Geometriai fejtörőkhöz kapcsolódó matematikai problémák

BSc alkalmazott matematikus szakdolgozat

Írta: **Bikki Bettina**

Témavezető:

Csikós Balázs

Geometriai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Budapest, 2017

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Csikós Balázsnak, hogy figyelemmel kísérte a szakdolgozatom készülését, és hasznos tanácsokkal látott el közös munkánk során. Szeretném megköszönni családomnak és barátaimnak, akik végig támogattak és biztattak.

Tartalomjegyzék

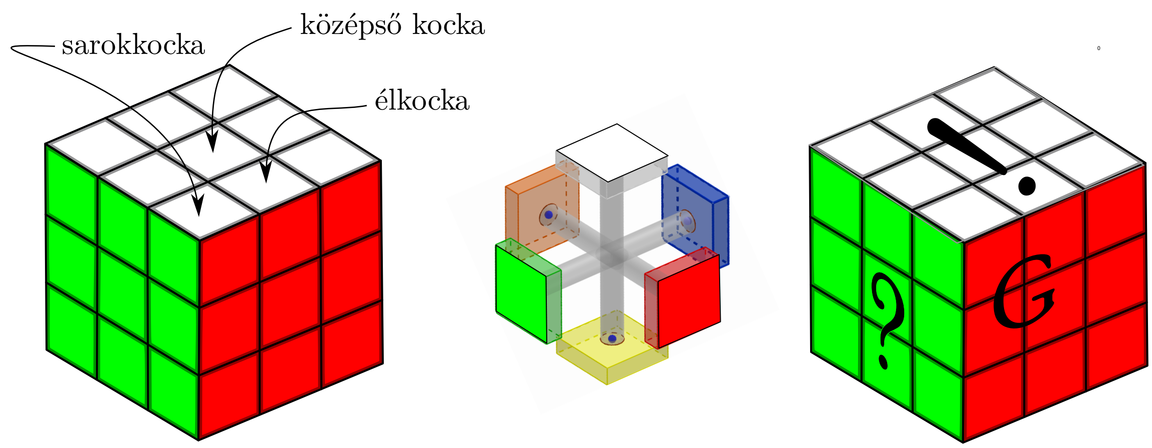
1. Bevezetés

Szakdolgozatom témájának a világ egyik legismertebb logikai játékát választottam, a Rubik-kockát, amit nem a hagyományos szempontból közelítettem meg. Hogyan épül fel az egész bűvös kocka? Hányféleképpen lehet összerakni? Ha elfordul benne pár elem, akkor is ki lehet rakni minden esetben? Ha igen, akkor miért? Mi történik olyankor ha a hagyományos színek helyett képekkel játszunk, és hat darab különböző képet kell így kiraknunk? Változik ilyenkor valami vagy minden ugyanúgy marad? Mennyi az a minimális lépésszám, amennyiből bármilyen helyzet esetén ki lehet rakni a Rubik-kockát?

Ezekre a kérdésekre fogok válaszolni a következő fejezetekben.

2. A bűvös kocka felépítése

Először is ahhoz, hogy bármivel is tudjunk számolni a bűvös kocka felépítésére lesz szükségünk. A hagyományos $3 \times 3 \times 3$-as Rubik-kocka háromféle építőelemből áll. A sarokkockákból, amelyből 8 darab van és mindegyiken három különböző szín, az élkockákból, amiből 12 darab van és mindegyiken kétféle szín, illetve a közepekből, amiből 6 darab van és mindegyik különböző színű. Az utóbbiak egymáshoz viszonyított helyzete rögzítve van, fizikailag a lapközéppontokba eső kis kockák egy oktaéder csúcsaiban végződő tengelykereszt végeihez vannak erősítve.



1. ábra. A Rubik-kocka elemei, a tengelykereszt, és egy Rubik-kocka képekkel

A klasszikus Rubik-kocka esetén a színek úgy helyezkednek el, hogy a fehérrel szemben van a sárga, a pirossal szemben a narancssárga, végül a kékkel szemben a zöld. Ha a fehér oldal irányából nézünk a kockára, akkor a szomszédos oldalakon a színek sorrendje a pozitív, azaz az óramutató járásával ellentétes körüljárás szerint piros-kék-narancssárga-zöld. Az utóbbi feltételt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a kocka középpontjából a fehér, zöld és piros lapok középpontjába mutató vektorok potitív irányítású, azaz jobbsodrású bázist alkotnak.

2.1. Forgatások kódolása

A kockán végrehajtott szabályos forgatásokat egy-egy betűvel szokás rövidíteni, melyek a megfelelő angol szavak kezdőbetűi általában.

Az összes forgatást úgy képzeljük el, hogy abban az esetben ha velünk szemben lenne az oldal amiről szó van, akkor azt az óramutató járásával azonos irányban kell elforgatnunk. Ezeket szoktuk egy adott betűvel jelölni. Akkor, ha egy oldalon, háromszor kellene az óramutató járásával megegyező irányba tekerni, már nem érné meg, helyette az óramutató járásával ellenkező irányba forgatunk az oldalon, ezt a betű utáni $^{-1}$-gyel jelöljük (van, hogy aposztróf szerepel helyette). Ha pedig kettőt szeretnénk fordítani az oldalon, akkor a betű utáni ^{2} jellel (vagy egy szimpla kettesel) jelöljük, ez egyértelműen mindegy, hogy melyik irányba történik.

Következzenek az oldalak forgatásai (alapforgatások):
R, R^{-1}, R^2 (right): a kocka jobb oldalán történő forgatás;
L, L^{-1}, L^2 (left): a kocka bal oldalán történő forgatás;
F, F^{-1}, F^2 (front): a kocka szemben lévő oldalán történő forgatás;
B, B^{-1}, B^2 (back): a kocka hátsó oldalán történő forgatás;
U, U^{-1}, U^2 (up): a kocka felső oldalán történő forgatás;
D, D^{-1}, D^2 (down): a kocka alsó oldalán történő forgatás.

Az következő három forgatást úgy is el lehet érni, hogy azt az oldalt, aminek megfelelően forgatjuk a középső sort, elforgatjuk óramutató járásával ellenkező irányba, és a másik vele párhuzamos oldalt pedig óramutató járásával megegyező irányba.

Viszont ezzel olyan szinten más állást kapunk, hogy ilyenkor a középső kis kockák ugyanott maradnak, a középső sorok elforgatásánál pedig elfordulnak, és egy verseny alatt ez már nem mindegy, időt veszthetnek vele a játékosok. Persze matematikai szempontból mindegy, mivel átforgatható egymásba a két pozíció úgy, hogy a sorok helyzetén nem változtatunk, csak magát a kockát forgatjuk egyben, így nem igényel több lépést a kirakása

M, M^{-1}, M^2: a bal oldallal párhuzamosan lévő középső sort a bal oldal forgatásával megegyezően fordítjuk;

E, E^{-1}, E^2: a felső oldallal párhuzamosan lévő középső sort a felső oldal forgatásával megegyezően fordítjuk;

S, S^{-1}, S^2: a szemközti oldallal párhuzamosan lévő középső sort a szemközti oldal forgatásával megegyezően fordítjuk.

Van pár forgatás, ami nem csak egy oldalt mozgat el, hanem kettőt is, vagy akár az egész kockát egyben.

r, r^{-1}, r^2: a jobb oldal forgatásának megfelelően a jobb oldalt és a vele párhuzamos középső sort közösen forgatjuk;

l, l^{-1}, l^2: a bal oldal forgatásának megfelelően a bal oldalt és a vele párhuzamosan lévő középső sort közösen forgatjuk;

b, b^{-1}, b^2: a hátsó oldal forgatásának megfelelően a hátsó oldalt és a vele párhuzamosan lévő középső sort közösen forgatjuk;

f, f^{-1}, f^2: a szemközti oldal forgatásának megfelelően a szemközti oldalt és a vele párhuzamosan lévő középső sort közösen forgatjuk;

u, u^{-1}, u^2: a felső oldal forgatásának megfelelően a felső oldalt és a vele párhuzamosan lévő középső sort közösen forgatjuk;

d, d^{-1}, d^2: az alsó oldal forgatásának megfelelően az alsó oldalt és a vele párhuzamosan lévő középső sort közösen forgatjuk.

Ezek a forgatások megfelelnek annak, mint ha azt az oldalt forgatnánk óramutató járásával megegyezően, ami szemben van azzal az oldallal, ami szerint forgatunk. Tehát az r forgatást meg lehet oldani az L forgatással is, viszont itt is a versenyzés szempontjából nem mindegy, hogy a forgatás végén melyik középső elem hol lesz, és honnan kell folytatniuk, mert azzal időt veszíthetnek ha a kockán is külön forgatni kell még.

x, x^{-1}, x^2: a jobb oldal forgatásának megfelelően az egész kockán fordítunk;
y, y^{-1}, y^2: a felső oldal forgatásának megfelelően az egész kockán fordítunk;
z, z^{-1}, z^2: a szemközti oldal forgatásának megfelelően az egész kockán fordítunk.

2.2. Elemek kódolása

Nem csak a forgatásokat, hanem az elemek helyét is szokták kódokkal jelölni, hogy rövidebben tudjanak hivatkozni egy kis kockára. Ezeket az oldalakhoz hasonlóan jelölik. Ha egy sarokelemről van szó, akkor annak a három oldalnak a betűjele alkotja a kódot, aminek része, ha pedig élkockáról beszélünk, akkor az a két betű alkotja, amelyik két oldalhoz tartozik az elem. Így a következő jelölések adódnak:

Sarokkockákhoz:
URF: felső, jobb és szemben lévő oldalak határán elhelyezkedő sarokkocka;
URB: felső, jobb és hátulsó oldalak határán elhelyezkedő sarokkocka;
ULF: felső, bal és szemben lévő oldalak határán elhelyezkedő sarokkocka;
ULB: felső, bal és hátulsó oldalak határán elhelyezkedő sarokkocka;

DRF: alsó, jobb és szemben lévő oldalak határán elhelyezkedő sarokkocka;

DRB: alsó, jobb és hátulsó oldalak határán elhelyezkedő sarokkocka;

DLF: alsó, bal és szemben lévő oldalak határán elhelyezkedő sarokkocka;

DLB: alsó, bal és hátulsó oldalak határán elhelyezkedő sarokkocka.

Élkockákhoz:

UF: felső és szemben lévő oldalak határán lévő élkocka;

UB: felső és hátulsó oldalak határán lévő élkocka;

UR: felső és jobb oldalak határán lévő élkocka;

UL: felső és bal oldalak határán lévő élkocka;

DF: alsó és szemben lévő oldalak határán lévő élkocka;

DB: alsó és hátulsó oldalak határán lévő élkocka;

DR: alsó és jobb oldalak határán lévő élkocka;

DL: alsó és bal oldalak határán lévő élkocka;

RF: jobb és szemben lévő oldalak határán lévő élkocka;

RB: jobb és hátulsó oldalak határán lévő élkocka;

LF: bal és szemben lévő oldalak határán lévő élkocka;

LB: bal és hátulsó lévő oldalak határán lévő élkocka.

Mindegy, hogy a betűk a kódokban milyen sorrendben vannak megadva, mivel például az alsó és jobb oldalak határán lévő élkocka megegyezik a jobb és alsó oldalak határán lévővel, tehát ezek a kódok egyértelműen meghatározzák, hogy melyik elemről beszélünk.

2.3. A darabjaira szedett bűvös kocka összerakásainak száma

2.1. Állítás. *Egy* $3 \times 3 \times 3$*-as szétszedett Rubik-kockát* $3^8 \cdot 8! \cdot 2^{12} \cdot 12!$ *különböző módon tudunk összerakni az elemeiből (de nem feltétlenül úgy, hogy abból kitekerhető legyen az eredeti).*

Bizonyítás. A közepeket fixen tartó hatágú tengely megkülönbözteti egymástól a sarokhelyeket. Mivel minden sarok három olyan szomszédos oldalhoz tartozik, amelyeken a közepeknek különbözik a színük, ezért a három határoló színnel egyértelműen megadhatjuk, hogy melyik sarokról beszélünk. Így 8!-féleképpen választhatjuk meg a 8 sarokkocka helyét, és mindegyiket 3-féleképpen forgathatjuk a neki kiválasztott helyen, ebből adódik a $3^8 \cdot 8!$ tag.

Az élkockákkal hasonló a számolás menete. A kocka minden élét egyértelműen meghatározza azon két lap közepének a színe, melyek az élre illeszkednek, ezért 12!-féleképpen adhatjuk meg, hogy melyik élkocka melyik él közepére kerüljön. Mindegyiket 2-féle állásba rakhatjuk be az adott él közepére, ebből adódik a tételben szereplő szorzás másik tagja a $2^{12} \cdot 12!$. □

2.2. Állítás. *Egy* $3 \times 3 \times 3$*-as szétszedett Rubik-kockát, amelyen mindegyik szín helyett képek szerepelnek* $3^8 \cdot 8! \cdot 2^{12} \cdot 12! \cdot 4^6$ *különböző módon rakhatunk össze az elemeiből (de nem feltétlenül úgy, hogy abból kitekerhető legyen az eredeti kocka).*

Bizonyítás. Ezen állítás bizonyítása ugyanazon az elven működik, mint az előzőé. A szorzat első része pontosan ugyanúgy jön ki, mint abban az esetben amikor színek vannak minden oldalon, mivel az elemek helyzetén a képek semmit sem változtatnak és ugyanúgy meg van különböztetve minden hely, mint az eredetinél. Viszont itt már a közepeket is el tudjuk forgatni, de meghatározott helyük van, ezért máshova nem tudjuk átrakni őket, így mindegyiket 4 helyzetbe tudjuk forgatni, ebből jön a képletbe 4^6 tényező. $\square$

3. Csoportok és csoporthatások

3.1. Definíció. Legyen $G \neq \varnothing$ egy adott halmaz, és $* : G \times G \to G$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 * g_2$ egy rajta értelmezett kétváltozós művelet. Ekkor G *csoport*, ha teljesülnek rá az alábbiak:

1. $*$ asszociatív: $(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$;
2. $\exists e \in G$ neutrális elem: $\forall g \in G : g * e = e * g = g$;
3. $\forall g \in G : \exists g^{-1} \in G : g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$.

3.2. Definíció. Legyen X (véges) halmaz. Az X halmazt önmagára képező kölcsönösen egyértelmű leképezéseket az X halmaz *permutációinak* nevezzük. Ezek összességét S_X jelöli. Az $\{1, 2, ..., n\}$ halmaz összes permutációjának halmazát röviden S_n-nel jelöljük.

Egy halmaz permutációi csoportot alkotnak a kompozíció műveletére nézve. Az S_n permutációcsoport elemszáma $n!$.

3.3. Definíció. Legyen G csoport, $H \subseteq G$. Ekkor H *részcsoport* G-ben ($H \leq G$), ha H maga is csoport a G-beli műveletekre nézve.

3.4. Definíció. A G csoport egy $S \subseteq G$ *részhalmaza által generált részcsoport* a legszűkebb részcsoport, mely tartalmazza S-t. Jele: $< S >$.

3.5. Definíció. G *ciklikus*, ha $\exists g \in G$, melyre teljesül: $< g >= G$
$< g >= \{g^i | i \in \mathbb{Z}\}$. Ekkor g-t a G csoport *generátorelemének* nevezzük.

3.6. Definíció. Egy $g \in G$ *csoportelem rendje rendje* a $\sigma(g) = \min\{k > 0 | g^k = 1\}$. $\sigma(g) = | < g > |$ szám.

3.7. Definíció. Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre. Egy $\varphi : G \to H$ leképezést *csoporthomomorfizmus*nak nevezünk, ha művelettartó, azaz $\varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1) \bullet \varphi(g_2)$ bármely g_1, $g_2 \in G$-re.

3.8. Definíció. Ha φ kölcsönösen egyértelmű is a G és H halmazok között, akkor φ *izomorfizmus.* A G és H csoportok *izomorfak*, ha van köztük izomorfizmus.

3.9. Definíció. Legyen G csoport, és X tetszőleges nemüres halmaz. Azt mondjuk, hogy G *hat* az X halmazon, ha adott egy
$G \times X \to X$, $(g, x) \to gx$ leképezés, melyre

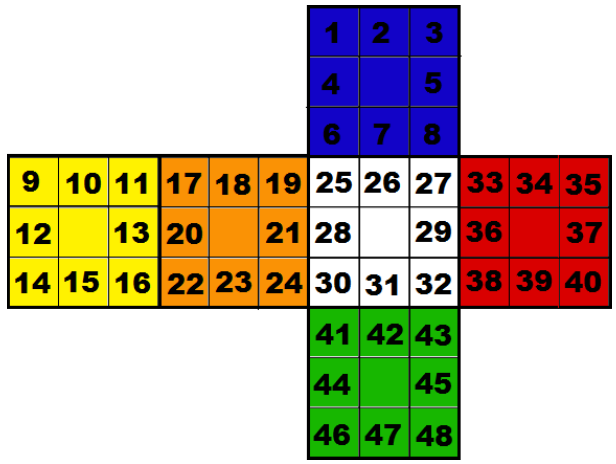
1. $\forall x \in X$-re $ex = x$, ahol e a G neutrális eleme, és
2. $\forall g, h \in G$-re és $\forall x \in X$-re $(gh)x = g(hx)$ teljesül.

Egy csoporthatás mindig megad egy $\rho\colon G \to S_X$ csoporthomomorfizmust a $\rho(g)\colon x \mapsto gx$ képlettel.

Most bevezetjük a Rubik-kocka matematikai leírásában legfontosabb szerepet játszó csoportot. Legyen $\mathcal{R}$ a Rubik-kocka összes olyan állásának halmaza, mely a szabályos kiindulóhelyzetből a lapok elforgatásaival elérhetők.

Számozzuk be az él- és sarokkockák színezett lapjait a kiinduló helyzetben a 2. ábrán látható módon. Ha a Rubik-kocka lapjait úgy tekergetjük, hogy közben a középső lapokat tartó tengelykereszt nem mozdul el, akkor minden összekevert állapothoz tartozik az $\{1, \ldots, 48\}$ számoknak egy permutációja, mely az i számhoz a j számot rendeli, ha az i sorszámú lap az összekeverés után a j sorszámú lap helyére került.

Az $\mathcal{R}$ elemeihez ily módon rendelt permutációk nyilvánvaló módon az S_{48} permutációcsoport egy részcsoportját adják. Mivel $\mathcal{R}$ különböző elemeihez, vagyis a



2. ábra. A lapok számozása

kocka különböző állásaihoz különböző permutációk tartoznak, $\mathcal{R}$ halmazon kapunk egy egyértelmű csoportstruktúrát, melyre nézve az $\mathcal{R} \to S_{48}$ leképezés csoporthomomorfizmus. Nevezzük az így kapott $\mathcal{R}$ csoportot a továbbiakban Rubik-csoportnak.

A Rubik-csoport generálható azzal a 6 permutációval, melyek az oldalak körüli 90°-os elforgatásoknak felelnek meg. Például a fehér lap körüli, az óramutató járása szerinti 90°-os elforgatás a

$$(25, 27, 32, 30)(26, 29, 31, 28)(7, 36, 42, 21)(6, 33, 43, 24)(8, 38, 41, 19)$$

ciklikus felbontású permutációnak felel meg, a másik öt lap körüli forgatásnak megfelelő permutáció hasonlóan adható meg. A hat generátorelem negyedrendű csoportelem.

Több olyan halmazt készíthetünk, melyben a bűvös kocka azonos típusú alkotóelemeit soroljuk fel. Az azonos típusú alkotóelemeket a Rubik csoport elemei permutálják, emiatt az $\mathcal{R}$ Rubik-csoport egy sor különféle halmazon hat. Például az $1, \dots, 48$ számokat két diszjunkt 24 elemű részre oszthatjuk attól függően, hogy az i sorszámú lap él-, vagy sarokkockához tartozik-e. A Rubik csoport nem tudja összekeverni a két rész elemeit, ezért mindkét 24-elemű halmazon külön-külön hat. Ily módon $\mathcal{R}$ az $S_{24} \times S_{24}$ csoport egy részcsoportjával is azonosítható.

Az $\mathcal{R}$ csoport hat az élkockák 12 elemű halmazán, a sarokkockák 8 elemű halmazán, vagy akár e két halmaz 20 elemű unióján is.

A fenti példákban a Rubik-csoport hat a bűvös kocka egyes alkotó elemeinek halmazán. A következő példában leírjuk a kocka szimmetriacsoportjának hatását az $\mathcal{R}$ csoporton.

3.10. Definíció. Tegyük föl, hogy a G csoport hat az X halmazon és legyen $g \in G$. Egy $Y \subseteq X$ halmazt *g-invariánsnak* nevezünk, ha minden $x \in Y$-ra $gx \in Y$. Az Y halmazt *G-invariánsnak* hívjuk, ha minden $g \in G$-re g-invariáns.

Az E euklideszi tér izometriáinak csoportját jelöljük $I(E)$-vel, az irányítástartó izometriák részcsoportját pedig $I^+(E)$-vel.

3.11. Definíció. Legyen $X \subseteq E$ tetszőleges halmaz az E euklideszi térben. Az X halmaz *szimmetriáinak* mondjuk azokat az izometriákat E-ben, amelyekre nézve X invariáns. A szimmetriák által alkotott

$$Sym(X) = \{f \in I(E) : f(X) = X\} \leq I(E)$$

részcsoportot az X halmaz E-beli *szimmetriacsoportjának* nevezzük.

Az X halmaz *mozgáscsoportja* a

$$Sym^+(X) = Sym(X) \cap I^+(E)$$

csoport.

3.12. Állítás. *Egy K kocka $Sym^+(K)$ mozgáscsoportja izomorf az S_4 szimmetrikus csoporttal, a teljes $Sym^+(K)$ szimmetriacsoport pedig az $S_4 \times \mathbb{Z}_2$ csoporttal.*

Bizonyítás. A kocka egy szimmetriáját egyértelműen megadhatjuk azzal, hogy megmondjuk, hova viszi át a kocka egy rögzített csúcsát, a csúcsra illeszkedő egyik élt, és az élre illeszkedő egyik lapot. A képek kiválasztására $8 \cdot 3 \cdot 2 = 48$ lehetőség van, így $Sym(K)$ elemszáma 48. $Sym^+(K) \lhd Sym(K)$ egy 2 indexű részcsoport, tehát $|Sym^+(K)| = 24$.

A kocka szimmetriái permutálják a kocka 4 testátlóját, ami megad egy $Sym^+(K) \to S_4$ homomorfizmust. Nézzük a kocka azon forgatásait, amikor azok körül a tengelyek körül forgatunk, melyek a kocka két szemközti élének felezőpontjain mennek át. Bármely transzpozíció előáll ezen tengelyek körüli félfordulat képeként, ezért a homomorfizmus szürjektív. A két csoport rendje egyenlő, tehát injektív is, így $Sym^+(K)$ izomorf S_4-gyel.

A kocka középpontjára vonatkozó tükrözés egy irányításváltó transzformáció, mely egy kételemű $\mathbb{Z}_2$-vel izomorf csoportot generál és felcserélhető a kocka minden szimmetriájával, ezért $Sym(K) \cong Sym^+(K) \times \mathbb{Z}_2 \cong S_4 \times \mathbb{Z}_2$. □

Tekintsük most a szabályosan kirakott K bűvös kockán a kocka szimmetriacsoportjának a hatását. Ha $\Phi \in Sym(K)$, akkor Φ megadja a lapszínek egy permutációját. Például a piros-fehér-kék sarokkockán átmenő testátló körüli 120°-os forgatás (a színeket a kezdőbetűjükkel jelölve) a $(p, f, k)(n, s, z)$ ciklikus felbontású harmadrendű permutációt adja meg. Ha a Φ szimmetriához a színek σ^Φ permutációja tartozik, akkor definiáljuk a $\pi^\Phi \in S_{\mathcal{R}}$ permutációt a következőképpen. Ha $K \in \mathcal{R}$ a bűvös kocka egy összekevert állapota, akkor $\pi^\phi(K)$ legyen az az állapot, melyet úgy kapunk, hogy a kis kockák lapjait átszínezzük: ha egy kis lap színe c volt, akkor színét $\sigma^\Phi(c)$-re változtatjuk. Ezzel a módszerrel újra egy $\mathcal{R}$-beli álláshoz jutunk, mert ha vesszük azt az eljárást, mellyel a K állást a szabályosan kirakott bűvös kockából a lapok forgatásával elérjük, akkor az egymást követő állások mindegyikét a σ^Φ permutáció segítségével átszínezve egy olyan forgatássorozatot kapunk, mely a szabályosan kirakott kocka egy egybevágó példányából eljut a $\pi^{\phi}(K)$ állásig.

4. Permutációk paritása és előjele

4.1. Definíció. Legyen X halmaz és $x \neq y \in X$. Az x és y *cseréje*, vagy *transzpozíciója* az az (x, y)-nal jelölt permutáció, amely x-et az y-ba, az y-t x-be viszi, X többi elemét pedig fixen hagyja.

4.2. Állítás. *Minden permutáció előáll cserék szorzataként.*

Bizonyítás. Vegyük sorra az elemeket balról jobbra haladva. Ekkor ha az első helyen nem az az elem szerepel, amelyik odavaló, akkor kicseréljük azzal, aminek ott a helye. Ezt leellenőrizve szépen sorban minden helyre, az összes elem előbb-utóbb a helyére fog kerülni. Láthatjuk, hogy n elem permutációja esetén a szükséges cserék száma legfeljebb $n - 1$, még abban az esetben is, ha minden egyes helyen cserélni kellett. □

Egy permutáció cserék szorzataként való felírása nem egyértelmű, például $(1, 3) = (1, 2)(2, 3)(1, 2)$, de az, hogy egy permutáció felírásához páros vagy páratlan sok transzpozíció kell-e, az független a felírás módjától. Célunk ennek a tételnek a bizonyítása lesz.

4.3. Tétel. *Nem fordulhat elő, hogy egy permutáció páratlan sok, és páros sok csere szorzataként is felírható.*

A bizonyításhoz bevezetjük egy permutáció előjelét, és belátjuk annak néhány fontos tulajdonságát.

Tekintsük a

$$P(a_1, a_2, ..., a_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)$$

polinomot.

Tegyük fel, hogy π egy permutáció az $\{1, \ldots, n\}$ halmazon. Helyettesítsük P-be úgy változókat, hogy π-vel permutáljuk azokat. A $P(a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(n)})$ kiszámolásakor ugyanúgy a számok páronkénti különbségeit szorozzuk össze, de ha a megváltoztatott sorrendben a_2 hamarabb szerepel, mint a_1, akkor az $a_1 - a_2$ helyett az $a_2 - a_1$ tag kerül a szorzatba a polinomban. Tehát az előjelek megváltozhatnak egy ilyen permutáció hatására, de az eredmény legfeljebb előjelben térhet el az eredeti értéktől.

4.4. Definíció. Azt a $\mathrm{sgn}(\pi) \in \{\pm 1\}$ előjelet, melyre a

$$P(a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(n)}) = \mathrm{sgn}(\pi) P(a_1, a_2, ..., a_n)$$

azonosság fennáll, a π permutáció *előjelének* hívjuk. Egy permutáció *páros*, ha előjele 1, *páratlan*, ha előjele -1.

4.5. Definíció. Legyen $\pi \in S_n$ egy permutáció. Ha az $1 \leq i < j \leq n$ párra $\pi(i) > \pi(j)$, akkor azt mondjuk, hogy ez a számpár π-ben *inverzióban áll.* Ha $\pi(i) < \pi(j)$, akkor nem állnak inverzióban.

4.6. Példa. Ha $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ akkor az $(1, 4)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$ párok állnak inverzióban. Itt tehát az inverziók száma 5.

A permutáció előjelének definícióját megelőző gondolatmenet közvetlen következménye az alábbi állítás.

4.7. Állítás. *A π permutáció akkor és csak akkor páros, ha benne az inverziók száma páros. Következésképpen π pontosan akkor páratlan, ha inverziónak száma páratlan.*

A paritás meghatározásához fontos segítség az alábbi állítás.

4.8. Állítás. *Ha* $\sigma, \pi \in S_n$, *akkor* $\mathrm{sgn}(\sigma \circ \pi) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\pi)$, *azaz a* $\mathrm{sgn}\colon S_n \to \mathbb{Z}_2$ *leképezés egy csoporthomomorfizmus.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk a definícióban szereplő képletet a $\sigma \circ \pi$ permutációra:

$$P(a_{\sigma\circ\pi(1)}, \dots, a_{\sigma\circ\pi(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma \circ \pi)P(a_1, ..., a_n).$$

A bal oldalt egy másik módon is ki lehet számolni. Legyen $b_i = a_{\sigma(i)}$. Ekkor $a_{\sigma\circ\pi(i)} = a_{\sigma(\pi(i))} = b_{\pi(i)}$. Így

$$P(a_{\sigma\circ\pi(1)}, \dots, a_{\sigma\circ\pi(n)}) = P(b_{\pi(1)}, \dots, b_{\pi(n)}) = \mathrm{sgn}(\pi)P(b_1, ..., b_n).$$

Visszahelyettesítve a b_i-k helyére az $a_{\sigma(i)}$ értékeket

$$P(b_1, \dots, b_n) = P(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)P(a_1, \dots, a_n)$$

adódik, vagyis

$$\mathrm{sgn}(\sigma \circ \pi)P(a_1, \dots, a_n) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\pi)P(a_1, \dots, a_n).$$

Osztva a $P \neq 0$ polinommal megkapjuk a tételben szereplő egyenlőséget. □

4.9. Állítás. *Az identikus permutáció előjele* $+1$.

Bizonyítás. Ez nyilvánvaló, hiszen az identikus transzformációban nincsenek inverziók. □

4.10. Állítás. *Ha* $\sigma, \sigma^{-1} \in S_n$ *egymás inverzei, akkor az előjeleik megegyeznek.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $\sigma \circ \sigma^{-1} = id$. Ekkor a szorzástétel miatt $\mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(id) = 1$. Mivel az előjel csak ± 1 lehet, ebből már következik az állítás. □

4.11. Állítás. *Minden transzpozíció előjele* -1.

Bizonyítás. ELőször is vegyük észre, hogy az $(1,2)$ cserében egyedül csak az $(1,2)$ pár áll inverzióban, így az előjele -1.

Az (i,j) csere előjelének kiszámolásához definiáljunk egy σ permutációt, amire teljesül, hogy $\sigma(1)=i$, illetve $\sigma(2)=j$, a többi elemet pedig tetszőlegesen viheti bárhova. Belátjuk, hogy $(ij)=\sigma\circ(12)\circ\sigma^{-1}$. Ehhez annyit kell megvizsgálni, hogy mind a két függvény az összes helyen ugyanazokat az értékeket vegye fel, ekkor meg fognak egyezni.

Kezdjük a bal oldallal. Ez a permutáció (nevezzük f-nek) az i-t a j-be viszi, a j-t pedig az i-be, tehát $f(i)=j$, $f(j)=i$, $f(k)=k$ bármely olyan k-ra, ami nem egyezik meg i-vel vagy j-vel.

A jobb oldalon egy fokkal bonyolultabb a helyzet. Itt jobbról balra kell haladni a permutációkkal, vagyis először a σ^{-1}-et kell elvégezni. Ekkor a $\sigma^{-1}(i)=1$. A következő transzpozíció az 1-et a 2-be fogja vinni, végül pedig a σ függvény a 2-t a j-be. Ezzel tehát megkaptuk, hogy a jobb oldal is az i elemet a j-be viszi. Hasonlóan végig tudjuk követni j útját is: $\sigma^{-1}(j)=2$, az (12) csere átviszi 1-be, végül a $\sigma(1)=i$. Tehát itt is megkaptuk, hogy a j elem a transzpozíciók kompozíciója által az i-be megy.

Legutoljára nézzük meg azokat a k helyeket, amik eltérnek i-től és j-től is. Bal odalon láttuk, hogy ezek az elemek fixen maradnak. A $\sigma^{-1}(k)$-ról tudjuk, hogy nem lehet sem az 1, sem a 2, mivel ezek a kiválasztott i és j képei. Ezért az $(1,2)$ csere helyben hagyja $\sigma^{-1}(k)$-t. Utána a σ visszaviszi k-t az eredeti helyére.

Alkalmazva az előjelre vonatkozó szorzattételt a bizonyítandó

$$\operatorname{sgn}((ij))=\operatorname{sgn}(\sigma(12)\sigma^{-1})=\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}((12))\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})=\operatorname{sgn}(\sigma)(-1)\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})=-1$$

egyenlőséget kapjuk. $\square$

Az eddigi állítások alapján megkapható a 4.3 Tétel bizonyítása. Mivel egy a transzpozíciók páratlan permutációk, páros sok transzpozíció szorzata csak páros páratlan soké pedig csak páratlan permutációt eredményezhet.

Hasznos lesz még az alábbi állítás.

4.12. Állítás. *Az $a_1, \ldots, a_k$ elemeket ciklikusan körbeforgató $(a_1, \ldots, a_k)$ permutáció előjele $(-1)^{k+1}$.*

Bizonyítás. Az állítás k szerinti indukcióval bizonyítható. A $k = 1$ eset éppen a 4.9. Állítás. Az indukciós lépés az

$$(a_1, \ldots, a_{k+1}) = (a_1, \ldots, a_k) \circ (a_k, a_{k+1})$$

azonosság és a 4.11. Állítás következménye. $\square$

5. Invariánsok

Vannak olyan összerakásai a Rubik-kockának, amelyekből nem lehet kitekerni szabályos lépésekkel az eredeti állást, vagyis azt, amikor minden oldalon egyetlen szín, illetve egyetlen kép darabjai láthatóak. Ha valaki kezünkbe ad egy olyan kockát, melyből a rendezett állás véges sok lapelforgatással kitekerhető, akkor egyszerűen meg tudjuk mutatni, hogy tényleg ilyen kockát kaptunk. Nem kell mást tennünk ehhez, mint megadni azt a forgatássorozatot, mely a kockát rendbe rakja. Node ha egy olyan kockát kapunk, melyből a rendezett állás nem forgatható ki, akkor hogyan tudjuk ezt bebizonyítani? Az nem bizonyít semmit, ha valaki azt mondja, hogy már 10 éve próbálkozik keményen, de sehogy sem sikerült neki, hiszen ennek az is lehet az oka, hogy ügyetlenül próbálkozott.

Van egy általános módszer az ilyen „lehetetlen valamit megcsinálni” típusú állítások bizonyítására, az invariánsok módszere. Az elv egyszerű: ha szeretnénk belátni, hogy bizonyos elemi lépések egymásutánjával nem lehet egy kezdő helyzetből egy véghelyzetbe eljutni, keresni kell olyan mennyiségeket, melyek az elemi lépések során nem változnak, azaz invariánsok. Ha két állapot elemi lépések egymásutánjával egymásba vihető, akkor az invariáns mennyiségnek a két állapoton ugyanazt az értéket kell felvennie. Tehát ha azt tapasztaljuk, hogy két állapotban egy invariáns mennyiség különböző értékeket vesz fel, akkor az bizonyítja, hogy az állapotok semmilyen módon nem vihetők egymásba.

Az alábbiakban ilyen invariánsokat fogunk bemutatni. Először a klasszikus Rubik-kockára, majd a Rubik-kockának arra a változatára, melynél a lapokra fényképek vannak festve.

5.1. A színes élkockalapok permutációjának paritása

Ha megnézzük, hogy egy lap elforgatása hogyan permutálja a 12 élkocka $12 \cdot 2 = 24$ színezett lapját akkor láthatjuk, hogy minden elforgatás két negyedrendű ciklus szorzatára bomlik. Mivel a negyedrendű ciklusok páratlan permutációk, két negyedrendű ciklus szorzata páros.

Ebből azonnal adódik, hogy egy véletlenszerűen összerakott kockából nem rakható ki a rendezett kocka, ha az élkockák lapjait az eredeti helyzetből az összekevert helyzetbe vivő permutáció páratlan. Például, ha a rendezett Rubik-kocka egyik élkockáját kiszedjük a helyéről és elfordítva visszatesszük, akkor egy olyan álláshoz jutunk, melyet nem lehet rendezett állapotba tekerni.

A kapott modulo 2 invariánst más módon is megkaphatjuk.

Tudjuk, hogy egy kockába két olyan szabályos tetraédert lehet beírni, melyek csúcsai a kocka csúcsai közül kerülnek ki, élei pedig a kocka lapátlói. Válasszuk ki a Rubik-kocka egyik beírt szabályos tetraéderét és rögzítsük azt a mozdulatlan tengelykereszthez. A Rubik-kocka rendezett állapotában vegyük fel minden élkockának azt a beírt tetraéderét, mely azonos állású a nagy kocka kiválasztott tetraéderével. Az élkockákba írt tetraédereket rögzítsük az élkockákhoz, azok mozogjanak együtt az élkockákkal. Ha ezek után a Rubik-kockát szétszedjük, majd véletlenszerűen összerakjuk, akkor nevezzünk egy élkockát pozitív állásúnak, ha beírt tetraédere azonos állású a tengelykereszthez rögzített nagy tetraéderrel. Annak, hogy a kapott állásból ki tudjuk rakni a rendezett állást, szükséges feltétele hogy a pozitív állású élkockák száma páros legyen. Valóban, a szabályosan kirakott tetraéderre a pozitív állású éltetraéderek száma 12, tehát páros. Amikor egy oldalt elforgatunk, akkor az oldalhoz tartozó négy élkocka beírt tetraéderének változik az állása, a többi kis tetraéder nem mozdul el, tehát ha az elforduló 4 élkocka között k pozitív állású volt, akkor az elfordítás után a pozitív állású élkockák száma $(4-k)-k=(4-2k)$-val változik tehát a modulo 2 vett értéke invariáns.

5.2. A sarokkockák helyzetéből számolt modulo 3 invariáns

Ennek a résznek a fő célja egy olyan modulo 3 definiált invariánsnak a bevezetése, mely a sarokkockák elrendezésétől függ. A definiáláshoz használt fogalmak egyúttal az előző részben tárgyalt modulo 2 invariáns kiszámolására is adnak egy gyakorlatban jól használható módszert.

Először is rögzítsük a kockát egy helyzetben, például legyen a fehér oldal alul, a kék bal oldalon, a piros pedig velünk szemben.

Vizsgáljunk egy olyan állást, melyet a kocka szétszedésével, majd véletlenszerű összerakásával kapunk a tengelykereszt elmozgatása nélkül. Az adott összerakás mindegyik él- és sarokkockának kijelöli egy jól meghatározott lapját.

5.1. Definíció. Hívjuk egy *építőelem fő oldalának* (az adott összerakásra vonatkozóan) azt az oldalt, mely a teljes kocka tetején vagy alján van, ha van ilyen, más esetben pedig azt, amelyik a kocka jobb, vagy bal oldalán helyezkedik el.

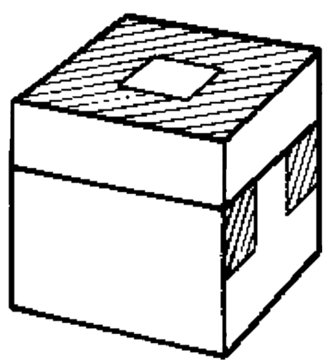
A sarokkockáknak egyértelműen van egy olyan oldala, ami a kocka tetején vagy alján helyezkedik el, így csak az élkockák közül lehet olyan, aminek a főoldala a kocka jobb vagy bal részén van. A tizenkét darab élkocka közül pontosan négy van ilyen helyzetben.

5.2. Definíció. Nevezzük az *építőelemek fő színének* azt a színt, melynek az elem fő oldalára kell kerülnie, ha a helyére rakjuk a Rubik-kockán.

Ez a szín a sarokkockákon mindig a felső (a mi esetünkben sárga), vagy az alsó (fehér) szín. Az élkockákon pedig ugyanígy a felső vagy alsó szín, ha nincs ilyen akkor pedig a jobb vagy baloldali szín (kék vagy zöld). Ezek a színek nem lehetnek rajta egyszerre egy elemen, mivel csak szomszédos oldalúak lehetnek, amik viszont egymással szemben helyezkednek el.

Ha egy elem fő oldalán a fő szín található, akkor azt mondjuk, hogy nincs elfordulva. Ilyenkor rendeljük az elemhez a 0 számot. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy az elem el van fordulva. Az élek csak egyféleképpen fordulhatnak el, 180°-kal, a sarkok viszont 2 irányba is: óramutató járásával megegyező, illetve az óramutató járásával ellentétes irányba. Rendeljünk egy élkockához +1-et, ha egy él el van fordulva, illetve ha egy sarokkockához +1-et ha az elfordulásmentes helyzethez képest az óramutató járásával megegyező irányba fordult, és −1-t, ha a sarok az óramutató járásával ellentétes irányba fordult.

Így bármennyire össze is van keverve a Rubik-kocka, mindig meg tudjuk állapítani, hogy mely elemek vannak elfordulva egy jól meghatározott alapállapotukhoz képest, és mennyivel.



3. ábra. A fő színek elhelyezkedése alaphelyzetben

A 3. ábrán a sarok- és élkockák fő oldalai vannak jelölve a besatírozott résszel. A teljesen kirakott Rubik-kocka esetén minden kis kocka fő színe a fő oldalra esik. Ilyenek azok a helyzetek is, amikor a felső és/vagy az alsó oldalon forgatunk bármennyit, mivel ilyenkor a fehér és sárga fő színek ugyanúgy a kocka felső, illetve alsó oldalán maradnak, a jobb és bal oldalon pedig nem változtatunk a fő színek helyzetén.

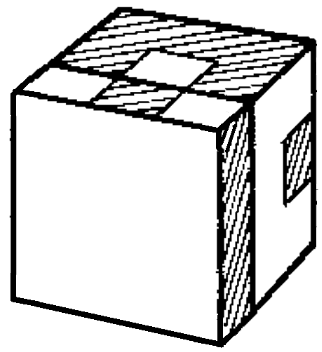
A következő két ábrán azt látjuk, mi történik akkor, amikor elfordítunk egy-egy oldalt a kockán. Ezeken a képeken az szerepel, amikor a Rubik-kocka szemben lévő (F) vagy jobb oldalán (R^{-1}) forgatunk. Az előbbi ekvivalens azzal, ha a kocka hátulján (B), az utóbbi pedig azzal, hogy ha a bal oldalon (L^{-1}) forgatunk a fő szín szimmetriája miatt.

A 4. ábrán már látszik, hogy vannak olyan kockák amik el vannak fordulva. Amiken nem mozdítottunk, nyilván nem fordulhattak el, ezekhez mind 0-t rendelünk akár sarokelem, akár élkocka. Viszont a forgó oldalon lévő mind a négy sarokelem elfordult. ULF helyen lévő elem az óramutató járásával ellentétesen, vagyis a -1 számot rendeljük hozzá, az URF helyen lévő elem pedig az óramutató járásával megegyező irányba fordult, vagyis a $+1$ számot rendelhetjük hozzá. Ugyanígy az alsó sorban lévő DRF-hez a -1-et, a DLF-hez pedig a $+1$-et rendelhetjük.

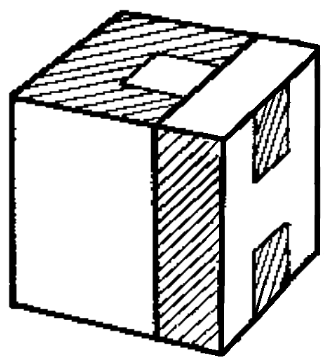
Az élkockák közül viszont egyik sem fordult el, mivel a fő szín a főoldalon maradt mindenhol, vagyis ezekhez mind 0-t rendelhetünk hozzá.

Az 5. ábrán viszont már vannak elfordulva sarok- és élkockák is egyaránt. A helyben hagyott elemek szintén nincsenek elfordulva, viszont az elforgatott oldalon lévők közül mindegyik el van.

A sarokkockák közül az URF helyen lévő óramutató járásával ellenkező irányba fordult, a DRB helyen lévő elem pedig szintén, vagyis ezekhez a -1-et rendeljük. Az URB helyen található sarokkocka viszont az óramutató járásával megegyezően fordult, ahogy a DRF is, ezekhez az 1-et rendeljük hozzá.



4. ábra. A fő színek elhelyezkedése a szemben lévő oldal forgatása után



5. ábra. A fő színek elhelyezkedése a jobb oldal elforgatása után

Az élkockák is kivétel nélkül meg vannak fordulva a kocka jobb oldalán, mivel a rajtuk lévő fő szín nem a főoldalon helyezkedik el, vagyis mindhez 1-et rendelünk.

Ahhoz, hogy ki tudjuk rakni a kockát, három feltételnek kell teljesülnie:

5.3. Állítás. *Az összes sarokkocka elfordulásának összege* 0 *modulo* 3.

Bizonyítás. Modulo 3 maradékosztályból minden sarokkockához hozzá van rendelve egy szám: -1, 0, $+1$. Ez a kezdeti állapotban (a kirakott kockánál) mindegyiknél 0, mivel minden a helyén van, vagyis az összegük is 0. Ekkor, ha a kocka fő színén, vagyis a tetején (U), vagy alján (D) fordítunk 90°-ot bármerre, akkor a maradékosztályból hozzárendelt számon nem változtatunk, ugyanolyan állásúak maradnak.

Ha a kocka szemben lévő oldalán fordítunk az óramutató járásával megegyező irányba (F), akkor a jobb felső sarokból attól függően, hogy -1, 0 vagy 1 volt a hozzárendelt szám, 1, -1, illetve 0 lesz belőle, vagyis a maradékosztály szerint kivontunk mindből egyet. A jobb alsó sarokhoz rendelt $(-1, 0, 1)$ számokból a $(0, 1, -1)$ számok lesznek, vagyis a maradékosztály szerint hozzáadtunk mindegyikhez 1-et. A bal alsó sarokkocka hasonló a jobb felsőhöz, itt is mindből ki kell vonni egyet, a bal felső pedig a jobb alsóval hasonló, mindhez hozzáadunk egyet. Ekkor az elfordulások összege: $0 - 1 + 1 - 1 + 1 = 0$ lesz, vagyis modulo 3 nem változik az összeg. A hátsó oldal fordítása ezzel megegyező irányba (B) ugyanezt adja. Hasonlóan működik akkor is, ha az óramutató járásával ellentétesen fordítunk a szemben lévő oldalon (F'). Ekkor minden visszafele lesz, ahol egyet hozzáadtunk, ott most egyet le kell vonni, és ahol levontuk, ott hozzáadjuk. Viszont az összeg így sem változik, ugyanúgy 0 marad. A hátsó oldal fordítása ezzel megegyező irányba (B') ugyanezt adja.

Utoljára nézzük azt, mi történik akkor, ha a jobb vagy bal oldalán fordítunk a kockának. Ha óramutató járásával megegyezően (R vagy L), akkor teljesen hasonlóan a szemben lévő oldal fordításához (F) a felső, hátsó kis kockától indulva negatív körüljárási iránnyal, először egyet levonunk, egyet hozzáadunk, majd még egyszer levonunk és hozzáadunk a hozzárendelt számokhoz, így ezen az oldalon lévő forgatás sem változtat semmit az összegen. Az R' és L' fordítással pont ellentétesen, először hozzáadunk, levonunk, majd megint hozzáadunk és levonunk egyet, tehát az összeg ugyanígy 0 marad, mint az összes többi esetben. $\square$

5.4. Állítás. *Az összes élkocka elfordulásának összege* 0 *modulo* 2.

Bizonyítás. Hasonlóan be lehet bizonyítani, mint az előző állítást. Itt a modulo 2 maradékosztálybeli elemek vannak hozzárendelve az élkockákhoz: 0, ha nincs elfordulva vagy 1, ha igen.

Ha a felső (U), vagy alsó (D) oldalon tekerünk bármilyen irányba, akkor ez az élkockák állásán semmit sem fog változtatni, ugyanúgy maradnak a hozzárendelt számok. Ugyanez történik akkor is, ha a szemben lévő (F), vagy a hátsó (B) oldalakon fordítunk bármilyen irányba bármennyit. Változás akkor lesz, ha a jobb (R) vagy bal (L) oldalon fordítunk. Minden negyed fordításnál, felcserélődnek az elemekhez rendelt maradékosztályok, 0-ból 1 lesz, és 1-ből pedig 0. Vagyis minden hozzárendelt számhoz hozzáadunk egyet modulo 2 szerint. Így egy forgatásnál mindig páros sokkal változik az összeg, vagyis modulo 2 szerint mindig 0 marad. □

Megjegyezzük, hogy az 5.4. Állításban kapott modulo 2 invariáns megegyezik az 5.1. részben bevezetett invariánssal.

5.3. Az él- és sarokkockák együttes permutációjának paritása

Az $\mathcal{R}$ Rubik-csoport hat az él- és lapkockák $12 + 8 = 20$ elemű halmazán is.

5.5. Állítás. *Az összes kis kocka permutációja páros.*

Bizonyítás. A Rubik-csoportot generálják a lapok körüli forgatások, így elég azt meggondolni, hogy egy lap elforgatása a 20 kis kockát páros permutációval rendezi át. Ez viszont nyilvánvaló, hiszen egy elforgatás hatására a lapon lévő négy élkocka, illetve a lap négy sarokkockája ciklikusan forog körbe. A negyedrendű ciklikus forgatások előjele -1, ezért két negyedrendű ciklikus prmutáció kompozíciója páros. □

5.6. Tétel. *A* $3 \times 3 \times 3$*-as hagyományos Rubik-kockát összesen* $\frac{3^8 \cdot 8! \cdot 2^{12} \cdot 12!}{2 \cdot 2 \cdot 3}$*-féleképpen lehet úgy összerakni, hogy kitekerhető legyen belőle az eredeti helyzet.*

Bizonyítás. A tört számlálója az összes összerakás száma, amit már bizonyítottunk ezelőtt. Ha figyelembe vesszük azokat a kritériumokat, amik fentebb szerepelnek, akkor láthatjuk, hogy nem minden esetből kaphatjuk meg az eredeti kockát. A sarokkockák állásának pont a harmada az, ami megfelelő, a modulo 3-as maradékosztály miatt, a sarokkockáknak pedig a fele a modulo 2-es maradékosztály miatt, illetve a permutációk paritása miatt is tovább csökken a felére a lehetőségek száma. Innen kapjuk meg a nevezőben lévő értékeket. Vagyis az összes lehetséges kirakásnak pont az $\frac{1}{12}$ része az, amiből a helyére tudjuk állítani szabályos lépésekkel a Rubik-kockát. □

5.4. A képekkel színezett bűvös kocka kirakása

Amikor képekkel helyettesítjük a színeket, már bonyolultabb lesz a helyzet, mivel már a közepekre is figyelni kell. Ezek az elemek elfordulhatnak $-90°$-kal, $90°$-kal és $180°$-kal is. Természetesen az előző három feltétel is szükséges a kirakáshoz, de lesz még egy további is a középső elemekre vonatkozóan. Ezeket nem tudjuk előre meghatározni, hogy mennyire vannak kezdetben elfordulva, így miután kiraktuk a Rubik-kockát annyira, hogy már csak a közepek rendbe rakása hiányzik, akkor tudjuk megnézni, melyik közép merre fordult és hány fokkal. Utána helyre tudjuk őket tenni, ha a következő feltétel teljesül rá:

5.7. Állítás. *A közepek elfordulásainak összege* 0 *modulo* $180°$

Van kétféle módszer arra, hogy csak a közepeket forgassuk, minden más elemet pedig a helyén hagyjunk. Az egyik, amikor két szomszédos oldalon lévő közepen forgatunk 90°-ot, az egyiket óramutató járásával egy irányba, a másikat óramutató járásával ellentétes irányba. A másik, amikor egyetlen közepen fordítunk 180°-ot.

1. 180°-os forgatás:

Az első és egyben legegyszerűbb eset, amikor csak egy közepen akarunk forgatni 180°-ot. Keressük meg a közepet, és helyezzük úgy a kockát, hogy az a felső oldalon legyen. Ekkor hajtsuk végre a következő forgatásokat:

$$URLU^2R^{-1}L^{-1}URLU^2R^{-1}L^{-1}.$$

Ezzel a helyére forgathatjuk azt az egy közepet, ami éppen 180°-kal van elfordulva úgy, hogy semelyik másik elem helyzete ne változzon.

2. 90°-os forgatás

2.1. Nézzük meg, hogy van-e két szomszédos oldalon lévő közép elfordulva 90°-kal valamelyik irányba. Ha igen, vizsgáljuk meg, hogy melyik irányba fordultak el. Ha ellentétesen, akkor egy algoritmussal meg lehet oldani, hogy a helyükre forogjanak. Válasszuk ki azt, amelyik −90°-ot fordult el és vegyük kézbe a kockát úgy, hogy ez a közép a felső oldalon legyen, és a másik elfordult elem pedig a bal oldalon. Végrehajtva az

$$ME^{-1}M^{-1}UMEM^{-1}U^{-1}$$

lépéssorozatot a helyére tudjuk tenni ezt a két közepet, vagyis a felső elemen +90°-ot, a bal oldalin pedig −90°-ot fordítunk.

Ha ennek az inverzét csináljuk meg, akkor a felső oldalon lévő kis kocka fog −90°-kal elfordulni, a bal oldalon lévő pedig +90°-kal. Ez a forgatás:

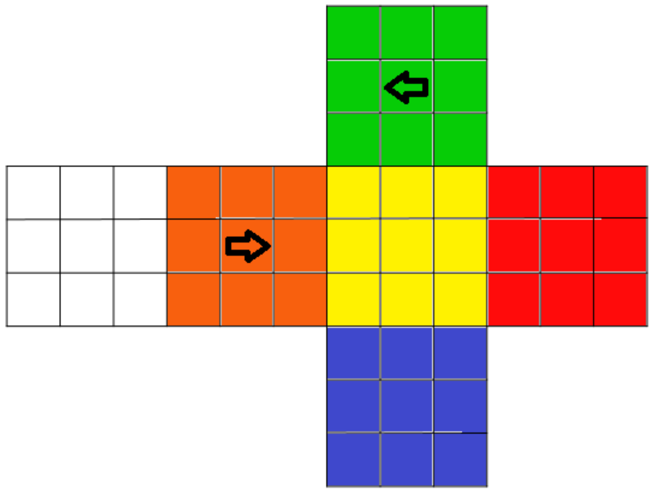
$$UME^{-1}M^{-1}U^{-1}MEM^{-1}.$$

2.2. Abban az esetben, ha nem különböző irányba fordultak a szomszédos középek, használható ugyanez az algoritmus, viszont ekkor csak az egyik közép kerül a helyére, a másik még fordul 90°-ot ugyanabba az irányba, amerre eddig is el volt fordulva, így összesen már 180°-kal lesz elmozdulva az alap helyzetétől. Ekkor ezen a középen végzünk még egy 180°-os forgatást a fentebb ismertetett módon, így a helyére tekertük mindkét középső elemet, anélkül, hogy a többin változtattunk volna.

2.3 A harmadik eset, amikor nincs két szomszédos oldalon lévő közép elfordulva, csak szemben lévő oldalakon van. Ugyanezt az algoritmust használva, elérhetjük, hogy a szomszédos oldalon legyenek. Egyszerűen csak annyit kell tennünk, hogy kiválasztjuk az egyik elfordult közepet, és véletlenszerűen kiválasztjuk az egyik mellette fekvő oldalt, ami a kocka bal oldalán lesz. Ezzel a felső közép elfordítható a megfelelő irányba (vagy az eredeti, vagy az inverz forgatást használva, amelyik szükséges), illetve a bal oldalon lévő elfordul 90°-kal a másik irányba. Ez az utóbbi oldal viszont már szomszédos lesz a másik oldalon lévővel, így ezt a problémát visszavezettük az előző két eset egyikére.

Vagyis pontosan akkor tudjuk a helyére forgatni a középső elemeket, hogyha a 90°-os elfordulásokból páros sok van.

A következő ábrán lévő nyilakat szeretnénk úgy forgatni, hogy mind a kettő lefele mutasson. Ehhez úgy kell őket helyezni, hogy a zöld oldal legyen felül, a narancssárga pedig tőle jobbra. Ekkor a 2.1-ben leírt mozgatássorozatot kell végrehajtani, amivel a felső nyíl $+90°$-ot, a bal oldal pedig $-90°$-ot fordul el, így mindkettő lefele fog nézni.



6. ábra. A 90°-os forgatás

5.8. Tétel. *A 3×3×3-as Rubik-kockát, ahol a színek képekre vannak cserélve, összesen* $\dfrac{3^8 \cdot 8! \cdot 2^{12} \cdot 12! \cdot 4^6}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}$*-féleképpen lehet úgy összerakni, hogy abból kitekerhető legyen az eredeti kép minden oldalon.*

Bizonyítás. Ha nem foglalkozunk a középső lapok állásával, akkor az 5.6. Tétel szerint a sarok- és élkockákat $\frac{3^8 \cdot 8! \cdot 2^{12} \cdot 12!}{2 \cdot 2 \cdot 3}$-féleképpen lehet úgy összerakni, hogy kitekerhető legyen belőlük az eredeti helyzet. Minden ilyen helyzethez a középső lapokat 4^6 különböző állásba tudjuk forgatni. Ám a lapközepek 4^6 állásának pontosan a fele fog eleget tenni az 5.7. Állítás paritási feltételének. $\square$

6. „Isten száma”

Az „Isten száma” (God's number) elnevezés a kutatóktól ered, mivel úgy gondolták, hogy ha Isten a kezébe venné a Rubik-kockát és megoldaná, akkor azt a lehető legkevesebb lépésszámmal tenné. Sok éven keresztül kutatták, hogy mi lehet az a legkisebb szám, ahány lépéssel bármelyik keverésből ki lehet rakni a kockát. Egy lépésnek számít egy oldal elforgatása, bármelyik irányban, akkor is, ha kettőt tekerünk rajta. Több alsó és felső becslés is született a minimális számra, de pontos értékét csak 2010-ben tudták meghatározni. Ez a szám pedig a 20.

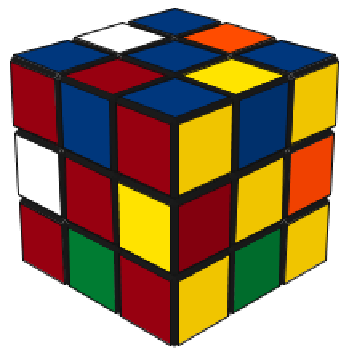
A versenyzők sok algoritmust használnak a játék megoldásához, amivel ki tudják rakni az egyik oldalt, majd a középső sort és így tovább. Ezek mind különbözőek komplexitásban, illetve lépésszámban, de egyik sem az optimális megoldást használja.

Az 1980-as évek elején az alsó becslés Isten számára 18 volt. Már találtak olyan keverést, amihez mindenképp szükséges 18 lépés, viszont a felső határ 52 volt. Felülről gyorsan csökkent ez a szám, de alulról nem tudtak közeledni egészen 1995-ig. Ekkor a felső határ már csak 29 volt, és találtak egy olyan keverést, melyhez minimum 20 lépésre volt szükség. Ez az állás pedig nem más, mint amikor az összes élkocka meg van fordulva, minden más elem pedig a helyén van elfordulás nélkül. Ezt a kirakott kockából a következő lépésekkel lehet elérni:

$$RLU^2FU^{-1}DF^2R^2B^2LU^2F^{-1}B^{-1}UR^2DF^2UR^2U.$$

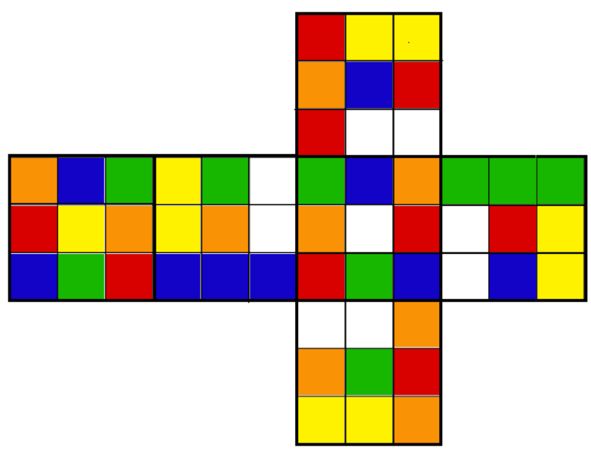
A megengedett lépések az algoritmus (half turn metric) során az oldalak egyedüli forgatásai: R, L, F, B, U, D, illetve a középső sorok forgatása: M, E, S és ezeknek a hatványai. Ezek mind egy lépésnek számítanak, akkor is, ha valamelyiken 180°-ot fordítunk.

Végül pár éve bizonyították, hogy a 20 nem csak az alsó határ, hanem a pontos



7. ábra. Az elsőként megtalált állás, amihez 20 lépés szükséges

lépésszám is, amivel ki lehet rakni a Rubik-kockát bárhogyan is van összekeverve.



8. ábra. A gép szerint az egyik legnehezebb állás

A 8. ábrán lerajzolt legnehezebb állás ezzel a 20 forgatással tekerhető ki a már kirakott kockából:

$$FU^{-1}F^2D^{-1}BUR^{-1}F^{-1}LD^{-1}R^{-1}U^{-1}LUB^{-1}D^2R^{-1}FU^2D^2.$$

6.1. A bizonyítás vázlata

A bizonyításhoz a *Cayley-gráfokat* és a *Schreier-gráfokat* használták.

6.1. Definíció. Legyen G egy csoport, X pedig egy részhalmaza. Ekkor a (G, X) pár Cayley-gráfja egy olyan (irányított, vagy irányítatlan) gráf, ahol a csúcsok G elemei, és a g_1, $g_2 \in G$ csúcsok között pontosan akkor vezet (irányított, vagy irányítatlan) él, ha létezik olyan $x \in X$, amire $g_1x = g_2$.

A Schreier-gráf a Cayley-gráf általánosítása.

6.2. Definíció. Legyen $H \leq G$ a G egy részcsoportja, $X \subset G$ egy részhalmaz. A (G, H, X) hármas *Schreier-gráf* az a gráf, melynek csúcsai a H jobb oldali mellékosztályai G-ben, és a Hg_1 Hg_2 mellékosztályok közt akkor megy él, ha van olyan $x \in X$ elem, melyre $Hg_1x = Hg_2$.

Ha $X \subseteq \mathcal{R}$ jelöli a Rubik-csoport azon elemeinek halmazát, melyek a lapok körüli fogatásoknak felelnek meg, akkor Isten számának meghatározása egyenértékű az $(\mathcal{R}, X)$ pár Cayley-gráfja átmérőjének meghatározásával. Egy gráf átmérőjének meghatározása egy bizonyos gráfméretig számítógéppel megoldható probléma, de a Rubik-csoport hatalmas mérete miatt a mai számítógépek nem képesek az $(\mathcal{R}, X)$ pár Cayley-gráfjának átmérőjét belátható időn belül kiszámolni.

A Cayley-gráf átmérőjénél részletesebb információ lenne, ha minden k-ra meg tudnánk mondani, hogy pontosan hány olyan állása van a Rubik-kockának, melyből a rendezett alaphelyzet k lépésben elérhető, de kevesebb lépésben nem. A 9. ábra táblázata mutatja, hogy milyen $k \leq 20$ értékekre tudják a mai számítógépek kiszámolni

távolság	állások száma
0	1
1	18
2	243
3	3,240
4	43,239
5	574,908
6	7,618,438
7	100,803,036
8	1,332,343,288
9	17,596,479,795
10	232,248,063,316
11	3,063,288,809,012
12	40,374,425,656,248
13	531,653,418,284,628
14	6,989,320,578,825,358
15	91,365,146,187,124,313
16	about 1,100,000,000,000,000,000
17	about 12,000,000,000,000,000,000
18	about 29,000,000,000,000,000,000
19	about 1,500,000,000,000,000,000
20	about 490,000,000

9. ábra. A kirakott kockából adott számú lépésben elérhető állások száma

a k lépésben elérhető állások számát. A táblázat érzékelteti, hogy két konkrét elrendezésről számítógéppel effektíven el tudjuk dönteni, hogy $k \leq 20$ lépésben egymásba tekerhetők-e vagy sem. Ehhez csak azt kell megnézni, hogy az egyik elrendezésből

$\lfloor k/2 \rfloor$ lépésben elérhető állások közt van-e olyan, amelyik a másik állásból $\lceil k/2 \rceil$ lépésben elérhető.

(1) Ahhoz, hogy a Cayley-gráf átmérőjének kiszámolását számítógéppel kezelhető részfeladatokra vágják, vették az $Y = \{U, F^2, R^2, D, B^2, L^2\}$ halmaz által generált $H \leq \mathcal{R}$ részcsoportot, majd particionálták az $\mathcal{R}$ halmazt a H jobboldali mellékosztályaira. Így minden partícióban $|H| = 19.508.428.800$ állás van, és a partíciók száma $|\mathcal{R} : H| = 2.217.093.120$.

(2) A 3 fejezet végén leírtuk a kocka szimmetriacsoportjának hatását a Rubik-csoporton. Ha a Rubik-csoport két eleme átszínezhető egymásba a színek egy olyan permutációjával, mely a kocka egy szimmetriájából származtatható, akkor a két elem ugyanolyan messze van az egységelemtől a Cayley-gráfban. Ez az észrevétel lehetővé tette, hogy a vizsgálandó mellékosztályok számát 55.882.296-ra redukálják.

(3) A (H, Y) Cayley-gráfjának és a $(\mathcal{R}, H, X)$ Schreier-gráfjának az átmérőjét már ki lehet számíttatni számítógéppel. Bár egy közönséges asztali számítógépen az erre a célra írt programok becsült futási ideje 35 év, szuperszámítógépeken futtatva pár hét alatt megkapták az eredményeket.

(4) A Schreier-gráf átmérője megmondja, hogy egy tetszőleges állásból kiindulva legfeljebb hány tekerésre van szükség ahhoz, hogy a H csoport egy eleméhez jussunk, A (H, Y) pár Cayley-gráfjának átmérője pedig arra ad felső becslést, hogy a H-beli helyzetből hány forgatással lehet eljutni a rendezett állapotig, így a két átmérő összege felső becslés Isten számára.

Hivatkozások

[1] http://www.india.com/buzz/google-commemorates-rubiks-cubes-40th-birthday-with-an-interactive-doodle-simple-strategies-to-solve-a-rubiks-cube-59995/ (2017.05.28.)

[2] http://www.rubikkocka.hu/kirakasok/szotar/ (2017.05.28.)

[3] http://etananyag.ttk.elte.hu/FiLeS/downloads/_19_Moussong_Geometria.pdf (177.o.-190.o) (2017.05.28.)

[4] Kiss Emil: *Bevezetés az algebrába*

[5] Ágoston István előadása alapján

[6] http://math.unideb.hu/media/horvath-gabor/publications/Algebra.pdf (70.o-71.o.) (2017.05.28.)

[7] https://hu.wikipedia.org/wiki/Rubik-kocka (2017.05.28.)

[8] Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, Richard K. Guy: *Winning ways for your mathematical plays* (868.o.-871.o.)

[9] http://www.alchemistmatt.com/cube/rubikcenter.html (2017.05.28.)

[10] http://www.cube20.org/ (2017.05.28.)

[11] https://hu.wikipedia.org/wiki/Cayley-gráf (2017.05.28.)

Nyilatkozat

Név:

ELTE Természettudományi Kar, szak:

Neptun azonosító:

Szakdolgozat cím:

A szakdolgozat szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest,

a hallgató aláírása