Optimális kommunikációs magánhálózatok tervezése

BSc szakdolgozat

Mona András

Alkalmazott matematikus szak

Témavezető:

Frank András, egyetemi tanár

Operációkutatási Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2016

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Frank Andrásnak a téma felvetését, a segítséget a szakirodalom összegyűjtésében, a hasznos és segítő tanácsait, és hogy bármikor szívesen fogadott, hogy kérdéseimet megválaszolja és a további munkáról egyeztessünk.

Emellett szeretném megköszönni a családomnak és barátaimnak, hogy az egyetemen belül és az egyetemen kívül is mindig számíthatok rájuk, külön anyukámnak, hogy átnézte és kijavította a hibákat. Szintén szeretném megköszönni gimnáziumi osztályfőnökömnek, Simon Jánosnak, nélküle nem valószínű, hogy ugyanitt kötöttem volna ki. Továbbá nagyon köszönöm a Budakalász Butterflies amatőrcsapat minden tagjának hetente tapasztalt lelkes támogatását.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Ebben a dolgozatban a VPN (Virtual Private Network) tételkörben és az előtte a témában publikált anyagokat összegezzük. Először is leírjuk a korábbi eredményeket és probléma kialakulásának történetét. Itt adunk egy szükséges és elégséges feltételt a több forrás-nyelő párral rendelkező élkapacitásos folyamfeladatra. Ezt követően a dolgozat fő tételének bizonyításában előkerülő fogalmakat definiáljuk, mint például egy gráf Gomory-Hu fája, vagy a T-kötések, T-vágások fogalma. Az alapok tisztázása után formálisan definiáljuk, mit értünk egy VPN hálózaton. Több változatát is megnézzük, különböző számítási modelleket, például a legnagyobb irodalmú pipe és hose modelleket, valamint útvonal-választási módszereket vezetünk be, mint például a számunkra legfontosabb egyszerű és több-utas útválasztást. A dolgozat legfőbb része az 5. fejezet. Ebben mondunk ki és bizonyítunk egy tételt, mely a szakirodalomban VPN-tételként híresült el. A bizonyítás négy nagyobb egységből áll, ezek közül az utolsóra két jó bizonyítást is adunk. Ennek oka, hogy míg az első bizonyítás az eredeti, hosszabb, Goyal, Olver és Shepherd [8] által adott bizonyítás szoros összefüggésben áll az első három egységgel, a rövidebb, Sebő András által adott bizonyítás egészen más gondolatot használ, a Gomory-Hu fák speciális szerkezetét. A 6. fejezetben az előbb említett tétel egyféle általánosítását mutatjuk be. Sokáig az a sejtés élt, hogy ebben az esetben is igaz a tétel, azonban szintén ugyanebben a cikkben ([8]) a három szerző adott egy egyszerű ellenpéldát, ezzel cáfolva a sejtést. Ehhez az ellenpéldához mindenképpen fel kell írni az alapfeladatot lineáris programozási feladatként. A dolgozat végén pedig mutatunk az előzőtől jelentősen elütő a modellt változtató néhány általánosítást, valamint beszámolunk pár ezekhez kapcsolódó újabb eredményről.

2. Korábbi eredmények

Az operációkutatás és az optimalizálás a mai matematika egyik meghatározó részterülete, aminek az az oka, hogy a gyakorlatból vett feladatokra keres bizonyos értelemben vett legjobb megoldást. Nagy haszna van például az informatikában, akár a minél gyorsabb vagy minél kisebb erőforrás-igényű programokhoz, és hasonlóan hasznos például a gazdaságban, ahol a kitűzött cél árát szeretnénk minimalizálni, vagy a meglévő eszközökkel a maximális célt elérni. Szintén hasznos a közösségi közlekedésben, menetrendtervezésnél.

Sok esetben a gyakorlati feladatot leíró matematikai modell erősen támaszkodik a gráfelméletre, hiszen a gráfok könnyű szemléltetőeszközei lehetnek komplexebb hálózatoknak is. Az egyik legismertebb gráfelméletre alapuló optimalizálási problémaként a kínai postás problémát szokás említeni. Ennek háttere egy olyan útvonal megadása, amelynek megtétele a legkisebb fáradságot igényli egy postás részéről, mégis teljesíti kitűzött feladatát, és minden levelet kézbesít. Később a köztudatba beépült még néhány híres, általában bonyolult, leggyakrabban NP-beli feladat, mint például az utazóügynök feladat, vagy a hátizsák feladat. Ugyanakkor az első nagy lökést a tudományterület fejlődésének a háború adta. Később az informatika fejlődésével párhuzamosan fejlődött a részterület, hiszen a megoldandó feladatok rendszereinek komplexitása miatt az algoritmusokat mindenképpen implementálni kellett számítógépre (kézzel lehetetlen lett volna bármit kihozni). Továbbá a számítógépek, számítógépes rendszerek, vagy bármilyen egyéb hálózatok közti kommunikáció egy új, eddig alig feldolgozott problémakört is jelentett a matematikának, így keletkeztek a különböző útkeresési problémák.

Itt az első komolyabb lépést Karl Menger tette 1927-ben, a Menger-tétel néven elhíresült következő tételváltozatok igazolásával.

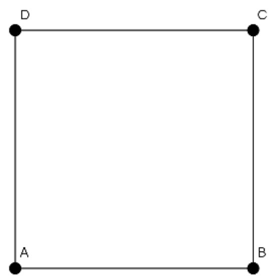
- *Az él-összefüggőségi változat irányított gráfokban:* Legyenek P és Q egy véges irányított gráf pontjai. Ekkor a P-ből Q-ba vezető éldiszjunkt irányított utak maximális száma megegyezik az összes P-ből Q-ba vezető irányított utat lefogó élek minimális számával.

- *A csúcs-összefüggőségi változat irányított gráfokban:* Legyenek P és Q egy véges irányított G gráf pontjai úgy, hogy P-ből Q-ba nem vezet él. Ekkor a P-ből Q-ba vezető pontdiszjunkt irányított utak maximális száma megegyezik az összes P-ből Q-ba vezető irányított utat lefogó pontok minimális számával.

- *Az él-összefüggőségi változat irányítatlan gráfokban:* Ha a véges G gráfban P és Q össze nem kötött csúcsok, akkor az éldiszjunkt $P-Q$ utak maximális száma megegyezik a P és Q közötti minimális vágással, azaz a minimális élszámmal, amelyek elhagyása után már nincs P-ből Q-ba út.

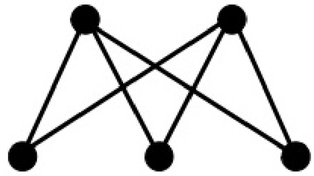
- *Az él-összefüggőségi változat irányítatlan gráfokban:* Ha egy véges G gráfban P és Q össze nem kötött csúcsok, akkor a csúcsdiszjunkt $P-Q$ utak maximális száma megegyezik a G-ben P-t és Q-t szeparáló csúcsok minimális számával.

Később Ford és Fulkerson ennek általánosításaként jó algoritmust adtak, a *maximális folyam-minimális vágás* tételre. A későbbiekben megjelentek bonyolultabb folyamfeladatok, több forrás-nyelő párral. Erre a feladatra egyszerű szükséges feltétel a vágásfeltétel, azaz hogy tetszőleges vágásra a vágás éleinek kapacitása legalább akkora, mint az elválasztott csúcsok közti igény. Ez azonban könnyen láthatóan nem elégséges. Egész megoldás nem létezésére egy egyszerű példa adható, ha az alábbi gráfban a nem összekötött csúcsok között van 1 nagyságú igény, és az élek kapacitása azonosan 1, akkor a vágásfeltétel teljesül, azonban nincs egész megoldás. Tört megoldás ekkor viszont még létezik, ha az $A-C$ és a $B-D$ csúcsok közti igényt is fele-fele arányban megosztva vezetjük a két lehetséges úton.



1. ábra. 4 csúcsú példa, egész megoldás nem létezésére

Ugyanakkor erre a többtermékes folyamfeladatra már 5 csúcsú gráfon is szemléltethető, hogy a vágásfeltétel törtmegoldás létezésére sem elégséges feltétel, hiszen a jól ismert $K_{2,3}$ gráfban, ahol minden él kapacitása 1, és az egy oldalon lévő 3 csúcs között páronként, valamint a másik két csúcs között is 1 az igény, akkor látszik, hogy a vágásfeltétel teljesül (bármelyik vágást nézzük, ott az élek összkapacitása legalább akkora, mint az elválasztott csúcsok közti igény), azonban nem lehet teljesíteni az igényeket.



2. ábra. $K_{2,3}$, 5 csúcsú ellenpélda

2.1. Japán tétel

Masao Iri 1971-ben publikált cikkében [12] adott egy egyszerű feltételt a megoldás létezésére, a Farkas lemma segítségével. Ezt a tételt szokás japán tételnek is nevezni, hiszen a szerzőjén kívül több japán matematikus (például K. Onaga) munkássága előzte meg a megoldást.

2.1. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élhalmazán adott a $g : E \to \Re_+$ kapacitás függvény, valamint k db forrás-nyelő pár. Akkor és csak akkor létezik az s_i pontból a t_i pontba α_i nagyságú folyam (s_i jelöli a többtermékes folyamfeladat i-edik forrását, t_i az i-edik nyelőt, és α_i az s_i és t_i csúcsok közti folyamigényt) úgy, hogy minden élre a rajta átmenő folyamértékek összege legfeljebb az él kapacitása, ha az éleken értelmezett tetszőleges c nemnegatív költségfüggvényre $\sum_{i=1}^{k} l_c(i)\alpha_i \leq \sum_{e\in E} c(e)g(e)$, ahol $l_c(e)$ jelöli a c szerinti legrövidebb $s_i - t_i$ út költségét G-ben.*

Bizonyítás. Lássuk először, hogy ez alapján mi is a feltétel emberibb nyelven. Adott irányítatlan gráf, benne adott csúcspárokkal, amik között adott nagyságú igényt kell kielégíteni, úgy, hogy a megadott kapacitásokat egyik élen sem sértjük meg. Ekkor tetszőlegesen c szerint súlyozva az éleket, ha az összes igényt a lehető legrövidebb úton vezetjük, ezek súlyösszege maximálisan annyi, mint a gráf súlyozott összkapacitása. Ez nyilvánvalóan szükséges feltétel, hiszen ha az igények összege nagyobb mint az összkapacitás (c szerint) akkor annyi igény nyilvánvalóan nem fér el. Meglepő módon ez elégséges feltétel is.

Írjunk fel egy LP feladatot. Minden csúcspárra, az összes őket összekötő úthoz rendeljünk hozzá egy x_i változót. Az így kapott összes változó számát jelöljük q-val. Legyen ekkor az LP feladatunkhoz tartozó M mátrixunknak q darab oszlopa és $m + k$ darab sora (itt m a gráf élszáma, k az adott igények száma). Jelöljük a felső $m \times q$-as részmátrixot A-val, míg a maradék részt $-I$-vel (azért is, mert itt egyfajta egységmátrixra gondolunk mint ezt mindjárt látjuk). Legyen $A_{ij} = 1$, ha az i-edik élhez tartozó él rajta van a j-edik változóhoz tartozó úton, különben 0. Legyen $-I_{ij} = -1$, ha a j-edik változóhoz tartozó út éppen s_i-t köti össze t_i-vel, ellenkező esetben 0. A korlátozó vektorunk ekkor már triviális, az A mátrix mellé kerüljön a g kapacitásvektor, míg $-I$ mellé $-\alpha$

legyen a korlátozó vektor. Jelöljük b-vel az ennek a kettőnek az összeragasztásával kapott vektort. Ekkor az LP feladatunk $Mx \leq b$ alakú. Írjuk fel a Farkas lemmát erre az esetre.

$$
\begin{aligned}
Ax &\leq g & \qquad cA - l_c I &\geq 0 \\
-Ix &\leq -\alpha & c &\geq 0 \\
x &\geq 0 & cg - l_c\alpha &< 0 \\
& & l_c &\geq 0
\end{aligned}
$$

Itt az élszámnyi hosszú c vektor és a k elemű l_c vektorok összeragasztva alkotják az y duális megoldást. Ha l_c a c szerinti legolcsóbb út, akkor a duál probléma első és utolsó feltétele semmitmondó, hiszen a cA szorzat éppen az összes felírt út költségét adja, ami komponensenként biztosan nem kisebb, mint a legolcsóbb utak költsége (legalább k komponens pontosan 0 lesz), valamint a második feltételből következik a negyedik. Így csak a harmadik sorral érdemes foglalkozni. Mivel a primál és a duál feladatok közül pontosan egynek van megoldása, így könnyen látható, hogy a primál feladatnak akkor és csak akkor van megoldása, ha a duálnak nincs, azaz nem teljesül a $cg - l_c\alpha < 0$ feltétel, ami pontosan azt jelenti, hogy $\sum_{i=1}^{k} l_c(i)\alpha_i \leq \sum_{e\in E} c(e)g(e)$. Így a tételt beláttuk. □

2.2. Megjegyzés. Fontos megjegyezni, hogy egy gráfban két csúcs között nagyon sok út lehet, így a mátrix oszlopszáma nagyon nagy. Ugyanakkor mégis létezik hatékony algoritmus, ami ezt a feladatot gyorsan meg tudja oldani, az úgynevezett oszlopgeneráló algoritmus.

3. Előkészületek: a Gomory-Hu fák és T-kötések

A dolgozat fő tételének bizonyításához szükség lesz néhány egyszerű fogalom bevezetésére, így ebben a fejezetben bevezetünk egy speciális fát, a Gomory-Hu fát, majd ennek megadására mutatunk egy algoritmust. Később szintén bevezetjük a $G = (V, E)$ gráfban $T \subseteq V$ csúcshalmazhoz tartozó T-kötéseket és T-vágásokat is.

3.1. Definíció. *Legyen $G = (V, E)$ egy irányítatlan gráf, c az éleken értelmezett költségfüggvény. Ekkor G Gomory-Hu fája egy olyan T fa c' költségfüggvénnyel, melynek csúcshalmaza szintén V (de élhalmaza nem részhalmaza E-nek), és a következőket tudja:*
Tetszőleges u és v csúcsok között a T-beli egyértelmű P_{uv} úton vegyük a c' szerinti minimális költségű élet. Legyen ez e. Ekkor $T \setminus e$ két komponensre esik, ezek csúcshalmazait jelöljük rendre X-szel és Y-nal. (Ekkor tehát $X \cap Y = \emptyset$ és $X \cup Y = V$.) T Gomory-Hu fája G-nek, ha az előző jelölésekkel, u és v közti minimális G-beli vágás pontosan az X és az Y csúcshalmazok által meghatározott vágás ($\{f | f = xy \in E; x \in X; y \in Y\}$), és ennek nagysága éppen $c'(e)$ (ahol e ahogy jeleztük a P_{uv} út c' szerinti minimális költségű éle).

Az előbb definiált Gomory-Hu fákat először R. E. Gomory és T. C. Hu vezették be egy 1961-es cikkükben [7]. Ebben adtak egyszerű algoritmust is, amivel tetszőleges gráfhoz kiszámítható a hozzá tartozó Gomory-Hu fa.

3.1. Az algoritmus

Vegyünk két tetszőleges x és y csúcsot. Legyen $\nu = (X, Y)$ az őket elválasztó optimális vágás. Legyen G_X az a gráf, amely csúcsai $X \cup z_X$, ahol z_X egy újonnan felvett *metacsúcs*, élei pedig azon élek, amelyek legalább egyik végpontja X-beli. (Azaz $E(G_X) = E(G|X) \cup E(\nu)$). Az élek illeszkedése természetes: ha csak egyik végpontjuk volt X-beli, akkor az megmarad, a másik végpont z_X lesz, ha mindkettő X-beli, akkor mindkét végpont megmarad. Éleink súlya a G-ből öröklődik. Hasonlóan definiálható G_Y . A ν vágás élei (azaz $\delta(X) = \delta(Y)$, ahol $\delta(S) = \{e = uv \in E; u \in S; v \notin S\}$) mindkét gráfhoz hozzátartoznak.

Az előző úgynevezett törési lépést iteráljuk. Azaz egy G gráfból G_X és G_Y gráfokat készítünk, amíg minden töredékgráfban csak egy darab eredeti csúcs lesz (ami G-nek is csúcsa volt már, nem csak metacsúcs). (Az eljárás során kapott gráfokat nevezzük töredék gráfoknak.) Minden szétvágásnál a két töredék az eredeti gráfhoz képest egy-egy új csúccsal rendelkezik. A törésnél keletkezett z_X és z_Y csúcsokat metacsúcsoknak nevezzük, és őket egy metaéllel összekötjük.

Algoritmus:

Törési lépés: Válasszunk tetszőleges két u, v csúcsot V-ből. Határozzuk meg az őket szeparáló c szerinti minimális vágás két csúcshalmazát: X-et és Y-t. Törjük szét a gráfot G_X és G_Y töredékgráfokra. Ezzel két metacsúcsot vezettünk be, egyet G_X-ben, egyet G_Y-ban. A két metacsúcsot egy metaéllel kössük össze. Ennek a metaélnek a költsége legyen $c(\nu)$ Amíg van olyan töredék gráf, amelynek legalább két eredeti csúcsa van végezzük el rá a törési lépést. A ciklus végén minden töredék gráfban pontosan egy eredeti csúcs lesz. Ehhez pontosan $|V| - 1$-szer alkalmaztuk a törési lépést, így pontosan $|V| - 1$ metaélet vezettünk be. Gomory-Hu-élek generálása: Minden metaél két végpontjára (két metacsúcs) vegyük azt a két töredéket, amibe beleesnek. Vegyük a két töredék egy-egy egyértelmű eredeti csúcsát és kössük össze egy éllel, aminek a költsége éppen a köztes metaél költsége legyen. A kapott $|V| - 1$ él lesz az output. (Egy metaél két végpontja szükségszerűen két különböző töredék gráfban lesz, így ezt meg tudjuk tenni.)

Természetesen az említett cikkben azt is bebizonyították, hogy ez az algoritmus helyes, az így megadott fa valóban teljesíti a Gomory-Hu fától elvárt feltételeket, továbbá az algoritmusból magából is könnyen látható, hogy minden gráfnak létezik Gomory-Hu fája, továbbá hogy ennek megtalálása polinomiális időben megoldható, hiszen csak $|V| - 1$ darab minimális vágás feladatot kell megoldani, de a maximális-folyam minimális-vágás tétel (MFMC) miatt tudjuk, hogy ennek az értéke éppen a két csúcs közt vezethető maximális folyamértékkel egyezik meg, aminek megtalálására viszont a Ford-Fulkerson algoritmus az Edmonds-Karp algoritmussal kiegészítve egy polinomiális algoritmust ad. Jöjjenek most a T-kötések.

3.2. T-kötések, T-vágások

A T-kötéseket először Lovász László vezette be az alábbi módon.

3.2. Definíció. *Legyen a $G = (V, E)$ irányítatlan gráfban, $T \subseteq V$ olyan amire $|T|$ páros. Ekkor G minden olyan F részgráfját T-kötésnek hívjuk, amire F-ben a páratlan fokú csúcsok halmaza pontosan megegyezik a T csúcshalmazzal.*

Definiáljuk még továbbá, mit értünk T-vágáson.

3.3. Definíció. *Adott a $G = (V, E)$ gráf, és $T \subseteq V$ csúcshalmaz. Ekkor T-vágásnak nevezünk egy $\delta(S)$ élhalmazt ($S \subseteq V$), ha $|S \cap T|$ páratlan. (Itt $\delta(S) = \{e \in E | e = uv;\ u \in S;\ v \notin S\}$ jelöli az S csúcshalmazból kilépő élek halmazát.)*

A T-kötések és a T-vágások elméletéről bővebben Cook 1997-es cikkében [1] van szó, itt csak egy a későbbiekben hasznos állítást említünk meg.

3.4. Állítás. *Lássuk be, hogy tetszőleges M T-kötés élhalmazának, és tetszőleges $\delta(S)$ T-vágás élhalmazának metszete nem üres. ($(\delta(S) \cap M) \neq \emptyset$)*

Bizonyítás. Adott T páros elemszámú halmazra az adott G gráfban vegyünk egy M T-kötést és egy $\delta(S)$ T-vágást. Mivel $|S \cap T|$ páratlan, így $(S \cap T) \neq \emptyset$ és hasonlóan $(S \setminus T) \neq \emptyset$. Ekkor $\exists u, v \in T$ csúcsok, úgy, hogy $u \in S, v \notin S$. Mivel M összefüggő T-kötés, létezik M-ben egy P_{uv} út. Az előbbiekből látszik, hogy biztosan van legalább egy $e = u'v'$ él, amire $e \in P_{uv}$ $u' \in S$ $v' \notin S$. Ekkor definíció szerint $e \in \delta(S)$, amiből következik, hogy $e \in (\delta(S) \cap M)$ azaz $(\delta(S) \cap M) \neq \emptyset$ és így az állítást beláttuk. $\square$

4. A VPN-probléma

A korábban tárgyalt japán tétel (2.1) főleg szállítási problémáknál lehet hasznos. Azonban kommunikációs hálózatoknál a legritkábban ismerjük az igényeket ilyen pontosan. Gyakran előforduló probléma, hogy egy meglévő információs hálózaton a felhasználók egy része új magánhálózatot szeretne építeni, úgy, hogy a hálózat kapacitását csak minimálisan foglalják le. Célunk a felhasználók közti optimális útrendszer megadása.

A gráfok nyelvére lefordítva: adott egy G irányítatlan összefüggő gráf a V csúcshalmazon, E élhalmazzal ($G = (V, E)$). Adott továbbá $W \subseteq V$ csúcshalmaz, és $\forall e$ élre egy $c(e)$ ($c : E \to \Re_+$) nem negatív *egységenkénti* költség. Nevezzük W csúcsait terminálóknak, és számukat jelöljük k-val. Minden i, j csúcspár között D_{ij} nagyságú információt szeretnénk áramoltatni. A D_{ij} értékek időben nem állandóak, de modellektől függően megköveteljük bizonyos feltételek teljesülését. Rögzítsünk egy útrendszert a gráfunkban (adjunk meg minden csúcspár között egy vagy több utat). Ezután kapacitásokat szeretnénk adni az élekre, úgy, hogy minden szóba jövő igény kielégíthető legyen a kapacitásainkkal, az előzőekben megadott útrendszeren keresztül. (Legyen ez az u ($u : E \to \Re_+$), adott gráfban csak az útrendszerünktől függő, éleken értelmezett függvény.) Ekkor célunk úgy megadni az útrendszerünket, hogy a $\sum_{e \in E} c(e)u(e)$ összeg minimális legyen.

Ekkor a kommunikációs igények (D_{ij}) meghatároznak egy D kommunikációs mátrixot, melynek főátlójában 0-k állnak, azon kívül az i-edik sor j-edik oszlopában D_{ij}. Mint említettük ezek az igények általában nem állandók. Ezért, hogy valamiféle értelme mégis legyen a feladatnak, különböző modellekkel behatároljuk a lehetségesen előforduló D igénymátrixainkat, ezzel pontosan megadva egy $\mathcal{H}$ mátrixuniverzumot, a lehetségesen előforduló igénymátrixaink halmazát. Ekkor persze újra kell értelmezni, mit értünk optimális útrendszeren (maradva az előző feladat rendszerénél). Legkézenfekvőbb, ha azt mondjuk, ez egy *legrosszabb-eset* számítás, azaz válasszuk minden e élre külön külön azt a $D^e \in \mathcal{H}$ mátrixot, amelyiknél a D^e-beli igények kielégítésekor keletkező kapacitásigény az e élen maximális. Legyen így u a kapacitásfüggvényünk az éleken, és az e él kapacitása: $u(e) = \sum_{\{i,j\} \subseteq W; e \in P_{ij}} D^e_{ij}$.

4.1. Modellek

Mint az előzőekben is rámutattunk, a számítási modellek közti különbség az előbb definiált $\mathcal{H}$ univerzumok megadása. Így ebben a dolgozatban több egyre bonyolultabb modellről teszünk említést, a legegyszerűbb pipe modellről, a szimmetrikus és aszimmetrikus hose modellről, továbbá később ennek korlátozott verziójáról, végül a fa-alapú modellről.

Pipe modell

A pipe modell a VPN modellek közti legegyszerűbb, a gyakorlatban alig alkalmazható. A lényege, hogy az igényeket pontosan és jól ismerjük (amire már többször rámutattunk, hogy nem igaz). Matematikailag leírva adott egy időben állandó D igénymátrix. Ekkor célunk egy $\mathcal{P} = \{P_{ij} | \{i,j\} \subseteq W\}$ útrendszer megadása, úgy hogy a D_{ij} i és j csúcsok közti igényt a $P_{ij} \in \mathcal{P}$ úton vezessük. (Esetlegesen lehetőségünk van arra, hogy ne csak egy, hanem több úton megosztva vezessük keresztül az igényeinket, de ezt az esetet egyelőre hagyjuk figyelmen kívül, majd később bővebben is beszélünk róla.) Ekkor definiáljuk az u éleken értelmezett függvényt a következőképpen:

$$u(e) = \sum_{\substack{\{i,j\} \subseteq W \\ e \in P_{ij}}} D_{ij},$$

azaz az e élen pontosan $u(e)$ a teljes átmenő forgalom. Célunk, hogy $\mathcal{P}$-t úgy adjuk meg, hogy a $\sum_{e \in E} c(e)u(e)$ összeg minimális legyen.

Erre a feladatra viszonylag könnyen látszik, hogy hogyan érdemes megadni az útrendszert. Keressük meg az i és a j csúcsok közti, c költségfüggvény szerinti legolcsóbb utat, és legyen ez a P_{ij} utunk a $\mathcal{P}$ útrendszerünkben.

4.1. Állítás. *Az előző bekezdésben megadott $\mathcal{P}$ útrendszer költsége minimális.*

Bizonyítás. Legyen a $\mathcal{P}$-hez tartozó kapacitás u, a $\mathcal{P}'$-höz tartozó u'

$$\sum_{e \in E} c(e)u(e) = \sum_{e \in E} \sum_{\substack{\{i,j\} \subseteq W \\ e \in P_{ij}}} c(e)D_{ij} = \sum_{\{i,j\} \subseteq W} D_{ij} \sum_{e \in P_{ij}} c(e) \leq$$

$$\leq \sum_{\{i,j\} \subseteq W} D_{ij} \sum_{e \in P'_{ij}} c(e) = \sum_{e \in E} \sum_{\substack{\{i,j\} \subseteq W \\ e \in P'_{ij}}} c(e)D_{ij} = \sum_{e \in E} c(e)u'(e)$$

Itt az egyenlőségek triviálisak, hiszen a kettős leszámlálás elve alapján mindegy, hogy az éleken adjuk össze az összes átmenő út értékét, vagy az összes úton a rajtuk lévő éleket. Az egyenlőtlenség szintén világos, hiszen úgy definiáltuk $\mathcal{P}$-t, hogy c szerinti legolcsóbb utakat tartalmazza, így a P_{ij} út összköltsége nem nagyobb, a P'_{ij} út összköltségénél, így a bizonyítás kész. $\square$

Ezzel a pipe modell tárgyalását befejeztük, és áttérünk a gyakorlatban előforduló hasznosabb modellekre.

Szimmetrikus hose modell

Az előzőnél jóval gyakorlatiasabb, ugyanakkor nehezebben is számolható az úgynevezett hose modell, melyet két külön motiváció alapján egymástól függetlenül dolgozott ki Fingerhut [5] és Duffield [2]. Egy nagyobb magánhálózatnál korántsem feltehető, hogy a csúcsok (azaz alegységek, számítógépek...) közti kommunikáció állandó. Ugyanakkor mégsem mondhatjuk azt, hogy akkor számoljunk úgy, hogy minden úton tetszőlegesen nagy információ átfolyhat, hiszen ennek valós fizikai korlátai vannak. Próbálkozzunk egy olyan feltétellel, hogy minden csúcsnak korlátozzuk a megengedett maximális kommunikációját. Ezt a következőképpen írhatjuk le: Adott egy a csúcsokon értelmezett b korlátozó vektor ($b : W \to \Re$). Itt a vektor i-edik koordinátája a W halmaz i-edik csúcsának maximális kommunikációmennyisége. Ekkor ez a b vektor definiál nekünk egy $\mathcal{H}_b$ mátrixvilágot, a következőképpen:

$$\mathcal{H}_b = \{D \in \Re_+^{k\times k} : D_{ij} = D_{ji} \ \forall\{i,j\} \subseteq W;\ D_{ii} = 0 \ \forall i \in W;\ \sum_{j\in W} D_{ij} \leq b_i \ \forall i \in W\}.$$

Ekkor rögzített $\mathcal{P}$ útrendszer mellett, az eddigiekhez hasonlóan definiáljuk az $u_{\mathcal{P}}$ ($u_{\mathcal{P}} : E \to \Re$) kapacitásfüggvényt úgy, hogy minden lehetséges igényt ki tudjon elégíteni, de az ilyenek között minimális legyen. Rögzített b esetén lehetségesnek értjük az olyan felmerülő igényeket, amelyekhez tartozó D igénymátrix $\mathcal{H}_b$ beli. (Az egyszerűség kedvéért, és mivel nem félrevezető, jelöljük az $u_{\mathcal{P}}$ függvényt egyszerűen u-val.)

$$u(e) = \max_{D\in\mathcal{H}_b} \{ \sum_{\substack{\{i,j\}\subseteq W \\ e\in P_{ij}}} D_{ij} \}.$$

Ebben a környezetben is ugyanaz a feladatunk, $\mathcal{P}$ megválasztása úgy, hogy $\sum_{e\in E} c(e)u(e)$ minimális legyen.

Aszimmetrikus hose modell

A hose modellnek egy természetesebb, de nehezebben számolható változata az aszimmetrikus hose modell, a különbség csupán annyi, hogy nem tesszük fel, hogy $D_{ij} = D_{ji}$, azaz külön kezelnénk az i csúcsban generálódó és j-ben termináló igényeket a j-ben generálódó, i-ben termináló igényektől. Így ekkor meg kell adnunk egy b^- és egy b^+ korlátot, ahol b_i^-jelöli az i csúcsba befolyó információ maximális mennyiségét, és hasonlóan b_i^+ az i csúcsból induló információ maximális mennyiségét Ekkor $\mathcal{H}_{b^-,b^+}$ és u meghatározása hasonlóan történik.

$$\mathcal{H}_{b^-,b^+} = \{D \in \Re_+^{k\times k} : D_{ii} = 0;\ \sum_{j\in W} D_{ij} \leq b_i^+;\ \sum_{j\in W} D_{ji} \leq b_i^- \}$$

és

$$u(e) = \max_{D \in \mathcal{H}_{b^-,b^+}} \{ \sum_{\substack{\{i,j\} \subseteq W \\ e \in P_{ij}}} D_{ij} \}.$$

Ezt a modellt is az előzővel együtt dolgozta ki Fingerhut és Duffield ([5], [2]).

4.2. Útválasztási módszerek

Eddig az egyszerűség kedvéért mindig megelégedtünk azzal, hogy $\mathcal{P}$ az útrendszerünk, ami tartalmaz minden csúcspárra egy egyszerű utat a csúcsok között, sőt a definícióinkat is ez alapján konstruáltuk. A helyzet ennél azonban bonyolultabb, hiszen már az sem kizárt, hogy az útrendszerünket mindig az éppen aktuális forgalomigényeknek megfelelően választjuk ki. Ennek van egy olyan hibája, hogy az igények nagyon gyorsan változhatnak, akár gyorsabban is, mint ahogy ki tudjuk számolni az optimális útrendszert, ami eleve rossz. Pontosan emiatt inkább az a taktika terjedt el, hogy már az elején rögzítjük az útrendszert, és a kommunikációnak végig ezeken az utakon kell történniük. Ennek a módszernek rögzített utak módszere (*oblivious routing*) a neve, míg ha az útvonal változik a pillanatnyi kommunikáció függvényében, akkor dinamikusan változó útrendszerről (*dynamic routingról*) beszélünk. Azonban még ekkor is több lehetőségünk van megadni, hogy milyen útrendszereket engedünk meg. Ezért definiálunk most négy egyszerű útválasztási módszert, (maradva a hose modellben) az MPR, SPR, TR és TTR irányítási technikákat.

Többutas útválasztás

A multipath routing, (vagy magyarul többutas útválasztás) a legbonyolultabb. (Innentől erre a módszerre MPR néven hivatkozunk.) Ebben a rendszerben az i és a j csúcsok között megadunk egy egység nagyságú f_{ij} folyamot, azaz tetszőleges számú utat i-ből j-be, jelöljük ezek halmazát $\mathcal{P}_{ij}$-vel, és ezekhez az utakhoz egyesével hozzárendelünk egy-egy 0 és 1 közötti számot, úgy, hogy az összegük 1 legyen. Nevezzük ezt a hozzárendelést az $F_{ij} : \mathcal{P}_{ij} \to [0;1]$ függvénynek. ($\sum_{p \in \mathcal{P}_{ij}} F_{ij}(p) = 1$.)

Ekkor $\forall\, i, j$ csúcspárra f_{ij} felfogható egy E-n értelmezett függvényként: $f_{ij} : E \to \Re$, ahol:

$$f_{ij}(e) = \sum_{\substack{p \in \mathcal{P}_{ij} \\ e \in p}} F_{ij}(p).$$

Ezután pontosítsuk az előző részben definiált u kapacitásfüggvényt, rögzített b mellett a következőképpen:

$$u(e) = \max_{D \in \mathcal{H}_b} \{ \sum_{p \in \mathcal{P}_{ij}} \sum_{\substack{\{i,j\} \subseteq W \\ e \in p}} f_{ij}(e) D_{ij} \}.$$

Nevezzük itt is $\mathcal{P}$-nek a teljes útrendszert, azaz $\mathcal{P} = \bigcup_{\{i,j\} \subseteq W} \mathcal{P}_{ij}$.

Egyszerű útválasztás

Sokkal egyszerűbb a single-path routing, (azaz egyszerű útválasztás) amit innentől SPR-nek rövidítünk. Ebben minden $i - j$ csúcspárra rögzítünk egy egyértelmű P_{ij} utat i és j között, az egész D_{ij} információt ezen át folyatjuk. Így itt $\mathcal{P} = \bigcup_{\{i,j\} \subseteq W} P_{ij}$. A dolgozat során ez és az előző lesznek a legfontosabbak nekünk.

Terminál-fa módszer

Az előzőhöz hasonlóan itt is minden csúcspárra egyértelműen rögzítünk egy utat, de itt teszünk egy plusz megkötést is, méghozzá azt, hogy minden terminálra az ott összefutó utak uniója egy fa legyen. Azaz $\bigcup_{j \in W} P_{ij}$ fát alkot minden i-re. Erre a módszerre az angol *terminal tree routing* szókapcsolat után TTR-ként hivatkozunk.

Fa módszer

Itt szintén csak egy keveset módosítunk az előzőhöz képest, úgy, hogy az összes út uniója alkosson fát. Azaz $\bigcup_{\{i,j\} \subseteq W} P_{ij}$ egy fát alkot. Erre a módszerre az előbbihez hasonlóan TR-ként hivatkozunk (*tree routing*).

Jelöljük rendre a különböző útválasztási módszerekkel megkapott optimális megoldás költségét egy adott G gráfban $OPT(MPR)$, $OPT(SPR)$, $OPT(TTR)$, $OPT(TR)$ jelölésekkel, ahogy tette azt Hurkens is [11]. Ekkor kihasználva, hogy egyre speciálisabban választottunk, könnyen látható, hogy a TR szerinti optimális megoldás egy jó megoldása ugyanannak a feladatnak TTR szerinti választás esetén. Ugyanígy egy optimális TTR megoldás egyben SPR megoldás is, valamint egy optimális SPR megoldás MPR megoldás is egyben. Ebből már könnyedén kapjuk a következő egyenlőtlenséget.

$$OPT(MPR) \leq OPT(SPR) \leq OPT(TTR) \leq OPT(TR)$$

Korábban az volt a sejtés, hogy $OPT(MPR) \geq OPT(TR)$, amivel minden $\leq$ jel helyett $=$ jelet is írhattunk volna. Később kiderült, hogy ez általánosságban nem igaz, azonban több speciális esetben igen, sőt mint látni fogjuk általánosan igaz az $OPT(SPR) \geq OPT(TR)$ egyenlőtlenség.

5. A VPN tétel és bizonyítása

5.1. 2-approximáció és további eredmények

VPN-fának nevezünk egy olyan $t \in V$ gyökerű fát, amelyik a t gyökerű legrövidebb utak fája. Legyen így $\mathcal{R}^t = \{R^t_{ij} | i, j \in W\}$, ahol R^t_{ij} az i és t valamint a t és j közti legolcsóbb utak egymás mögé tételéből kapott $i - j$ séta. (R^t_{ij} már nem feltétlen út.)

Gupta 2001-ben [10] ennek a használatával adott egy egyszerű polinomiálisan számolható 2-approximációt (azaz egy olyan útrendszert, amelynek a költsége legfeljebb az optimális útrendszer költségének (jelöljük ezt a költséget OPT-tal) duplája). Az algoritmus annyi, hogy vette a legolcsóbb költségű VPN-fát, ez jó megoldás. Lássuk ezt be. (Vegyünk egy (G, b, c) VPN helyzetet, azaz G gráfot b korlátozóvektort W csúcsain és c egységenkénti költségfüggvényt.) Legyen az i és j csúcsok közti séta költsége a VPN-fa megoldásunkban $d(i, j)$ ($d(i, j) = d(i, t) + d(t, j)$), továbbá legyen $B = \sum_{i \in W} b_i$. Könnyen látható ekkor, hogy $C(\mathcal{R}^t) \leq \sum_{i \in W} d(i, t) b_i$, ahol $C(\mathcal{R}^t)$ jelöli az $\mathcal{R}^t$ útrendszer költségét. Konstruáljuk meg a D' mátrixot a következőképpen:

$D'_{ij} = \begin{cases} \frac{b_i b_j}{B} & \text{ha } i \neq j \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$ Ekkor tetszőleges $i \in W$ csúcsra

$$\sum_{j \in W} D'_{ij} = \frac{b_i}{B} \sum_{i \neq j} b_j = \frac{b_i}{B}(B - b_i) \leq b_i.$$

Ebből láthatóan $D' \in \mathcal{H}_b$, amiből következik, hogy az optimális költség legalább akkora, mint az a költség (jelölje ezt most C^*), ha az optimális útrendszeren csak a D' igénymátrixot nézzük ($OPT \geq C^*(D')$). Ekkor az előzőeket, valamint azt hogy $d(i, i) = 0$ kihasználva kapjuk a következőt.

$$OPT \geq \sum_{i < j \in W} d(i, j) D'_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i \in W} \sum_{j \in W} d(i, j) \frac{b_i b_j}{B}.$$

Vegyük ekkor a W-beli gyökerű VPN-fáknak a súlyozott átlagát.

$$\frac{1}{B} \sum_{j \in W} b_j C(\mathcal{R}^j) \leq \frac{1}{B} \sum_{j \in W} b_j \sum_{i \in W} d(i, j) b_i \leq 2OPT.$$

Ebből már valóban látni, hogy ez egy 2-approximáció, valamint az is következik, hogy a probléma polinomiális időben közelíthető. Később Erlebach és Rüegg 2004-ben [4] az ellipszoid-módszer használatával megmutatta, hogy a VPN probléma teljes MPR verziója is polinomiális időben megoldható. Azért is fontos az előző 2-approximáció, mert sokáig az volt a sejtés, hogy az optimális megoldás is VPN-fa alakú. Ezt korábban Hurkens több szituációra bebizonyította [11] a probléma LP felírásának (lásd az MPR című fejezetben) és a dualitástételnek a segítségével. Hurkens által bizonyított esetek:

- A G gráf egy fa (triviális).
- A G gráf egy kör.
- A csúcsok száma legfeljebb 4.
- Teljes gráfok, azonosan 1 költségfüggvénnyel.

5.2. Tételkimondás

Később Goyal, Olver és Shepherd [8] belátták, hogy SPR útválasztási módszer esetén a következő tétel általános gráfokra is igaz, ennek a fejezetnek a célja az erre adott bizonyításuk ismertetése.

5.1. Tétel. *Egy megadott (G, b, c) szituációban (c persze most is nemnegatív) a hose modellt használva ($\mathcal{H}_b$-re), SPR útválasztással, az optimális megoldás a VPN feladatra fa alakú.*

5.2. Megjegyzés. Meg kell még említeni, hogy ez az eredmény azt is jelenti, a korábbi 2-approximációban használt algoritmus miatt, hogy a VPN feladat SPR útválasztással szintén polinomiális időben számolható.

5.3. Bizonyítás

A bizonyítás négy nagyobb egységből áll (mindegyik egy külön alfejezetet alkot). Az első rész egy lemma, ami a $b \equiv 1$ esetre vezeti vissza a problémát. Ezután bevezetünk egy újabb, úgynevezett PR-problémát, és bebizonyítjuk, hogy ez ekvivalens a VPN-problémával, azaz elég a PR-problémát megoldanunk, az automatikusan megoldja az eredeti VPN-problémát is. Ezt az új, bevezetett PR-problémát úgy oldjuk meg, hogy a már korábban bevezetett T-kötésekre (3.2 definíció) vezetjük vissza, majd végül a T-kötések között igazolunk egy egyenlőtlenséget. Az utolsó részre két bizonyítást is adunk, az eredeti Shepherdéktől származót [8], és egy egyszerűbb, a Gomory-Hu fák tulajdonságait használó bizonyítást, amely Sebő Andrástól származik.

Lássuk először az első pontot, bizonyítsuk be az alábbi egyszerű lemmát:

5.3. Lemma. *Ha a VPN tétel igaz $b \equiv 1$ korlátozó vektor esetén, akkor igaz tetszőleges korlátozó vektor esetén.*

Bizonyítás. Először csak a racionális b esetét bizonyítjuk. Közös nevezőre hozás után bővíthetünk, b koordinátáinak közös nevezőivel. Ekkor a $\mathcal{H}_b$ mátrix univerzumunkat egy nagyítással kaphatjuk meg az eddigiből. (Nem említettük, de könnyen látható, hogy minden b esetén $\mathcal{H}_b$ egy konvex poliéder.) Szintén megváltozik s konstans szorzó erejéig az összköltség is. Ugyanakkor az optimális költséget biztosító $\mathcal{P}$ útrendszerünk nem változik, hiszen minden útrendszer esetén a kapacitások is csak konstans-szorosukra változnak. (Mindegy hogy egy poliéderen maximalizálunk majd konstanssal megszorozzuk az eredményt, vagy konstans-szorosra nagyítjuk a poliéderünket, és utána maximalizálunk, az eredmény ugyanannak a pontnak a képe lesz.) Emiatt vissza is vezettük a b egész esetre. Tegyük fel tehát, hogy b egész. Ekkor húzzuk szét az i-edik csúcsot b_i darab csúcsra, úgy, hogy az új b_i darab csúcs egy utat alkosson. Az eredeti i-be menő összes élet az új első csúcsba vezessük, ezek költsége maradjon az eredeti, az új kapott úton lévő élek mindegyikének költsége legyen 0. Játsszuk ezt el minden csúcsra. Ekkor, ha eddig az i és j csúcsok között D_{ij} nagyságú forgalmat bonyolítottunk, most bonyolítsuk le ezt a forgalmat szétosztva, az új b_i és b_j darab csúcsok tetszőleges csúcsai között, úgy, hogy az összforgalom minden csúcson legfeljebb egy. Így visszavezettük a tetszőleges b-vel kapott feladatunkat egy olyan feladatra, ahol $b \equiv 1$ és VPN feladatunk optimális költsége nem változik, hiszen az összes eredeti élen ugyanakkora forgalmat bonyolítunk, mint eddig, az új élek költsége pedig úgyis 0. Könnyen látható ezek után, hogy a lemma valós esetben is igaz, hiszen minden valós b vektorra és tetszőlegesen kicsi ϵ valós számra $\exists b'$ racionális vektor, úgy, hogy a két vektor által generált optimális megoldás egymáshoz ϵ közelségben van. Mivel b'-re a tétel szerint az optimális megoldás egy fa, felhasználva, hogy ϵ tetszőleges volt minden b valós vektorra is létezik fa-alakú optimális megoldás. Így ha a tetszőleges b vektort kismértékben racionálissá perturbáljuk, nem lesz más az optimális megoldás. Ekkor viszont a lemma tetszőleges b vektor esetén igaz. Jelöljük ezután $\mathcal{H}_1$-et egyszerűen $\mathcal{H}$-val. $\square$

5.3.1. PR probléma

Ahogy a bizonyítás elején (5.3) említettük bevezetjük a következő PR-problémát.

Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan, összefüggő gráf, c éleken értelmezett egységenkénti költségfüggvénnyel, $W \subseteq V$ terminálok, ahol $|W| = k$. Legyen $t \in W$ egy kitüntetett, rögzített gyökérpont. $\mathcal{P}_t$ álljon egyértelmű $i - t$ utak összességéből $\forall i \in W \setminus \{t\}$-re ($\mathcal{P}_t = \{P_{it} | i \in W \setminus \{t\}\}$). Legyen $l(e, \mathcal{P}_t)$ az e élen átmenő utak száma, azaz:

$$l(e, \mathcal{P}_t) = |\{i | i \in W, e \in P_{it}\}|.$$

Definiáljuk az y függvényt a következőképpen:

$$y(e, \mathcal{P}_t) = \min\{l(e, \mathcal{P}_t); k - l(e, \mathcal{P}_t)\}.$$

Legyen ezután a $\mathcal{P}_t$ útrendszer PR költsége a következő:

$$C_{PR}(\mathcal{P}_t) = \sum_{e \in E} c(e) y(e, \mathcal{P}_t).$$

A PR tétel hasonlóan a VPN tételhez azt mondja ki, hogy az előbb definiált költség akkor minimális, ha a megadott $\mathcal{P}_t$ útrendszer egy fát alkot. (Az előzőekben megadott probléma és a sejtés Grandonitól származik, aki egy 2008-as cikkében publikálta ezt [9].)

5.3.2. Ekvivalencia

Lássuk most be, hogy a két probléma valóban ekvivalens. Ehhez elég megmutatni, hogy tetszőleges VPN megoldás esetén létezik egy ebből kapható PR-megoldás, aminek a költsége nem drágább a kiinduló megoldásnál. Igazolni kell még, hogy tetszőleges PR-megoldáshoz létezik egy ennél nem drágább erre épülő VPN-megoldás. Az első részhez bebizonyítjuk az 5.4 lemmát, míg a fordított irányhoz az úgynevezett levágó módszert használjuk.

5.4. Lemma. *Egy adott VPN szituációban SPR útválasztás mellett, ahol* $\mathcal{P} = \{P_{ij} | \{i, j\} \subseteq W\}$, *biztosan* $\exists t \in W$ *gyökércsúcs, melyre* $\mathcal{P}_t = \{P_{it} | i \in W \setminus \{t\}\}$, *és* $C_{VPN}(\mathcal{P}) \geq C_{PR}(\mathcal{P}_t)$.

Bizonyítás. Konstruáljuk meg a D^e mátrixot, egy előre rögzített e élre a következőképpen:

$$D^e_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{k}\left(\frac{y(e,\mathcal{P}_i)}{l(e,\mathcal{P}_i)} + \frac{y(e,\mathcal{P}_j)}{l(e,\mathcal{P}_j)}\right) & \text{ha } e \in P_{ij} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

(Ebben a helyzetben $\mathcal{P}_i$-t és $\mathcal{P}_j$-t mint a $\mathcal{P}$ rendre i-ben és j-ben kezdődő részútjainak rendszerét értjük.)

5.5. Állítás. $D^e \in \mathcal{H}$

Bizonyítás.

$$\sum_{j \in W} D^e_{ij} = \sum_{\substack{j \in W \\ e \in P_{ij}}} \frac{1}{k}\left(\frac{y(e, \mathcal{P}_i)}{l(e, \mathcal{P}_i)} + \frac{y(e, \mathcal{P}_j)}{l(e, \mathcal{P}_j)}\right),$$

D^e definíciója szerint. Ekkor y definícióját kihasználva és közös nevezőre hozás után a következőt kapjuk:

$$\sum_{\substack{j\in W\\ e\in P_{ij}}} \frac{1}{k}\left(\frac{y(e,\mathcal{P}_i)}{l(e,\mathcal{P}_i)}+\frac{y(e,\mathcal{P}_j)}{l(e,\mathcal{P}_j)}\right) \le \sum_{\substack{j\in W\\ e\in P_{ij}}} \frac{1}{k}\left(\frac{k-l(e,\mathcal{P}_i)}{l(e,\mathcal{P}_i)}+\frac{l(e,\mathcal{P}_j)}{l(e,\mathcal{P}_j)}\right) =$$

$$= \sum_{\substack{j\in W\\ e\in P_{ij}}} \frac{1}{l(e,\mathcal{P}_i)} = \frac{1}{l(e,\mathcal{P}_i)} \sum_{\substack{j\in W\\ e\in P_{ij}}} 1 = \frac{1}{l(e,\mathcal{P}_i)} l(e,\mathcal{P}_i) = 1.$$

Pontosan akkor kerül be egy egyes az utolsó szummába, ha létezik egy hozzá tartozó j csúcs, melyre e rajta van a P_{ij} úton. Ezeknek a csúcsoknak a száma viszont pontosan $l(e,\mathcal{P}_i)$, definíció szerint. Így valóban D^e minden sorösszege kisebb vagy egyenlő, mint 1, azaz állításunkat, miszerint $D^e \in \mathcal{H}$, igazoltuk. $\square$

Lássuk be a következő állítást is:

5.6. Állítás. *$\forall e$ élre*

$$u(e) \ge \frac{1}{k}\sum_{i\in W} y(e,\mathcal{P}_i).$$

Bizonyítás.

$$u(e) = \max_{D\in\mathcal{H}} \sum_{\substack{\{i,j\}\subseteq W\\ e\in P_{ij}}} D_{ij} \ge \sum_{\substack{\{i,j\}\subseteq W\\ e\in P_{ij}}} D^e_{ij} = \sum_{\substack{\{i,j\}\subseteq W\\ e\in P_{ij}}} \frac{1}{k}\left(\frac{y(e,\mathcal{P}_i)}{l(e,\mathcal{P}_i)}+\frac{y(e,\mathcal{P}_j)}{l(e,\mathcal{P}_j)}\right).$$

Ekkor könnyen látható, hogy ha $e \in P_{ij}$, akkor a szummába a konstans szorzó után pontosan $\frac{y(e,\mathcal{P}_i)}{l(e,\mathcal{P}_i)}$ és $\frac{y(e,\mathcal{P}_j)}{l(e,\mathcal{P}_j)}$ kerül be, ezért az előző kifejezés felbontható két szummába.

$$\sum_{\substack{\{i,j\}\subseteq W\\ e\in P_{ij}}} \frac{1}{k}\left(\frac{y(e,\mathcal{P}_i)}{l(e,\mathcal{P}_i)}+\frac{y(e,\mathcal{P}_j)}{l(e,\mathcal{P}_j)}\right) = \frac{1}{k}\sum_{i\in W}\sum_{\substack{j\in W\\ e\in P_{ij}}} \frac{y(e,\mathcal{P}_i)}{l(e,\mathcal{P}_i)} = \frac{1}{k}\sum_{i\in W} y(e,\mathcal{P}_i),$$

az előzőekben is használt észrevétel miatt. $\square$

Ekkor $c(e)$ súlyokkal összegezve az előző eredményt minden $e \in E$ élre a következőt kapjuk:

$$C_{VPN}(\mathcal{P}) = \sum_{e\in E} c(e)u(e) \ge \sum_{e\in E} c(e)\frac{1}{k}\sum_{t\in W} y(e,\mathcal{P}_t) =$$

$$= \frac{1}{k}\sum_{t\in W}\sum_{e\in E} c(e)y(e,\mathcal{P}_t) \ge \min_{t\in W}\sum_{e\in E} c(e)y(e,\mathcal{P}_t) = C_{PR}(\mathcal{P}_t).$$

Ezzel a 5.4 lemmát beláttuk. $\square$

A fordított irányhoz használjuk a következő úgynevezett levágó módszert: Induljunk ki a PR probléma egy $\mathcal{P}_t$ megoldásából, és ebben dolgozzunk. Nézzük a P_{it} és a P_{jt} utakat. Jelölje $P_{it} \triangle P_{jt}$ a két út szimmetrikus differenciáját, azaz azokat az éleket, amelyek a két út közül pontosan az egyiken vannak rajta. Könnyen látható, hogy $P_{it} \triangle P_{jt}$-ben létezik egy egyértelmű $i - j$ út, hiszen csak i és j a két páratlan fokú csúcs, így egy komponensben vannak. (A $P_{it} \cup P_{jt}$-ben is csak i és j a két páratlan fokú csúcs, és ha valamelyik él szerepel a metszetben is, akkor ennek az élnek mind a két végén a szimmetrikus differenciában lévő fokszám pontosan kettővel kevesebb, az unióban lévő fokszámnál.) Nézzük ekkor ezt az egyértelmű Q_{ij} utat. (Két különböző út szintén nem létezhet a konstrukció miatt.) Legyen $Q = \{Q_{ij} | \{i, j\} \subseteq W\}$. Legyen $R_e = \{i \in W | e \in P_{it}\}$ ekkor persze $|R_e| = l(e, \mathcal{P}_t)$. Válasszunk egy tetszőleges e élet a Q_{ij} útról. A konstrukció miatt az i és a j csúcsok közül pontosan egy fog szerepelni R_e-ben, hiszen ha egyik sincs benne, az pont azt jelenti, hogy e se a P_{it} se a P_{jt} úton nincs rajta, ekkor viszont a Q_{ij} úton se lehet rajta. Ha viszont mindkét csúcs benne lenne R_e-ben, akkor az pontosan azt jelenti, hogy e rajta van a P_{it} és a P_{jt} úton is. Ekkor viszont nem lehet benne a szimmetrikus differenciában, azaz Q_{ij} úton sem, ami ellentmondás. Ekkor

$$\sum_{\substack{\{i,j\} \subseteq W \\ e \in Q_{ij}}} D_{ij} \leq \sum_{i \in R_e} \sum_{j \notin R_e} D_{ij} \leq \sum_{i \in R_e} \sum_{j \in W} D_{ij} \leq \sum_{i \in R_e} 1 = l(e, \mathcal{P}_t).$$

Hasonlóan

$$\sum_{\substack{\{i,j\} \subseteq W \\ e \in Q_{ij}}} D_{ij} \leq \sum_{i \notin R_e} \sum_{j \in R_e} D_{ij} \leq \sum_{i \notin R_e} \sum_{j \in W} D_{ij} \leq \sum_{i \notin R_e} 1 = k - l(e, \mathcal{P}_t).$$

Összetéve a két eredményt:

$$\sum_{\substack{\{i,j\} \subseteq W \\ e \in Q_{ij}}} D_{ij} \leq y(e, \mathcal{P}_t).$$

Mivel most D tetszőleges volt, így $y(e, \mathcal{P}_t) \geq max_{D \in \mathcal{H}} \sum_{\{i,j\} \subseteq W, e \in Q_{ij}} D_{ij} = u(e)$.

Így a kapott egyenlőtlenséget az összes élre súlyozottan összegezve: $C_{VPN}(Q) = \sum_{e \in E} c(e) u(e) \leq \sum_{e \in E} c(e) y(e, \mathcal{P}_t) = C_{PR}(\mathcal{P}_t)$.

Összegezve az ekvivalencia két irányát, miszerint az optimális $\mathcal{P}$ VPN megoldás költsége legalább annyi, mint a belőle származó $\mathcal{P}_t$ PR megoldások súlyozott átlaga, és legfeljebb annyi, mint bármely tetszőlegesen megadott $\mathcal{P}_t$ PR megoldás, könnyen láthatóan bebizonyítottuk, hogy tetszőlegesen adott t és t' csúcsok esetén az optimális PR megoldások megegyeznek, és a költségük megegyezik az optimális VPN megoldás költségével. Egyszerűbben fogalmazva, a PR tétel és a VPN tétel ekvivalensek.

5.3.3. T-kötések és visszavezetés

Követve Shepherdék [8] bizonyítását, vezessük vissza a PR-problémát T-kötésekre. Ehhez használjuk a 3.2 definícióban bevezetett T-kötések fogalmát. Vegyünk egy $\mathcal{P}_t$ megoldást a t gyökerű PR-problémára. Nevezzünk ekkor egy e élet *nehéznek*, ha $l(e, \mathcal{P}_t) \leq \frac{k}{2}$. Jelöljük a nehéz élek halmazát ekkor H-val. Könnyen látható a definíció alapján, hogy ekkor $y(e, \mathcal{P}_t) = \begin{cases} l(e, \mathcal{P}_t) & \text{ha } e \notin H \\ k - l(e, \mathcal{P}_t) & \text{ha } e \in H \end{cases}$. Nézzük a H élek által generált F részgráfot G-ben. Ebben jelöljük a páratlan fokú csúcsok halmazát T'-vel. Legyen $T = T' \triangle \{t\}$ és $T_u = T \triangle \{u\}$ $\forall u \in W$-re. Ekkor $|T'|$ páros, így $|T|$ páratlan, ami miatt $|T_u|$ szintén páros minden u-ra. Legyen M_u a c szerinti minimális költségű T_u kötés G-n ($C(M_u) = \sum_{e \in M_u} c(e)$). Legyen $C'(u) = C(P_{ut} \triangle H) = C(H_u)$ (a H_u jelölést csak egyszerűség kedvéért vezetjük be a $P_{ut} \triangle H$ élhalmaz helyett). Ez az elsőre furcsa C' függvény mutatja meg egy u csúcs hozzájárulását a teljes PR-költséghez, és ez egy értelmes felosztás a csúcsok között, mert a csúcsokon vett összeg éppen a teljes PR-költséget adja, hiszen a definíciók alapján:

$$\sum_{u \in W} C'(u) = \sum_{u \in W} \sum_{e \in H_u} c(e) =$$

$$= \sum_{e \in E \setminus H} l(e, \mathcal{P}_t) c(e) + \sum_{e \in H} (k - l(e, \mathcal{P}_t)) c(e) = \sum_{e \in E} y(e, \mathcal{P}_t) c(e) = C_{PR}(\mathcal{P}_t).$$

Itt a nem triviális egyenlőségnél azt használjuk, hogy egy nem nehéz e élre annyiszor adjuk össze $c(e)$-t, ahány csúcsra az egyértelmű hozzá tartozó úton rajta van, hiszen H-ban nincs benne, így a szimmetrikus differencia miatt az úton kell rajta lennie. Ennek száma pontosan $l(e, \mathcal{P}_t)$. Ugyanígy egy nehéz e élre pontosan annyiszor, ahány csúcshoz tartozó úton e nincs rajta, hiszen ekkor a szimmetrikus differencia miatt nem lehet rajta az úton. Ennek száma pedig pontosan $k - l(e, \mathcal{P}_t)$.

5.7. Lemma. *A $\mathcal{P}_t$ megoldás esetén a $C_{PR}(\mathcal{P}_t)$ összköltségnek a $\sum_{u \in W} C(M_u)$ költségösszeg alsó becslése.*

Bizonyítás. Az előzőekben bevezetett csúcsok közti költségfelosztás miatt elég megmutatni, hogy $\forall u \in W$-re $C'(u) \geq C(M_u)$. $C'(u) = C(P_{ut} \triangle H) = C(H_u)$. Mivel a P_{ut}

úton csak u és t a két páratlan fokú csúcs, így H és H_u élek által feszített részgráfok között, pontosan az u és a t csúcsok paritása változik meg. Ekkor viszont, felhasználva, hogy $T_u = T'\triangle\{t\}\triangle\{u\}$, továbbá, hogy T' definíciója miatt H egy T'-kötés, így H_u egy T_u-kötés, azaz $C(H_u) \geq C(M_u)$, hiszen M_u minimális T_u-kötés. Ekkor viszont:

$$C_{PR}(\mathcal{P}_t) = \sum_{u\in W} C'(u) = \sum_{u\in W} C(H_u) \geq \sum_{u\in W} C(M_u).$$

□

Mivel tetszőleges u, v esetén $M_u\triangle M_v$-ben pontosan u és v páratlan fokú csúcsok, így biztosan létezik egy $u - v$ út $M_u\triangle M_v$-ben. Az, hogy csak ez a két csúcs páratlan fokú, könnyen látszik, hiszen u-n, v-n és t-n kívül M_u és M_v csúcshalmaza megegyezik ($T\triangle\{u\}\triangle\{v\}\triangle\{t\}$), így ezek a csúcsok mindkettőben páratlan fokúak, azaz a szimmetrikus differenciában biztosan páros fokúak lesznek. Ugyanígy t is páros fokú lesz a szimmetrikus differenciában, hiszen vagy mindkettőben páros, vagy mindkettőben páratlan fokszámúnak kellett lennie. Azonban az u és v csúcsok, az M_u és M_v kötések közül pontosan az egyikben fognak csak szerepelni, így biztosan páratlan fokúak lesznek. Ekkor használjuk a levágó módszert itt is. Ennek értelmében legyen $\mathcal{Q} = \{Q_{uv}|\{u, v\} \subseteq W\}$, ahol Q_{uv} egy $u - v$ út $M_u\triangle M_v$-ben.

Nézzünk egy e élet. Ekkor legyen $R_e = \{u|e \in M_u\}$. Az előző levágó módszeres bizonyításhoz hasonlóan ha $e \in Q_{uv}$, akkor a két csúcs (u, v) közül csak az egyik lehet benne R_e-ben. Ekkor ugyanúgy könnyen látható a következő egyenlőtlenség:

$$\sum_{\substack{\{u,v\}\subseteq W\\ e\in Q_{uv}}} D_{uv} \leq \sum_{u\in R_e}\sum_{v\notin R_e} D_{uv} \leq \sum_{u\in R_e}\sum_{v\in W} D_{uv} \leq \sum_{u\in R_e} 1 = |R_e|.$$

Azaz $u_{\mathcal{Q}}(e) \leq |R_e|$. Ezek után:

$$\sum_{e\in E} u_{\mathcal{Q}}(e)c(e) \leq \sum_{e\in E} |R_e|c(e) = \sum_{e\in E}\sum_{\substack{u\\ e\in M_u}} c(e) = \sum_{u\in W}\sum_{e\in M_u} c(e) = \sum_{u\in W} C(M_u).$$

Azaz az előzőek alapján:

$$C_{VPN}(\mathcal{Q}) \leq \sum_{u\in W} C(M_u).$$

Ha $T = \{v\}$, akkor M_u pontosan a legrövidebb $u - v$ út. Így ha v pont a minimális költségű VPN-fa gyökere, akkor a $\sum_{u \in W} C(M_u)$ összköltség értéke pontosan megegyezik a minimális költségű megoldással, hiszen a fenti egyenlőtlenségben ekkor egyenlőség állna. Így elég volna már csak azt megmutatnunk, hogy bármi is legyen a T, a $\sum_{u \in W} C(M_u)$ összköltség nagyobb, mintha $T = \{v\}$.

5.3.4. Egyenlőtlenség a T-kötések között

5.8. Definíció. *Definiáljuk $C_{SP}(v)$-t a következőképpen:*

$$C_{SP}(v) = \sum_{u \in W} d_c(u, v).$$

ahol $d_c(u, v) = d_c(v, u)$ a c költségfüggvény szerinti legolcsóbb út G-ben u és v között.

Bizonyítsuk be a következő állítást, amely az előző részben lévő visszavezetéssel együtt már implikálják az egész 5.1 tételt.

5.9. Állítás. *Az eddig tárgyalt jelölésekkel biztosan létezik egy v csúcs, amire:*

$$C_{SP}(v) \le \sum_{u \in W} C(M_u).$$

Valójában egy kicsivel erősebbet bizonyítunk be, amiből az előző 5.9 állítás már következik.

5.10. Állítás. *Legyen F az a multigráf (többszörös élek engedélyezettek), amit minden $u \in W$-re a minimális költségű T_u-kötések, azaz M_u-k diszjunkt uniója. Ekkor létezik egy $v \in V$ (a gyökérnek nem kell feltétlenül terminálnak lennie), amihez minden termináltól éldiszjunkt utak vezetnek v-be.*

Lássuk, miért is következik az első állítás a másodikból. Az első azt mondja ki, hogy az élek súlyainak összege $\bigcup_u M_u$-ban legalább annyi, mint $C_{SP}(v)$-ben. Míg a második állítás pontosan azt mondja ki, hogy ennél több is igaz, hiszen az első élhalmaz konkrétan tartalmazza a másodikat. Ebből már látszik, hogy a következtetés valóban igaz.

Bizonyítás. Nevezzünk egy $S \subseteq v$ halmazt T-párosnak (vagy T-páratlannak), ha $|S \cap V|$ páros (páratlan). Könnyen észrevehető, hogy mivel $|T|$ páratlan, így $\forall S \subseteq V$-re S és $V \setminus S$ közül az egyik biztosan T-páros, míg a másik T-páratlan. Nézzük a következő lemmát:

5.11. Lemma. *Tetszőleges T-páros $S \subseteq V$-re $|\delta_F(S)| \geq |S \cap V|$ ($\delta_F(S)$ a megszokott módon az F gráfban az S csúcshalmazból kilépő élek halmaza).*

Bizonyítás. Nézzünk egy $u \in (S \cap V)$ csúcsot. Mivel S T-páros emiatt T_u-páratlan (azaz $|S \cap T_u| \neq 0$). Viszont M_u egy T_u-kötés, azaz biztosan van M_u-nak egy éle, ami szerepel a másik oldalon ($\delta_F(S)$-ben) is. Ekkor kihasználva, hogy $F = \bigcup_{u \in W} M_u$ a lemma már adódik. $\square$

Folytassuk az 5.10 állítás igazolását. Konstruáljuk meg F-ből azt az F' gráfot, amit úgy kapunk, hogy hozzáteszünk egy s csúcsot, és minden W-beli u csúcsra egy su élet. Ekkor a tételnek ekvivalens alakja, hogy létezik egy v csúcs, ahonnan létezik k nagyságú sv folyam, feltéve, hogy az élek kapacitása azonosan 1. Legyen D_u a minimális költségű F'-beli $s{-}u$ vágás F'-ben, u-t tartalmazó fele (itt a vágásra mint csúcshalmazra gondolunk, így egy D_u vágás költsége: $\sum_{e=vw, v \in D_u, w \notin D_u} c(e)$).

Feltehető, hogy $|\delta_{F'} D_u| < k$ minden $u \in V$-re, hiszen ha ez nem teljesülne, akkor a MFMC (maximális folyam-minimális vágás) tétel miatt lenne egy u csúcs, amiből legalább k nagyságú folyam vezetne az s csúcsba, amely esetben a tételünket bizonyítottuk is. Tehát tegyük fel, hogy $|\delta_{F'} D_u| < k$ minden $u \in V$-re. Vegyük észre, hogy $|\delta_{F'} D_u| = |\delta_F D_u| + |D_u \cap W|$. Ez valóban igaz, hiszen egy u csúcshoz F'-ben tartozó minimális vágás élei vagy benne vannak F-ben, vagy egy D_u-beli csúcsból s-be vezető élek, amiknek száma éppen $|D_u \cap W|$. Egy könnyű átrendezéssel az előző két információt összetéve kapjuk a következőt:

$$|\delta_F D_u| < k - |D_u \cap W| \quad \forall u \in V.$$

Ekkor már könnyen belátható, hogy D_z T-páros, ugyanis ha nem így lenne, akkor egy korábbi egyszerű észrevétel miatt $V \setminus D_u$ lenne T-páros, de ekkor, használva a fentebb bizonyított 5.11 lemmát, ellentmondásra jutnánk az előző megállapítással.

$$|\delta_F D_u| = |\delta_F(V \setminus D_u)| \geq |(V \setminus D_u) \cap W| = |W \setminus (D_u \cap W)| = k - |D_u \cap W|.$$

Mutassuk meg, hogy D_u-k ($u \in S \subseteq V$) tetszőleges metszete is T-páros. Ha ez igaz volna (és mint látni fogjuk valóban az), akkor a szitaformula miatt (csupa páros elemszámú halmazt adunk ebben össze) $\bigcup_{u \in V} D_u$ is páros lenne. Viszont $u \in D_u$, amiből $\bigcup_{u \in V} D_u = V$ következik. Viszont könnyen látható, hogy V T-páratlan, hiszen $|T|$ páratlan, mint azt láttuk korábban. Ez viszont ellentmondás, és ez az ellentmondás indirekten bizonyítaná a 5.10 állításunkat, és ezzel a 5.1 tételt.

Az előzőek alapján, meg kell mutatnunk, hogy D_u-k tetszőleges metszete T-páros, és ezzel a bizonyítás teljes lenne. Ezt teljes indukcióval tudjuk bizonyítani. Ehhez indukciós hipotézisként tegyük fel, hogy minden l-nél kevesebb számú (D_u) halmaz metszetére tudjuk, hogy T-páros, ekkor szeretnénk belátni, hogy tetszőleges l darab csúcsra a hozzájuk tartozó minimális vágások metszete T-páros. Az indukció kezdőlépése könnyű, hiszen ha $l = 2$, ez pontosan azt jelenti, hogy minden $u \in V$ esetén D_u T-páros, de ezt már láttuk, hogy valóban minden u-ra igaz. Indirekten tegyük fel, hogy létezik l darab halmaz $(D_1, ..., D_l)$ amire a metszetük, azaz $\bigcap_{i=1}^{l} D_i$, T-páratlan. Definiáljuk D_i'-t a következőképpen:

$$D_i' = D_i \setminus (\cup_{j \neq i} D_j) = D_i \setminus (\cup_{j \neq i}(D_i \cap D_j)).$$

Ekkor az indukciós feltevést és a szitaformulát felhasználva bizonyíthatjuk, hogy tetszőleges i-re D_i' T-páratlan. A definícióban felírt második egyenlőség miatt ehhez elég azt belátnunk, hogy $\bigcup_{j \neq i}(D_i \cap D_j)$ T-páratlan. (Felhasználva, hogy D_i T-páros, már könnyen látni, hogy ekor D_i' T-páratlan lenne.) Írjuk fel a szitaformulát. (Azaz vegyük az egyelemű metszeteket, ebből vonjuk ki a kételeműeket, majd adjuk hozzá a háromeleműeket, egészen az egyféleképpen felírható l elemű metszetig.)

$$\left| \left(\bigcup_{j \neq i} (D_i \cap D_j) \right) \cap T \right| = \sum_{j \neq i} |(D_i \cap D_j) \cap T| -$$

$$- \sum_{j_1 < j_2; j_1, j_2 \neq i} |(D_i \cap D_{j_1} \cap D_{j_2}) \cap T| + -... + (-1)^{l-1} |(D_1 \cap ... \cap D_l) \cap T|.$$

Ekkor a jobboldalon az indukciós feltevés miatt az utolsó összeadandó tag kivételével mindegyik halmaz páros elemszámú, de az indirekt feltevésünk miatt az utolsó tagban szereplő belső halmaz $((D_1 \cap ... \cap D_l))$ T-páratlan, így az összeg utolsó tagja páratlan. Ekkor viszont tudjuk a jobboldal paritását, biztosan páratlan. Ez viszont pontosan azt jelenti definíció szerint, hogy $\bigcup_{j \neq i}(D_i \cap D_j)$ T-páratlan, amivel D_i' T-páratlanságát is bizonyítottuk a fenti megjegyzés miatt.

Lássuk be a következő állítást is.

5.12. Állítás.

$$\sum_{i=1}^{l} |\delta_F(D_i)| \geq \sum_{i=1}^{l} |\delta_F(D_i')|.$$

Bizonyítás. Egy élet a jobboldalra egyszer számolunk, ha csak egyik az egyik vége van benne $\cup_{i=1}^{l} \delta_F(D_i')$-ben, és kétszer, ha mindkét vége benne van. Ha egy élet kétszer számolunk, akkor viszont biztosan létezik olyan u és v, amire az él benne van $\delta_F(D_u)$-ban és $\delta_F(D_v)$-ben is, azaz a baloldalon is kétszer számoljuk. Ugyanakkor, ha egyszer számoljuk, az azt jelenti, hogy az él egyik vége valamelyik u-ra $\delta_F(D_u')$-ban van, míg a másik vagy $V \setminus \cup_{i=1}^{l} \delta_F(D_i')$-ben, vagy több vesszőtlen halmaz metszetében. Az első esetben a baloldalon is leszámoljuk $\delta_F(D_u')$-ban, míg a másik esetben minden olyan i-re, amire $\delta_F(D_i)$-ben van, és az előbb mondtuk, hogy ilyen i-ből több is van. Így mindkét esetben leszámoltuk legalább annyiszor a baloldalon, mint a jobbon, azaz az állításunk bebizonyítottuk. □

Ezek után használjuk az előző 5.12 állítást, valamint, hogy ahogy bizonyítottuk D_i' T-páratlan, és így $V \setminus D_i'$ T-páros, így teljesül rá a korábban bizonyított egyenlőtlenség: $|\delta_F(V \setminus D_i')| \geq |(V \setminus D_i') \cap W| = k - |D_i' \cap W|$, valamint azt az egyszerű tényt, hogy $D_i' \subseteq D_i\ \forall i - re$, így a következőt kapjuk.

$$\sum_{i=1}^{l} |\delta_F(D_i)| \geq \sum_{i=1}^{l} |\delta_F(D_i')| = \sum_{i=1}^{l} |\delta_F(V \setminus D_i')| \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{l} (k - |D_i' \cap W|) \geq \sum_{i=1}^{l} (k - |D_i \cap W|).$$

Ugyanakkor korábban bebizonyítottuk, hogy

$$|\delta_F D_u| < k - |D_u \cap W| \quad \forall u \in V.$$

Ezt összegezve 1-től l-ig a következőt kapjuk:

$$\sum_{i=1}^{l} |\delta_F D_u| < k - \sum_{i=1}^{l} |D_u \cap W|.$$

Ez azonban ellentmondás. Így az indirekt feltevésünk volt hamis, vagyis valóban $D_1 \cap D_2 \cap ... \cap D_l$ is T-páros. Ekkor viszont, ahogy korábban is láttuk, a szitaformula miatt $\bigcup_{u \in V} D_u = V$ is T-páros lenne, ami szintén ellentmondás, hiszen V T-páratlan, ugyanis T páratlan elemszámú. Ez az ellentmondás viszont bizonyítja az 5.10 állítást. □

Ugyancsak bizonyítottuk, hogy ebből következik az 5.9 állítás is, és abból az előző alfejezetek eredményeit felhasználva a teljes 5.1 VPN-tétel. Ezzel a bizonyítás teljes. □□

5.3.5. Egyszerűbb bizonyítás

Ahogy az 5.3 alfejezet elején mondtuk, kidomborítva a tétel magyar vonatkozását, adunk egy második rövidebb bizonyítást is az utolsó rész helyett, amit Sebő András talált ki és küldött el Shepherdéknek 2008-ban. Ehhez viszont szükségünk lesz a 3. fejezetben bevezetett Gomory-Hu fákra.

Írjuk fel emlékeztetőként azt az állítást, ahonnan ez az egyszerűbb bizonyítás indul. (Ez a bizonyítás csak az utolsó rész, az 5.3.3 alfejezet helyett használható.)

5.10 állítás: Legyen F az a multigráf (többszörös élek engedélyezettek), amit minden $u \in W$-re a minimális költségű T_u-kötések, azaz M_u-k diszjunkt uniójaként kapunk. Ekkor létezik egy $v \in V$ (a gyökérnek nem kell feltétlenül terminálnak lennie) amihez minden termináltól éldiszjunkt utak vezetnek v-be.

Lássunk inkább egy másik állítást, továbbá mutassuk meg, hogy az alábbi 5.13 állításból valóban következik az előbb felírt 5.10 állítás.

5.13. Állítás. *Legyen K a V csúcshalmazon lévő teljes gráf, és legyen $T \subseteq V$ páros elemszámú. Legyen H ($k = |W|$) darab tetszőleges K-beli T-kötés éldiszjunkt uniója. Ekkor tetszőleges $u \in T$ csúcsra létezik egy másik v csúcs, úgy, hogy létezik k darab éldiszjunkt H-beli út u és v között.*

Lássuk be, hogy valóban az állítások közti következtetés igaz. Konstruáljuk meg a (5.10 állítás-beli) F-ből azt az F' gráfot, amit úgy kapunk, hogy hozzáteszünk egy s csúcsot, és minden W-beli u csúcsra egy su élet. Legyen $M'_u = M_u \cup \{us\}$ $\forall u \in W$. Ekkor F' pontosan minden u-ra az M'_u-k diszjunkt uniója, ugyanakkor M'_u egy T_s-kötés, hiszen M_u egy T_u kötés és ehhez egy $\{us\}$ élet hozzátéve éppen u és s paritása változik meg, továbbá

$$(T_u \triangle \{u\}) \triangle \{s\} = T \triangle \{s\} = T_s.$$

Így F' pontosan k darab éldiszjunkt T_s-kötés uniója. Így, ha a 5.13 állításban speciálisan H helyére F'-t és T helyére T_s-t helyettesítjük, pontosan a 5.10 állítást kapjuk vissza, így elég már csak a 5.13 állítást bizonyítanunk.

Bizonyítás. Válasszunk egy tetszőleges $u \in T$ csúcsot. A többször említett MFMC-tétel miatt elég csupán azt megmutatni, hogy ekkor létezik egy v csúcs, úgy, hogy a minimális $u - v$ vágás nagysága H-ban legalább k. Korábban definiáltuk, mi egy T-vágás, továbbá megmutattuk a 3.4 állításban, hogy minden T-kötés és T-vágás metszete nem üres (azaz legalább egyelemű). Ebből mivel H pontosan k darab T-kötés diszjunkt uniója, így tetszőleges $S \subseteq V$ T-vágásra: $|\delta_H(S)| \geq k$.

Legyen J a H gráf egy Gomory-Hu fája. Ha az u csúcsot és azokat az éleket, melyeknek egyik vége u, kivesszük J-ből, J több (vagy csak egy) részgráfra esik szét. Mivel $|T|$ páros volt, és $u \in T$, ezért a komponensek közül legalább az egyik T-páratlan. Legyen ennek a jele C. Nézzük azt a vágást, amelyiket az u csúcsot a C komponenssel összekötő él határoz meg (J-ben). Jelöljük a vágás egyik csúcshalmazát S-sel, az említett él C-beli végpontját v-vel. Ez az $(S, V \setminus S)$ vágás ekkor bizonyosan T-páratlan, azaz $|\delta_H(S)| \geq k$. Ugyanakkor ez a Gomory-Hu fa egyik éle volt, így biztosan minimális vágás u és v között. Ekkor viszont a választott u-hoz az említett v jó, hiszen a minimális $u - v$ vágás legalább k. Mivel u tetszőleges volt, ez pontosan az amit bizonyítani szerettünk volna. $\square$

Így bebizonyítottuk az 5.1 tételt, azaz, hogy előre rögzített útrendszernél, SPR útválasztás esetén, a hose modellben a VPN-probléma optimális megoldása egy VPN-fa, és ezzel igazoltuk a 4 fejezet végén használt jelölésekkel az $OPT(SPR) = OPT(TR)$ egyenletet. Mint mondtuk, sokáig az a feltételezés élt, hogy ez MPR útválasztás esetén is igaz. Azonban Shepherdék mutattak egy egyszerű ellenpéldát. A következő fejezet célja ennek az ellenpéldának a bemutatása, és így a sejtés cáfolása.

6. MPR eset

Ahogy az előbb utaltunk rá, most áttérünk a VPN-tételkör egy másik esetére, az MPR esetre. Emlékeztetőül ebben az esetben az i és a j csúcsok között egy egység nagyságú folyamot kell megadnunk. Tehát megadunk egy $i-j$ utakból álló $\mathcal{P}_{ij}$ útrendszert, és megadjuk, hogy a két csúcs közti kommunikáció hányadrésze történik az egyes utakon. Ez a következőképpen is felfogható: $F_{ij}: \mathcal{P}_{ij} \to [0;1]$, ahol $\sum_{p\in\mathcal{P}_{ij}} F_{ij}(p) = 1$. Legyen $\mathcal{P} = \bigcup_{\{i,j\}\subseteq W} \mathcal{P}_{ij}$. Ekkor, ha $\mathcal{P}$ a megoldásunk és a t időpillanatban az igénymátrixunk éppen D^t, akkor az e élen éppen

$$\sum_{\{i,j\}\subseteq W} \sum_{\substack{p\in\mathcal{P}_{ij}\\ e\in p}} F_{ij}(p) D^t_{ij}$$

mennyiséget kell kommunikálni. Célunk szintén $\mathcal{P}$ meghatározása.

Mint említettük korábban, sokáig az a sejtés élt, hogy ebben az esetben is az optimum egy fán vétetik fel, de ahogyan ezt látni fogjuk, ez nem igaz, csak speciális esetekben. Ilyen speciális eset például, ha a gráf egy kör, vagy teljes gráf és $c \equiv 1$, vagy ha a gráfnak legfeljebb 4 csúcsa van. Ezeket az eseteket Hurkens igazolta 2005-ben [11].

6.1. LP-felírás

Először is írjuk fel a VPN-problémát lineáris programozási feladatként. Az egyszerűség kedvéért mondjuk azt, hogy b a teljes V halmazon értelmezett, csak $b_t = 0$ ha $t \notin W$. Legyen $\mathcal{P}(= \bigcup_{\{i,j\}\subseteq W} \mathcal{P}_{ij})$ beli utak száma P. Ekkor egy P hosszú x vektort keresünk megoldásnak, amire $\sum_{p\in\mathcal{P}_{ij}} x_p = 1$ $\forall\{i,j\} \subseteq W$ csúcspárra. Vegyük az utak és élek incidenciamátrixát. Azaz egy $|E| \times P$ nagy mátrixot, melynek e-edik sorának p-edik eleme $\alpha^e_p = 1$, ha $e \in p$ különben $\alpha^e_p = 0$. Nevezzük u_e-nek az e élen igényelt kapacitást (a jobb átláthatóságért most kivételesen ne $u(e)$-nek jelöljük). Ekkor a következő maximalizálási feladatot tudjuk felírni:

$$u_e = \max \sum_{\{i,j\}\subseteq W} \sum_{p\in\mathcal{P}_{ij}} \alpha^e_p x_p D_{ij}$$

$$\begin{aligned} \text{ahol} \quad \sum_{j\in W} D_{ij} &\le b_i, & \forall i \in W \\ D_{ij} &\ge 0, & \forall \{i,j\} \subseteq W. \end{aligned}$$

Ekkor az erős dualitástételt használva ezt a következőképpen írhatjuk át, ahol y a duális megoldás:

$$u_e = \min \sum_{i \in W} b_i y_i^e$$

$$\begin{aligned} \text{ahol} \quad y_i^e + y_j^e &\geq \sum_{p \in \mathcal{P}_{ij}} \alpha_p^e x_p, && \forall \{i,j\} \subseteq W,\ \forall e \in E \\ y_i^e &\geq 0, && \forall i \in W,\ \forall e \in E. \end{aligned}$$

A feladatunk továbbra is a $\sum_{e \in E} c_e u_e$ költség minimalizálása. (Itt $c_e := c(e)$ szintén az egyszerűbb átláthatóságért bevezetett jelölés.) Ez alapján az előző eredményt felhasználva újra felírhatunk egy minimalizálási problémát.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{e \in E} c_e \sum_{i \in W} b_i y_i^e \\ \text{ahol} \quad & y_i^e + y_j^e - \sum_{p \in \mathcal{P}_{ij}} \alpha_p^e x_p \geq 0, && \forall \{i,j\} \subseteq W,\ \forall e \in E \\ & \sum_{p \in \mathcal{P}_{ij}} x_p = 1, && \forall \{i,j\} \subseteq W \\ & y_i^e \geq 0, && \forall i \in W,\ \forall e \in E \\ & x_p \geq 0, && \forall p \in \mathcal{P}. \end{aligned}$$

Ekkor megint csak felírhatjuk a feladat duálisát, amelynek segítségével a speciális esetek bizonyítását megmutatták.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{\{i,j\} \subseteq W} \mu_{ij} \\ \text{ahol} \quad & \sum_{j \in W} \lambda_{ij}^e \leq c_e b_i, && \forall i \in W,\ \forall e \in E \\ & \mu_{ij} - \sum_{e \in E} \alpha_p^e \lambda_{ij}^e \leq 0, && \forall \{i,j\} \subseteq W,\ \forall p \in \mathcal{P}_{ij} \\ & \lambda_{ij}^e \geq 0, && \forall \{i,j\} \subseteq W,\ \forall e \in E. \end{aligned}$$

6.2. Ellenpéldák

Használjuk fel, hogy az előbb az u_e kapacitást megadtuk, mint egy minimalizálási feladat megoldását, valamint hogy elegendő a $b \equiv 1$ esetet nézni, hiszen az ezt lehetővé tevő bizonyítás gond nélkül átültethető MPR esetre is.

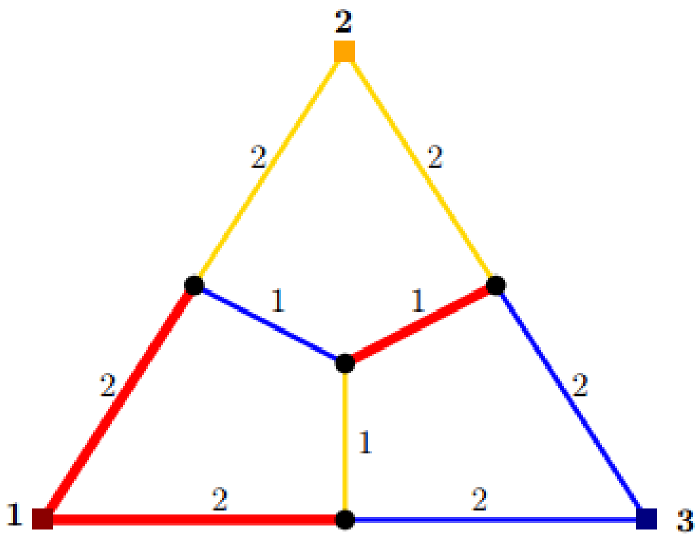
$$u_e = \min \sum_{i \in W} y_i^e$$

$$\text{ahol} \quad y_i^e + y_j^e \geq \sum_{p \in \mathcal{P}_{ij}} \alpha_p^e x_p, \qquad \forall \{i,j\} \subseteq W,\ \forall e \in E$$

$$y_i^e \geq 0, \qquad \forall i \in W,\ \forall e \in E.$$

Ekkor egy y megoldás y_i^e koordinátája felfogható úgy, mint az i csúcs által az e élen fizetett kapacitás mennyisége. Ekkor legyen

$$C(y) = \sum_{e \in E} \sum_{i \in W} c_e y_i^e.$$



3. ábra. Első ellenpélda

A valószínűsíthetően legegyszerűbb ellenpéldának 7 csúcsa van, ebből 3 terminál. Az élek költsége rájuk van írva. A különböző csúcsok által fizetett éleket különböző színekkel jelöltük (a csúcs színének megfelelően). Két csúcs közt a köztük futó utak halmaza a két csúcs színének megfelelő élekből álló utak legyenek. (Így ha $i = 1$ és $j = 2$ akkor$\mathcal{P}_{12}$ az a 2 út, melyek csak piros és sárga élekből állnak és így tovább a másik két terminál párral.) Ekkor a 2 út között fele-fele arányban osszuk el a folyamunkat mindhárom esetben (azaz mind a 6 darab $\mathcal{P}$-beli p útra $x_p = \frac{1}{2}$). Ekkor, mivel $b \equiv 1$, ezért az egy jó duális megoldás, ha $y_i^e = \frac{1}{2}$, ha az e élnek és az i csúcsnak a színe megegyezik, különben 0. Ennek a megoldásnak a költsége $\sum_{e \in E} \sum_{i \in W} c_e y_i^e = \frac{15}{2}$. Ugyanakkor könnyen kiszámolható (minden csúcs végigpróbálásával gyökérként), hogy az optimális VPN-fa költsége 8. Ez tehát valóban egy ellenpélda ugyanis $\frac{15}{2} < 8$.

További ellenpéldákat konstruált Olver PhD tézisében [13], az első példa (Fano-sík) ötlete alapján, különböző projektív síkok segítségével. Ezzel ugyan megmutatta, hogy az ellenpéldák száma végtelen, ugyanakkor továbbra is nyitott kérdés maradt, hogy elérhető-e a 2 mint szorzó. Ennél nagyobb rés biztos nem lehet, hisz be is bizonyítottuk, hogy a legolcsóbb VPN-fa 2-approximáció az MPR esetre is. Ezzel bebizonyítottuk, hogy az SPR esetben bizonyított tétel MPR esetben nem igaz.

7. Általánosítások

Az elmúlt években a VPN tételkörnek több általánosítása is született. Ezek jórészt a modellt általánosítják a gyakorlatban megjelenő feladatok hatékonyabb megoldása érdekében, ugyanakkor szinte kivétel nélkül megmaradnak annál az eddig is használt módszernél, hogy a terminálok közti utat előre rögzítik, a kommunikáció teljes idejére. Ráadásul itt is végig az SPR útválasztás volt az uralkodó. Így nézzük a hose modellnek az általánosításait.

A legátfogóbb általánosítás az RND (Robust Network Design) probléma bevezetése. Adott egy G gráf, c egységenkénti élköltséggel, valamint adott egy tetszőleges (jól meghatározott) $\mathcal{H}$ igénymátrix univerzum, ekkor célunk megadni egy $\mathcal{P} = \{W_{ij} | \{i, j\} \subseteq W\}$ rendszert, ahol W_{ij} az i csúcsból j-be való elérést biztosító rögzített séta, továbbá egy hozzátartozó $u_{\mathcal{P}}$ élkapacitást, ami azt tudja, hogy minden $\mathcal{H}$-beli D mátrix által jelölt igények kielégíthetőek $\mathcal{P}$-n, nem megsértve a kapacitásokat. Ha $l(W, e)$ jelöli az e él multiplicitását a W sétában, ezt a következőképpen írhatjuk le:

$$u(e) \geq \max_{D \in \mathcal{H}} \sum_{i,j \in W} l(P_{ij}, e) D_{ij} \quad \forall e \in E.$$

(Szimmetrikus mátrixok esetén elég az $\{i, j\} \subseteq W$ részre szummázni.)

Mint Olver bebizonyította [13], ennek a feladatnak az optimumát még közelíteni is nehéz. Azonban több speciális igénymátrix univerzumot mutattak, ahol ennél jóval pozitívabb eredmények születtek. Eisenbrand és Happ [3] a következő általánosítást adta. A W-beli csúcsokat particionáljuk csoportokba $(W_1, ..., W_r)$. Tegyük fel, hogy az egy csoportba eső csúcsok nem kommunikálnak egymással, csak a különböző csoportok csúcsai (például egy irodában lévő számítógépek, akik helyi hálózaton össze vannak kötve nem kommunikálnak egymással csak ezen a hálózaton, míg a különböző irodákban lévő gépek összeköttetését meg kell oldanunk). Ennek a modellnek speciális esete a hose modell, ha $n = 1$, mint az egyszerűen látszik, ugyanakkor az aszimmetrikus hose modell is, ha $n = 2$ (a fogadók és küldők alkotják a két csoportot). Erre a modellre egy konstans faktorú algoritmust tudtak adni.

Nézzünk most egy másik általánosítást is. Adott egy T^b élsúlyozott fa (az e élek kapacitása $b(e)$ erre vonatkozik a b jelölés a fában), aminek a leveleinek száma $|W|$, a terminálokanak megfelelően címkézve. (T tetszőleges, még az sem feltétel, hogy a $V(G)$ csúcshalmazon adjuk meg.) Egy D igénymátrixot T^b-megengedettnek nevezünk, ha bármely terminálpárok közti igény szimultán kielégíthető T^b-n, nem megsértve az élkapacitásokat. Jelöljük $\mathcal{H}_{T^b}$-vel az így generált mátrixuniverzumot. Jegyezzük meg, hogy ez csak szimmetrikus esetre működik, az aszimmetrikus hose modellel nem is összehasonlítható, azonban a szimmetrikus hose modell speciális esete, ha T egy csillag. Ekkor ugyanis a középső pont felelne meg a VPN-fa gyökerének, míg egy él kapacitása a hozzá tartozó terminál kommunikációjának felsőkorlátjának felel meg. A modell azért hasznos, mert az adott fát fel tudjuk úgy építeni, hogy az egymással sokat kommunikáló csúcsok közel kerüljenek, míg az egymással relatív kevesebb információt cserélő csúcscsoportok relatív távolabb legyenek egymástól. (Ilyen értelemben ez vehető az Eisenbrand-Happ féle modell inverzének is.) Ebből az ötletből kiindulva Olver és Shepherd [14] adott egy a VPN-fa általánosításának tekinthető megoldást, melyre többközpontú tervezés néven hivatkozunk. Egy tetszőleges T-fára (melynek levelei a terminálokkal vannak címkézve) T-beágyazásnak nevezünk egy $\varphi: T \to G$ leképezést, ha a következőket tudja:

- $\varphi(v) \in V(G)\ \forall v \in V(T)$
- $\varphi(i) = i\ \forall i \in W$
- $\varphi(e)$ egy legrövidebb $\varphi(u) - \varphi(v)$ út G-ben, ahol $e = uv$ él. ($\forall e \in E(T)$)

Ekkor két terminál közti egyértelmű W_{ij} sétát az i és j terminálok közti egyértelmű T-beli út éleinek képének rendre egymás után fűzésével kapjuk. Ekkor T^b-hubbingnak nevezünk egy (φ, u) párost, ahol φ egy T^b-beágyazás, míg u egy kapacitásfüggvény G-n, mely az eddigieknek megfelelően a következőt tudja:

$$u(e) \geq \sum_{\substack{f \in E(T^b) \\ e \in \varphi(f)}} b(f).$$

Olver és Shepherd [14] ugyancsak adtak egy 8-approximációt az optimális leképezés megadására, ami talán magában is optimális megoldást eredményez, ez egy nyitott kérdés maradt.

Fréchette [6] bevezette a hose modell egy másik variánsát, a korlátozott hose modellt. Ennek lényege, hogy azon kívül, hogy az egy csúcsban termináló és innen induló kommunikációmennyiségnek felső határt szabunk (b korlátozóvektor), megadhatunk minden i, j párra egy D_{ij}^{max} felső korlátot, ami megadja maximumát az i és j csúcsok közötti információcserének. Ez persze még gyakorlatiasabb, hiszen könnyen elképzelhető, hogy van két csúcs, amelyek ugyan sokat kommunikálnak, viszont egymással csak elenyésző mennyiséget. Így a hose modellhez hasonlóan most is definiálhatjuk a $\mathcal{H}_{b,D^{max}}$ mátrix világot, és ebből az u kapacitásfüggvényünket már az előzőek alapján könnyen kiszámíthatjuk, a szokásos maximalizálási feladat megoldásával.

$$\mathcal{H}_{b,D^{max}} = \{D \in \Re_+^{k\times k} : D_{ii} = 0,\ D_{ij} \le D_{ij}^{max}\ \forall\{i,j\} \subseteq W;\ \sum_{j\in W} D_{ij} \le b_i\ \forall i \in W\}.$$

Mint bebizonyították, ennek a modellnek az él és csúcs korlátoktól függően az optimális megoldása valahol az előzőekben tárgyalt T-hubbing megoldások és a pipe modellben leírt leggyorsabb utak módszerével kapott megoldás között van, az adott gráftól függően. Ugyanakkor adtak egy heurisztikát, a legjobb T megtalálására is.

A gyakorlatban így egy kommunikációs hálózat tervezésénél lehetőségünk van megadni a rendelkezésre álló információk alapján, hogy milyen modell lenne a legideálisabb, de még esetleg abban a modellben sem tudunk optimális hálózatot megadni, csak közelítőleg optimálisat, de ezt nem is várhatjuk, hiszen a kérdés NP-nehéz.

8. Összegzés

Végül lássuk, mit valósítottunk meg a bevezetésben kitűzött célokból. Miután megmutattuk, hogy a többtermékes folyamfeladatra a vágásfeltétel nem elegendő, a japán tételben adtunk egy szükséges és elégséges feltételt a megoldás létezésére. Ezután a VPN-tételkör előkészítésében definiáltuk a Gomory-Hu fákat, amelyek segítségével könnyedén meg lehet adni a minimális vágást tetszőleges két csúcs között. Adtunk egy egyszerű algoritmust is, aminek a segítségével tetszőleges gráfhoz megadható annak egy Gomory-Hu fája. Ezután definiáltuk a VPN-problémát, ezen belül azt, hogy mit értünk VPN-fa alatt. Bevezettük a pipe és a hose modelleket, valamint különböző útválasztási módszereket, beleértve a későbbi két legfontosabbat, az SPR módszert, ahol minden terminálpár között rögzítünk egy egyszerű utat, valamint ennek LP-relaxáltját, az MPR módszert, ahol minden csúcspárra egy egység nagyságú folyamot rögzítünk. Később fel is írjuk ezt az LP-relaxált feladatot egy lineáris programként, amiben minimális megoldást keresünk. A dolgozat legfőbb bemutatott eredménye a VPN-tétel kimondása és bizonyítása. A tétel, miszerint a hose modellben SPR útválasztás esetén az optimális megoldás VPN-fa alakú bizonyítása több egyszerű lépésből áll, bevezetjük a $b \equiv 1$ esetre korlátozott PR-problémát, ami, mint láttuk, ekvivalens a VPN-problémával, de ennek bizonyítása egyszerűbb. Az utolsó lépésre két bizonyítást is mutattunk, az eredetit és a Gomory-Hu fák szerkezetére épülő, Sebő András által kitalált egyszerűbb bizonyítást. Az ezt követő fejezetben egy egyszerű ellenpéldával megmutatjuk, hogy az előzőekben az SPR esetben igazolt tétel MPR esetben nem igaz, ehhez a korábban említett LP felírást használtuk fel. Az utolsó fejezetben a hose modellnek több általánosítását is bemutattunk, a korlátozott hose modellt, valamint a többközpontú tervezést, ennél bevezettünk egy talán optimális megoldást, a T-beágyazások segítségével. Ugyanakkor az, hogy ez a megoldás valóban optimális-e, nyitott kérdés maradt. Ezzel áttekintettük a témában egészen a közelmúltig publikált cikkeket, és összegeztük az eredményeket.

Hivatkozások

[1] W.J. Cook, W.H. Cunningham, W.R. Pulleyblank, A. Schrijver, *Combinatorial Optimization*, *1st Ed. Wiley-Interscience*, 1997

[2] N.G. Duffield, P. Goyal, A. Greenberg, P. Mishra, K.K. Ramakrishnan, J.E. van der Merwe, *A flexible model for resource management in virtual private networks*, *SIGCOMM*, 1999, 95–108

[3] F. Eisenbrand, E. Happ, *Provisioning a virtual private network under the presence of non-communicating groups*, *6th Italian Conference on Algorithms and Complexity, CIAC*, 2006, 105–114

[4] T. Erlebach, M. Rüegg, *Optimal bandwidth reservation in hose-model VPNs with multi-path routing*, *IEEE INFOCOM*, 2004, 2275–2282

[5] J.A. Fingerhut, S. Suri, J.S. Turner, *Designing least cost nonblocking broadband networks*, *Journal of Algorithms*, 24. évf. 2. sz. 1997, 287–309

[6] A. Fréchette, F.B. Shepherd, M.K. Thottan, P.J. Winzer, *Shortest path versus multi-hub routing in networks with uncertain demand*, *IEEE INFOCOM*, 2013, 710–718.

[7] R.E. Gomory, T.C. Hu, *Multi-terminal network flows*, *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1961

[8] N. Goyal, N. Olver, F.B. Shepherd, *The VPN conjecture is true*, *Journal of ACM*, 60. évf. 3. sz. 17. cikk, 2013

[9] F. Grandoni, V. Kaibel, V. Oriolo, M. Skutella, *A short proof of the VPN tree routing conjecture on ring networks*, *Oper. Res. Lett*, 36. évf. 3. sz., 2008, 361–365

[10] A. Gupta, J. Kleinberg, A. Kumar, R. Rastogi, B. Yener, *Provisioning a virtual private network: A network design problem for multicommodity flows*, *33th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)*, 2001, 389–398

[11] C.A.J. Hurkens, J.C.M. Kejisper, L. Stougie, *Virtual private network design: a proof of the tree routing conjecture on ring networks*, *IPCO*, 2005, 407–421

[12] M. Iri, *On an extension of the maximum-flow minimum-cut theorem to multicommodity flows*, *The Operation Research Society of Japan*, 13. évf. 3. sz. 1971, 129–135.

[13] N. Olver, *Robust network design*, *McGill Egyetem, PhD dolgozat*, 2010

[14] N. Olver, F.B. Shepherd, *Approximability of robust network design*, *ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, 2010, 1097–1105