $p_{3x} > p_{1x}$  és  $p_{3y} > p_{1y}$ , vagyis  $p_3 \in Q_{p_1}^1$ . Hasonlóan az  $\ell$  osztó vonal jobb oldalán szerepel  $a$ , bal oldalán a  $b$  az  $I(p_2, p_3)$  intervallumban, ezért  $p_{3x} > p_{2x}$  és  $p_{3y} > p_{2y}$ , azaz  $p_3 \in Q_{p_1}^1 \cap Q_{p_2}^1$ .  $\square$

A karakterizáció következő lépése az alábbi lemma, ami alapján szükséges feltétel, hogy az első síknegyedekbe tartozó teljes rendezésekben ne legyenek hibás párok.

**3.3. Lemma.** *Pontosan akkor létezik  $p_3 \in Q_{p_1}^1 \cap Q_{p_2}^1$  pont ellentétes prioritásokkal a  $\prec_{p_1}^1$  és  $\prec_{p_2}^1$  rendezésekre nézve, ha a  $\prec_{p_1}^1, \prec_{p_2}^1$  rendezésekben van hibás pár.*

*Bizonyítás.* A visszafele irány belátásához tegyük fel, hogy a  $\prec_{p_1}^1$  és  $\prec_{p_2}^1$  rendezésekben van hibás pár. Ekkor megmutatjuk, hogy van  $p_3 \in Q_{p_1}^1 \cap Q_{p_2}^1$  pont ellentétes

prioritásokkal. Legyen  $p_3$  a 3.2. Lemma alapján létező pont és legyen  $\{a, b\}$  az a hibás pár, amit a  $p_3$  osztó vonala kettébont. Az általánosság megszorítása nélkül mondhatjuk, hogy  $\prec_{p_3}^3$  szerint  $(a+1)$  prioritást élvez  $(b+1)$ -el szemben az  $S(p_1, p_3)$ -ra nézve,  $(b+1)$  pedig prioritást élvez  $(a+1)$ -el szemben  $S(p_2, p_3)$ -ra nézve. Azaz van két ellentétes prioritás. Az odafele irány igazolásához tegyük fel, hogy létezik  $p_3$  pont ellentétes prioritásokkal  $\prec_{p_1}^1$ -re és  $\prec_{p_2}^1$ -re nézve. Ekkor a lemma bizonyításhoz megmutatjuk, hogy  $I(p_1, p_3)$  és  $I(p_2, p_3)$ -ban található egy hibás pár. Legyen  $a$  és  $b$  a hibás pár két eleme, és legyen  $\ell$  ami a  $p_3$ -ra nézve osztja az  $I(p_1, p_3)$  és az  $I(p_2, p_3)$  intervallumokat a fenti ábrázolással. Mivel  $a$  és  $b$  ellentétes prioritás, ezért az egyik intervallumban  $a$  az  $\ell$  bal,  $b$  a jobb, míg a másikban  $a$  az  $\ell$  jobb,  $b$  pedig a bal oldalán szerepel, így egy hibás párt alkotnak. Mivel az  $I(p_1, p_3)$  és  $I(p_2, p_3)$  intervallumokban van egy hibás pár, így a  $\prec_{p_1}^1$  és  $\prec_{p_2}^1$  rendezésekben is van hibás pár.  $\square$

A fenti Lemma alapján látjuk, hogy bármely két pontra szükséges feltétel, hogy a hozzájuk tartozó első síknegyedek rendezéseiben ne legyen hibás pár. A következő lépésben belátjuk, hogy ez elégséges is lesz a  $CDS$  tulajdonságok teljesüléséhez.

**3.4. Lemma.** *Ha a pontokhoz tartozó teljes rendezések között nincs két olyan, amikre található hibás pár, akkor a szakaszok teljesítik az (S1) – (S5) tulajdonságokat.*

*Bizonyítás.* A 2.1. részben szereplő konstrukció miatt az (S1), (S2), (S4), (S5) tulajdonságok automatikusan teljesülnek, ezért most egyedül az (S3) tulajdonságot bizonyítjuk. Először megmutatjuk, hogy egy nemnegatív meredekségű szakasz és egy nempozitív meredekségű mindig teljesíti az (S3)-at. Ellentmondásként tegyük fel, hogy létezik  $S(p, q)$  nemnegatív, és  $S(p', q')$  nempozitív meredekségű szakasz, amik találkoznak egy  $t$ -pontban, szétválnak, majd újra találkoznak egy  $r$  pontban, nevezzük ekkor a  $(t, r)$  pontpár *tanúsítja* az (S3) feltétel sérülését. Ez az ellentétes meredekségek miatt nyilván nem teljesülhet, hiszen a nemnegatív meredekség miatt  $t_y \leq r_y$ , a nempozitív meredekség miatt  $r_y \leq t_y$ , azaz  $r_y = t_y$ , ez pedig ellentmond annak, hogy a két szakasz szétvált.

Az általánosság megszüktése nélkül tehát feltehetjük, hogy  $S(p, q)$  és  $S(p', q')$  nemnegatív meredekségű. Ekkor az előzőekhez hasonlóan indirekt feltesszük, hogy létezik  $(t, r)$  pontpár, ami tanúsítja, hogy az (S3) nem teljesül. Vegyük ekkor az  $S(p, r)$ ,  $S(p', r)$  részszakaszokat. Az ezekre adódó  $I(p, r)$  és  $I(p', r)$  szakasz intervallumokat a fenti módon ábrázolva láthatjuk, hogy az  $r$ -hez tartozó osztó vonal éppen a  $\{t_x + t_y, r_x + r_y - 1\}$  hibás párt bontaná két részre. Ellenben a feltételünk szerint bárhogy is választjuk a rendezéseket, nem találhatunk hibás párt, tehát nem

létezhethet ilyen tanúsító pontpár, azaz teljesül (S3). □

A 3.3. és a 3.4. Lemmák alapján adódik a következő tétel, ami szükséges és elégséges feltételt ad a *CDS* tulajdonságok teljesülésére.

**3.5. Tétel** ([1]). *Egy  $\mathbb{Z}^2$ -beli nemnegatív meredekségű digitális szakaszok rendszerre pontosan akkor alkot *CDS*-t, ha minden pont első síknegyedéhez van úgy teljes rendezés, hogy bárhogyan is választunk ki ezek közül kettőt, nincs bennük hibás pár, valamint a harmadik síknegyedbe tartozó szakaszok a nekik megfelelő első síknegyedbeli szakaszokból származnak.*

## 4. fejezet

# Szoftveres megvalósítás és vizualizáció

Dolgozatom része a 2. fejezetben vizsgált algoritmus implementálása és egy vizualizációs felület létrehozása. A szoftvernek lehetőséget kell biztosítania megadott paraméterek mellett a digitális szakaszok lerajzolására és az ezekhez tartozó teljes rendezések kiszámolására. A megvalósítás során különös figyelmet kap a 2.2. részben vizsgált algoritmus. Az implementáció *C#* programozási nyelven, *Windows Forms* technológia segítségével történik.

A fejezetben bemutatásra kerül a felület, a szoftver funkciói és a technikai megvalósítás.

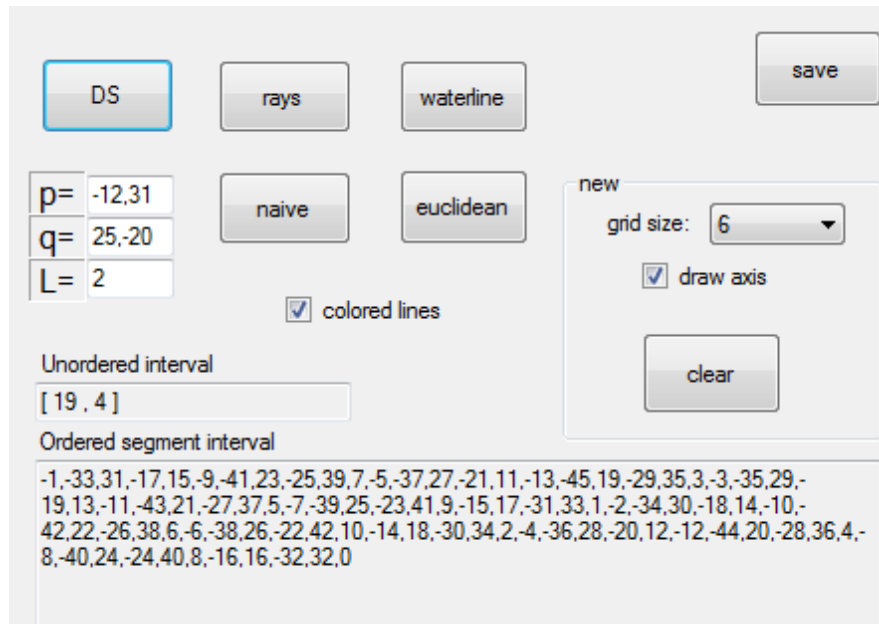
### 4.1. Szoftver funkcionalitás

A szoftver felülete két fő részből áll: jobb oldalon a kezelő, bal oldalon megjelenítő rész. A kezelőfelületen elérhetőek a különböző feladatokhoz tartozó gombok, szövegdozok és egyéb beállítások. Az alábbiakban röviden részletezésre kerülnek a kezelőfelület funkciói.

### Végpontok megadása

A szakaszok végpontjait a  $p =$  és a  $q =$  utáni szövegdozokban lehet megadni, koordinátáinként vesszővel elválasztva. A pontok sorrendje minden esetben tetszőleges lehet.





4.1. ábra. A szoftver kezelőfelülete

## Új rajz

A jelenlegi rajz törlését és új rajz létrehozását a *new* csoportban lévő *clear* gomb megnyomásával lehet elérni. A *draw axis* jelölőnégyzettel beállíthatjuk, hogy a rajzon szerepeljen-e az *x*- és *y*-tengely, illetve a *grid size* lenyíló menüben beállíthatjuk, hogy az egységnégyzet oldala hány pixel széles legyen. Alapértelmezett beállításként a program 10-et használ, az elérhető felbontások a 300 osztói.

## Rajz mentése

A jelenlegi rajz mentését a jobb felső sarokban található *save* gomb megnyomásával kezdeményezhetjük.

## Egyszerű digitális vonalrajzolás

A naiv vonalrajzoló algoritmus szemléltetését a kezdőpontok megadása után a *naive* gomb megnyomásával lehet indítani.

## Euklideszi szakasz rajzolás

Euklideszi szakasz rajzolása a két megadott pont között felbontástól függetlenül a *euclidean* gombbal érhető el. Megjegyzendő, hogy 1-es egységnégyzet hossz mellett az egyszerű digitális vonalrajzolás és az „euklideszi” szakasz elvárásainknak megfelelően egybeesik.

## Digitális szakasz rajzolása kis Hausdorff távolsággal

A 2.2. részben tárgyalt algoritmusnak megfelelő szakaszok kirajzolása a megadott  $p$  és  $q$  pontok között a *DS* gomb megnyomásával érhető el. Az algoritmusban szereplő  $\ell$  számot az  $L=$  utáni szövegdobozban tudjuk módosítani, ennek megengedett értékei az 1-nél nagyobb abszolút értékű egész számok. Az algoritmus során használt rendezetlen intervallum az *Unordered interval* címkéjű szövegdobozban, a teljes rendezéssel ellátott halmazt pedig az *Ordered segment interval* címkéjű szövegdobozban látható.

## Adott pontból induló digitális sugarak

A 2.2 konstrukciónak megfelelő sugarak létrehozását a  $p$  középpontból a *rays* gombbal lehet kirajzolni. A funkció megrajzolja a középponttól a legtávolabbi rácspontokba menő digitális szakaszokat, a konstrukcióhoz paraméterként felhasználja az  $L$  beállított értékét.

## Waterline példa

A Waterline példa rajzolását  $p$  középponttal a *waterline* gombbal lehet meghívni. A sugarak a középponttól legtávolabbi rácspontokba mennek.

## Megjelenítés

A megjelenítés a bal oldalon található  $600 * 600$  pixel széles bitmapen történik, háttérben a rácsvonalakkal, melyek sűrűsége a *grid size* paraméterrel állítható. 5 érték alatt a rácsvonalak rejtettek. Színes illetve fekete-fehér színválasztást a *colored lines* jelölőnégyzettel állíthatjuk. A vonalak egyszerűbb megkülönböztetése érdekében a program színes módban véletlenszerű színeket használ.

## 4.2. Technikai megvalósítás

### Digitális szakasz rajzolása kis Hausdorff távolsággal

A szoftver legfőbb funkciója a kis Hausdorff távolságú konzisztens digitális szakaszok rajzolása. Az algoritmus első része az adott pontok által meghatározott egész számok teljes rendezése. Ennek kiszámítása két részben valósul meg, ezért a *CDL* osztály felel. Először feltöltünk egy listát a megfelelő egész számokkal, majd erre meghívjuk a lista beépített *Sort* függvényét paraméterként az alábbi kódrészletben látható *Order(a, b)* függvénnyel .

```
public static int l = 2;
static int Order(int a, int b){
    if (a == b)
        //hiba
        return 0;
    int limit = Math.Abs(a-b);
    int it = 0;
    while (it < limit){
        int a1 = DivNum(a - it);
        int b1 = DivNum(b - it);
        if (a1 < b1)
            //kisebb
            return -1;
        if (a1 > b1)
            //nagyobb
            return 1;
        it++;
    }
    //hiba
    return 0;
}
```

Az *Order* függvény felhasználja a *DivNum* függvényt, mely az algoritmus leírásában szereplő  $|k|_\ell$  kiszámítására szolgál.

```
static int DivNum(int k){
    if (k == 0)
```

```

        return int.MaxValue;
    if (k % l == 0)
        return DivNum(k / l) + 1;
    return 0;
}

```

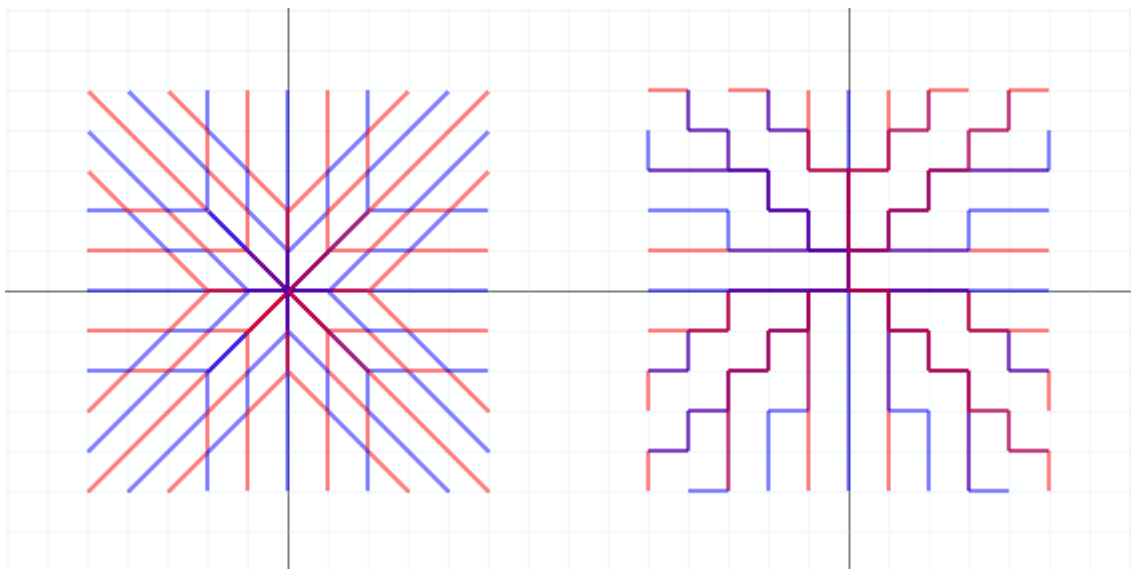
A vonalak kirajzolásáért a *drawFromTO* függvény felel. Paraméterei az előzőleg kiszámolt rendezett lista, a pontok koordinátái egész számként, valamint az algoritmusban a negatív meredekségű szakaszokhoz tartozó tükrözést jelző logikai változó.

```

public void drawFromTO(List<int> totalOrder, int px, int
    py, int qx, int qy, bool mirrored = false)

```

Segédfüggvénye a *drawSegment*, ami a vizualizáció végső lépéseként a panelen található *bitmapre* rajzol koordináták alapján.



4.2. ábra. Naiv, illetve konzisztens digitális sugarak vizualizációja az origóból. A bal oldali ábrán jól látható az (S3) tulajdonság sérülése.

### 4.3. További fejlesztési lehetőségek

A program megvalósításában jelentős további optimalizálások lehetségesek. Például a *CDR* rajzoló funkcióban, itt jelenleg a program számos esetben számolja újra ugyanazt a részfeladatot. A legnagyobb erőforrást igénylő feladat a teljes rendezés kiszámítása. Figyeljük meg, hogy  $\ell = 2$  esetén a  $|k|_\ell$  valójában a  $k$  szám kettes

számrendszerbeli alakjában a szám végén álló nullák darabszámát mutatja. Így például kettes számrendszerbeli pozitív egészek esetén nagyon gyorsan rendezhetőek az elemek a legkisebb jelentőségű eltérés alapján.

# Irodalomjegyzék

- [1] Iffat Chowdhury and Matt Gibson. Consistent digital line segments: A two-dimensional characterization and observations in higher dimensions.
- [2] Tobias Christ, Dömötör Pálvölgyi, and Milos Stojakovic. Consistent digital line segments. *Discrete & Computational Geometry*, 47(4):691–710, 2012.
- [3] Jinheea Chun, Matias Korman, Martin Nöllenburg, and Takeshi Tokuyama. Consistent digital rays. *Discrete & Computational Geometry*, (3):359–378, 2009.
- [4] K. Hensel. Über eine neue begründung der theorie der algebraischen zahlen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 128:1–32, 1905.
- [5] W. M. Schmidt. Irregularities of distribution. *Acta Arith.*, VII.(21):45–50, 1972.